THOMAS CALCULUS

ONBİRİNCİ BASKI

George B. Thomas, Jr.
Massachusetts Institute of Technology

Maurice D. Weir
Naval Postgraduate School

Joel Hass
University of California, Davis

Frank R. Giordano
Naval Postgraduate School

Çeviren: Recep Korkmaz

Beta

Yayın No : 2150
Teknik Dizisi : 134

11. Baskıdan çeviri 1. Baskı - Ağustos 2009 - İSTANBUL

ISBN 978 - 605 - 377 - 068 - 8

Authorized translation from the English language edition, entitled THOMAS' CALCULUS, 11th Edition by THOMAS, GEORGE B.; WEIR, MAURICE D.; HASS, JOEL; GIORDANO, FRANK R., published by Pearson Education, Inc, publishing as Addison-Wesley, Copyright © 2005

Dizgi : Beta Basım A.Ş.
Sayfa Düzenleme : Gülgonca Çarpık
Baskı - Cilt : Kahraman Neşriyat Ofset San. Tic. Ltd. Şti. (Sertifika No: 12084)
Yüzyıl Mah. Matbaacılar Cad. Atahan No: 34 K: 4
Bağcılar/İstanbul (0-212) 629 00 01

Beta BASIM YAYIM DAĞITIM A.Ş.
Himaye-i Etfal Sokak Talas Han No. 13-15
Cağaloğlu - İSTANBUL
Tel : (0-212) 511 54 32 - 519 01 77
Fax: (0-212) 511 36 50
www.betayayincilik.com

İÇİNDEKİLER

7 Transandant Fonksiyonlar 466

8 İntegrasyon Teknikleri 553

9 Integrasyonun Diğer Uygulamaları 642

10 Konik Kesitler ve Kutupsal Koordinatler 685

11 Konik Kesitler ve Kutupsal Koordinatlar 746

12 Vectörler ve Uzayda Geometri 848

13 Vektör-Değerli Fonksiyonlar ve Uzayda Hareket 906

14 Kısmi Türevler 965

15 Katlı İntegraller 1067

16 Vektör Alanlarında İntegrasyon 1143

Ekler EK-1

Cevaplar C-1

İndeks İ-1

Kısa Bir İntegral Tablosu T-1

Krediler K-1

Önsöz

GİRİŞ *Thomas Calculus*'un 11.basımının hazırlanmasında önceki basımların tarzını ve gücünü yakalamaya çalıştık. Amacımız, birçok kullanıcımızı ve eleştirmenimizi dikkatlice dinleyerek *Thomas Calculus*'un klasik basımlarının en iyi özelliklerini tekrar ziyeret etmek oldu. Aklımızdaki bu yüksek standartlarla, alıştırmaları yeniden kurduk ve bazı zor konuları aydınlattık. George Thomas'ın sözleri ile "Kitabı, olabileceği kadar açık ve kesin olarak yazmaya çalıştık". Ek olarak, daha mantıklı ve standart müfredat programı ile aynı hizada olması için içeriği yeniden yapılandırdık. Geriye bakmakla, mühendisler ve bilim adamları için kullanışlı ve çekici bir calculus metni hazırlamakta bize yardımcı olacak çok şey öğrendik.

On birinci basımda metin, öğrenciye sadece calculus'un yöntemlerini ve uygulamalarını değil ayrıca bir matematiksel düşünme yolu da tanıtır. Alıştırmalardan örneklere kavramları geliştiren ve teoriyi okunabilir bir lisanla açığa çıkaran anlatıma, bu kitap matematiksel fikirleri düşünme ve iletme hakkındadır. Calculus, matematiğin anahtar örneklerinden bir çoğunu içerir ve fiziksel ve matematiksel konular hakkında doğru ve mantıklı bir yolla nasıl düşünüleceğinin gerçek başlangıçlarını işaret eder

Materyale hakim olmaları ve gücünü kullanmak için gerekli matematiksel olgunluğa ulaşmaları için öğrencilere yardım etmeyi deniyoruz. Derin bir bilgiden gelen kavrayışlar gayrete değerdir. Bu kitabı tamamlayan öğrencilerin , bilimde ve mühendislikte bir çok uygulamaya calculus kavramlarını uygulamak için ihtiyaç duyulan, matematiksel lisan konusunda oldukça bilgi edinmiş olmaları gerekir. Ayrıca, diferansiyel denklemler, lineer cebir ve ileri analiz derslerine iyi bir şekilde hazırlanmış olmaları gerekir.

Onbirinci Basımdaki Değişiklikler

ALIŞTIRMALAR Alıştırmalar ve örnekler calculus öğrenmede çok önemli bir rol oynarlar. *Thomas Calculus*'un önceki basımlarında yer alan ve o basımların muazzam gücünü oluştan alıştırmalardan bir çoğunu bu yeni basıma dahil ettik. Her bölümde, hesaplamalı problemlerden uygulamalı ve teorik problemlere ilerleyen alıştırmaları konulara göre düzenledik ve grupladık. Bu düzenleme öğrencilere, calculus yöntemlerini kullanma becerilerini geliştirme ve değerlendirmelerini derinleştirmenin yanında calculus uygulamalarını ve mantıklı matematiksel yapılarını anlamaları fırsatını verir.

ÖZEN Özen seviyesi, önceki basımlarla karşılaştırıldığında baştan sona daha tutarlıdır. İkisi arasındaki farkı ortaya koymak için hem biçimsel ve hem de biçimsel olmayan tartışmaları verdik. Ayrıca, kesin tanımları ve öğrencilerin anlayabileceği ispatları dahil ettik. Metin, materiyalin gayri resmi olarak anlaşılabileceği şekilde düzenlenmiştir. Bu, öğret-

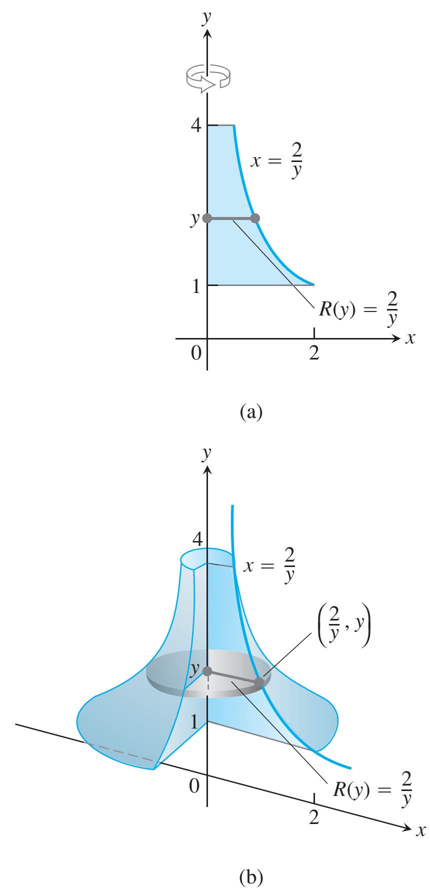
mene önemli derecede bir esneklik sağlar. Örneğin, kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli olan bir fonksiyonun bu aralıkta bir maksimumunun bulunduğunu ispat etmediğimiz halde bu teoremi çok dikkatli bir şekilde ifade ettik ve takip eden çeşitli sonuçları ispat etmek için bunu kullandık. Bundan başka, limitlerle ilgili bölüm, açıklığa ve kesinliğe karşı büyük bir dikkatle önemli ölçüde yeniden düzenlenmiştir. Önceki basımlarda olduğu gibi limit kavramı yine bir eğriye üzerindeki bir noktada teğet olan doğrunun eğimini elde etme fikri ile motive edilmektedir.

İÇERİK Bu basımın hazırlığı sırasında, *Thomas Calculus*'un önceki basımlarının kullanıcıları ve eleştirmenlerimizin önerilerine ve yorumlarına önemli ölçüde dikkat sarf ettik. Bu, bazı bölümlerde büyük revizyonlara ve değişikliklere yol açtı.

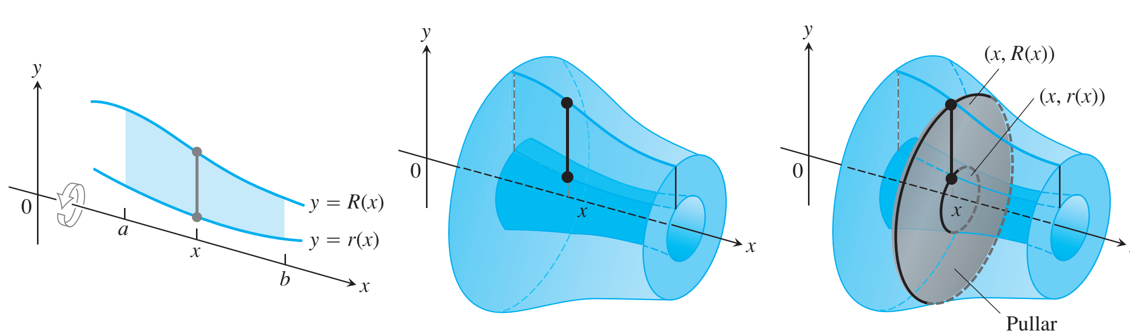
- **Önbilgiler** Bölüm 1'i, temel fonksiyonların kısa bir incelemesi olarak tekrar yazdık. Bir çok eğitimcinin bu bölümü atlamayı seçebilecek olmasına rağmen, bölüm öğrenciye kolay bir referans ve inceleme olanağı sunar, notasyonu standart hale getirir ve altyapı materyali olarak nelerin kabul edildiğine işaret eder. Ayrıca birçok öğrencinin, bir hesap makinesine veya bilgisayara bir fonksiyonun grafiğini vermesi konusunda tam olarak güvenmedeki tuzaklar gibi, görmemiş olabileceği bazı yardımcı materyal içerir.
- **Limitler** Bölüm 2'de içerilenler, limitlerin epsilon-delta tanımları, birçok teoremin ispatı, sonsuzda limitler ve sonsuz limitlerdir (ve bunların bir grafiğin asimptotları ile ilişkileri).
- **Ters türevler** Türev ve önemli uygulamalarını, bütünlüğü sağlayan ters türev kavramı ile sonuçlanan Bölüm3 ve Bölüm 4'te verdik.
- **İntegrasyon** Çeşitli sonlu toplam örneklerini tartıştıktan sonra Bölüm 5'te, eğrinin altındaki alan, geleneksel çerçevesi içinde belirli integrali tanıttık. Türevleri ve ters türevleri birbirine bağlayan Analizin Temel Teoremini işledikten sonra, integrasyon için Değişken Dönüşümü'nün yanında belirsiz integrali tanıttık. Bunları, belirli integralin uygulamaları hakkındaki alışılmış bölüm takip eder.
- **İntegrasyon Teknikleri** İntegrasyonun, sayısal integrasyonu da içeren temel teknikleri Bölüm 8'de verilmektedir. Bunlar, bir integral olarak doğal logaitmayı ve onun tersi olarak üstel fonksiyonu tanımladığımız transandant fonksiyonların tanıtımını takip etmektedirler.
- **Diferansiyel denklemler** Temel diferansiyel denklemlerin çözümleri hakkındaki materiyalin önemli kısmı, şimdi tek bir bölümde, Bölüm 9'da düzenlenmiştir. Bu düzenleme, bu konuların kavranması açısından eğitimcilere önemli ölçüde esneklik sağlar.
- **Konikler** Birçok kullanıcının isteği üzerine, konik kesitler hakkındaki Bölüm 10 tamamen yenilendi. Bu bölüm ayrıca, parabollerin, hiperbollerin ve sicloidlerin parametrizasyonlarını vererek parametrik denklemler hakkındaki materyali tamamlar.
- **Seriler** Bölüm 11'de, dokuzuncu basımda gözüken, serilerin yakınsaklık testlerinin daha bütün bir gelişimini yeniden düzenledik. Ayrıca, bölümün sonuna (atlanabilecek olan) Fourier serilerini tanıtan kısa bir bölüm ekledik.
- **Vektörler** Temel cebirsel ve geometrik fikirlerin tekrarından kaçınmak için, iki ve üç boyutlu vektörlerin işlenmesini tek bir bölümde Bölüm 12'de birleştirdik. Bu tanıtımı, düzlemde ve uzayda vektör-değerli fonksiyonlar hakkındaki bir bölüm takip etti.
- **Reel sayılar** *Calculus*'a uyglanmasından dolayı Reel sayılar teorisi hakkında kısa ve yeni bir ek yazdık

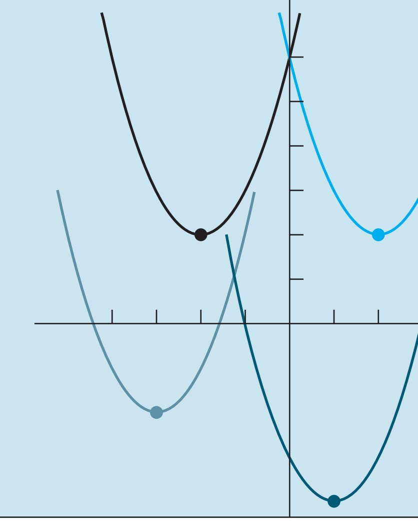
SANAT Şekillerin ve resimlerin calculus öğrenmede kritik bileşenler olduklarını fark ettik. Bu nedenle kitaptaki bütün şekillere yeni bir bakışı ele aldık. Var olan şekilleri düzenlerken ve yenilerini oluştururken, şekillerin resmettiği, ilişkilendirildikleri kavramların berraklığını geliştirmeye çalıştık. Bu, özellikle derinliği, katmanları ve döndürmeleri daha iyi belirtmeyi başarabildiğimiz üç-boyutlu grafiklerde çok açıktır (aşağıdaki şekillere bakın). Ayrıca, renklerin tutarlı ve pedagojik bir kullanımını sağlamayı denedik ve tamamlanmış parçaların düzeltilmesine kendini adamış bir ekip bir araya getirdik.

ŞEKİL 6.11, sayfa 402
(a) bölgesinin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen cismin hacminin bulunması



ŞEKİL 6.13, sayfa 403
Burada üretilen dönel cismin dik-kesiteri diskler değil pullardır.





Bölüm 1

ÖN BİLGİLER

GİRİŞ Bu bölüm analize başlamak için bilmeniz gereken temel konuları tekrar eder. Bu konular reel sayı sistemi, düzlemde kartezyen koordinatlar, düz çizgiler, paraboller, çemberler, fonksiyonlar ve trigonometridir.

1.1 Reel Sayılar ve Reel Doğru

Bu bölümde reel sayıların, eşitsizliklerin, aralıkların ve mutlak değerlerin tekrarı yapılmaktadır.

Reel Sayılar

Analizin büyük bir bölümü reel sayı sisteminin özellikleri üzerine kurulmuştur. **Reel sayılar**, ondalık sayı olarak ifade edilebilen sayılardır; örneğin

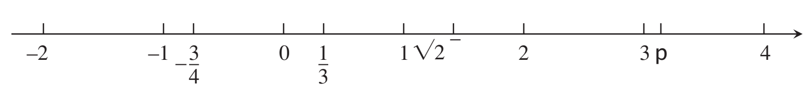
$$-\frac{3}{4} = -0.75000\ldots$$

$$\frac{1}{3} = 0.33333\ldots$$

$$\sqrt{2} = 1.4142\ldots$$

Sayıların sonlarındaki üç nokta $\ldots$ ondalık basamak dizisinin sonsuza kadar devam ettiğini gösterir. Her ondalık açılım bir reel sayıyı temsil eder, bazı sayıların iki temsili olsa dahi. Örneğin $.999\ldots$ ve $1.000\ldots$ sonsuz ondalık açılımları 1 reel sayısını temsil ederler. Benzer ifade ondalık açılımı $.999\ldots$ şeklinde olan her sayı için geçerlidir.

Reel sayılar geometrik olarak **reel doğru** diye adlandırılan bir sayı doğrusunun üzerindeki noktalar şeklinde gösterilebilirler.



$\mathbb{R}$ sembolü ya reel sayı sistemini ya da buna eşdeğer olarak reel sayı doğrusunu ifade eder.

Reel sayı sisteminin özellikleri üç kategoride incelenir: cebirsel, sıralanma ve tamlık özellikleri. Cebirsel özellikler reel sayıların, bilinen aritmetik kurallar altında başka reel sayılar üretecek şekilde toplanabileceğini, çıkartılabileceğini, çarpılabileceğini ve (sıfır ile olmamak üzere) bölünebileceğini söyler. *Asla 0 ile bölemezsiniz.*

Reel sayıların **sıralanma özellikleri** Ek 4 te verilmiştir. Aşağıdaki kullanışlı kurallar onlardan elde edilebilir, $\Rightarrow$ sembolü "gerektirir" anlamındadır.

Eşitsizlik Kuralları

a, b ve *c* reel sayılar ise,

1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
2. $a < b \Rightarrow a - c < b - c$
3. $a < b$ ve $c > 0 \Rightarrow ac < bc$
4. $a < b$ ve $c < 0 \Rightarrow bc < ac$
   Özel durum: $a < b \Rightarrow -b < -a$
5. $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$
6. *a* ve *b*'nin her ikisi de pozitif veya negatifse $a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Bir eşitsizliğin bir sayı ile çarpımı kurallarına dikkat edin. Bir pozitif sayı ile çarpmak eşitsizliği korur; bir negatif sayı ile çarpmak eşitsizliği tersine çevirir. Ayrıca, aynı işaretli sayılar için ters almak eşitsizliği tersine çevirir. Örneğin $2 < 5$ dir fakat $-2 > -5$ ve $1/2 > 1/5$ dir.

Reel sayı sisteminin **tamlık özelliği**ni tam olarak tanımlamak daha derin ve daha zordur. Ancak, özellik, limit kavramı için gereklidir (Bölüm 2). Kabaca, hiçbir "boşluk" veya "delik" kalmayacak şekilde, reel sayı doğrusunu "tamamlamaya" yetecek kadar reel sayı bulunduğunu söyler. Reel sayı sisteminin tamlık özelliği olmasaydı analiz teoremlerinin çoğu geçersiz olurdu. Bu konu daha ileri seviyede derslerin konusudur, fakat Ek 4, nelerin içerildiği ve reel sayıların nasıl kurulduğu hakkında ip uçları vermektedir.

Reel sayıların üç özel alt kümesini ayırıyoruz.

1. **Doğal sayılar**, yani $1, 2, 3, 4, \ldots$
2. Tamsayılar, yani $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$
3. **Rasyonel sayılar**, yani *m* ve *n* tamsayı ve $n \neq 0$ olmak üzere m/n gibi bir kesir şeklinde yazılabilen sayılar; örneğin,

$$\frac{1}{3}, \quad -\frac{4}{9} = \frac{-4}{9} = \frac{4}{-9}, \quad \frac{200}{13} \quad \text{ve} \quad 57 = \frac{57}{1}$$

Rasyonel sayılar esas olarak ondalık açılımları ya

(a) sonlanan (sonsuz bir sıfır dizisiyle son bulan), örneğin

$$\frac{3}{4} = 0.75000\ldots = 0.75 \quad \text{veya}$$

(b) tekrarlanan (sürekli olarak tekrarlanan bir sayı dizisiyle biten),örneğin

$$\frac{23}{11} = 2.090909\ldots = 2.\overline{09}$$

Üstteki çizgi tekrarlanan basamakları gösterir.

şeklinde olan sayılardır.

Sonlanan bir ondalık açılım, sondaki sıfırlar tekrar ettiğinden, tekrarlanan ondalıkların bir özel halidir.

Rasyonel sayılar kümesi reel sayıların tüm cebirsel ve sıralanma özelliklerine sahiptir, ancak tamlık özelliği yoktur. Örneğin, karesi iki olan bir rasyonel sayı yoktur; yani rasyonel doğruda $\sqrt{2}$ 'nin bulunması gereken yerde bir "boşluk" vardır.

Rasyonel olmayan reel sayılara **irrasyonel sayılar** denir. Ondalık açılımlarının kesilmeyen ve tekrarlanmayan olmalarıyla belirlenirler; örneğin π, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ ve $\log_{10} 3$. Her ondalık açılım bir reel sayıyı temsil ettiğinden şu açık olmalıdır, sonsuz tane irrasyonel sayı vardır. Reel doğru üzerindeki herhangi bir noktaya yeterince yakın, hem rasyonel hemde irrasyonel sayılar bulunur.

Küme gösterimi, reel sayıların özel bir alt kümesini belirlemede çok kullanışlıdır. Bir **küme** bir nesneler topluluğudur, ve bu nesneler kümenin **elemanları** dır. S bir küme ise, "$a \in S$" gösterimi "*a, S*'nin bir elemanıdır" anlamındadır ve $a \notin S$ gösterimi "*a*, *S*'nin bir elemanı değildir" anlamındadır. S ve T kümeler ise, $S \cup T$ bunların **birleşimi** dir veya S ye ya da T ye (veya herikisine) ait bütün elemanlardan oluşur. $S \cap T$ **kesişimi** hem S ye ve hem de T'ye ait bütün elemanlardan oluşur. **Boş küme** $\varnothing$ eleman bulundurmayan küme dir. Örneğin, rasyonel sayılar ve irrasyonel sayıların kesişimi boş kümedir.

Bazı kümeler, elemanları parantezler içinde *listelenerek* tanımlanabilir. Mesela, 6'dan küçük doğal sayılar (veya pozitif tam sayılar) kümesi A

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

şeklinde gösterilebilir. Bütün tamsayılar kümesi

$$\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

şeklinde yazılır.

Bir kümeyi tanımlamanın başka bir yolu, kümenin bütün elemanlarını üreten bir kuralı parantezler içine almaktır. Örneğin,

$$A = \{x \mid x \text{ bir tamsayıdır ve } 0 < x < 6\}$$

kümesi 6'dan küçük pozitif tam sayılar kümesidir.

Aralıklar

İçinde en azından iki sayı varsa ve elemanlarından herhangi ikisinin arasında bulunan bütün reel sayıları içeriyorsa, reel doğrunun bir alt kümesi **aralık** adını alır. Örneğin, $x > 6$ şeklindeki bütün x'lerin kümesi bir aralıktır, $-2 \le x \le 5$ şeklindeki bütün x'lerin olduğu gibi. İçinde sıfır olmadığından; sıfırdan farklı bütün reel sayıların kümesi bir aralık değildir, kümede (örneğin) –1 ile 1 arasındaki bütün reel sayılar bulunmamaktadır.

Geometrik olarak, aralıklar reel doğrunun yanısıra, reel doğru üzerindeki ışınlara ve doğru parçalarına karşılık gelirler. Doğru parçalarına karşılık gelen sayı aralıklarına **sonlu aralıklar**, ışınlara karşı gelenlere ise **sonsuz aralıklar** denir.

Sonlu aralıklar, iki uç noktalarını da içeriyorlarsa **kapalı**, tek uç noktalarını içeriyorlarsa **yarı-açık**, iki uç noktalarını da içermiyorlarsa **açık** olarak adlandırılırlar. Uç noktalarına sınır noktaları da denir, bunlar aralığın **sınırlarını** oluştururlar. Aralığın diğer noktaları ise **iç noktalar** dır, birlikte aralığın **içini** oluştururlar. Sonsuz aralıklar, sonlu bir uç nokta içeriyorlarsa kapalıdırlar, aksi halde açıktırlar. Bütün reel doğru $\mathbb{R}$, hem açık hem kapalı olan sonsuz bir aralıktır.

Eşitsizliklerin Çözümü

x'in bir eşitsizliğini sağlayan aralık veya aralıkları bulma işlemine eşitsizliği **çözme** denir.

TABLO 1.1 Aralık Çeşitleri

	Notasyon	Açıklama	Tip	Resim
Sonlu:	(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	Açık	
	$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	Kapalı	
	$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	Yarı-açık	
	$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	Yarı-açık	
Sonsuz:	(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	Açık	
	$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	Kapalı	
	$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	Açık	
	$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	Kapalı	
	$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (bütün reel sayılar kümesi)	Hem açık hem kapalı	

ÖRNEK 1 Aşağıdaki eşitsizlikleri çözün ve çözüm kümelerini reel doğruda gösterin.

(a) $2x - 1 < x + 3$ **(b)** $-\frac{x}{3} < 2x + 1$ **(c)** $\frac{6}{x - 1} \geq 5$

Çözüm

(a)

$$2x - 1 < x + 3$$

$$2x < x + 4 \qquad \text{İki tarafa da 1 ekleyin.}$$

$$x < 4 \qquad \text{İki taraftan da } x \text{ çıkarın.}$$

Çözüm kümesi $(-\infty, 4)$ aralığıdır (Şekil 1.1a).

(b)

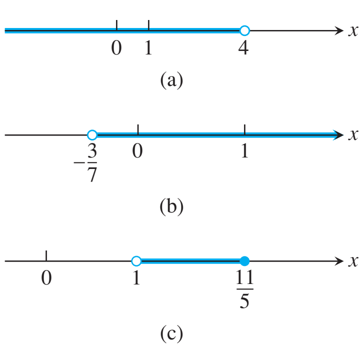
$$-\frac{x}{3} < 2x + 1$$

$$-x < 6x + 3 \qquad \text{İki tarafı da 3 ile çarpın.}$$

$$0 < 7x + 3 \qquad \text{İki tarafa da } x \text{ ekleyin.}$$

$$-3 < 7x \qquad \text{İki taraftan da 3 çıkarın.}$$

$$-\frac{3}{7} < x \qquad \text{7 ile bölün}$$



ŞEKİL 1.1 Örnek 1 deki eşitsizliklerin çözüm kümeleri

Çözüm kümesi $(-3/7, \infty)$ aralığıdır (Şekil 1.1b).

(c) $6/(x-1) \geq 5$ eşitsizliği ancak $x > 1$ için geçerli olabilir, çünkü öteki türlü $6/(x-1)$ tanımsız veya negatiftir. Dolayısıyla, iki tarafı da $(x-1)$ ile çarparsak eşitsizlik korunacaktır.

$$\frac{6}{x-1} \geq 5$$

$$6 \geq 5x - 5 \qquad \text{İki tarafı da } (x-1) \text{ ile çarpın}$$

$$11 \geq 5x \qquad \text{İki tarafa da 5 ekleyin.}$$

$$\frac{11}{5} \geq x \qquad \text{veya } x \leq \frac{11}{5}$$

Çözüm kümesi $(1, 11/5]$ yarı-açık aralığıdır (Şekil 1.1c). ■

Mutlak Değer

Bir x sayısının $|x|$ ile gösterilen **mutlak değeri**

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

formülü ile tanımlanır.

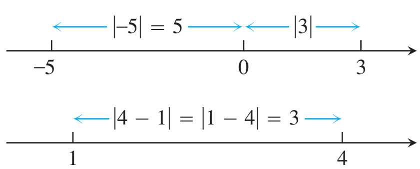
ÖRNEK 2 Mutlak Değerleri Bulmak

$$|3| = 3, \quad |0| = 0, \quad |-5| = -(-5) = 5, \quad |-|a|| = |a|$$ ■

Geometrik olarak x'in mutlak değeri, reel sayı doğrusu üzerinde x'ten 0'a olan uzaklıktır. Uzaklıklar daima pozitif veya 0 olduklarından, her x reel sayısı için $|x| \geq 0$ olduğunu görürüz. Ancak ve yalnız $x = 0$ ise $|x| = 0$ dır. Ayrıca,

$$|x - y| = \text{ reel doğru üzerinde } x \text{ ve } y \text{ arasındaki uzaklık}$$

dır (Şekil 1.2).



ŞEKİL 1.2 Mutlak değerin özellikleri aşağıda verilmiştir (Alıştırmalarda bu özellikleri ispat etmeniz istenmektedir).

$\sqrt{a}$ sembolü daima a'nın *negatif olmayan* karekökünü belirttiği için, $|x|$ 'in başka bir tanımı da

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

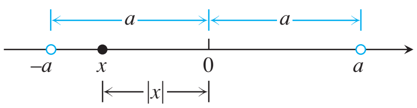
$\sqrt{a^2} = |a|$ olduğunu unutmayın. $a \geq 0$ olduğunu kesin olarak bilmeden sakın $\sqrt{a^2} = a$ yazmayın.

Mutlak değerin özellikleri aşağıda verilmiştir (Alıştırmalarda bu özellikleri ispat etmeniz istenmektedir).

Mutlak Değerin özellikleri

1.	$|-a| = |a|$	Bir sayı ve onun ters işaretlisinin mutlak değerleri aynıdır.
2.	$|ab| = |a||b|$	Bir çarpımın mutlak değeri mutlak değerlerin çarpımıdır.
3.	$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$	Bir bölümün mutlak değeri mutlak değerlerin bölümüdür.
4.	$|a + b| \leq |a| + |b|$	**Üçgen eşitsizliği**. İki sayının toplamının mutlak değeri, mutlak değerlerinin toplamından küçük veya ona eşittir.

$|-a| \neq -|a|$ olduğuna dikkat edin. Örneğin, $|-3| = 3$'dür oysa $-|3| = -3$'dür. a ve b nin işaretleri farklıysa $|a+b|$ mutlak değeri $|a| + |b|$ den küçüktür. Diğer bütün durumlarda $|a+b|$ ve $|a| + |b|$ eşittir $|-3 + 5|$ gibi ifadelerde mutlak değer çizgileri parantezler gibidir: mutlak değeri almadan *önce* içini hesaplarız.



ŞEKİL 1.3 $|x| < a$ ifadesi x'in $-a$ ile a arasında olması demektir.

ÖRNEK 3 Üçgen Eşitsizliğini Açıklamak

$$|-3 + 5| = |2| = 2 < |-3| + |5| = 8$$
$$|3 + 5| = |8| = |3| + |5|$$
$$|-3 - 5| = |-8| = 8 = |-3| + |-5|$$

■

$|x| < a$ eşitsizliği, x'in sıfıra olan uzaklığını pozitif a sayısından daha küçük olduğunu söyler. Dolayısıyla Şekil 1.3 te görüleceği gibi x sayısı, $-a$ ile a arasında bulunmak zorundadır.

Aşağıdaki ifadelerin hepsi mutlak değer tanımının sonuçlarıdır ve mutlak değer bulunduran denklemleri veya eşitsizlikleri çözerken oldukça faydalıdırlar.

Aralıklar ve Mutlak Değerler

a herhangi bir pozitif sayı ise,

5. $|x| = a$ ancak ve ancak $x = \pm a$ ise
6. $|x| < a$ ancak ve ancak $-a < x < a$ ise
7. $|x| > a$ ancak ve ancak $x > a$ veya $x < -a$ ise
8. $|x| \leq a$ ancak ve ancak $-a \leq x \leq a$ ise
9. $|x| \geq a$ ancak ve ancak $x \geq a$ veya $x \leq -a$ ise

$\Leftrightarrow$ sembolü, matematikçiler tarafından "ancak ve ancak" veya " gerekir ve gerektirir" anlamında sıklıkla kullanılır. Aynı zamanda "ifade eder ve ifade edilir" anlamındadır.

ÖRNEK 4 Mutlak Değerli bir Denklemi Çözmek

$|2x - 3| = 7$ denklemini çözün.

Çözüm Özellik 5 ten, $2x - 3 = \pm 7$ dir, şu halde iki olasılık vardır:

$$2x - 3 = 7 \qquad 2x - 3 = -7$$
$$2x = 10 \qquad 2x = -4$$
$$x = 5 \qquad x = -2$$

Mutlak değersiz eşdeğer denklemler
Her zamanki gibi çözün.

$|2x - 3| = 7$'nin çözümleri $x = 5$ ve $x = -2$'dir. ■

ÖRNEK 5 Mutlak Değer İçeren Bir Eşitsizliği Çözmek

$\left|5 - \frac{2}{x}\right| < 1$ eşitsizliğini çözün.

Çözüm

$$\left|5 - \frac{2}{x}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < 5 - \frac{2}{x} < 1 \qquad \text{Özellik 6}$$

$$\Leftrightarrow -6 < -\frac{2}{x} < -4 \qquad \text{5 çıkarın}$$

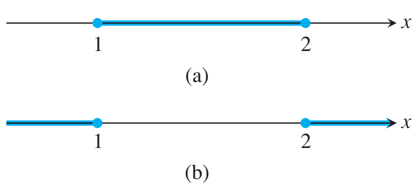
$$\Leftrightarrow 3 > \frac{1}{x} > 2 \qquad -\frac{1}{2} \text{ ile çarpın}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2} \qquad \text{terslerini alın.}$$

Eşitsizlikler hakkındaki değişik kuralların burada nasıl kullanıldığına dikkat edin. Bir negatif sayı ile çarpmak eşitsizliği tersine çevirir. Her iki tarafı da pozitif olan bir eşitsizlikte iki tarafın terslerini almak da aynıdır. Asıl eşitsizlik ancak ve ancak $(1/3) < x < (1/2)$ ise sağlanır. Çözüm kümesi $(1/3, 1/2)$ açık aralığıdır. ■

ÖRNEK 6 Eşitsizlikleri çözün ve çözüm kümesini reel doğruda gösterin.

(a) $|2x - 3| \le 1$ **(b)** $|2x - 3| \ge 1$



ŞEKİL 1.4 Çözüm kümesi (a) [1, 2] ve (b) $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$ Örnek 6.

Çözüm

(a)

$$|2x - 3| \le 1$$

$$-1 \le 2x - 3 \le 1 \qquad \text{Özellik 8}$$

$$2 \le 2x \le 4 \qquad \text{3 ekleyin}$$

$$1 \le x \le 2 \qquad \text{2 ile bölün}$$

Çözüm kümesi [1, 2] kapalı aralığıdır (Şekil 1.4a).

(b)

$$|2x - 3| \ge 1$$

$$2x - 3 \ge 1 \quad \text{veya} \quad 2x - 3 \le -1 \qquad \text{Özellik 9}$$

$$x - \frac{3}{2} \ge \frac{1}{2} \quad \text{veya} \quad x - \frac{3}{2} \le -\frac{1}{2} \qquad \text{2 ile bölün}$$

$$x \ge 2 \quad \text{veya} \quad x \le 1 \qquad \frac{3}{2}\text{. ekleyin}$$

Çözüm kümesi $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$ (Şekil 1.4b). ■

ALIŞTIRMALAR 1.1

Ondalık Gösterimler

1. Tekrarlanan basamakların üzerine bir çizgi koyarak, $1/9$'u tekrarlanan bir ondalık olarak yazın. $2/9$, $3/9$, $8/9$ ve $9/9$'un ondalık gösterimleri nedir?
2. Tekrarlanan basamakların üzerine bir çizgi koyarak, $1/11$'i tekrarlanan bir ondalık olarak yazın. $2/11$, $3/11$, $9/11$ ve $11/11$'in ondalık gösterimleri nedir?

Eşitsizlikler

3. $2 < x < 6$ ise, x hakkında aşağıda verilen eşitsizliklerin hangileri doğru, hangileri yanlıştır?

a. $0 < x < 4$ **b.** $0 < x - 2 < 4$

c. $1 < \frac{x}{2} < 3$ **d.** $\frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$

e. $1 < \frac{6}{x} < 3$ **f.** $|x - 4| < 2$

g. $-6 < -x < 2$ **h.** $-6 < -x < -2$

4. $-1 < y-5 < 1$ ise, y hakkında aşağıda söylenenlerden hangileri doğrudur?

a. $4 < y < 6$ **b.** $-6 < y < -4$

c. $y > 4$ **d.** $y < 6$

e. $0 < y - 4 < 2$ **f.** $2 < \frac{y}{2} < 3$

g. $\frac{1}{6} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4}$ **h.** $|y - 5| < 1$

5–12 alıştırmalarında, eşitsizlikleri çözüp çözüm kümelerini çizin.

5. $-2x > 4$ **6.** $8 - 3x \geq 5$

7. $5x - 3 \leq 7 - 3x$ **8.** $3(2 - x) > 2(3 + x)$

9. $2x - \frac{1}{2} \geq 7x + \frac{7}{6}$ **10.** $\frac{6 - x}{4} < \frac{3x - 4}{2}$

11. $\frac{4}{5}(x - 2) < \frac{1}{3}(x - 6)$ **12.** $-\frac{x + 5}{2} \leq \frac{12 + 3x}{4}$

Mutlak Değer

13–18 alıştırmalarındaki denklemleri çözün.

13. $|y| = 3$ **14.** $|y - 3| = 7$ **15.** $|2t + 5| = 4$

16. $|1 - t| = 1$ **17.** $|8 - 3s| = \frac{9}{2}$ **18.** $\left|\frac{s}{2} - 1\right| = 1$

19-34 alıştırmalarındaki eşitsizlikleri, çözüm kümelerini aralıklar veya aralıkların birleşimi olarak ifade ederek çözün. Ayrıca, her çözüm kümesini reel doğruda gösterin.

19. $|x| < 2$ **20.** $|x| \leq 2$ **21.** $|t - 1| \leq 3$

22. $|t + 2| < 1$ **23.** $|3y - 7| < 4$ **24.** $|2y + 5| < 1$

25. $\left|\frac{z}{5} - 1\right| \leq 1$ **26.** $\left|\frac{3}{2}z - 1\right| \leq 2$ **27.** $\left|3 - \frac{1}{x}\right| < \frac{1}{2}$

28. $\left|\frac{2}{x} - 4\right| < 3$ **29.** $|2s| \geq 4$ **30.** $|s + 3| \geq \frac{1}{2}$

31. $|1 - x| > 1$ **32.** $|2 - 3x| > 5$ **33.** $\left|\frac{r + 1}{2}\right| \geq 1$

34. $\left|\frac{3r}{5} - 1\right| > \frac{2}{5}$

İkinci Dereceden Eşitsizlikler

35–42 alıştırmalarındaki eşitsizlikleri çözün. Çözüm kümelerini aralıklar veya aralıkların birleşimi olarak ifade edin ve çizin. Uygun durumlarda $\sqrt{a^2} = |a|$ sonucunu kullanın.

35. $x^2 < 2$ **36.** $4 \leq x^2$ **37.** $4 < x^2 < 9$

38. $\frac{1}{9} < x^2 < \frac{1}{4}$ **39.** $(x - 1)^2 < 4$ **40.** $(x + 3)^2 < 2$

41. $x^2 - x < 0$ **42.** $x^2 - x - 2 \geq 0$

Teori ve Örnekler

43. $|-a| = a$ gibi bir tuzağa düşmeyin. Hangi a reel sayıları için bu eşitlik doğrudur? Hangileri için yanlıştır?

44. $|x - 1| = 1 - x$ denklemini çözün.

45. **Üçgen eşitsizliğinin bir ispatı** Üçgen eşitliğinin aşağıdaki ispatındaki numaralanmış adımları açıklayacak nedenleri söyleyin.

$$\begin{aligned} |a + b|^2 &= (a + b)^2 && (1)\\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq a^2 + 2|a||b| + b^2 && (2)\\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 && (3)\\ &= (|a| + |b|)^2 \\ |a + b| &\leq |a| + |b| && (4) \end{aligned}$$

46. Her a ve b sayısı için $|ab| = |a||b|$ olduğunu gösterin.

47. $|x| \leq 3$ ve $x > -1/2$ ise, x hakkında ne söyleyebilirsiniz?

48. $|x| + |y| \leq 1$ eşitsizliğini çizin.

49. $f(x) = 2x + 1$ ve $\delta > 0$ herhangi bir pozitif sayı olsun. $|x - 1| < \delta$'nın $|f(x) - f(1)| < 2\delta$ yı gerektiğini gösteriniz. Burada $f(a)$ notasyonu $2x + 1$ ifadesinin $x = a$ için değeridir. Bu *fonksiyon notasyonu* Bölüm 1.3'te açıklanmaktadır.

50. $f(x) = 2x + 3$ ve $\epsilon > 0$ herhangi bir pozitif sayı olsun. $|x - 0| < \frac{\epsilon}{2}$ iken $|f(x) - f(0)| < \epsilon$ olduğunu gösteriniz. Burada $f(a)$ notasyonu $2x + 3$ ifadesinin $x = a$ için değeridir. (Bölüm 1.3'e bakın)

51. Herhangi bir a sayısı için $|-a| = |a|$ olduğunu ispat edin.

52. a herhangi bir pozitif sayı olsun ancak ve yalnız $x > a$ veya $x < -a$ için $|x| > |a|$ olduğunu ispat edin.

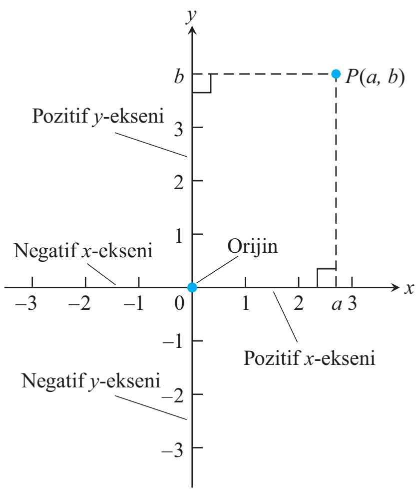
53. **a.** b sıfırdan farklı herhangi bir reel sayı ise $|1/b| = 1/|b|$ olduğunu ispat edin.

b. herhangi $a \neq 0$, $b \neq 0$ reel sayılar için $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ olduğunu ispat edin.

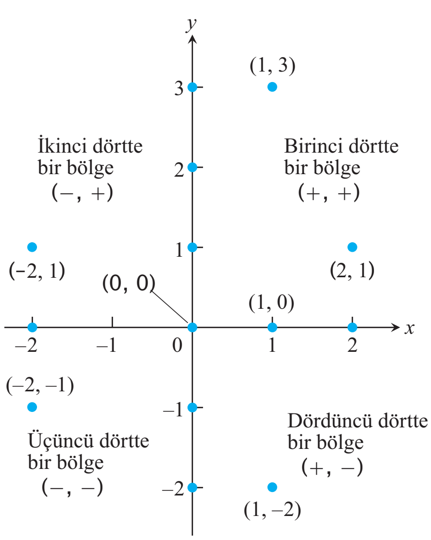
54. Matematik İndüksiyon yöntemini kullanarak (Bak Ek 1) herhangi bir a sayısı ve herhangi bir pozitif n tamsayısı için $|a^n| = |a|^n$ olduğunu ispat edin.

1.2 Doğrular, Çemberler ve Paraboller

Bu bölümde, düzlemde koordinatlar, doğrular, uzaklık, çemberler ve paraboller tekrarlanacaktır. Ayrıca, artım kavramı da tartışılacaktır.



ŞEKİL 1.5 Düzlemde Kartezyen koordinatlar, orijinde dik kesişen iki eksene oturtulmuştur.



ŞEKİL 1.6 *xy*-koordinat veya Kartezyen düzlem de işaretlenmiş noktalar. Eksenler üzerindeki bütün noktaların koordinat çiftleri vardır fakat genellikle tek bir reel sayı ile gösterilirler, (böylece *x*-ekseni üzerindeki noktası (1, 0) ile 1 işaretlenmiştir). Dörtte bir bölgelerin koordinat işaret modellerine dikkat edin.

Düzlemde Kartezyen Koordinatlar

Önceki bölümde doğru üzerindeki noktaları, koordinatlar dediğimiz reel sayılar ile belirledik. Düzlemdeki noktalar, sıralı reel sayı ikilileri ile belirtilebilir. Başlarken, 0 noktalarında kesişen birbirine dik iki koordinat doğrusu çizeriz. Bu doğrulara düzlemde **koordinat eksenleri** denir. Yatay *x*-ekseninde, sayılar *x* ile gösterilir ve sağa doğru artarlar. Dikey *y*–ekseninde ise, sayılar *y* ile gösterilir ve yukarı doğru artarlar (Şekil 1.5). Böylece "yukarıya" ve "sağa" yönleri pozitif yönlerdir, buna karşılık "aşağıya" ve "sola" yönleri negatif yönlerdir. Koordinat sisteminin **orijini** *O*, aynı zamanda 0 ile de gösterilir, düzlemde *x* ve *y*'nin her ikisinin de sıfır olduğu noktadır.

P düzleme herhangi bir nokta ise, tam olarak bir sıralı reel sayı ikilisiyle şu şekilde konumlandırılabilir. *P* den iki koordinat eksenine dik doğrular çizilir. Bu doğrular eksenleri ve koordinatlı noktalarda keserler (Şekil 1.5). (*a, b*) sıralı ikilisi *P* noktası ile eşlenir ve bu ikiliye *P*'nin **koordinat çifti** denir. Birinci sayı "*a*" *P*'nin ***x*–koordinatı** (veya **apsisi**) dır; ikinci sayı "*b*" *P*'nin ***y* – koordinatı** (veya **ordinatı**) dır. *y*–ekseni üzerindeki her noktanın *x*–koordinatı 0 dır. *x*–ekseni üzerindeki her noktanın *y*–koordinatı 0 dır. Orijin (0, 0) noktasıdır.

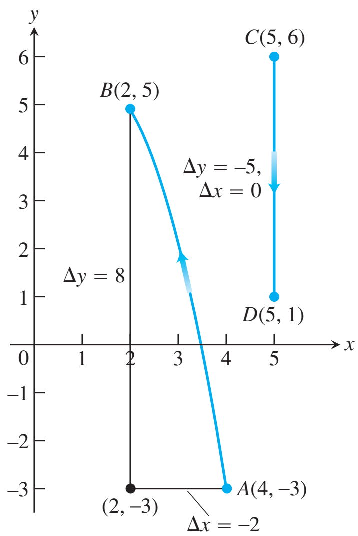
Bir (*a, b*) sıralı ikilisi ile başlayarak, işlemi tersine çevirebiliriz ve düzlemde bu ikiliye karşı gelen bir *P* noktasına ulaşırız. Çoğu kez *P*'yi sıralı ikili ile tanımlar ve *P*(*a, b*) yazarız. Bazen "(*a, b*) noktası" olarak da adlandırırız ve (*a, b*)'nin reel doğru üzerinde bir açık aralığı değil de düzlemde bir noktayı gösterdiği sözün gelişinden anlaşılacaktır. Şekil 1.6 da koordinatları ile işaretlenmiş birkaç nokta gösterilmiştir.

Bu koordinat sistemine **dik koordinat sistemi** veya **Kartezyen koordinat sistemi** denir (16.yy Fransız matematikçi René Descartes'den sonra). Bu koordinat veya Kartezyen düzlemin koordinat eksenleri, düzlemi **dörtte bir (quadrant)** denen, Şekil 1.6 gösterildiği gibi saat yönünün tersine numaralanan, dört bölgeye ayırır.

x ve *y* değişkenlerine bağlı bir denklemin veya bir eşitsizliğin grafiği, koordinatları denklemi veya eşitsizliği sağlayan düzlemdeki bütün *P*(*x, y*) noktalarının kümesidir. Koordinat düzleminde veri çizerken veya değişkenlerinin birimleri farklı olan formüllerin grafiklerini çizerken, iki eksen üzerinde aynı ölçeği kullanmak zorunda değiliz. Örneğin, bir roket motoru için zaman- itme çiziyorsak, zaman ekseninde 1 sn'yi gösteren işareti, orijinden, itme ekseninde 1 lb'yi gösteren işaretle aynı uzaklığa koymak için bir neden yoktur.

Genellikle değişkenleri fiziksel büyüklükler temsil etmeyen fonksiyonların grafiklerini çizerken, geometrilerini ve trigonometrilerini incelemek için düzlemde şekiller çizerken, eksenler üzerindeki ölçeği aynı almaya çalışırız. Böylece, bir dikey uzaklık birimi ile yatay uzaklık birimi aynı gözükür. Bir ölçümcü haritasında veya ölçekli çizimde olduğu gibi, aynı uzunlukta olduğu kabul edilen doğru parçaları öyleymiş gibi gözükecektir ve eş olduğu kabul edilen açılar eş gözükecektir.

Bilgisayar ekranları ve hesap makinesi ekranları ayrı bir sorundur. Makine ile üretilen grafiklerde dikey ve yatay ölçekler genellikle farklıdır ve buna bağlı olarak uzaklıklarda, eğimlerde ve açılarda bozukluklar vardır. Çemberler elips gibi, dikdörtgenler kare gibi, dik açılar dar açı veya geniş açı gibi, vs. görünebilir. Bu ekran ve bozuklukları Bölüm 1.7 de geniş ayrıntıları ile tartışıyoruz.



ŞEKİL 1.7 Koordinat artımları pozitif, negatif veya sıfır olabilir (Örnek 1).

TARİHSEL BİYOGRAFİ*

René Descartes
(1596–1650)

Artımlar ve Doğrular

Bir parçacık düzlemde bir noktadan diğerine hareket ederken, koordinatlarındaki net değişikliklere *artım* denir. Başlangıç noktasının koordinatları bitiş noktasınınkilerden çıkartılarak hesaplanırlar. x, x_1 den x_2 ye değişirse x teki artım

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

ÖRNEK 1 $A\ (4, -3)$ noktasından $B(2, 5)$ noktasına gidilirken x- ve y-koordinatlarındaki artımlar

$$\Delta x = 2 - 4 = -2, \qquad \Delta y = 5 - (-3) = 8$$

dir. $C(5, 6)$'dan $D(5, 1)$'e koordinat artımları

$$\Delta x = 5 - 5 = 0, \qquad \Delta y = 1 - 6 = -5$$

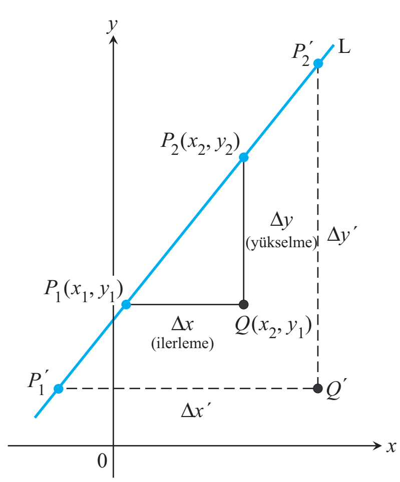
dir. Bakınız Şekil 1.7. ■

Düzlemde $P_1(x_1, y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ noktaları verilmişse, $\Delta x = x_2 - x_1$ ve $\Delta y = y_2 - y_1$ artırımlarına sırasıyla P_1 ve P_2 arasındaki **ilerleme** ve **yükselme** denir. Böyle iki nokta daima, bu noktalardan geçen tek bir doğru belirler. Doğruya P_1P_2 doğrusu adı verilir.

Düzlemde dikey olmayan herhangi bir doğrunun, doğru üzerinde seçilen her $P_1(x_1, y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ noktası için geçerli olan bir özelliği

$$m = \frac{\text{yükselme}}{\text{ilerleme}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

oranının aynı olmasıdır (Şekil 1.8). Bunun nedeni, benzer üçgenlerde karşılıklı kenarların oranlarının aynı olmasıdır.

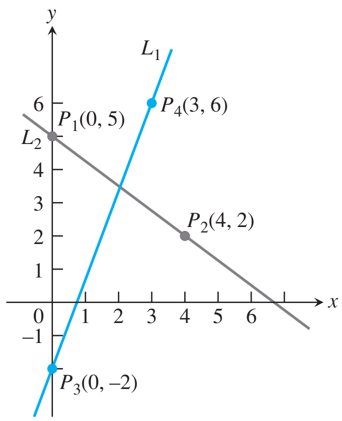


ŞEKİL 1.8 P_1QP_2 ve $P_1'Q'P_2'$ üçgenleri benzerdir dolayısıyla kenarlarının oranı, doğru üzerindeki herhangi iki nokta için aynıdır. Bu ortak değer doğrunun eğimidir.

> **TANIM Eğim**
>
> $$m = \frac{\text{yükselme}}{\text{ilerleme}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
>
> sabitine dikey olmayan P_1P_2 doğrusunun **eğimi** denir.

Eğim bir doğrunun yönünü (yukarı, aşağı) ve dikliğini belirler. Eğimi pozitif olan bir doğru sağa doğru yukarı çıkar, eğimi negatif olan bir doğruysa sağa doğru aşağı iner (Şekil 1.9). Eğimin mutlak değeri ne kadar büyük olursa, yükselme veya alçalma o kadar hızlı olur. Dikey bir doğrunun eğimi *tanımsızdır*. Dikey bir doğru için Δx ilerlemesi sıfır olduğundan, m eğim oranını hesaplayamayız.
Bir doğrunun yönü ve dikliği bir açıyla da ölçülebilir. x ekseninden geçen bir doğrunun **eğim açısı**, x ekseninden doğruya saat yönünün tersine olan en küçük açıdır (Şekil 1.10). Yatay doğrunun eğim açısı 0° dir. Dikey doğrunun eğim açısı ise 90° dir. ϕ bir doğrunun eğim açısıysa, $0 \le \phi \le 180°$ dir.

Tarihi portreler ve Calculus'un temel öğeleri ve konuları hakkında daha fazla bilgi için ***www.aw-bc.com/thomas*** sayfasını ziyaret ediniz.



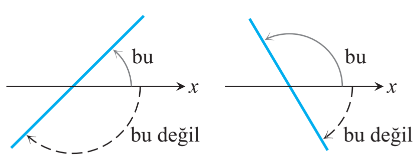
ŞEKİL 1.9 L_1'in eğimi

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-(-2)}{3-0} = \frac{8}{3}$$

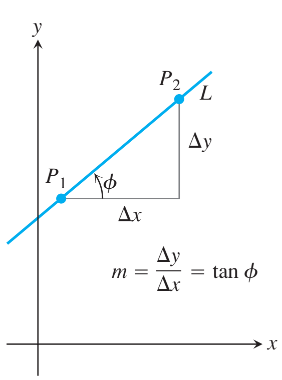
dir. Yani, x 3 birim arttıkça, y 8 birim artar. L_2'in eğimi ise

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-5}{4-0} = \frac{-3}{4}$$

dir. Yani, x 4 birim arttıkça, y 3 birim azalır.



ŞEKİL 1.10 Eğim açıları x-ekseninden saat yönünün tersine ölçülür.



ŞEKİL 1.11 Dikey olmayan bir doğrunun eğimi, eğim açısının tanjantı dır.

Dikey olmayan bir doğrunun eğimi m ile doğrunun eğim açısı ϕ arasındaki ilişki Şekil 1.11'de gösterilmektedir:

$$m = \tan\phi$$

Doğruların denklemleri basittir. x-eksenindeki a noktasından geçen dikey doğru üzerindeki bütün noktaların x koordinatları a'dır. Yani, $x = a$ dikey doğrunun denklemidir. Aynı şekilde, $y = b$ de y-eksenini b noktasında kesen yatay doğrunun denklemidir. (Şekil 1.12 ye bakınız).

Eğimini ve üzerindeki bir $P_1(x_1, y_1)$ noktasının koordinatlarını biliyorsak, dikey olmayan bir L doğrusunun denklemini yazabiliriz. $P(x, y)$ L üzerindeki *herhangi* bir başka noktaysa P_1 ve P noktalarını

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

eğimini hesaplamak için kullanabiliriz, dolayısıyla

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{veya} \quad y = y_1 + m(x - x_1)$$

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

denklemi (x_1, y_1) noktasından geçen ve eğimi m olan doğrunun **nokta-eğim denklemi** dir.

ÖRNEK 2 (2, 3) noktasından geçen ve eğimi –3/2 olan doğrunun denklemini yazın.

Çözüm Nokta-eğim denkleminde $x_1 = 2$, $y_1 = 3$ ve $m = -3/2$ yerleştirir ve

$$y = 3 - \frac{3}{2}(x - 2) \quad \text{veya} \quad y = -\frac{3}{2}x + 6$$

elde ederiz. $x = 0$ için $y = 6$ dır. Dolayısıyla doğru y-eksenini $y = 6$ da keser. ■

ÖRNEK 3 İki noktadan geçen bir doğrunun denklemi

(–2, –1) ve (3, 4) noktalarından geçen doğrunun denklemini yazın.

Çözüm Doğrunun eğimi

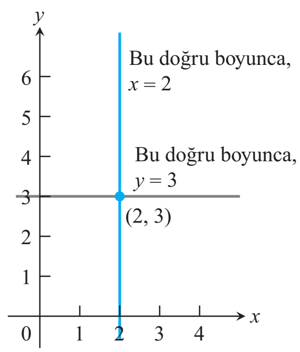
$$m = \frac{-1-4}{-2-3} = \frac{-5}{-5} = 1$$

dir. Bu eğimle birlikte nokta-eğim denkleminde verilen iki noktadan birini kullanabiliriz:

$(x_1, y_1) = (-2, -1)$ **ile**	$(x_1, y_1) = (3, 4)$ **ile**
$y = -1 + 1 \cdot (x - (-2))$	$y = 4 + 1 \cdot (x - 3)$
$y = -1 + x + 2$	$y = 4 + x - 3$
$y = x + 1$	$y = x + 1$

Aynı sonuç

Her iki şekilde de doğrunun denklemi $y = x + 1$'dir (Şekil 13). ■



ŞEKİL 1.12 (2, 3) ten geçen dikey ve yatay doğruların standart denklemleri $x = 2$ ve $y = 3$ tür.

Dikey olmayan bir doğrunun y-eksenini kestiği noktanın y koordinatına doğrunun **y-kesim noktası** denir. Aynı şekilde, **x-kesim noktası** da yatay olmayan bir doğrunun x-ekseninden geçtiği noktanın x koordinatıdır (Şekil 1.14). Eğimi m ve y-kesim noktası b olan bir doğru $(0, b)$ noktasından geçer ve denklemi

$$y = b + m(x - 0) \quad \text{veya, daha basit olarak,} \quad y = mx + b$$

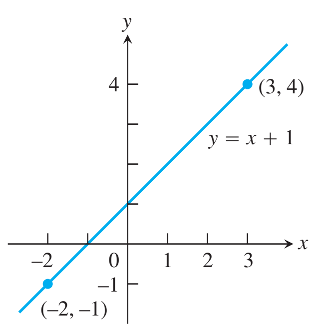
dir.

> $$y = mx + b$$
>
> denklemine eğimi m ve y-keseni b olan doğrunun **eğim-kesim noktası denklemi** denir.

Denklemi $y = mx$ şeklinde olan doğruların y-kesim noktaları 0'dır ve dolayısıyla orijinden geçerler.

$$Ax + By = C \qquad (A \text{ ve } B\text{'nin ikisi birlikte 0 olmamak üzere})$$

denklemine, x ve y'nin **genel lineer denklemi** denir, çünkü grafiği her zaman bir doğruyu temsil eder ve her doğrunun denklemi (eğimi tanımlı olmayan doğrular da dahil) bu şekildedir.



ŞEKİL 1.13 Örnek 3 teki doğru.

ÖRNEK 4 Eğimi ve y-kesimini bulmak

$8x + 5y = 20$ doğrusunun eğimini ve y-kesim noktasını bulun.

Çözüm Eğim-kesim noktası şekline sokmak için denklemi y'ye göre çözelim:

$$\begin{aligned} 8x + 5y &= 20 \\ 5y &= -8x + 20 \\ y &= -\frac{8}{5}x + 4 \end{aligned}$$

Eğim $m = -8/5$ dir. y-kesim noktası $b = 4$'tür. ■

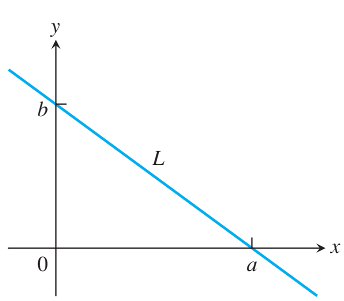
Paralel ve Dik Doğrular

Paralel doğruların eğim açıları aynıdır. Yani eğimleri aynıdır (dikey birer doğru değillerse). Tersine, eğimleri aynı olan doğruların eğim açıları aynıdır ve dolayısıyla paraleldirler.

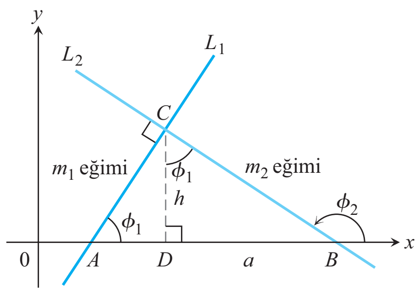
Dikey olmayan L_1 ve L_2 doğruları birbirine dikse, m_1 ve m_2 eğimleri $m_1 m_2 = -1$ eşitliğini sağlar, yani her eğim diğerinin çarpmaya göre negatif tersidir:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}, \qquad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Bunu görmek için, Şekil 1.15'teki benzer üçgenleri inceleyerek $m_1 = a/h$ ve $m_2 = -h/a$ olduğuna dikkat edin. Dolayısıyla, $m_1 m_2 = (a/h)(-h/a) = -1$ dir.



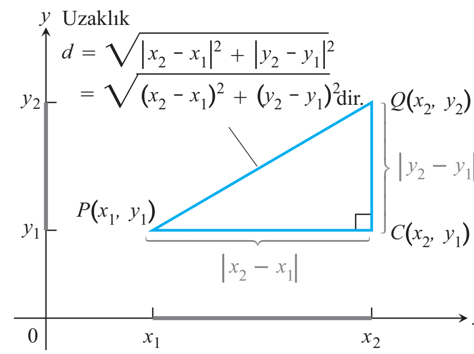
ŞEKİL 1.14 L doğrusunun x-kesimi a ve y-kesimi b dir.



ŞEKİL 1.15 ΔADC üçgeni ΔCDB üçgenine benzerdir. Dolayısıyla ϕ_1 aynı zamanda ΔCDB üçgeninin üst açısıdır. ΔCDB üçgeninin kenarlarından $\tan \phi_1 = a/h$ olduğu görülür.

Düzlemde Uzaklık ve Çemberler

Düzlemdeki noktalar arasındaki uzaklık, Pisagor formülünden gelen bir formülle hesaplanır (Şekil 1.16).



ŞEKİL 1.16 $P(x_1, y_1)$ ve $Q(x_2, y_2)$, arasındaki uzaklığı hesaplamak için, PCQ üçgenine Pisagor Teoremini uygulayın.

> **Düzlemdeki Noktaların Arasındaki Uzaklık Formülü**
>
> $P(x_1, y_1)$ ve $Q(x_2, y_2)$ arasındaki uzaklık aşağıdaki gibidir:
>
> $$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

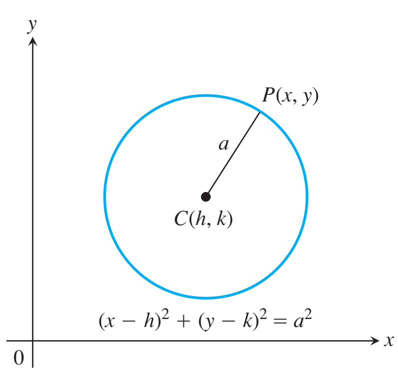
ÖRNEK 5 Uzaklık Hesaplamak

(a) $P(-1, 2)$ ile $Q(3, 4)$ arasındaki uzaklık

$$\sqrt{(3-(-1))^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}.$$

(b) Orijinden $P(x, y)$ noktasına olan uzaklık

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$ ■



ŞEKİL 1.17 xy-düzleminde merkezi (h, k)'da olan a yarıçaplı bir çember.

Tanım olarak; a yarıçaplı bir **çember**, bir $C(h, k)$ merkezine uzaklıkları a olan bütün $P(x, y)$ noktalarının kümesidir (Şekil 1.17). Uzaklık formülünden, ancak ve yalnız

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = a,$$

ise, P noktası çember üzerindedir. Dolayısıyla

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2 \qquad (1)$$

dir.

(1) denklemi (h, k) merkezli ve a yarıçaplı bir çemberin **standart denklemi**dir. Yarıçapı ve merkezi orijinde olan **birim çember**' in denklemi

$$x^2 + y^2 = 1\text{'dir.}$$

ÖRNEK 6

(a) Merkezi (3, 4)'te olan 2 yarıçaplı çemberin standart denklemi

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 2^2 = 4$$

tür.

(b) $$(x-1)^2 + (y+5)^2 = 3$$

çemberinde, $h = 1$, $k = -5$ ve $a = \sqrt{3}$'tür. Merkezi $(h, k) = (1, -5)$ noktasıdır ve yarıçapı $a = \sqrt{3}$'tür. ■

Bir çemberin denklemi standart şeklinde değilse, çemberin merkezini ve yarıçapını denklemi önce standart şekle sokarak bulabiliriz. Bunu yapmak için gereken cebirsel yönteme *kareyi tamamlama* denir (Ek 9 a bakın).

ÖRNEK 7 Bir Çemberin Merkezini ve Yarıçapını Bulmak

Aşağıdaki çemberin merkezini ve yarıçapını bulun.

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

Çözüm x ve y'nin karelerini tamamlayarak denklemi standart şekline döndürürüz:

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

Verilen denklemle başlayın.

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) = 3$$

Terimleri bir araya getirin. Sabiti sağ tarafa geçirin.

$$\left(x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 - 6y + \left(\frac{-6}{2}\right)^2\right) = 3 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{2}\right)^2$$

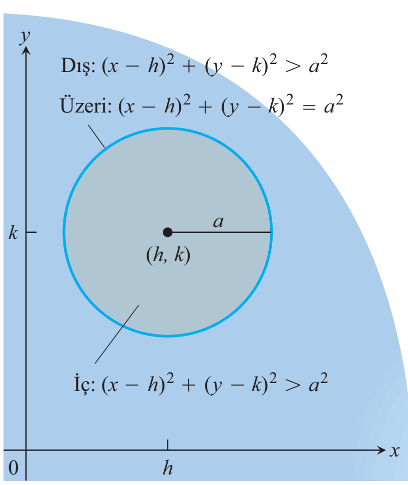
x'in katsayısının yarısının karesini denklemin iki tarafında da ekleyin Aynısını y için yapın. Sol taraftaki parantez içindeki ifadeler artık tam karelerdir.

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 3 + 4 + 9$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$$

Her kareyi karesi alınmış lineer açılımlar olarak yazın.

Merkez $(-2, 3)$ ve yarıçap $a = 4$ tür. ■



ŞEKİL 1.18 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ çemberinin içi ve dışı

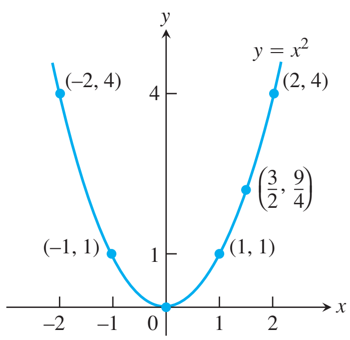
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 < a^2$$

eşitsizliğini sağlayan noktalar, merkezi (h, k) ve yarıçapı a olan çemberin **içi** denilen bölgeyi oluştururlar (Şekil 1.18). Çemberin **dışı**

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 > a^2$$

Paraboller

Genel parabollerin geometrik tanımı ve özellikleri bölüm 10.1 de incelenmektedir. Burada parabollere $y = ax^2 + bx + c$ şeklindeki eşitliklerin grafikleri olarak bakacağız.



ŞEKİL 1.19 $y = x^2$ parabolü (Örnek 8)

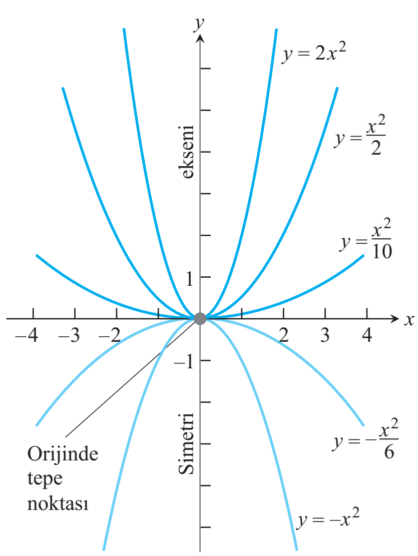
ÖRNEK 8 $y = x^2$ Parabolü

$y = x^2$ eşitliğini göz önüne alın. Koordinatları bu eşitliği sağlayan bazı noktalar $(0, 0), (1, 1), \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right), (-1, 1), (2, 4)$, ve $(-2, 4)$'tür. Bu noktalar (ve eşitliği sağlayan bütün diğerleri) parabol denen düzgün bir eğri oluşturur (Şekil 1.19). ■

$$y = ax^2$$

şeklindeki bir denklemin grafiği, **ekseni** (simetri ekseni) y-ekseni olan bir **parabol**dür. Parabolün **tepe noktası** (parabol ve eksenin kesiştiği nokta) orijinde bulunur. $a > 0$ ise parabol yukarı, $a < 0$ ise aşağı doğru açılır. $|a|$ değeri ne kadar büyükse, parabol o kadar dar olur (Şekil 1.20).

Genel olarak $y = ax^2 + bx + c$ eşitliğinin grafiği, $y = x^2$ parabolünün grafiğinin kaydırılmış ve uyarlanmış şeklidir. Grafiklerin kaydırılmasını ve uyarlanmasını daha detaylı olarak Bölüm 1.5 te inceleyeceğiz.



ŞEKİL 1.20 $y = ax^2$ parabolünün açıldığı yönü belirlerken a sayısı bir ölçü faktörüdür. a sıfır'a yaklaştıkça parabol genişler, $|a|$ büyüdükçe parabol daralır.

> **$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$'ın Grafiği**
>
> $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ denkleminin grafiği bir paraboldür. $a > 0$ ise parabol yukarı, $a < 0$ ise aşağı doğru açılır. Ekseni
>
> $$x = -\frac{b}{2a} \qquad (2)$$
>
> doğrudur. Parabolün tepe noktası eksen ve parabolün kesiştiği noktadır. Tepe noktasının x-koordinatı $x = -b/2a$'dır; y-koordinatı ise parabol denkleminde $x = -b/2a$ konularak elde edilir.

$a = 0$ ise $y = bx + c$ doğru denklemini elde ettiğimize dikkat edin. (2) denklemi ile verilen eksen, kareye tamamlama veya Bölüm 4.1 de incelenen bir teknikle bulunabilir.

ÖRNEK 9 Bir parabolü çizmek

$y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$ denkleminin grafiğini çizin.

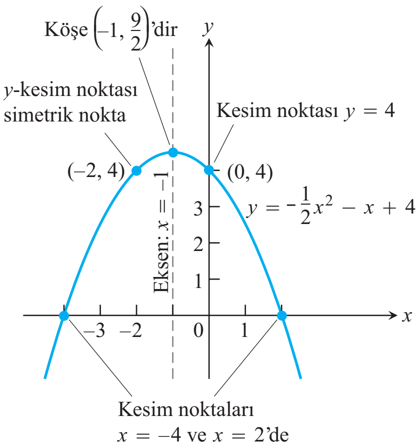
Çözüm Denklem, $y = ax^2 + bx + c$ ile karşılaştırılırsa

$$a = -\frac{1}{2}, \qquad b = -1, \qquad c = 4$$

olduğu görülür. $a < 0$ olduğundan parabol aşağıya doğru açılır. (2) denkleminden, eksen

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2(-1/2)} = -1$$

dikey doğrusudur.



ŞEKİL 1.21 Örnek 9 daki parabol.

$x = -1$ için

$$y = -\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) + 4 = \frac{9}{2}$$

dir. Tepe noktası $(-1, 9/2)$ dir.

x-kesim noktaları $y = 0$ olduğu yerdedir:

$$-\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0$$
$$x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$(x - 2)(x + 4) = 0$$
$$x = 2, \qquad x = -4$$

Bazı noktaları işaretler, ekseni (silik olarak) çizer ve açılma yönünü kullanarak grafiği tamamlarız (Şekil 1.21). ■

ALIŞTIRMALAR 1.2

Artımlar ve Uzaklık

İlk dört alıştırmada, bir parçacık koordinat düzleminde A'dan B'ye ilerlemektedir. Parçacığın koordinatlarındaki Δx ve Δy artımlarını ve A'dan B'ye olan uzaklığı bulun.

1. $A(-3, 2)$, $B(-1, -2)$
2. $A(-1, -2)$, $B(-3, 2)$
3. $A(-3.2, -2)$, $B(-8.1, -2)$
4. $A(\sqrt{2}, 4)$, $B(0, 1.5)$

5–8 alıştırmalarındaki eşitliklerin grafiklerini tanımlayın.

5. $x^2 + y^2 = 1$
6. $x^2 + y^2 = 2$
7. $x^2 + y^2 \leq 3$
8. $x^2 + y^2 = 0$

Eğimler, Doğrular ve Kesim Noktaları

9–12 alıştırmalarindaki noktaları işaretleyin ve (varsa) eğimlerini bulun. Ayrıca AB doğrusuna dik doğruların ortak eğimlerini bulun.

9. $A(-1, 2)$, $B(-2, -1)$
10. $A(-2, 1)$, $B(2, -2)$
11. $A(2, 3)$, $B(-1, 3)$
12. $A(-2, 0)$, $B(-2, -2)$

13–16 alıştırmalarında, verilen noktalardan geçen (a) dik doğru ve (b) yatay doğru için bir denklem yazın.

13. $(-1, 4/3)$
14. $\left(\sqrt{2}, -1.3\right)$
15. $\left(0, -\sqrt{2}\right)$
16. $(-\pi, 0)$

17–30 alıştırmalarında tanımlanan doğrunun denklemini yazın.

17. –1 eğimiyle (–1, 1) noktasından geçer.
18. $1/2$ eğimiyle (2, –3) noktasından geçer.
19. (3, 4) ve (–2,5) noktalarından geçer.
20. (–8, 0) ve (–1, 3) noktalarından geçer.
21. Eğimi $-5/4$ ve y-kesim noktası 6'dır.
22. Eğimi $1/2$ ve y-kesim noktası –3'tür.
23. 0 eğimle (–12, –9) noktasından geçer.
24. Eğimi yoktur ve $(1/3, 4)$ noktasından geçer.
25. y-kesim noktası 4 ve x-kesim noktası –1'dir.
26. y-kesim noktası –6 ve x-kesim noktası 2'dir.
27. (5, –1) noktasından geçer ve $2x + 5y = 15$ doğrusuna paraleldir.
28. $\left(-\sqrt{2}, 2\right)$ noktasından geçer ve $\sqrt{2}x + 5y = \sqrt{3}$ doğrusuna paraleldir.
29. (4, 10) noktasından geçer ve $6x - 3y = 5$ doğrusuna diktir.
30. (0, 1) noktasından geçer ve $8x - 13y = 13$ doğrusuna diktir.

31–34 alıştırmalarında, doğrunun x- ve y-kesim noktalarını bulun ve bu bilgiyi kullanarak doğruyu çizin.

31. $3x + 4y = 12$
32. $x + 2y = -4$
33. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{6}$
34. $1.5x - y = -3$

35. $Ax + By = C_1$ ve $Bx - Ay = C_2$ $(A \neq 0, B \neq 0)$ doğruları arasındaki ilişkinin bir özelliği var mıdır? Cevabınızın nedenlerini açıklayın.
36. $Ax + By = C_1$ ve $Ax + By = C_2$ $(A \neq 0, B \neq 0)$ doğruları arasındaki ilişkinin bir özelliği var mıdır? Cevabınızın nedenlerini açıklayın.

Artımlar ve Hareket

37. Bir parçacık $A(-2, 3)$ noktasından harekete başlar ve koordinatları $\Delta x = 5$ ve $\Delta y = -6$ artımlarıyla değişir. Parçacığın yeni konumunu bulunuz.

38. Bir parçacık $A(6, 0)$ noktasından harekete başlar ve koordinatları $\Delta x = -6$ ve $\Delta y = 0$ artımlarıyla değişir. Parçacığın yeni konumunu bulunuz.

39. $A(x, y)$'den B(3, –3)'ye giderken, bir parçacığın koordinatları $\Delta x = 5$ ve $\Delta y = 6$ olarak değişir. x ve y'yi bulun.

40. Bir parçacık $A(1, 0)$ noktasından başlayarak orijin etrafında saat yönünün tersine bir çember çizer ve $A(1, 0)$'a geri döner. Koordinatlarındaki net değişiklik nedir?

Çemberler

41–46 alıştırmalarında verilen $C(h, k)$ merkezli ve a yarıçaplı çemberin denklemini bulun. Çemberi xy-düzleminde çizin ve merkezini grafiğinizde belirtin. Ayrıca, varsa çemberin x ve y kesim noktalarını koordinat ikilileriyle birlikte gösterin.

41. $C(0, 2), \quad a = 2$

42. $C(-3, 0), \quad a = 3$

43. $C(-1, 5), \quad a = \sqrt{10}$

44. $C(1, 1), \quad a = \sqrt{2}$

45. $C(-\sqrt{3}, -2), \quad a = 2$

46. $C(3, 1/2), \quad a = 5$

47-52 alıştırmalarında denklemleri verilmiş olan çemberleri çizin. Merkezlerini ve varsa x ve y kesim noktalarını koordinat ikilileriyle birlikte belirtin.

47. $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$

48. $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$

49. $x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0$

50. $x^2 + y^2 - 4x - (9/4) = 0$

51. $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$

52. $x^2 + y^2 + 2x = 3$

Paraboller

53–60 alıştırmalarındaki parabolleri çizin. Her birinde tepe noktasını, ekseni ve kesim noktasını belirtin.

53. $y = x^2 - 2x - 3$

54. $y = x^2 + 4x + 3$

55. $y = -x^2 + 4x$

56. $y = -x^2 + 4x - 5$

57. $y = -x^2 - 6x - 5$

58. $y = 2x^2 - x + 3$

59. $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 4$

60. $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$

Eşitsizlikler

61–68 alıştırmalarındaki eşitsizlikler ve eşitsizlik çiftleriyle tanımlanan bölgeleri açıklayın.

61. $x^2 + y^2 > 7$

62. $x^2 + y^2 < 5$

63. $(x - 1)^2 + y^2 \le 4$

64. $x^2 + (y - 2)^2 \ge 4$

65. $x^2 + y^2 > 1, \quad x^2 + y^2 < 4$

66. $x^2 + y^2 \le 4, \quad (x + 2)^2 + y^2 \le 4$

67. $x^2 + y^2 + 6y < 0, \quad y > -3$

68. $x^2 + y^2 - 4x + 2y > 4, \quad x > 2$

69. Merkezi (-2, 1) ve yarıçapı $\sqrt{6}$ olan çemberin içinde bulunan noktaları tanımlayan bir eşitsizlik yazın.

70. Merkezi (-4, 2) ve yarıçapı 4 olan çemberin dışında bulunan noktaları tanımlayan bir eşitsizlik yazın.

71. Merkezi (0, 0) ve yarıçapı $\sqrt{2}$ olan çemberin içinde veya üstünde bulunan ve (1, 0)'dan geçen dikey doğrunun üstünde veya sağında kalan noktaları tanımlayan bir eşitsizlik çifti yazın.

72. Merkezi (0, 0) ve yarıçapı 2 olan çemberin dışında ve merkezi (1, 3) olan ve orijinden geçen çemberin içinde kalan noktaları tanımlayan bir eşitsizlik çifti yazın.

Kesişen Doğrular, Çemberler ve Paraboller

73–80 alıştırmalarında, iki denklemi çizin ve grafiklerin kesiştikleri noktaları bulun.

73. $y = 2x, \quad x^2 + y^2 = 1$

74. $x + y = 1, \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1$

75. $y - x = 1, \quad y = x^2$

76. $x + y = 0, \quad y = -(x - 1)^2$

77. $y = -x^2, \quad y = 2x^2 - 1$

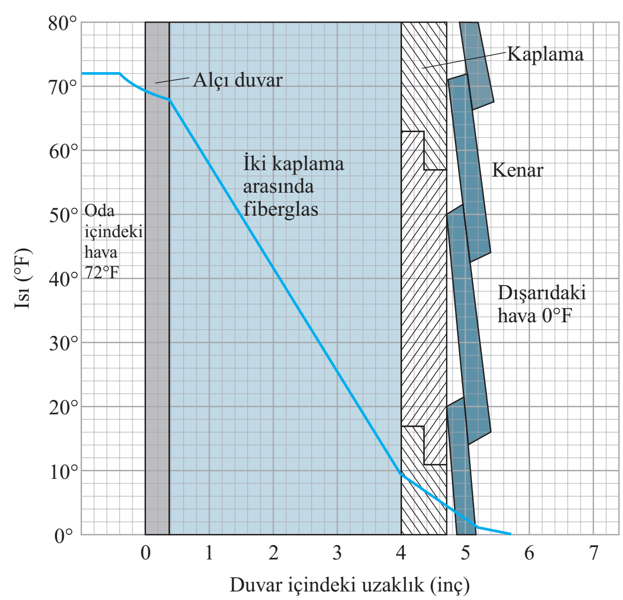
78. $y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = (x - 1)^2$

79. $x^2 + y^2 = 1, \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1$

80. $x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y = 1$

Uygulamalar

81. Yalıtım Şekildeki eğimleri ölçerek, derece/ft olarak (a) alçı duvardaki, (b) fiberglas yalıtımdaki ve (c) tahta kaplamadaki sıcaklık değişimlerini bulunuz.

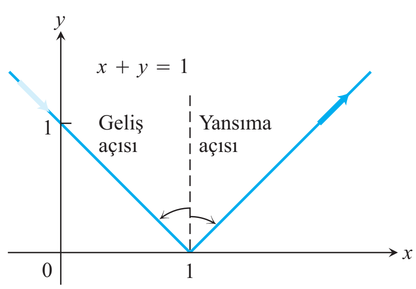


Alıştırma 81 ve 82 deki duvarda sıcaklık değişimleri.

82. **Yalıtım** Alıştırma 81'deki şekle göre, malzemelerden hangisi en iyi, hangisi en kötü yalıtkandır? Açıklayın.

83. **Su altı basıncı** Su altındaki bir dalgıç tarafından hissedilen p basıncı dalgıcın derinliği d'ye, $p = kd + 1$ (k bir sabit) şeklinde bir denklemle bağlıdır. Yüzeyde basınç 1 atmosferdir. 100 metredeki basınç ise 10.94 atmosfer civarındadır. 50 metredeki basıncı bulun.

84. **Yansıyan ışık** Bir ışık demeti ikinci bölgeden $x + y = 1$ doğrusu boyunca gelir ve x ekseninden yansır (Şekle bakınız). Geliş açısı yansıma açısına eşittir. Yansıyan ışığın izlediği doğrunun denklemini yazınız.



Alıştırma 84'deki ışık demetinin yolu. Geliş ve yansıma açıları dikey eksene göre ölçülürler.

85. **Fahrenheit ve Santigrad** FC düzleminde, Fahrenheit ve santigrad sıcaklıkları arasındaki ilişkiyi veren

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

denklemini çizin. Aynı garfik üzerinde $C = F$ doğrusunu belirtin. Santigrad ölçen termometrenin Fahrenheit ölçen bir termometreyle aynı sayısal değeri gösterdiği bir sıcaklık var mıdır? Varsa, bu sıcaklığı bulun.

86. **Washington Cog Tren Yolu** İnşaat mühendisleri bir yol yatağının eğimini yükseldiği veya alçaldığı mesafenin yatayda aldığı mesafeye oranı olarak ölçerler. Genellikle yüzde olarak yazılan bu orana da yol yatağının mertebesi derler. Bir kıyı boyunca, ticari tren yollarının **mertebesi** genellikle %2'den azdır. Dağlarda ise %4'e kadar çıkabilir. Otoyolların mertebesi genellikle %5'ten azdır.

New Hampshire'daki Washington Cog Tren Yolu' nun en dik kısmının mertebesi bir istisna olarak %37.1'dir. Yolun bu kısmında, vagonun önündeki koltuklar arkasındakilerden 14 ft daha yüksektir. Ön ve arka koltukların arasındaki uzaklık nedir?

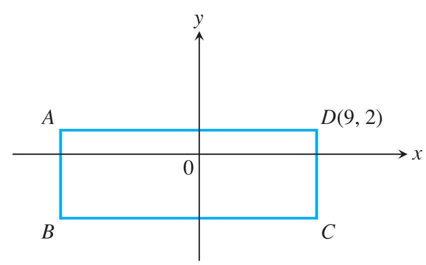
Teori ve Örnekler

87. Kenarlarının uzunluklarını hesaplayarak, köşeleri $A(1, 2)$, $B(5, 5)$ ve $C(4, -2)$ noktalarında bulunan üçgenin ikizkenar olduğunu fakat eşkenar olmadığını gösteriniz.

88. Köşeleri $A(0, 0)$, $B\left(1, \sqrt{3}\right)$ ve $C(2, 0)$ noktalarında olan üçgenin eşkenar olduğunu gösterin.

89. $A(2, -1)$, $B(1,3)$ ve $C(-3, 2)$ noktalarının bir karenin köşeleri olduğunu gösterin ve dördüncü köşeyi bulun.

90. Aşağıda gösterilen dikdörtgenin kenarları eksenlere paraleldir. Uzunluğu genişliğinin üç katıdır ve çevresi 56 birimdir. A, B ve C noktalarının koordinatlarını bulunuz.



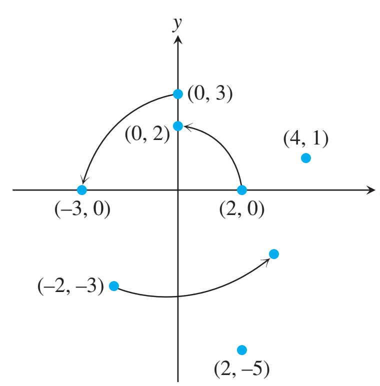
91. Üç farklı paralelkenarın köşeleri $(-1, 1)$, $(2, 0)$ ve $(2, 3)$ noktalarındadır. Bunları çizin ve herbirinin dördüncü köşesini bulun.

92. Orijin çevresinde saat yönünün tersine 90°'lik bir dönme, Şekilde gösterildiği gibi $(2, 0)$ noktasını $(0, 2)$ noktasına ve $(0, 3)$ noktasını $(-3, 0)$ noktasına götürür. Aşağıdaki noktalar bu dönme altında hangi noktaya giderler?

a. $(4, 1)$ **b.** $(-2, -3)$ **c.** $(2, -5)$

d. $(x, 0)$ **e.** $(0, y)$ **f.** (x, y)

g. $(10, 3)$ noktasına gelen nokta hangisidir?



93. Hangi k değeri için $2x + ky = 3$ doğrusu $4x + y = 1$ doğrusuna diktir? Hangi k değeri için bu doğrular paraleldir?

94. $(1, 2)$ noktasından ve $x + 2y = 3$ ve $2x - 3y = -1$ doğrularının kesişim noktasından geçen doğruyu bulun.

95. **Bir doğru parçasının orta noktası** Koordinatları

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

olan noktanın $P(x_1, y_1)$ noktasını $Q(x_2, y_2)$ noktasına bağlayan doğru parçasının orta noktası olduğunu gösterin.

96. Bir noktadan bir doğruya olan uzaklık Bir $P(x_0, y_0)$ noktasından bir $L: Ax + By = C$ doğrusuna olan uzaklığı aşağıdaki adımları izleyerek bulabiliriz (Bölüm 12.5'te daha hızlı bir yöntem verilmektedir):

1. P'den geçen ve L'ye dik olan M doğrusunun denklemini bulun
2. M ve L doğrularının kesiştikleri Q noktasının koordinatlarını bulun.
3. P ve Q arasındaki uzaklığı bulun.

Bu adımları kullanarak, aşağıdaki her durum için P'den L'ye olan uzaklığı bulun.

a. $P(2, 1), \quad L: y = x + 2$

b. $P(4, 6), \quad L: 4x + 3y = 12$

c. $P(a, b), \quad L: x = -1$

d. $P(x_0, y_0), \quad L: Ax + By = C$

1.3 Fonksiyonlar ve Grafikleri

Fonksiyonlar, analizde ele alınan temel öğelerdir çünkü onlar gerçek dünyayı matematiksel terimlerle tanımlamanın anahtarıdır. Bu bölümde fonksiyon kavramı, fonksiyonların grafikleri ve gösterimleri tekrarlanmaktadır.

Fonksiyonlar; Tanım ve Değer Kümeleri

Suyun kaynadığı sıcaklık deniz seviyesinden yüksekliğe bağlıdır (yükseldikçe kaynama noktası düşer). Bir yatırıma ödenen faiz, yatırımın ne kadar süreyle tutulduğuna bağlıdır. Bir çemberin alanı çemberin yarıçapına bağlıdır. Doğru bir yolda, bir başlangıç noktasından hareket eden bir cismin kat ettiği yol, cismin hızına bağlıdır.

Her durumda, y olarak adlandırabileceğimiz bir değişken büyüklüğün değeri, x olarak adlandırabileceğimiz başka bir değişken büyüklüğün değerine bağlıdır. y'nin değeri x'in değeriyle kesin olarak belirlenebildiğinden dolayı, y'ye x'in bir fonksiyonu deriz. y değeri genellikle, x değişkeninden nasıl hesaplanacağını söyleyen bir *kural* veya bir formülle verilir. Örneğin, $A = \pi r^2$ denklemi, r yarıçapından, bir çemberin A alanını hesaplayan bir kuraldır.

Analizde, herhangi bir formülü olmayan, belirlenmemiş bir fonksiyona başvurmak isteyebiliriz. "y, x'in bir fonksiyonudur" demenin sembolik yolu

$$y = f(x) \qquad (\text{"}y, f\text{'te } x\text{'e eşittir"})$$

yazmaktır.

Bu gösterimde, f sembolü fonksiyonu temsil etmektedir. **Bağımsız değişken** adı verilen harfi f'nin girdi değerini ve **bağımlı değişken** x ise f'nin x'teki değerine karşılık gelen, çıktı **değerini** göstermektedir.

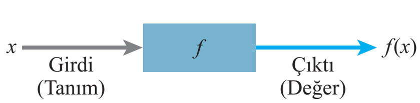
TANIM Fonksiyon

Bir D kümesinden bir Y kümesine bir **fonksiyon**, D'deki her x elemanına Y'de *tek bir* $f(x)$ elemanı karşılık getiren bir kuraldır.

Bütün olası girdi değerlerinin kümesi D'ye fonksiyonunun tanım kümesi denir. x, D üzerinde değişirken bütün $f(x)$ değerlerinin kümesine fonksiyonun değer kümesi denir. Değer kümesi Y'deki her elemanı içermeyebilir.

Bir fonksiyonun tanım ve değer kümeleri nesnelerden oluşan herhangi kümeler olabilirler. Ancak, analizde bunlar çoğu kez reel sayı kümeleridir (13–16 Bölümlerde birçok değişken dahil edilecektir).

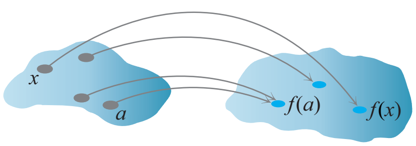
Bir f fonksiyonu, tanım kümesinden bir x değeri verdiğimizde değer kümesinde bir $f(x)$ çıktısı oluşturan bir makine gibi düşünün (Şekil 1.22). Bir hesap makinesinin işlem



ŞEKİL1.22 Bir fonksiyonun "makine" diyagramı

tuşları, bir fonksiyonun bir makine olarak örneğini verir. Örneğin, bir hesap makinesi üzerindeki $\sqrt{x}$ tuşu, negatif olmayan bir x değeri girip $\sqrt{x}$ tuşuna bastığınızda bir çıktı değeri verir (karekök). Ekranda gözüken çıktı değer genellikle x'in karekökünün bir ondalık yaklaşımı dır. Bir $x < 0$ sayısı girerseniz, hesap makinesi bir hata bildirecektir çünkü: $x < 0$ fonksiyonun tanım kümesinde değildir ve bir girdi olarak kabul edilemez. Bir hesap makinesi üzerindeki $\sqrt{x}$ tuşu, sadece ondalık çıktılarla sınırlanmış olduğundan ve sadece sonlu sayıda girdisi bulunduğundan, $f(x) = \sqrt{x}$ ile tanımlı tam matematiksel f fonksiyonu ile aynı değildir.

Bir fonksiyon bir **ok diyagramı** olarak da resmedilebilir (Şekil 1.23). Her ok, D tanım kümesinin her elemanını Y kümesinde birtek elemana bağlar. Şekil 1.23 te oklar, $f(a)$ nın a ile, $f(x)$'in x ile vs. eşlendiğini gösterir.



ŞEKİL 1.23 Bir D kümesinden bir Y kümesine bir fonksiyon D'deki her elemana Y'deki tek bir elemanı eşler.

Bir fonksiyonun tanım kümesi konu gereği kısıtlanabilir. Örneğin, $A = p\pi^2$ ile verilen alan fonksiyonunun tanım kümesi, r yarıçapının sadece pozitif olmasına izin verir. Bir $y = f(x)$ fonksiyonunu bir formülle tanımlıyorsak ve tanım kümesi açıkça belirtilmemişse veya konu gereği kısıtlanmamışsa, tanım kümesi, formülün reel y-değerleri vereceği en büyük x-değerleri kümesi olarak kabul edilir ve **doğal tanım kümesi** adını alır. Tanım kümesinin bir şekilde kısıtlanmasını istiyorsak bunu belirtmemiz gerekir. $y = x^2$ fonksiyonunun tanım aralığı bütün reel sayı kümesidir. Tanım kümesini, örneğin, pozitif x değerlerine kısıtlamak istiyorsak, "$y = x^2, x > 0$" yazmamız gerekir.

Bir formülün uygulandığı bir tanım kümesini değiştirmek genellikle değer kümesini de değiştirir. $y = x^2$ fonksiyonun değer kümesi $[0, \infty)$'dur. $y = x^2, x \geq 2$ fonksiyonunun değer aralığı ise, 2'ye eşit veya ondan büyük sayıların karelerini alarak elde edilen bütün sayıların kümesidir. Küme notasyonu ile, değer kümesi $\{x^2 | x \geq 2\}$ veya $\{y \mid y \geq 4\}$ veya $[4, \infty)$'dur.

Bir fonksiyonun değer kümesi reel sayılardan oluşuyorsa fonksiyona **reel-değerli** denir. Bir reel değişkenin reel değerli fonksiyonu olan birçok fonksiyonun tanım ve değer kümeleri, aralıklar veya aralıkların birleşimidir. Aralıklar açık, kapalı, yarı açık, sonlu veya sonsuz olabilirler.

ÖRNEK 1 Tanım ve Değer Kümelerini Belirlemek

Verilen fonksiyonların tanım ve değer kümelerini sağlayın.

Fonksiyon	Tanım aralığı (x)	Değer aralığı (y)
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = 1/x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$

Çözüm $y = x^2$ formülü her x reel sayısı için reel bir y-değeri verir, dolayısıyla tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ dur. $y = x^2$ nin değer kümesi $[0, \infty)$ dur çünkü herhangi bir reel sayının karesi negatif olmayan bir sayıdır ve negatif olmayan her y sayısı kendi karekökünün karesidir, $y \geq 0$ için $y = (\sqrt{y})^2$ dir.

$y = 1/x$ formülü $x = 0$ harici her x için reel bir y-değeri verir. *Hiç bir sayıyı sıfır ile bölemeyiz.* $y = 1/x$ 'in değer kümesi, yani 0 hariç bütün reel sayıların çarpmaya göre terslerinin kümesi, $y = 1/(1/y)$ olduğundan, sıfırdan farklı bütün reel sayılar kümesidir.

$y = \sqrt{x}$ formülü ancak $x \geq 0$ ise reel bir y-değeri verir. Negatif olmayan her sayı bir başka sayının karekökü olduğu için (yani, kendi karesinin kareköküdür), $y = \sqrt{x}$'in değer kümesi $[0, \infty)$

$y = \sqrt{4 - x}$'te ise, $4 - x$ negatif olamaz. Yani, $4 - x \geq 0$ veya $x \geq 4$ olmalıdır. Formül, $x \leq 4$ için reel y- değerleri verir. $\sqrt{4 - x}$'in değer kümesi $[0, \infty)$, yani bütün negatif olmayan sayılar kümesidir.

$y = \sqrt{1 - x^2}$ formülü $[-1, 1]$ kapalı aralığındaki her x için reel bir y-değeri verir. Bu aralığın dışında, $1 - x^2$ negatiftir ve karekökü reel bir sayı değildir. $1 - x^2$'nin ve karekökünün değerleri 0 ile 1 arasında değişir. $\sqrt{1 - x^2}$'nin değer kümesi [0, 1] dir. ■

Fonksiyonların Grafikleri

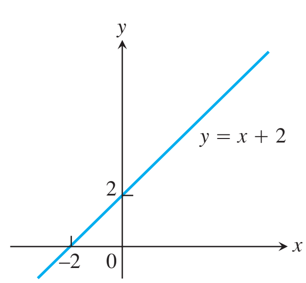
Bir fonksiyonu göz önünde canlandırmanın bir başka yolu fonksiyonun **grafiği**dir. Tanım kümesi D olan bir fonksiyon f ise grafiği, Kartezyen düzlemde koordinatları f için girdi-çıktı çiftleri olan noktalardan oluşur. Küme notasyonu ile grafik

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

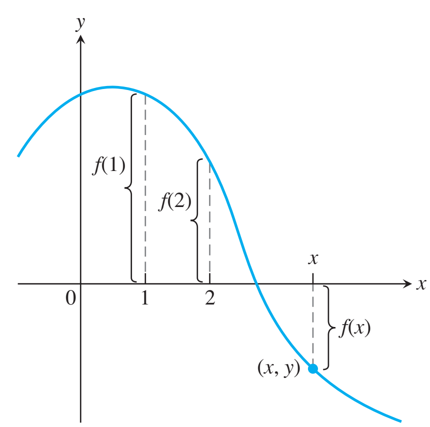
kümesidir.

$f(x) = x + 2$ fonksiyonunun grafiği, koordinatları $y = x + 2$ eşitliğini sağlayan (x, y) noktalarının kümesidir. Grafiği, Şekil 1.24'te çizilmiştir.

Bir f fonksiyonunun grafiği, onun davranışı hakkında kullanışlı bir resimdir. (x, y) grafik üzerinde bir nokta ise $y = f(x)$ değeri x-noktasında grafiğin yüksekliğidir. Yükseklik, $f(x)$'in işaretine bağlı olarak pozitif veya negatif olabilir (Şekil 1.25).



ŞEKİL 1.24 $f(x) = x + 2$'in grafiği $y = x + 2$ denklemini sağlayan (x, y) noktalarının kümesidir.



ŞEKİL 1.25 (x, y) noktası f'in grafiği üzerinde ise $y = f(x)$ değeri x noktasında grafiğin yüksekliğidir (veya $f(x)$ negatif ise x noktasının altındaki yükseklik).

ÖRNEK 2 Bir Grafik Çizmek

$[-2, 2]$ aralığında $y = x^2$ fonksiyonunun grafiğini çizin

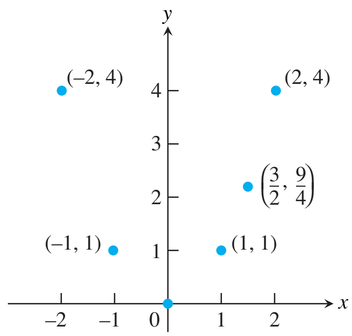
Çözüm

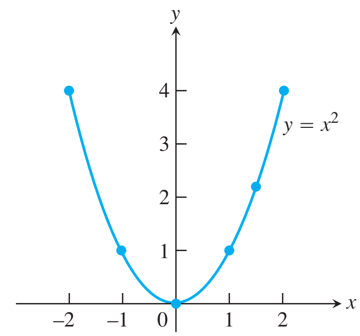
1. Fonksiyon kuralını, yani bu durumda $y = x^2$ eşitliğini sağlayan xy-ikililerinin bir tablosunu yapın.

x	$y = x^2$
−2	4
−1	1
0	0
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4

2. Koordinatları tabloda görülen (x, y) noktalarını işaretleyin. Hesaplama bakımından kolaylık için kesirler kullanın

3. İşaretlenmiş noktalarda düzgün bir eğri geçirin. Eğriyi denklemiyle adlandırın.

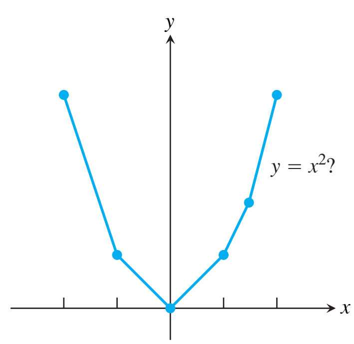


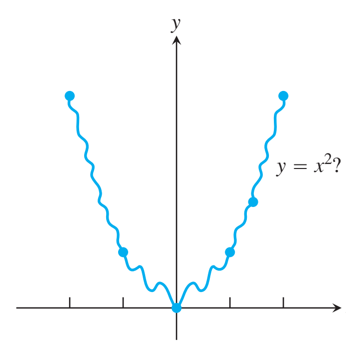


■

Bilgisayarlar ve grafik çizen hesap makineleri grafikleri bu şekilde çizerler - işaretlenmiş noktaları bir araya getirerek - ve aynı soru akla gelir.

$y = x^2$ grafiğinin aşağıdaki eğrilerden biri gibi görünmediğini nereden biliyoruz?





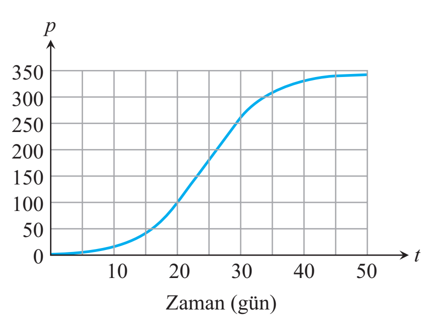
Bu soruyu cevaplamak için daha fazla nokta işaretleyebiliriz. Ancak *bunları* nasıl birleştireceğiz? Temel soru hala karşımızdadır: İşaretlediğimiz noktalar arasındaki grafiğin neye benzediğini kesin olarak nasıl bileceğiz? Sorunun cevabı, Bölüm 4'te görüleceği gibi, analizde yatmaktadır. Orada işaretlenen noktalar arasındaki eğrinin şeklini bulmak için *türev* kullanacağız. O zamana kadar, noktaları işaretlemek ve onları elimizden geldiği kadar iyi birleştirmekle yetineceğiz.

ÖRNEK 3 Bir Fonksiyonu Grafiğinden Hesaplamak

Şekil 1.26. da bir meyve sineği nüfusunun p grafiği verilmiştir.

(a) 20 ve 45 gün sonraki nüfusları bulunuz.

(b) $0 \leq t \leq 50$ zaman aralığında nüfus fonksiyonunun değer kümesi (yaklaşık olarak) nedir?



ŞEKİL 1.26 Bir meyve sineği nüfusunun zamana karşı grafiği (Örnek 3).

Çözüm

(a) Şekil 1.26 dan (20, 100) noktasının grafik üzerinde olduğunu görürüz, dolayısıyla, 20 de p nüfus değeri $p(20) = 100$ dür. Benzer şekilde $p(45)$ yaklaşık olarak 340 tır.

(b) $0 \leq t \leq 50$ aralığında nüfus fonksiyonunun değer kümesi yaklaşık olarak [0, 345] dır. Ayrıca şunu gözleyebiliyoruz, zaman ilerledikçe nüfus giderek $p = 350$ değerine yaklaşır gibi gözükmektedir. ■

Bir Fonksiyonu Sayısal Olarak Temsil Etmek

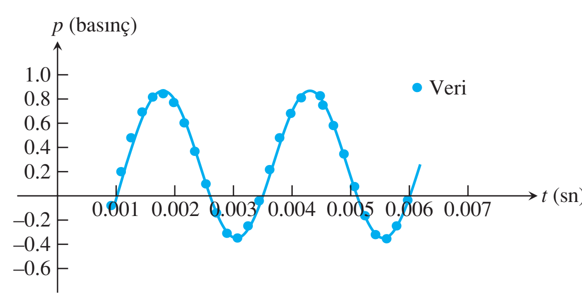
Bir fonksiyonun, cebirsel olarak bir formülle (alan fonksiyonu) ve görsel olarak bir grafikle (Örnekler 2 ve 3) nasıl temsil edilebildiğini gördük. Bir fonksiyonu temsil etmenin bir başka yolu, bir değerler tablosundan **sayısal** gösterimdir. Sayısal gösterimler daha çok mühendisler ve uygulamalı konularda çalışan bilim adamları tarafından kullanılır. Bir grafik, uygun bir değerler tablosundan Örnek 2 de gösterilen yöntem kullanılarak, muhtemelen bir bilgisayar yardımıyla, elde edilebilir. Sadece tablo noktalarının grafiğine **dağınık-çizim** denir.

ÖRNEK 4 Tablo Değerleri ile Tanımlanmış Bir Fonksiyon

Müzik notaları, hava içinde kaydedilebilir basınç dalgalarıdır. Tablo 1.2 deki veriler bir akor borusu tarafından üretilen bir müzik notasının, saniye olarak zamana karşı kaydedilmiş basınç kaymasını vermektedir. Tablo, zaman üzerinde basınç fonksiyonunun bir gösterimini vermektedir. Önce dağınık bir grafik çizer ve sonra tablodaki (t, p) veri noktalarını birleştirirsek Şekil 1.27 de gösterilen grafiği elde ederiz.

TABLO 1.2 Akor Borusu Verileri

Zaman	Basınç	Zaman	Basınç
0.00091	−0.080	0.00362	0.217
0.00108	0.200	0.00379	0.480
0.00125	0.480	0.00398	0.681
0.00144	0.693	0.00416	0.810
0.00162	0.816	0.00435	0.827
0.00180	0.844	0.00453	0.749
0.00198	0.771	0.00471	0.581
0.00216	0.603	0.00489	0.346
0.00234	0.368	0.00507	0.077
0.00253	0.099	0.00525	−0.164
0.00271	−0.141	0.00543	−0.320
0.00289	−0.309	0.00562	−0.354
0.00307	−0.348	0.00579	−0.248
0.00325	−0.248	0.00598	−0.035
0.00344	−0.041		

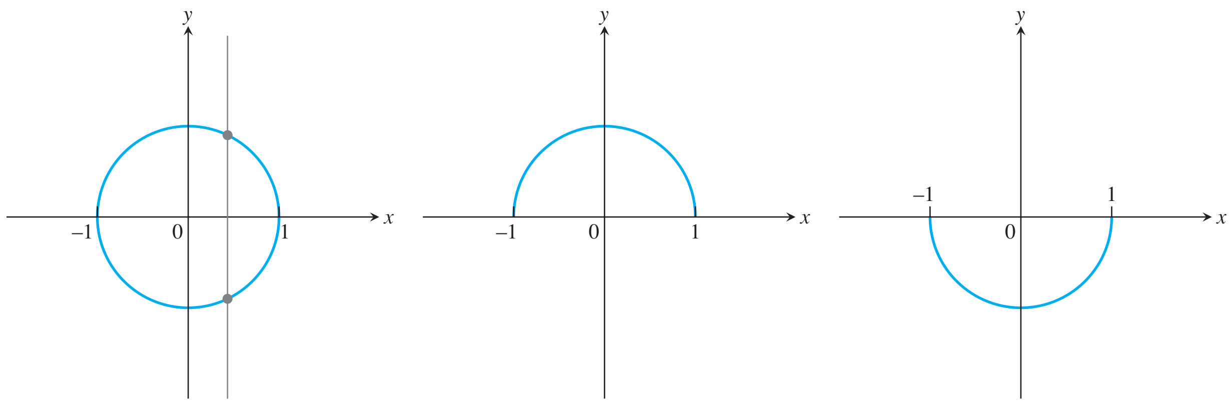


ŞEKİL 1.27 İşaretlenen noktalardan geçen düzgün bir doğru Tablo 1.2 ile temsil edilen basınç fonksiyonunun bir grafiğini verir.

Dikey Doğru Testi

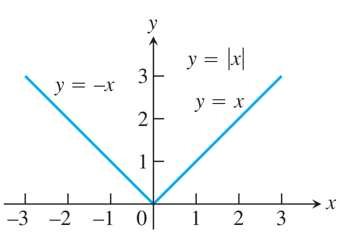
Çizdiğiniz her eğri bir fonksiyonun grafiği değildir. Bir f fonksiyonu tanım aralığındaki her x için tek bir $f(x)$ değerinden başkasını alamaz, dolayısıyla hiçbir dik doğru bir fonksiyonun grafiğini bir kereden fazla kesemez. Yani bir çember bir fonksiyonun grafiği olamaz, çünkü bazı dik doğrular çemberi iki kere keser (Şekil 1.28a). a bir f fonksiyonunun tanım kümesinde ise, $x = a$ dikey doğrusu f'nin grafiğini tek bir $(a, f(a))$ noktasında kesecektir.

Halbuki Şekil 1.28a'daki çember x'in iki fonksiyonunun grafiğini içermektedir; $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ fonksiyonu ile tanımlı üst yarıçember ve $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ fonksiyonu ile tanımlı alt yarıçember (Şekiller 1.28b ve 1.28c).

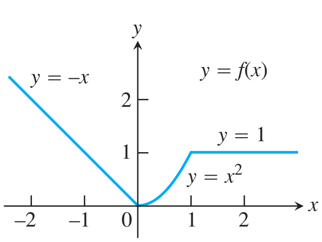


(a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) $y = \sqrt{1 - x^2}$ (c) $y = -\sqrt{1 - x^2}$

ŞEKİL 1.28 (a) Çember bir fonksiyonunun grafiği değildir; dik doğru testini sağlamaz. (b) üst yarıçember bir $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ fonksiyonun grafiğidir. (c) alt yarıçember bir $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ fonksiyonun grafiğidir.



ŞEKİL 1.29 Mutlak değer fonksiyonunun tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ ve değer kümesi $[0, \infty)$.



ŞEKİL 1.30 Burada gösterilen $y = f(x)$ fonksiyonunu çizmek için, tanım aralığındaki farklı kısımlara değişik formüller uygularız (Örnek 5).

Parçalı Olarak Tanımlanan Fonksiyonlar

Bazen bir fonksiyon tanım aralığının farklı bölgeleri için değişik formüllerle verilebilir. Bunlardan biri grafiği Şekil 1.29'da verilen **mutlak değer fonksiyonu** dur:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Aşağıda bu tip fonksiyonlara birkaç örnek verilmektedir.

ÖRNEK 5 Parçalı Olarak Tanımlı Fonksiyonların Grafiklerini Çizmek

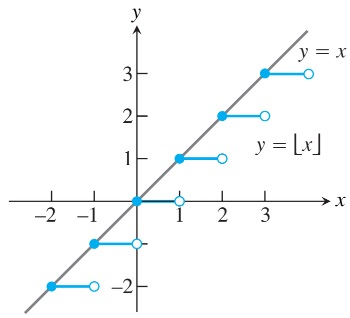
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

fonksiyonu bütün reel doğru üzerinde tanımlıdır, ancak değerleri x'in konumuna bağlı olan farklı formüllerle bulunur. f'nin değerleri: $x < 0$ iken $y = -x$ ile, $0 \leq x \leq 1$ iken $y = x^2$ ile ve $x > 1$ iken $y = 1$ ile verilir. Halbuki fonksiyon, tanım kümesi bütün reel sayılar kümesi olan *sadece bir fonksiyon*dur. (Şekil 1.30). ■

ÖRNEK 6 En Büyük Tamsayı Fonksiyonu

Herhangi bir x sayısındaki değeri x'ten küçük veya x'e eşit en büyük tamsayı olan fonksiyona en **büyük tamsayı fonksiyonu** veya **tamsayı taban fonksiyonu** denir. $\lfloor x \rfloor$ veya bazı kitaplarda [x] veya [[x]] ile gösterilir. Şekil 1.31'de grafiği görülmektedir.

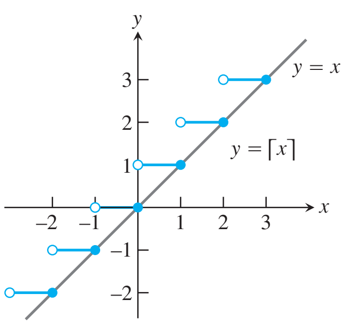
$$\lfloor 2.4 \rfloor = 2, \quad \lfloor 1.9 \rfloor = 1, \quad \lfloor 0 \rfloor = 0, \quad \lfloor -1.2 \rfloor = -2,$$
$$\lfloor 2 \rfloor = 2, \quad \lfloor 0.2 \rfloor = 0, \quad \lfloor -0.3 \rfloor = -1 \quad \lfloor -2 \rfloor = -2.$$ ■



ŞEKİL 1.31 En büyük tamsayı fonksiyonu $y = \lfloor x \rfloor$'in grafiği $y = x$ doğrusunda veya doğrunun altında bulunur ve böylece x için bir tamsayı tabanı oluşturur (Örnek 6).

ÖRNEK 7 En Küçük Tamsayı Fonksiyonu

Herhangi bir x *sayısındaki değeri x'ten büyük veya x'e eşit en küçük tamsayı olan* fonksiyona **en küçük tamsayı fonksiyonu** veya **tamsayı tavan fonksiyonu** denir. $\lceil x \rceil$ ile gösterilir. Şekil 1.32'de grafiği görülmektedir. Bu fonksiyon, x'in pozitif değerleri için örneğin, bir saat için \$1 alan bir park yerinde x saat kalmanın ederini gösteriyor olabilir. ■



ŞEKİL 1.32 En küçük tamsayı fonksiyonu $y = \lceil x \rceil$'in grafiği $y = x$ doğrusunda veya doğrunun üstünde bulunur ve böylece x için bir tamsayı tavanı oluşturur. (Örnek 7).

ÖRNEK 8 Parçalı Olarak Tanımlı Fonksiyonlar İçin Formüller Yazmak

Şekil 1.33 te, grafiği iki doğru parçasından oluşan $y = f(x)$ fonksiyonu için bir formül yazınız.

Çözüm (0, 0)'dan (1, 1)'e ve (1, 0)'dan (2, 1)'e olan doğru parçaları için formüller bulur ve bunları Örnek 5 teki gibi birleştiririz.

(0, 0)'dan (1, 1)'e olan doğru parçası: (0, 0) ve (1, 1) den geçen doğrunun eğimi $m = (1 - 0)/(1 - 0) = 1$ dir ve y-kesim noktası $b = 0$ dır. Eğim-kesim noktası denklemi $y = x$ dir. (0, 0)'dan (1, 1)'e olan ve (0, 0) noktasını içeren fakat (1, 1) noktasını içermeyen doğru parçası, $0 \le x < 1$ yarı-açık aralığına kısıtlanmış $y = x$ fonksiyonunun grafiği dir, yani fonksiyon

$$y = x, \quad 0 \le x < 1$$

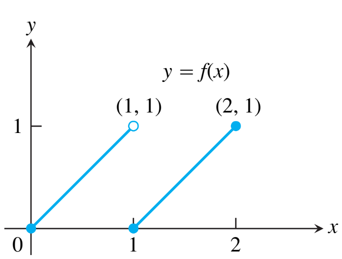
dir.

(1, 0)'dan (2, 1)'e olan doğru parçası: (1, 0) ve (2, 1) den geçen doğrunun eğimi $m = (1 - 0)/(2 - 1) = 1$ dir ve (1, 0) noktasından geçer. Doğruya karşı gelen nokta-eğim denklemi

$$y = 0 + 1\,(x - 1) \text{ veya } y = x - 1$$

dir. (1, 0)'dan (2, 1)'e olan ve her iki uç noktasını da içeren doğru parçası, $1 \le x \le 2$ kapalı aralığına kısıtlanmış $y = x - 1$ fonksiyonunun grafiği dir, yani fonksiyon

$$y = x - 1, \quad 1 \le x \le 2$$



ŞEKİL 1.33 Soldaki doğru parçası (0, 0) noktasını içerir fakat (1, 1) noktasını içermez. Sağdaki doğru parçası ise her iki uç noktasını da içerir (Örnek 8).

Parçalı formül Grafiğin iki parçası için elde edilen formüller birleştirilerek

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ x - 1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$ ■

elde edilir.

ALIŞTIRMALAR 1.3

Fonksiyonlar

1–6 alıştırmalarında her fonksiyonun tanım ve değer kümelerini bulunuz.

1. $f(x) = 1 + x^2$

2. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

3. $F(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

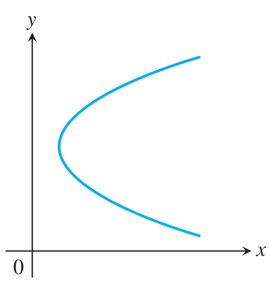
4. $F(t) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{t}}$

5. $g(z) = \sqrt{4 - z^2}$

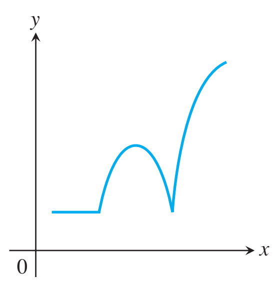
6. $g(z) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - z^2}}$

7 ve 8 alıştırmalarında verilen grafiklerden hangileri x'in bir fonksiyonunun grafiğidir, hangileri değildir? Cevabınızı açıklayın.

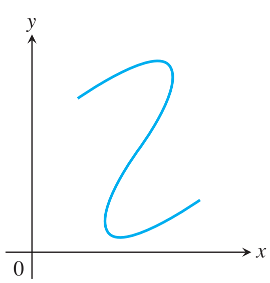
7. a.



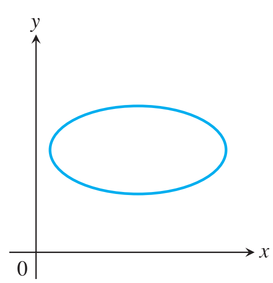
b.



8. a.



b.



9. $y = \sqrt{(1/x) - 1}$ fonksiyonunu göz önüne alın.

a. x negatif olabilir mi?

b. $x = 0$ olabilir mi?

c. x, 1'den büyük olabilir mi?

d. Fonksiyonun tanım kümesi nedir?

10. $y = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$ fonksiyonunu göz önüne alın.

a. x negatif olabilir mi?

b. $\sqrt{x}$ 2'den büyük olabilir mi?

c. Fonksiyonun tanım kümesi nedir?

Fonksiyonların Formüllerini Bulma

11. Eşkenar bir üçgenin alanını ve çevresini, üçgenin kenar uzunluğu olan x'in bir fonksiyonu olarak ifade edin.

12. Bir karenin kenar uzunluğunu köşegen uzunluğu olan d'nin bir fonksiyonu olarak ifade edin. Daha sonra karenin alanını köşegen uzunluğunun bir fonksiyonu olarak yazın.

13. Bir kübün kenar uzunluğunu köşegen uzunluğu olan d'nin bir fonksiyonu olarak ifade edin. Sonra kübün alanını ve hacmini köşegen uzunluğunun bir fonksiyonu olarak yazın.

14. Birinci bölgedeki bir P noktası $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun grafiği üzerindedir. P'nin koordinatlarını, P'yi orijine bağlayan doğrunun eğiminin fonksiyonu olarak yazın.

Fonksiyonlar ve Grafikler

15-20 alıştırmalarındaki fonksiyonların tanım kümelerini bulun ve grafiklerini çizin.

15. $f(x) = 5 - 2x$

16. $f(x) = 1 - 2x - x^2$

17. $g(x) = \sqrt{|x|}$

18. $g(x) = \sqrt{-x}$

19. $F(t) = t/|t|$

20. $G(t) = 1/|t|$

21. Aşağıdaki denklemlerin grafiklerini çizin ve neden x'in fonksiyonlarının grafikleri olmadıklarını açıklayın.

a. $|y| = x$

b. $y^2 = x^2$

22. Aşağıdaki denklemlerin grafiklerini çizin ve neden x'in fonksiyonlarının grafikleri olmadıklarını açıklayın.

a. $|x| + |y| = 1$

b. $|x + y| = 1$

Parçalı Olarak Tanımlanan Fonksiyonlar

23–26 alıştırmalarındaki fonksiyonların grafiklerini çizin.

23. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

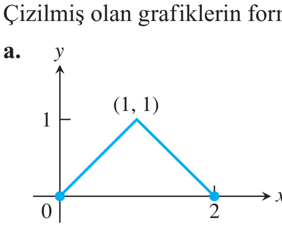
24. $g(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

25. $F(x) = \begin{cases} 3 - x, & x \le 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$

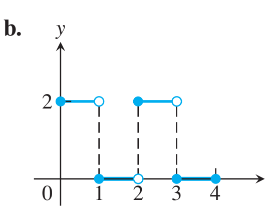
26. $G(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \end{cases}$

27. Çizilmiş olan grafiklerin formüllerini bulun.

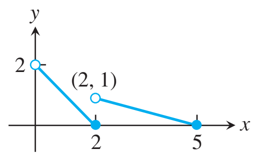
a.



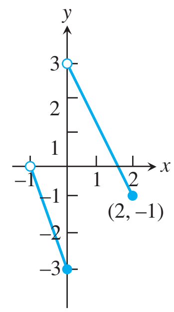
b.



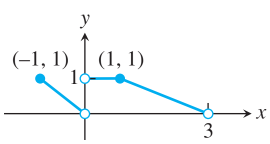
28. a.



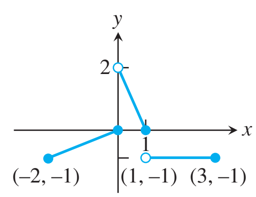
b.



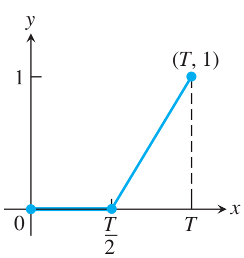
29. a.



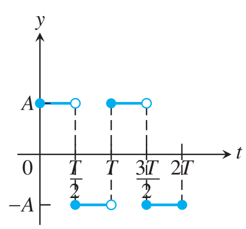
b.



30. a.



b.



31. a. $f(x) = x/2$ ve $g(x) = 1 + (4/x)$ fonksiyonlarını grafiklerini birlikte çizin ve $\frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x}$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerini bulunuz.

b. (a) da bulduklarınızı cebirsel olarak doğrulayın.

32. a. $f(x) = 3/(x-1)$ ve $g(x) = 2/(x+1)$ fonksiyonlarını grafiklerini birlikte çizin ve $\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerini bulunuz.

b. (a) da bulduklarınızı cebirsel olarak doğrulayın.

En Büyük ve En Küçük Tamsayı Fonksiyonları

33. x'in hangi değerleri için

a. $\lfloor x \rfloor = 0$? **b.** $\lceil x \rceil = 0$?

34. Hangi reel x sayıları $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ eşitliğini sağlar?

35. Bütün reel x'ler için $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$ sağlanır mı? Nedenini açıklayınız.

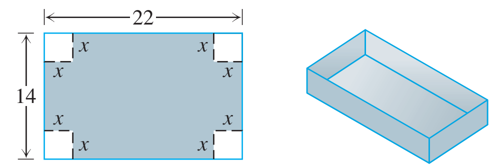
36.

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \geq 0 \\ \lceil x \rceil, & x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğini çizin. $f(x)$'e neden x'in *tamsayı kısmı* denir?

Teori ve Örnekler

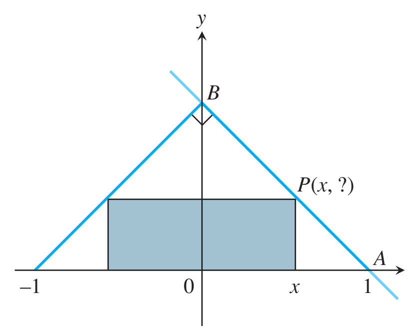
37. Kenarları 14 ve 22 inç olan bir kartonun köşelerinden eşit kareler kesip, kenarları katlayarak açık bir dikdörtgen kutu yapmayı planlıyorsunuz. Kutunun hacmi V'yi x'in bir fonksiyonu olarak ifade edin.



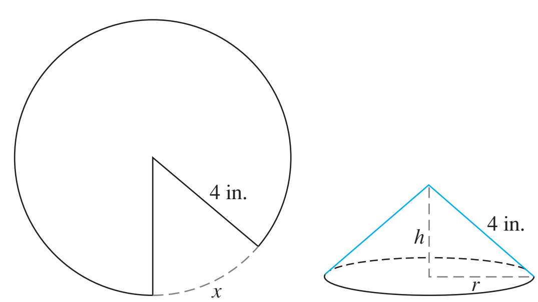
38. Aşağıda verilen şekil hipotenüsü 2 birim uzunluğunda bir ikizkenar dik üçgenin içine yerleştirilmiş bir dikdörtgeni göstermektedir.

a. P'nin y koordinatını x cinsinden ifade edin (İşe, AB doğrusu için bir denklem yazarak başlayabilirsiniz).

b. Dikdörtgenin alanını x cinsinden ifade edin.



39. Bir Koni Problemi (a) da gösterildiği gibi yarıçapı 4 inç olan dairesel bir kağıt parçası ile başlayınız. Yay uzunluğu x olan bir dilim kesip atınız. Geriye kalan parçanın kenarlarını, (b) de gösterildiği gibi yarıçapı r ve yüksekliği h olan bir koni elde etmek için birleştiriniz.



(a) (b)

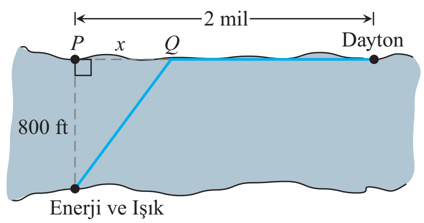
a. Koninin taban çevresinin neden $8\pi - x$ olduğunu açıklayınız.

b. r yarıçapını x'in bir fonksiyonu olarak ifade ediniz.

c. h yüksekliğini x'in bir fonksiyonu olarak ifade ediniz.

d. Koninin V hacmini x'in bir fonksiyonu olarak ifade ediniz.

40. Endüstriyel Maliyet Dayton Enerji ve Işık Şti.'nin Miami Nehri Üzerinde nehrin 800 ft geniş olduğu bir noktada bir Enerji İşletmesi vardır. Nehrin karşı kıyısında 2 mil aşağıdaki şehrin bir yerine yeni bir kablo döşemenin maliyeti, nehir boyunca foot (ayak) başına $180, kıyı boyunca foot başına $100 dır.



a. Kablonun tesisten, karşı kenarda tesisin tam karşısındaki P noktasından x ft uzaklıktaki bir Q noktasına doğrudan gittiğini kabul edin. Kablonun döşeme maliyetini x uzaklığı cinsinden veren bir $C(x)$ fonksiyonu yazın.

b. En ucuz maliyetli Q noktasının yerinin P den uzaklığı 2000 ft den daha mı az veya 2000 ft den daha mı fazla olduğunu belirlemek için bir değerler tablosu oluşturun.

41. Bir eğrinin grafiğinin *x-eksenine göre simetrik* olması için gerek ve yeter şart (x, y) noktası grafik üzerinde ise $(x, -y)$ noktasının da grafik üzerinde olmasıdır. *x-eksenine göre simetrik* olan bir eğrinin neden bir fonksiyonun ($y = 0$ fonksiyonu dışında) grafiği olmadığını açıklayın .

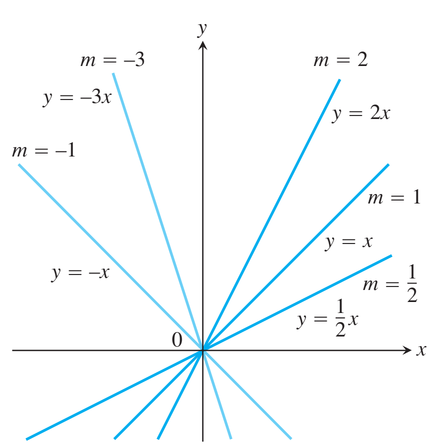
42. Bir sihirbazlık hilesi Şuna benzeyen bir sihirbazlık hilesi duymuş olabilirsiniz: Herhangi bir sayı seçin. 5 ekleyin. İkiyle çarpın. 6 çıkarın. İkiye bölün. 2 çıkarın. Şimdi bana sonucu söyleyin, ben de size seçtiğiniz sayıyı söyliyeyim. Bir sayı seçin ve bunu deneyin.

Seçtiğiniz sayıyı x olarak alıp, sonucunuzu bir $f(x)$ formülü haline getirecek şekilde adımları izlerseniz, bunun nasıl yapıldığını anlayabilirsiniz.

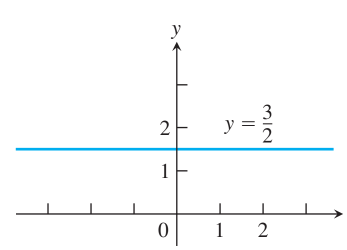
1.4 Fonksiyonları Tanımlamak; Matematik Modeller

Analizde sıkça karşılaşılan birkaç önemli fonksiyon tipi vardır. Burada onları tanımlayıp kısaca özetleyeceğiz.

Lineer Fonksiyonlar m ve b sabitler olmak üzere $f(x) = mx + b$ şeklindeki bir fonksiyona lineer fonksiyon denir. Şekil 1.34 te $b = 0$ için $f(x) = mx$ doğrularından bazıları görülmektedir, yani bu doğrular orijinden geçerler. $m = 0$ eğimi için sonuç sabit foksiyondur (Şekil 1.35).



ŞEKİL 1.34 $y = mx$ doğrularının eğimleri m dir ve hepsi orijinden geçerler.

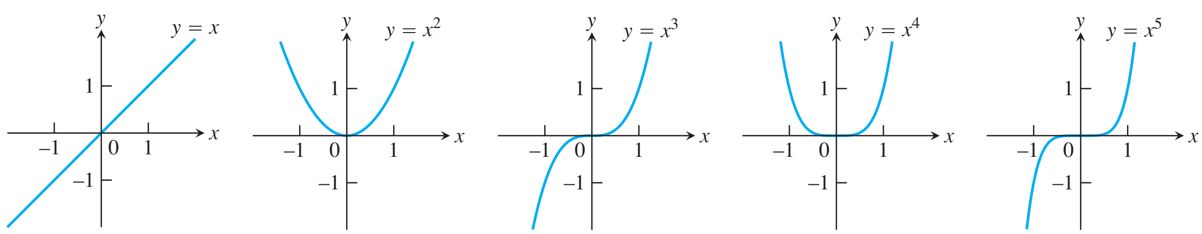


ŞEKİL 1.35 Bir sabit fonksiyonun eğimi $m = 0$ dır.

Kuvvet Fonksiyonları Bir a sabiti için $f(x) = x^a$ şeklindeki bir fonksiyona **kuvvet fonksiyonu** denir. Dikkate alınması gereken birkaç önemli durum vardır.

(a) $a = n$, bir pozitif tam sayı.

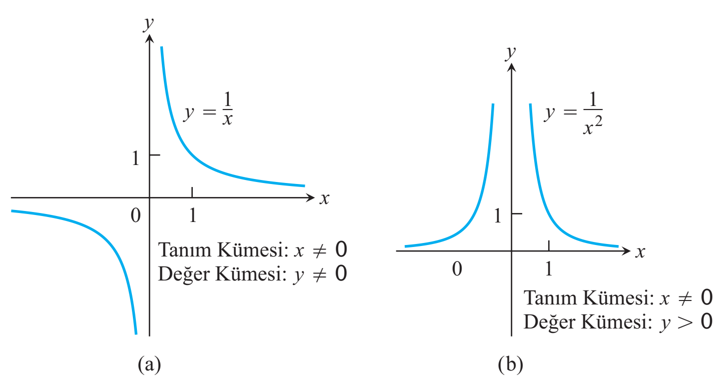
$n = 1, 2, 3, 4, 5$ için $f(x) = x^n$'in grafikleri Şekil 1.36 da gösterilmektedir. Bu fonksiyonlar x'in bütün reel değerleri için tanımlıdır. n kuvveti büyüdükçe eğrilerin $(-1, 1)$ aralığında x-eksenine doğru yassılaştığına, ayrıca $|x| > 1$ için daha dik yükseldiğine dikkat edin. Her eğri (1.1) noktasından ve orijinden geçer.



ŞEKİL 1.36 $n = 1, 2, 3, 4, 5$ için $f(x) = x^n$'in grafikleri $-\infty < x < \infty$ için tanımlıdır.

(b) $a = -1$ veya $a = -2$.

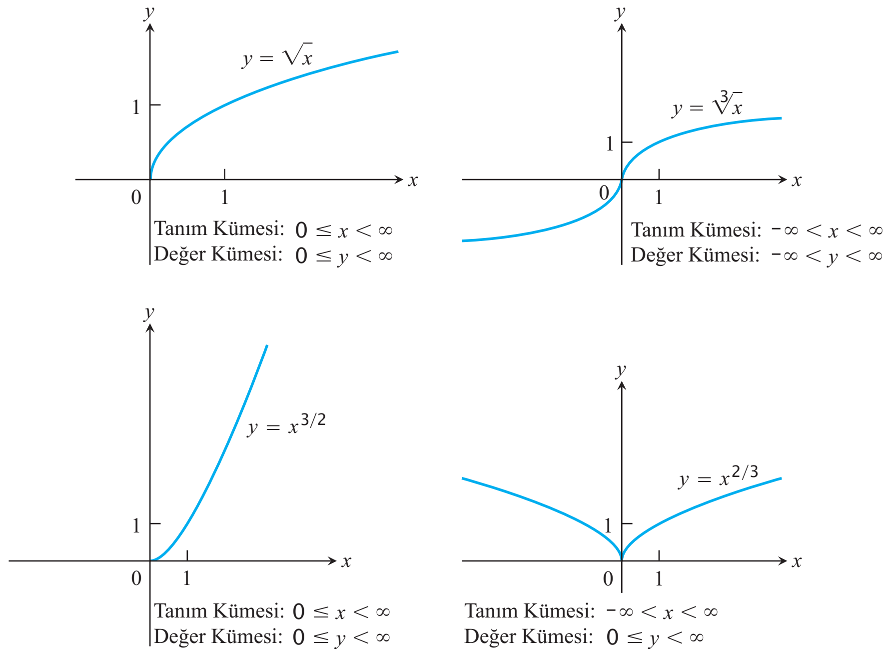
$f(x) = x^{-1} = 1/x$ ve $g(x) = x^{-2} = 1/x^2$ fonksiyonlarının grafikleri Şekil 1.37 de gösterilmiştir. Her iki fonksiyonda her $x \neq 0$ için tanımlıdır (asla sıfır ile bölemezsiniz). $y = 1/x$'in grafiği, orijinden uzaklaştıkça eksenlere yaklaşan $xy = 1$ hiperbolüdür. $y = 1/x^2$'nin grafiği de koordinat eksenlerine yaklaşır.



ŞEKİL 1.37 (a) $a = -1$ ve (b) $a = -2$ için $f(x) = x^a$ fonsiyonlarının grafikleri.

(c) $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ ve $\frac{2}{3}$

$f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ ve $g(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ fonksiyonları sırasıyla **karekök** ve **küpkök** fonksiyonlarıdır. Karekök fonksiyonunun tanım kümesi $[0, \infty)$ dur, fakat küpkök fonksiyonu bütün reel x'ler için tanımlıdır. Grafikleri, Şekil 1.38 de $y = x^{3/2}$ ve $y = x^{2/3}$'ün grafikleri ile birlikte verilmiştir ($x^{3/2} = (x^{1/2})^3$ ve $x^{2/3} = (x^{1/3})^2$ olduğunu hatırlayın).

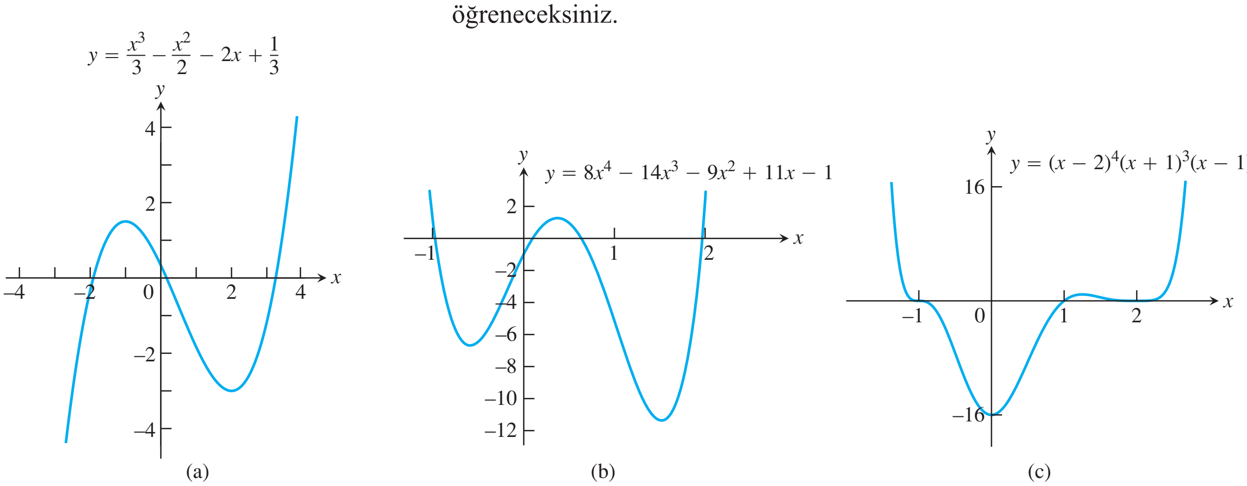


ŞEKİL 1.38 $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ ve $\frac{2}{3}$. için $f(x) = x^a$ fonksiyonlarının grafikleri.

Polinomlar n, negatif olmayan bir tam sayı ve $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sayıları (polinomun **katsayıları** denir) reel sabitler olmak üzere

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ile tanımlı p fonksiyonuna **polinom** denir. Bütün polinomların tanım kümeleri $(-\infty, \infty)$ dur. İlk katsayı $a_n \neq 0$ ve $n > 0$ ise n'ye polinomun **derecesi** denir. $m \neq 0$ ile lineer fonksiyonlar 1. dereceden polinomlardır. Genellikle $p(x) = ax^2 + bx + c$ şeklinde yazılan 2. derece polinomlara **quadratik fonksiyonlar** denir. Benzer şekilde 3. dereceden $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinomları **kübik fonksiyonlar** dır. Şekil 1.39 da üç polinomun grafikleri görülmektedir. Polinomların grafiklerinin nasıl çizildiğini Bölüm 4'te öğreneceksiniz.



ŞEKİL 1.39 Üç Polinom fonksiyon grafiği.

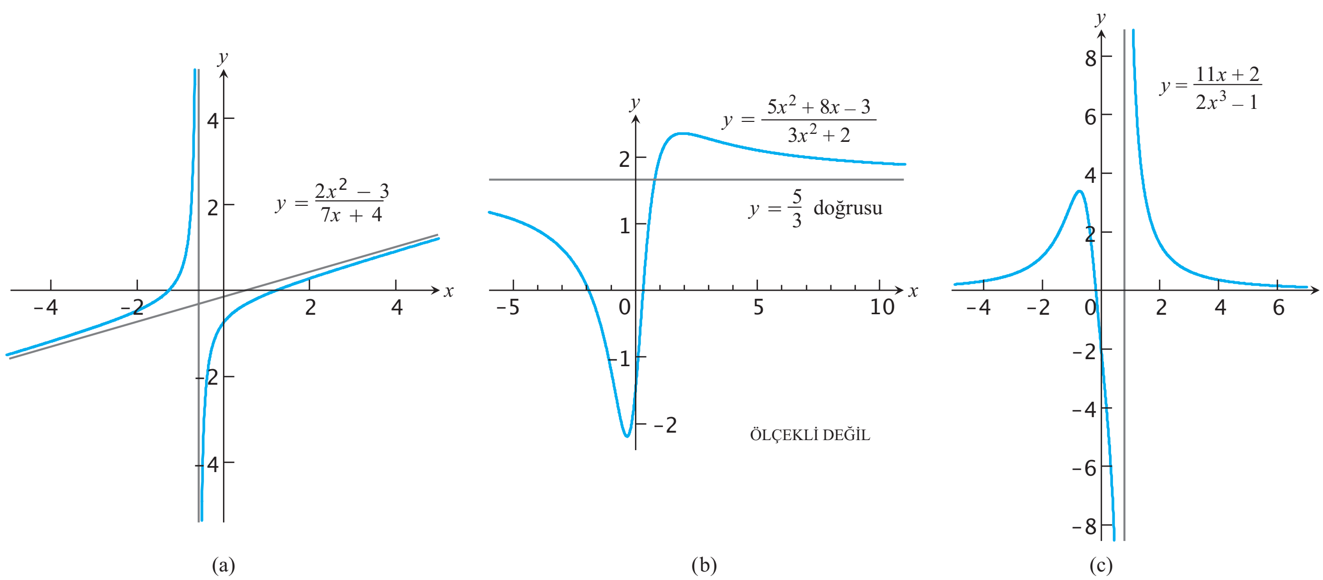
Rasyonel Fonksiyonlar Bir **rasyonel fonksiyon** iki polinomun bölümü veya oranıdır:

$$p \text{ ve } q \text{ polinomlar olmak üzere } \quad f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Bir rasyonel fonksiyonun tanım kümesi, $q(x) \neq 0$ koşulunu sağlayan bütün x reel sayılarının kümesidir. Örneğin,

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4}$$

fonksiyonu, tanım kümesi $\{x \mid x \neq -4/7)$ olan bir rasyonel fonksiyondur. Grafiği, Şekil 1.40a da diğer iki rasyonel fonksiyon grafikleri Şekil 1.40b ve Şekil 1.40c ile birlikte gösterilmiştir.



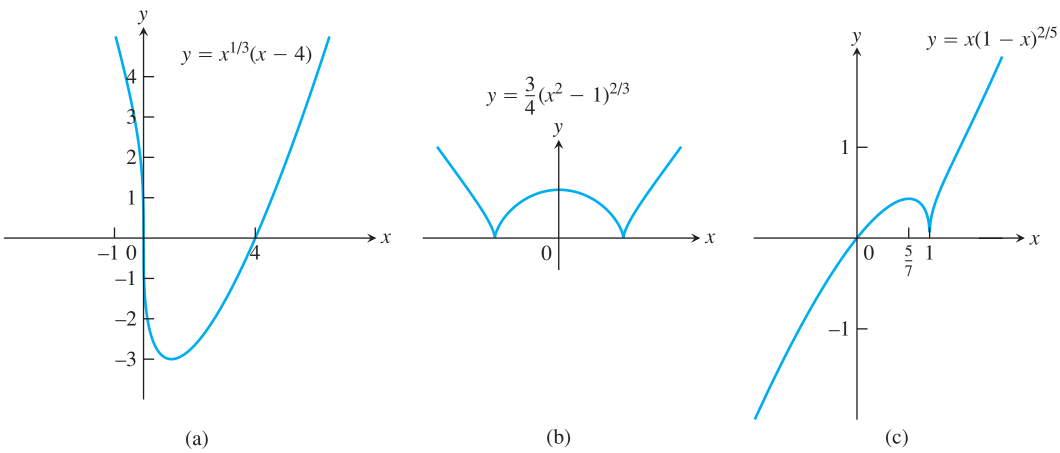
ŞEKİL 1.40 Üç rasyonel fonksiyon grafiği.

Cebirsel Fonksiyonlar Bir **cebirsel fonksiyon**, polinomlardan, cebirsel işlemler kullanılarak (toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve kök alma), polinomlardan elde edilen bir fonksiyondur. Rasyonel fonksiyonlar cebirsel fonksiyonların bir özel halidir. Şekil 1.41 de üç cebirsel fonksiyonun grafikleri görülmektedir.

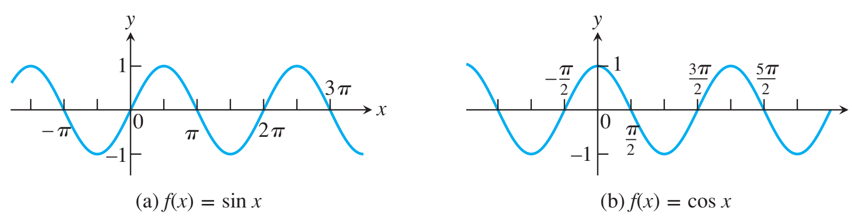
Trigonometrik Fonksiyonlar Trigonometrik fonksiyonları Bölüm 1.6 da inceleyeceğiz. sinüs ve cosinüs fonksiyonlarının grafikleri Şekil 1.42 de gösterilmiştir.

Üstel Fonksiyonlar Taban $a > 0$ pozitif bir sabit ve $a \neq 1$ olmak üzere $f(x) = a^x$ şeklindeki fonksiyonlara **üstel fonksiyonlar** denir. Bütün üstel fonksiyonların tanım kümeleri $(-\infty, \infty)$ ve değer kümeleri $(0, \infty)$ dur. Dolayısıyla, bir üstel fonksiyon hiçbir zaman 0 değerini almaz. Bazı üstel fonksiyon grafikleri Şekil 1.43 te gösterilmiştir. Üstel fonksiyonların analizi Bölüm 7 de yapılmaktadır.

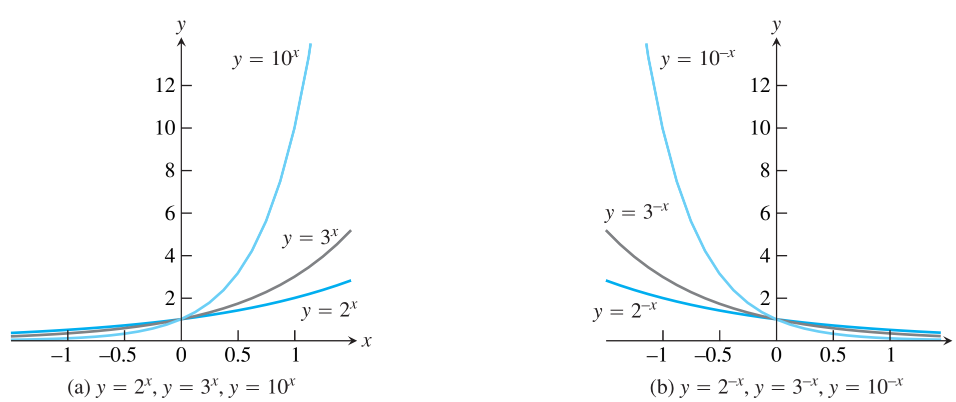
Logaritmik Fonksiyonlar Bunlar, $a \neq 1$ pozitif bir sabit olmak üzere $f(x) = \log_a x$ şeklindeki fonksiyonlardır. Üstel fonksiyonların *ters fonksiyonları*'dırlar ve bu fonksiyonlar Bölüm 7



ŞEKİL 1.41 Üç cebirsel fonksiyon grafiği.



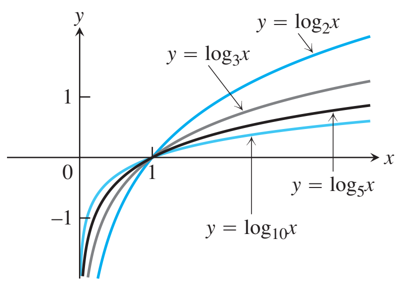
ŞEKİL 1.42 Sinüs ve cosinüs fonksiyonlarının grafikleri.



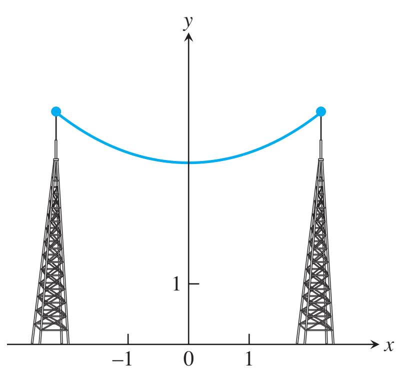
ŞEKİL 1.43 Üstel fonksiyonlarının grafikleri.

de incelenmektedir. Şekil 1.44 te değişik tabanlı dört logaritmik fonksiyon grafiği görülmektedir. Her birinde tanım kümesi $(0, \infty)$ ve değer kümesi $(-\infty, \infty)$ dur.

Transandant Fonksiyonlar Bunlar cebirsel olmayan fonksiyonlardır. Trigonometrik, ters trigonometrik, üstel ve logaritmik fonksiyonlar ve (Bölüm 7 de incelenen hiperbolik fonksiyonlar gibi) birçok başka fonksiyon içerirler. Transandant fonksiyona bir örnek bir



ŞEKİL 1.44 Dört logaritmik fonksiyon grafiği.



ŞEKİL 1.45 Catenary veya sarkan kablo grafiği (Catena Latince'de "zincir" demektir)

catenary dir. Grafiği bir kablo şeklini alır, iki destek arasında asılı ve kendi ağırlığıyla serbestçe sarkan bir telefon hattı veya TV kablosu gibi (Şekil 1.45).

ÖRNEK 1 Fonksiyonları Tanımak

Aşağıda verilen her fonksiyonu incelediğimiz fonksiyon tiplerinden biri olarak tanımlayın. Şunu unutmayın, bazı fonksiyonlar birden fazla kategoriye girebilir. Örneğin, $f(x) = x^2$ hem bir kuvvet fonksiyonu ve hem de ikinci dereceden bir polinomdur.

(a) $f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^5$ **(b)** $g(x) = 7^x$ **(c)** $h(z) = z^7$

(d) $y(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

Çözüm

(a) $f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^5$ 5. dereceden bir polinomdur.

(b) $g(x) = 7^x$ tabanı 7 olan bir üstel fonksiyondur. x değişkeninin kuvvet olduğuna dikkat edin.

(c) $h(z) = z^7$ bir kuvvet fonksiyonudur. (Taban z değişkenidir)

(d) $y(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$ bir trigonometrik fonksiyondur. ■

Artan ve Azalan Fonksiyonlar

Soldan sağa doğru hareket edildiğinde bir fonksiyonun grafiği tırmanıyorsa veya yükseliyorsa fonksiyon *artan* dır deriz. Soldan sağa doğru hareket edildiğinde grafik aşağıya iniyorsa veya alçalıyorsa fonksiyon *azalan* dır deriz. Artan fonksiyonların ve azalan fonksiyonarın formel tanımlarını bölüm 4.3 te veriyoruz. O bölümde, bir fonksiyonun artan olduğu aralıkların ve azalan olduğu aralıkların nasıl bulunduğunu öreneceksiniz. Aşağıda Şekil 1.36, 1.37 ve 1.38. den örnekler verilmiştir.

Fonksiyon	**Arttığı yer**	**Azaldığı yer**
$y = x^2$	$0 \le x < \infty$	$-\infty < x \le 0$
$y = x^3$	$-\infty < x < \infty$	Hiçbiryer
$y = 1/x$	Hiçbiryer	$-\infty < x < 0$ ve $0 < x < \infty$
$y = 1/x^2$	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
$y = \sqrt{x}$	$0 \le x < \infty$	Hiçbiryer
$y = x^{2/3}$	$0 \le x < \infty$	$-\infty < x \le 0$

Çift Fonksiyonlar ve Tek Fonksiyonlar: Simetri

Çift ve *tek* fonksiyonların grafiklerinin karakteristik simetri özellikleri vardır.

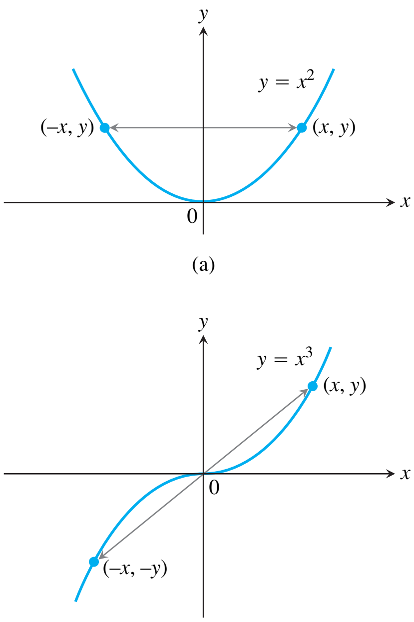
TANIMLAR Çift Fonksiyonlar, Tek Fonksiyonlar

Bir $y = f(x)$ fonksiyonu tanım kümesindeki her x için

$$f(-x) = f(x) \text{ ise } \textbf{çift fonksiyon}$$

$$f(-x) = -f(x) \text{ ise } \textbf{tek fonksiyon}$$

dur.



ŞEKİL 1.46 (a) da $y = x^2$'nin (bir çift fonksiyon) grafiği y-eksenine göre simetriktir. (b) de $y = x^3$'ün (bir tek fonksiyon) grafiği orijine göre simetriktir

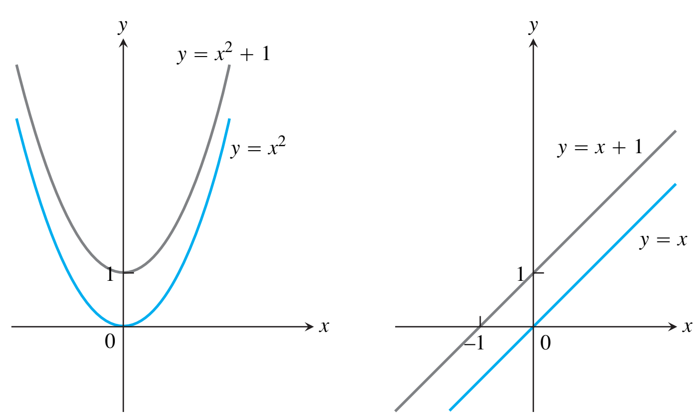
Çift ve tek isimleri x'in kuvvetlerinden gelmektedir. $y = x^2$ veya $y = x^4$ te olduğu gibi y x'in bir çift kuvveti ise bir çift fonksiyondur (çünkü $(-x)^2 = x^2$ ve $(-x)^4 = x^4$ tür). $y = x$ veya $y = x^3$ te olduğu gibi y x'in bir tek kuvveti ise bir tek fonksiyondur (çünkü $(-x)^1 = -x$ ve $(-x)^3 = -x^3$ tür).

Bir çift fonksiyonun grafiği **y-eksenine göre simetrik**tir. $f(-x) = f(x)$ olduğundan ancak ve yalnız $(-x, y)$ noktası grafik üzerinde ise (x, y) noktası da grafik üzerindedir (Şekil 1.46a). y-ekseninden bir yansıma grafiği değiştirmeden bırakır.

Bir tek fonksiyonun grafiği **orijine göre simetrik**tir. $f(-x) = -f(x)$ olduğundan ancak ve yalnız $(-x, -y)$ noktası grafik üzerinde ise (x, y) noktası da grafik üzerindedir (Şekil 1.46b). Eşdeğer olarak, orijin etrafında 180° lik bir dönme grafiği değiştirmeden bırakırsa grafik orijine göre simetriktir. Şuna dikkat edin, tanımlar x ve $-x$'in herikisinin de f'nin tanım kümesinde olmasını gerektirir.

ÖRNEK 2 Çift ve Tek Fonksiyonları Tanımak

$f(x) = x^2$	Çift fonksiyon: her x için $(-x)^2 = x^2$; y-eksenine göre simetri.
$f(x) = x^2 + 1$	Çift fonksiyon: her x için $(-x)^2 + 1 = x^2 + 1$; y-eksenine göre simetri (Şekil 1.47a).

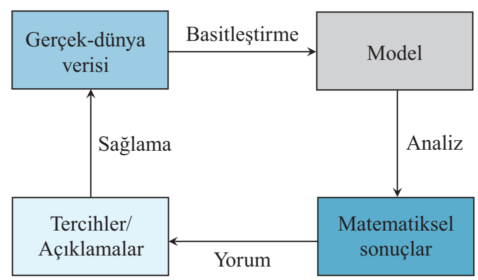


ŞEKİL 1.47 (a) $y = x^2$ fonksiyonuna 1 sabit terimini eklediğimizde elde edilen $y = x^2 + 1$ fonksiyonu hala bir çift fonksiyondur ve grafiği hala y-eksenine göre simetriktir. (b) $y = x$ fonksiyonuna 1 sabit terimini eklediğimizde elde edilen $y = x + 1$ artık bir tek fonksiyon değildir. Orijin'e göre simetri kaybolmuştur (Şekil 2).

$f(x) = x$	Tek fonksiyon: her x için $(-x) = -x$; orijine göre simetri.
$f(x) = x + 1$	Tek değil: $f(-x) = -x + 1$, fakat $-f(x) = -x - 1$. İkisi eşit değil.
	Çift değil: her $x \neq 0$ için $(-x) + 1 \neq x + 1$ (Şekil 1.47b). ■

Matematik Modeller

Dünyamızı daha iyi anlamamıza yardımcı olması için, özel bir olayı çoğunlukla matematiksel olarak tanımlarız (örneğin, bir fonksiyon veya bir eşitlik yardımıyla). Böyle bir **matematiksel model** gerçek-dünya olayını idealize etmektir ve nadiren tam olarak doğru bir gösterimdir. Her modelin sınırlamaları olmasına rağmen, iyi bir model değerli sonuçlar ve kararlar sağlayabilir. Şekil 1.48 de örneklendiği gibi, bir model sonuçlara ulaşmamızı sağlar.



ŞEKİL 1.48 Modelleme işleminde bir akış, gerçek-dünya verisinin bir incelemesi ile başlar.

Çoğu modeller gerçekliği basitleştirir ve gerçek-dünya davranışına ancak *yaklaşabilir*. Bir basitleştirme bağıntısı *orantılı* olmaktır.

TANIM **Orantılı Olmak**

y ve x değişkenlerinden biri diğerinin daima bir sabit katı ise **orantılı** dırlar (birbirileri ile); yani, sıfırdan farklı bir k sabiti için

$$y = kx$$

ise

Tanım şunu söylemektedir, y'nin x'e bağlı grafiği orijinden geçen bir doğrudur. Bu grafiksel gözlem, verilen bir veri kümesinin makul bir orantıyı kabul edip etmediğini test etmekte kullanışlıdır. Orantı makul ise bir değişkenin diğerine göre grafiği orijinden geçen bir doğruya yaklaşmalıdır.

ÖRNEK 3 Kepler'in Üçüncü Kanunu

17.yy başlarında alman astronom Johannes Kepler tarafından ortaya atılan meşhur bir orantı, Kepler'in üçüncü kanunu (Periyotlar Kanunu) dur. Kepler şunu ileri sürmüştür; Bir gezegenin güneş etrafındaki yörüngesini bir defa kat etme periyodu gün olarak T ve gezegenin güneşe ortalama uzaklığı R ise T ile R'nin $3/2$ inci kuvveti orantılıdır. Yani, bir k sabiti için

$$T = k\,R^{3/2}$$

dir.

Kepler'in kanununu Tablo 1.3 te *1993 World Almanac* tan alınan verilerle karşılaştıralım.

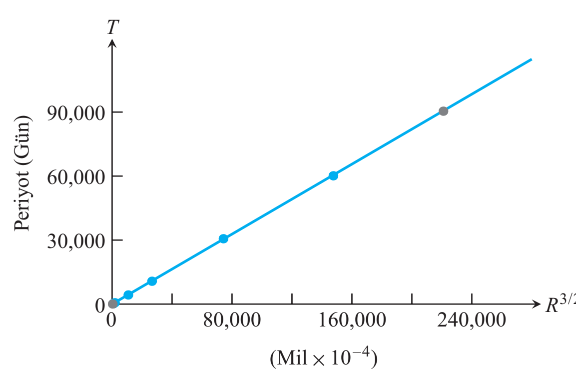
TABLO 1.3 Yörünge periyotları ve gezegenlerin güneşe ortalama uzaklıkları

Gezegen	T Periyot (gün)	R Ortalama uzaklık (milyon mil)
Merkür	88.0	36
Venüs	224.7	67.25
Dünya	365.3	93
Mars	687.0	141.75
Jupiter	4,331.8	483.80
Satürn	10,760.0	887.97
Uranüs	30,684.0	1,764.50
Neptün	60,188.3	2,791.05
Pluto	90,466.8	3,653.90

Bu örnekteki grafik çizme prensibi sizler için yeni olabilir. T'nin $R^{3/2}$'ye bağlı grafiğini çizmek için önce Tablo 1.3 teki her değer için $R^{3/2}$ değerini hesaplarız. Örneğin, $3653.90^{3/2} \approx 220{,}869.1$ ve $36^{3/2} = 216$. Yatay eksen $R^{3/2}$ yi temsil eder (R değerlerini değil) ve Şekil 1.49 daki koordinat sisteminde $(R^{3/2}, T)$ ikililerini işaretleriz. Sıralı ikililerin bu şekilde işaretlenmesi periyodun ortalama uzaklığın kuvvetine göre grafiğini verir. Şekildeki işaretli noktaların, orijinden çıkan, yaklaşık olarak bir doğru üzerinde bulunduğunu gözleriz. Bu doğru üzerinde bulunan iki nokta seçerek, orantı sabiti olan eğimi kolayca tahmin edebiliriz (gün / mil $\times 10^{-4}$).

$$k = eğim = \frac{90,466.8 - 88}{220,869.1 - 216} \approx 0.410$$

Kepler'in üçüncü kanununun bir modelini $T = 0.410\, R^{3/2}$ olarak kestirebiliriz (seçtiğimiz birimlere bağlı olarak). Şu konuda dikkatli olmamız gerekir; bu Kepler'in üçüncü kanununun bir *ispatı değildir*. ■



ŞEKİL 1.49 Kepler'in üçüncü kanununun orantı olarak grafiği: $T = 0.410R^{3/2}$ (Örnek 3).

Bazı örneklere sadece bakarak bir teoremi ispat edemeyiz veya gerçekleyemeyiz. Bununla birlikte Şekil 1.49 Kepler'in üçüncü kanununun anlamlı olduğu hissini vermektedir.

Örnek 3 te olduğu gibi, orantılı olma kavramı, iki değişken arasında var olduğu ileri sürülen bir bağıntının makul olup olmadığını test etmenin bir yoludur. Aynı zamanda, tamamıyla, derlenmiş bir veri tablosundan elde edilen **deneysel bir modelin** temelini hazırlar.

ALIŞTIRMALAR 1.4

Fonksiyonları Tanımak

1– 4 alıştırmalarında, her fonksiyonu bir sabit fonksiyon, lineer fonksiyon, kuvvet fonksiyonu, polinom (derecesini belirtin), rasyonel fonksiyon, cebirsel fonksiyon, trigonometrik fonksiyon, üstel fonksiyon veya logaritmik fonksiyon olarak tanımlayın. Bazı fonksiyonların birden fazla kategoriye girebileceğini hatırlayın.

1. **a.** $f(x) = 7 - 3x$ **b.** $g(x) = \sqrt[5]{x}$

c. $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ **d.** $r(x) = 8^x$

2. **a.** $F(t) = t^4 - t$ **b.** $G(t) = 5^t$

c. $H(z) = \sqrt{z^3 + 1}$ **d.** $R(z) = \sqrt[3]{z^7}$

3. **a.** $y = \dfrac{3 + 2x}{x - 1}$ **b.** $y = x^{5/2} - 2x + 1$

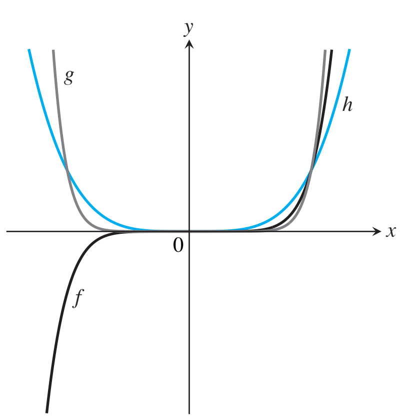
c. $y = \tan \pi x$ **d.** $y = \log_7 x$

4. **a.** $y = \log_5 \left(\dfrac{1}{t}\right)$ **b.** $f(z) = \dfrac{z^5}{\sqrt{z} + 1}$

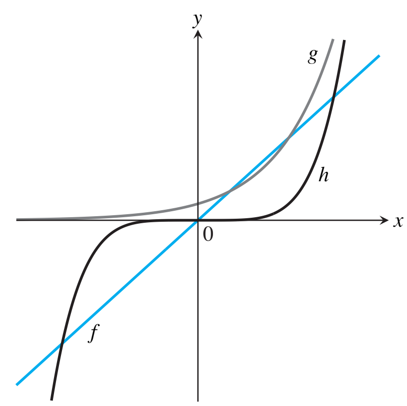
c. $g(x) = 2^{1/x}$ **d.** $w = 5 \cos \left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right)$

5 ve 6 alıştırmalarında, her denklemi grafiği ile eşleyin. Bir grafik aygıtı kullanmayın ve cevabınızın nedenini açıklayın.

5. **a.** $y = x^4$ **b.** $y = x^7$ **c.** $y = x^{10}$



6. **a.** $y = 5x$ **b.** $y = 5^x$ **c.** $y = x^5$



Artan ve Azalan Fonksiyonlar

7–18 alıştırmalarındaki fonksiyonların grafiklerini çizin. Grafiklerin, varsa, hangi simetrileri vardır? Fonksiyonun artan olduğu aralıkları ve azalan olduğu aralıkları belirleyin.

7. $y = -x^3$ **8.** $y = -\dfrac{1}{x^2}$

9. $y = -\dfrac{1}{x}$ **10.** $y = \dfrac{1}{|x|}$

11. $y = \sqrt{|x|}$ **12.** $y = \sqrt{-x}$

13. $y = x^3/8$ **14.** $y = -4\sqrt{x}$

15. $y = -x^{3/2}$ **16.** $y = (-x)^{3/2}$

17. $y = (-x)^{2/3}$ **18.** $y = -x^{2/3}$

Çift ve Tek Fonksiyonlar

19–30 alıştırmalarında, fonksiyonun çift, tek veya ne çift ne tek olup olmadığını söyleyin. Cevabınızın nedenini açıklayın.

19. $f(x) = 3$ **20.** $f(x) = x^{-5}$

21. $f(x) = x^2 + 1$ **22.** $f(x) = x^2 + x$

23. $g(x) = x^3 + x$ **24.** $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

25. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

26. $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

27. $h(t) = \dfrac{1}{t - 1}$

28. $h(t) = |t^3|$

29. $h(t) = 2t + 1$

30. $h(t) = 2|t| + 1$

Orantı

31 ve 32 alıştırmalarında, verilen data kümelerinin, ifade edilen orantı varsayımına uygun olup olmadığını değerlendirin. İncelemenize uygun bir grafik çizin ve orantı varsayımı anlamlı gözüküyorsa orantı sabitini tahmin edin.

31. a. y, x ile orantılı

y	1	2	3	4	5	6	7	8
x	5.9	12.1	17.9	23.9	29.9	36.2	41.8	48.2

b. y, $x^{1/2}$ ile orantılı

y	3.5	5	6	7	8
x	3	6	9	12	15

32. a. y, 3^x ile orantılı

y	5	15	45	135	405	1215	3645	10,935
x	0	1	2	3	4	5	6	7

b. y, $\ln x$ ile orantılı

y	2	4.8	5.3	6.5	8.0	10.5	14.4	15.0
x	2.0	5.0	6.0	9.0	14.0	35.0	120.0	150.0

T **33.** Aşağıda verilen tablo, sürücünün frene basmak için harekete geçtikten frene basana kadar geçen süre içinde ve frene bastıktan sonra aracın kat ettiği mesafeyi göstermektedir. Mesafeler (feet olarak) aracın hızına bağlıdır (mil/saat). Verilen orantı varsayımlarının uygunluğunu test edin ve orantı sabitlerini tahmin edin.

a. reaksiyon mesafesi hızla orantılıdır.

b. fren mesafesi hızın karesi ile orantılıdır.

Hız (mil/sa)	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
Reaksiyon mesafesi (ft)	22	28	33	39	44	50	55	61	66	72	77	83	88
Fren mesafesi (ft)	20	28	41	53	72	93	118	149	182	221	266	318	376

34. Ekim 2002, astronomlar, geçici olarak "Quaoar" adını verdikleri, Neptün'den ötede güneş etrafında çembersel bir yörünge çizen kayalık, buzul bir mini-gezegen keşvettiler. Yeni gezegen Dünyadan yaklaşık 4 milyar mil uzakta, güneş sisteminin, Kuiper Belt olarak bilinin bir dış kuşağında bulunmaktadır. Keplerin üçüncü kanununu kullanarak, Quaoar'un güneş etrafındaki yörüngesini tam olarak bir defa katetmesi için geçen T zamanını tahmin ediniz.

T **35.** **Yay Uzaması** Bir yayın çeşitli yüklere karşı tepkisi, bir damperli kamyon, hizmet aracı veya yol koşullarına tercih edilen yönde tepki gösteren lüks bir otomobil tasarlamak için model olarak kullanılacaktır. Yayın y uzamasını inç olarak, yayın üzerindeki sarım sayısı x'in bir fonksiyonu olarak ölçecek bir deney yaptık.

x (sarım sayısı)	0	1	2	3	4	5
y (uzama inç)	0	0.875	1.721	2.641	3.531	4.391
x (sarım sayısı)	6	7	8	9	10	
y (uzama inç)	5.241	6.120	6.992	7.869	8.741	

a. y uzamasının, x sarım sayısıyla orantılı olduğu hipotezinin anlamlı olup olmadığını test etmek için bir çizim yapınız.

b. (a) da elde edilen grafikten orantı sabitini tahmin ediniz.

c. 13 sarımlı bir yayın uzamasını önceden söyleyiniz.

36. **Ponderosa çamları** Tabloda, x bir çam ağacının omuz hizasından ölçülen çevresini inç olarak göstermektedir; y, sonuçta elde edilen kerestenin hacmini bf "board foot" (1 bf = 144 inç küp) olarak göstermektedir.

x (inç)	17	19	20	23	25	28	32	38	39	41
y (bf)	19	25	32	57	71	113	123	252	259	294

Şu iki modeli formüle ve test edin; kullanılabilir kereste hacmi **(a)** çevrenin karesi ile ve **(b)** çevrenin kübü ile orantılıdır. Bir model diğerine göre daha iyi bir açıklama sağlar mı?

1.5 Fonksiyonları Birleştirmek; Grafikleri Kaydırmak ve Ölçeklemek

Bu bölümde yeni fonksiyonlar oluşturmak için fonksiyonları birleştirmenin veya dönüştürmenin temel yollarını göreceğiz.

Toplamlar, Farklar, Çarpımlar ve Bölümler

Yeni fonksiyonlar üretmek için, fonksiyonlar da sayılar gibi toplanabilir, çıkarılabilir, çarpılabilir ve bölünebilir (paydanın sıfır olduğu yerler dışında). f ve g fonksiyonlar ise, hem f'nin ve hem de g'nin tanım kümesindeki her x için (yani $x \in D(f) \cap D(g)$ için), we define functions $f+g$, $f-g$ ve fg fonksiyonlarını şu formüllerle tanımlarız.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

Şuna dikkat edin; birinci eşitliğin sol tarafındaki $+$ işaretinin fonksiyonların toplama işlemini göstermektedir oysa eşitliğin sağ tarafındaki $+$ işareti ise $f(x)$ ve $g(x)$ reel sayılarının toplamı anlamındadır.

Ayrıca $D(f) \cap D(g)$ nin $g(x) \neq 0$ olan herhangi bir noktasında f/g fonksiyonunu şu formülle tanımlayabiliriz.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x) \neq 0)$$

Fonksiyonlar aynı zamanda sabitlerle çarpılabilirler: c bir reel sayı ise f'nin tanım kümesindeki her x için cf fonksiyonu

$$(cf)(x) = cf(x)$$

ile tanımlanır.

ÖRNEK 1 Fonksiyonları Cebirsel olarak Birleştirmek

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{ve} \qquad g(x) = \sqrt{1-x}$$

Formülleri ile tanımlanan fonksiyonların tanım kümeleri $D(f) = [0, \infty)$ ve $D(g) = (-\infty, 1]$ dir. Bu tanım kümelerinin ortak noktaları

$$[0, \infty) \cap (-\infty, 1] = [0, 1].$$

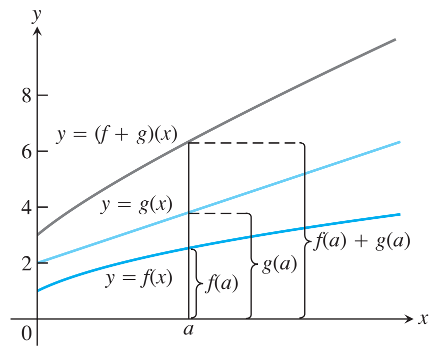
dir.

Aşağıdaki tablo bu iki fonksiyonun çeşitli cebirsel kombinasyonlarının formüllerini ve tanım kümelerini özetlemektedir. Ayrıca fg çarpım fonksiyonu için $f \cdot g$ yazıyoruz.

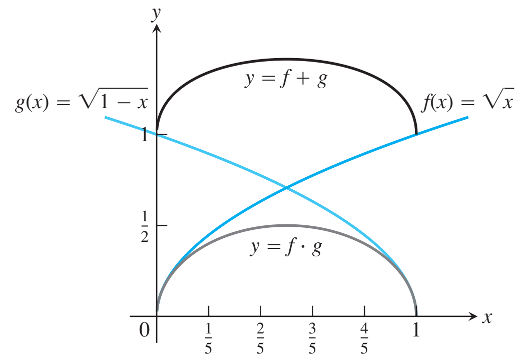
Fonksiyon	Formül	Tanım Kümesi
$f+g$	$(f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$	$[0, 1] = D(f) \cap D(g)$
$f-g$	$(f-g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$	$[0, 1]$
$g-f$	$(g-f)(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$	$[0, 1]$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x(1-x)}$	$[0, 1]$
f/g	$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$	$[0, 1)$ ($x = 1$ hariç)
g/f	$\frac{g}{f}(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$	$(0, 1]$ ($x = 0$ hariç)

■

$f+g$ fonksiyonunun grafiği f ve g nin grafiklerinden Şekil 1.50 deki gibi her $x \in D(f) \cap D(g)$ için karşı gelen y-koordinatları $f(x)$ ve $g(x)$ toplanarak elde edilir. Örnek 1 deki $f+g$ ve $f \cdot g$ nin grafikleri Şekil 1.51 de gösterilmiştir.



ŞEKİL 1.50 İki fonksiyonun grafik toplamı



ŞEKİL 1.51 $f + g$ fonksiyonunun tanım kümesi f ve g, fonksiyonlarının tanım kümelerinin kesişimi, x-ekseni üzerinde bu iki tanım kümesinin örtüştüğü $[0, 1]$ aralığıdır. Bu aralık aynı zamanda $f \cdot g$ fonksiyonunun tanım kümesidir (Örnek 1).

Bileşke Fonksiyonlar

Fonksiyonları birleştirmenin bir başka yolu bileşke dir.

TANIM **Fonksiyonların Bileşkesi**

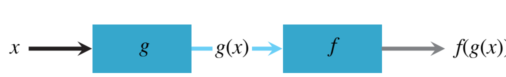
f ve g fonksiyonlarının $f \circ g$ ("f bileşke g") **bileşke** fonksiyonu

$$(f \circ g)\,(x) = f(g(x))$$

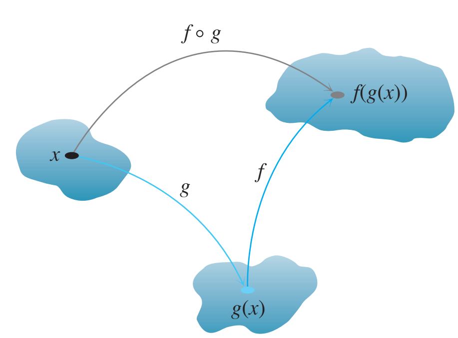
ile tanımlanır.

$f \circ g$'nin tanım kümesi, g'nin tanım kümesindeki, $g(x)$'in f'nin tanım kümesinde olmasını sağlayan, x'lerden oluşur.

Tanım, g nin değer kümesi f nin tanım kümesi içinde ise $f \circ g$ nin oluşturulabileceğini söylemektedir. $(f \circ g)(x)$'i bulmak için önce $g(x)$'i ve sonra da $f(g(x))$'i bulun. Şekil 1.52 $f \circ g$ yi bir makine diyagramı olarak resmetmekte, Şekil 1.53 de bileşkeyi bir ok diyagramı olarak göstermektedir.



ŞEKİL 1.52 Bir fonksiyonun x teki değeri diğer fonksiyonun tanım kümesinde yer alıyorsa iki fonksiyonun bileşkesi oluşturulabilir. Bileşke $f \circ g$ ile belirtilir.



ŞEKİL 1.53 $f \circ g$ için ok diyagramı.

ÖRNEK 2 Bir Fonksiyonu Bileşke Olarak Görmek

$y = \sqrt{1 - x^2}$ fonksiyonu, önce $1 - x^2$ yi hesaplamak sonra da sonucun karekökünü almak olarak düşünülebilir. y fonksiyonu $g(x) = 1 - x^2$ ve $f(x) = \sqrt{x}$ bileşkesidir. $1 - x^2$'nin negatif olamayacağına dikkat edin. Bileşkenin tanım kümesi $[-1, 1]$ dir. ■

$g \circ f$ bileşke fonksiyonunu bulmak içn (tanımlı olduğunda) sırayı değiştiririz, önce $f(x)$'i sonra $g(f(x))$ hesaplarız. $g \circ f$'nin tanım kümesi, f'nin tanım kümesindeki, $f(x)$'in g'nin tanım kümesinde olmasını sağlayan, x'lerin kümesidir. $f \circ g$ ve $g \circ f$ fonksiyonları genelde oldukça farklıdırlar.

ÖRNEK 3 Bileşke için Formül Bulmak

$f(x) = \sqrt{x}$ ve $g(x) = x + 1$ ise

(a) $(f \circ g)(x)$ **(b)** $(g \circ f)(x)$ **(c)** $(f \circ f)(x)$ **(d)** $(g \circ g)(x)$
fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm

	Bileşke	**Tanım Kümesi**
(a)	$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x + 1}$	$[-1, \infty)$
(b)	$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$	$[0, \infty)$
(c)	$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}$	$[0, \infty)$
(d)	$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x) + 1 = (x + 1) + 1 = x + 2$	$(-\infty, \infty)$

$f \circ g$'nin tanım kümesinin neden $[-1, \infty)$ olduğunu görmek için, $g(x) = x + 1$'in her x içn tanımlı olduğunu fakat yalnızca $x + 1 \geq 0$, yani $x \geq -1$ iken f'nin tanım kümesinde bulunduğuna dikkat edin.

Bir Fonksiyonun Grafiğini Kaydırmak

Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini yukarı kaydırmak için, $y = f(x)$ formülünün sağ tarafına pozitif bir sabit ekleyin

Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini aşağı kaydırmak için, $y = f(x)$ formülünün sağ tarafına negatif bir sabit ekleyin.

$y = f(x)$'in grafiğini sola kaydırmak için, x'e pozitif bir sabit ekleyin. $y = f(x)$'in grafiğini sağa kaydırmak için, x'e negatif bir sabit ekleyin.

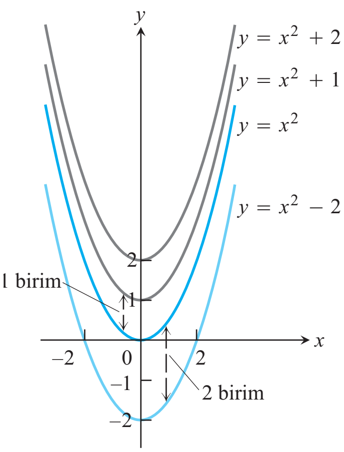
Kaydırma Formülleri

Dikey Kaydırma

$y = f(x) + k$ — $k > 0$ ise f'nin grafiğini k birim yukarı kaydırır,
$k < 0$ ise $|k|$ birim *aşağı* kaydırır.

Yatay Kaydırma

$y = f(x + h)$ — $h > 0$ ise f'nin grafiğini h birim sola kaydırır.
$h < 0$ ise grafiği $|h|$ birim *sağa* kaydırır.



ŞEKİL 1.54 $f(x) = x^2$'yi yukarı (veya aşağı) kaydırmak için, f'in formülüne pozitif (veya negatif) bir sabit ekleriz (Alıştırma 4a ve 4b).

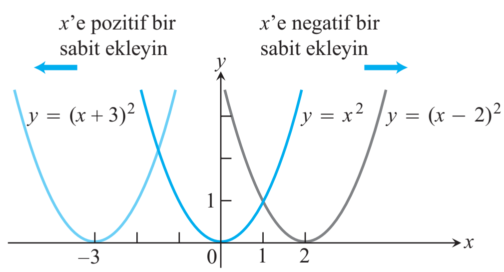
ÖRNEK 4 Bir Grafiği Kaydırmak

(a) $y = x^2 + 1$ elde etmek için $y = x^2$ formülünün sağ tarafına 1 eklemek grafiği 1 birim yukarı kaydırır (Şekil 1.54).

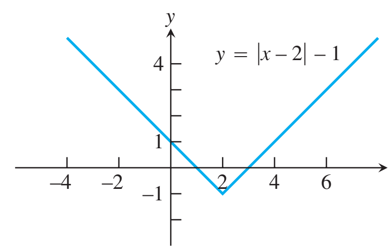
(b) $y = x^2 - 2$ elde için $y = x^2$ formülünün sağ tarafına –2 eklemek grafiği 2 birim aşağı kaydırır (Şekil 1.54).

(c) $y = (x + 3)^2$ elde etmek için $y = x^2$ formülünde x'e 3 eklemek grafiği 3 birim sola kaydırır (Şekil 1.55).

(d) $y = |x|$ te x'e –2 eklemek ve sonra sonuca –1 eklemek $y = |x - 2| - 1$'i verir ve grafiği 2 birim sağa ve 1 birim aşağı kaydırır (Şekil 1.56).



ŞEKİL 1.55 $y = x^2$ nin grafiğini sola kaydırmak için x'e pozitif bir sabit ekleriz. Grafiğini sağa kaydırmak için x'e negatif bir sabit ekleriz (Örnek 4c).



ŞEKİL 1.56 $y = |x|$'in grafiğini 2 birim sağa ve 1 birim aşağı kaydırmak (Örnek 4d).

■

Bir Fonksiyonun Grafiğini Ölçeklemek ve Yansıtmak

Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini ölçeklemek, onu dikey veya yatay olarak esnetmek veya sıkıştırmaktır. Bu, f fonksiyonunu veya bağımsız x değişkenini uygun bir c sabiti ile çarpmakla yapılır. Koordinat eksenlerinin bir tarafından diğer tarafına yansıtmalar $c = -1$ olduğu özel hallerdir.

Dikey ve Yatay Ölçekleme ve Yansıtma Formülleri

$c > 1$ için

$y = cf(x)$	f'nin grafiğini bir c çarpanı kadar dikey olarak uzatır.
$y = \frac{1}{c} f(x)$	f'nin grafiğini bir c çarpanı kadar dikey olarak sıkıştırır.
$y = f(cx)$	f'nin grafiğini bir c çarpanı kadar yatay olarak sıkıştırır.
$y = f(x/c)$	f'nin grafiğini bir c çarpanı kadar yatay olarak uzatır.

$c = -1$ için

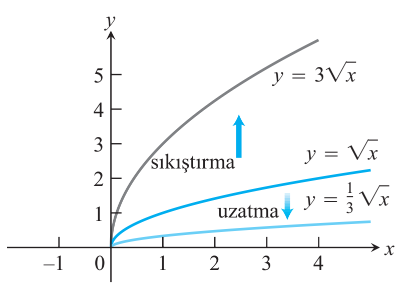
$y = -f(x)$	f'nin grafiğini x-ekseninin diğer tarafına yansıtır.
$y = f(-x)$	f'nin grafiğini y-ekseninin diğer tarafına yansıtır.

ÖRNEK 5 Bir Grafiği Ölçeklemek ve Yansıtmak

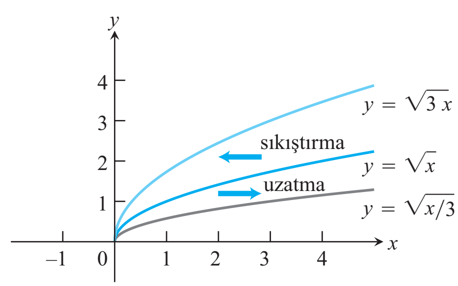
(a) **Dikey:** $y = 3\sqrt{x}$ elde etmek için $y = \sqrt{x}$ 'in sağ tarafını 3 ile çarpmak, grafiği dikey olarak 3 çarpanı kadar uzatır, oysa $1/3$ ile çarpmak grafiği 3 çarpanı kadar sıkıştırır. (Şekil 1.57).

(b) **Yatay:** $y = \sqrt{3x}$ 'in grafiği, $y = \sqrt{x}$ 'in grafiğinin 3 çarpanı kadar sıkıştırılmışıdır ve $y = \sqrt{x/3}$ yatay olarak 3 çarpanı kadar uzatılmasıdır (Şekil 1.58). $y = \sqrt{3x} = \sqrt{3}\sqrt{x}$ olduğuna dikkat edin, dolayısıyla, bir yatay sıkıştırma farklı bir ölçekleme çarpanı ile bir dikey uzatmaya karşı gelebilir. Benzer şekilde, bir yatay uzatma farklı bir ölçekleme çarpanı ile bir dikey sıkıştırmaya karşı gelebilir.

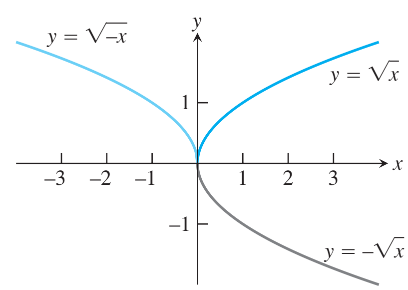
(c) **Yansıma:** $y = -\sqrt{x}$'in grafiği, $y = \sqrt{x}$ x-ekseninin diğer tarafına bir yansımasıdır, ve $y = \sqrt{-x}$, y-ekseninin diğer tarafına bir yansımadır (Şekil 1.59).



ŞEKİL 1.57 $y = \sqrt{x}$ grafiğinin dikey olarak 3 kat uzatılması ve sıkıştırılması (Örnek 5a).



ŞEKİL 1.58 $y = \sqrt{x}$ grafiğinin yatay olarak 3 kat uzatılması ve sıkıştırılması (Örnek 5b).



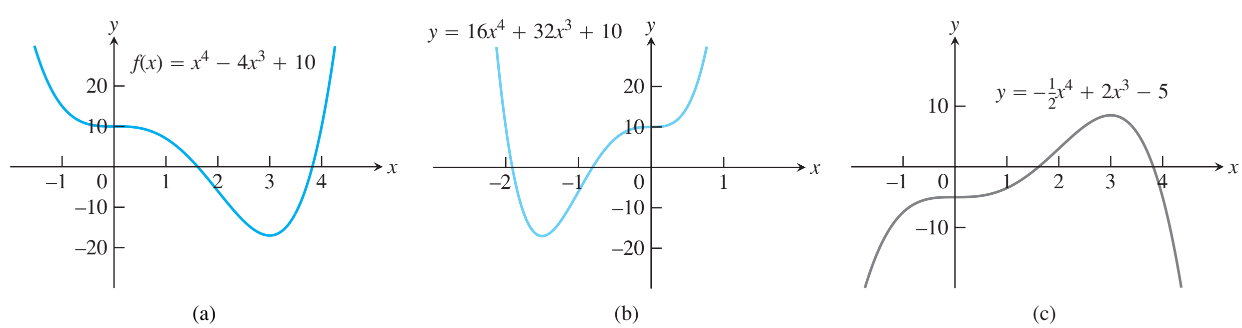
ŞEKİL 1.59 $y = \sqrt{x}$ grafiğinin eksenlerin diğer taraflarına yansıtılması (Örnek 5c).

ÖRNEK 6 Ölçekleme ve Yansıtmaları Birleştirmek

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ fonksiyonu veriliyor (Şekil 1.60a),

(a) grafiği yatay olarak 2 kat sıkıştıran ve sonra da y-ekseninin diğer tarafına yansıtan (Şekil 1.60b)

(b) grafiği dikey olarak 2 kat sıkıştıran ve sonra da x-ekseninin diğer tarafına yansıtan (Şekil 1.60c)



ŞEKİL 1.60 (a) f'nin orijinal grafiği. (b) (a) daki $y = f(x)$'in yatay olarak 2 kat sıkıştırılması ve ardından y-ekseninin diğer tarafına yansıtılması. (c) (a)'daki $y = f(x)$'in dikey olarak 2 kat sıkıştırılması ve ardından x-ekseninin diğer tarafına yansıtılması (Örnek 6).

Çözüm

(a) Aranan formül, f'nin denkleminin sağ tarafında x yerine $-2x$ yazmakla elde edilir

$$y = f(-2x) = (-2x)^4 - 4(-2x)^3 + 10$$
$$= 16x^4 + 32x^3 + 10$$

(b) Formül

$$y = -\frac{1}{2}f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 5$$ ■

Elipsler

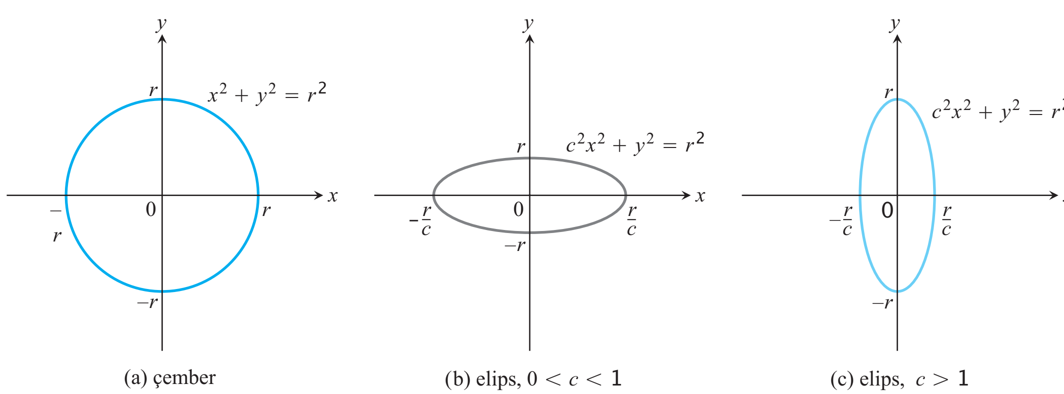
Merkezi orijinde olan r yarıçaplı bir çemberin standart denkleminde x yerine cx yazmakla

$$c^2x^2 + y^2 = r^2 \tag{1}$$

elde edilir.

$0 < c < 1$ ise (1) denkleminin grafiği, çemberi yatay olarak uzatır; $c > 1$ ise çember yatay olarak sıkıştırılır. Her iki durumda da (1) denkleminin grafiği bir elipstir (Şekil 1.61).

Şuna dikkat edin, Şekil 1.61deki grafiklerin üçünün de y-kesim noktaları daima $-r$ ve r dir. Şekil 1.61b de, $(\pm r/c, 0)$ noktalarını birleştiren doğru parçasına elipsin **asal ekseni** denir; $(0, \pm r)$ noktalarını birleştiren doğru parçası **yedek ekseni** dir. Şekil 1.61c de elipsin eksenleri ters çevrilmiştir: $(0, \pm r)$ noktalarını birleştiren doğru parçası **asal eksen**, $(\pm r/c, 0)$ noktalarını birleştiren doğru parçası **yedek eksen** dir. Her iki durumda da daha uzun olan doğru parçası asal eksendir.

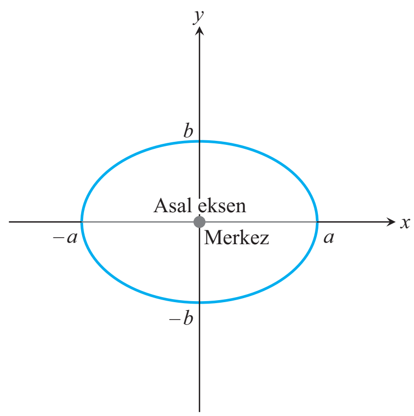


ŞEKİL 1.61 Bir çemberi yatay olarak uzatmak veya sıkıştırmak elips grafikleri üretir.

(1) denkleminin her iki tarafını r^2 ile bölersek

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

elde edilir. Burada $a = r/c$ ve $b = r$ dir. $a > b$ ise asal eksen yataydır; $a < b$ ise asal eksen dikeydir. (2) denklemi ile verilen merkezi orijindir (Şekil 1.62).



ŞEKİL 1.62 Elips grafiği
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$ asal eksen yataydır.

Denklem (2) de x yerine $x-h$ ve y yerine $y-k$ yazmakla

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

elde edilir.
(3) denklemi merkezi (h, k) da olan **bir elipsin standart denklemi**dir. Elipslerin geometrik tanımı ve özellikleri Bölüm 10.1 de incelenmektedir.

ALIŞTIRMALAR 1.5

Toplamlar, Farklar, Çarpımlar ve Bölümler

Alıştırma 1 ve 2 de $f, g, f+g$ ve $f \cdot g$'nin tanım ve değer kümelerini bulunuz.

1. $f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$
2. $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$

Alıştırma 3 ve 4 te $f, g, f/g$ ve g/f'nin tanım ve değer kümelerini bulunuz.

3. $f(x) = 2, \quad g(x) = x^2 + 1$
4. $f(x) = 1, \quad g(x) = 1 + \sqrt{x}$

Fonksiyonların Bileşkesi

5. $f(x) = x + 5$ ve $g(x) = x^2 - 3$ ise aşağıdakileri bulunuz.
   a. $f(g(0))$ **b.** $g(f(0))$
   c. $f(g(x))$ **d.** $g(f(x))$
   e. $f(f(-5))$ **f.** $g(g(2))$
   g. $f(f(x))$ **h.** $g(g(x))$
6. $f(x) = x - 1$ ve $g(x) = 1/(x+1)$ ise aşağıdakileri bulunuz.
   a. $f(g(1/2))$ **b.** $g(f(1/2))$
   c. $f(g(x))$ **d.** $g(f(x))$
   e. $f(f(2))$ **f.** $g(g(2))$
   g. $f(f(x))$ **h.** $g(g(x))$
7. $u(x) = 4x - 5$, $v(x) = x^2$ ve $f(x) = 1/x$ ise aşağıdakilerin formüllerini bulunuz.
   a. $u(v(f(x)))$ **b.** $u(f(v(x)))$
   c. $(v(u(f(x)))$ **d.** $v(f(u(x)))$
   e. $f(u(v(x)))$ **f.** $f(v(u(x)))$
8. $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x/4$ ve $h(x) = 4x - 8$ ise aşağıdakilerin formüllerini bulunuz.
   a. $h(g(f(x)))$ **b.** $h(f(g(x)))$
   c. $g(h(f(x)))$ **d.** $g(f(h(x)))$
   e. $f(g(h(x)))$ **f.** $f(h(g(x)))$

$f(x) = x - 3, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = x^3$ ve $j(x) = 2x$ olsun. Alıştırma 9 ve 10 daki her fonksiyonu, f, g, h ve j fonksiyonlarından birini veya daha fazlasını içeren bir bileşke olarak ifade ediniz.

9. **a.** $y = \sqrt{x} - 3$ **b.** $y = 2\sqrt{x}$
   c. $y = x^{1/4}$ **d.** $y = 4x$
   e. $y = \sqrt{(x-3)^3}$ **f.** $y = (2x-6)^3$
10. **a.** $y = 2x - 3$ **b.** $y = x^{3/2}$
    c. $y = x^9$ **d.** $y = x - 6$
    e. $y = 2\sqrt{x-3}$ **f.** $y = \sqrt{x^3 - 3}$

11. Aşağıdaki tabloyu tamamlayın

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
a.	$x - 7$	$\sqrt{x}$	
b.	$x + 2$	$3x$	
c.		$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
d.	$\dfrac{x}{x-1}$	$\dfrac{x}{x-1}$	
e.		$1 + \dfrac{1}{x}$	x
f.	$\dfrac{1}{x}$		x

12. Aşağıdaki tabloyu tamamlayın

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
a.	$\dfrac{1}{x-1}$	$\lvert x \rvert$	?
b.	?	$\dfrac{x-1}{x}$	$\dfrac{x}{x+1}$
c.	?	$\sqrt{x}$	$\lvert x \rvert$
d.	$\sqrt{x}$	?	$\lvert x \rvert$

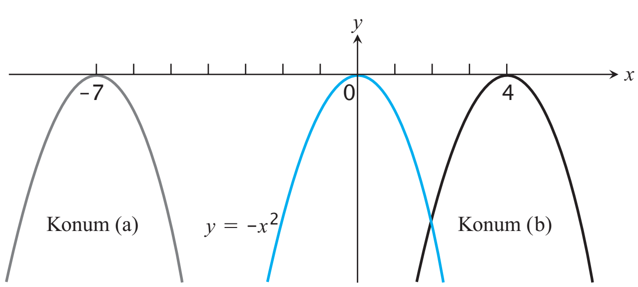
Alıştırma 13 ve 14 te, **(a)** $f \circ g$ ve $g \circ f$ birer formül bulunuz, **(b)** tanım kümelerini ve **(c)** değer kümelerini bulunuz.

13. $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

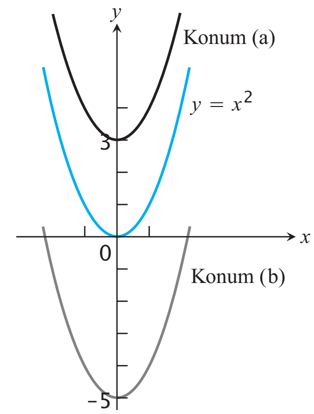
14. $f(x) = x^2, \quad g(x) = 1 - \sqrt{x}$

Grafikleri Kaydırmak

15. Aşağıdaki şekil $y = -x^2$'nin grafiğini iki yeni konuma kaydırılmış olarak göstermektedir. Yeni grafikler için denklemler yazınız.



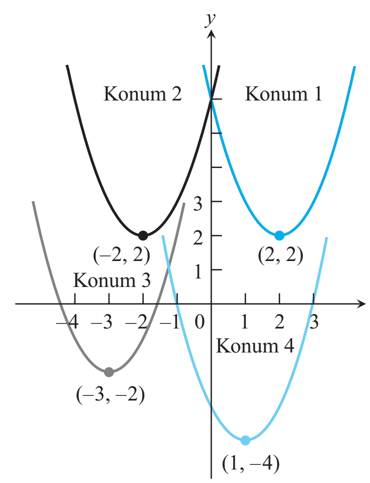
16. Aşağıdaki şekil $y = x^2$'nin grafiğini iki yeni konuma kaydırılmış olarak göstermektedir. Yeni grafikler için denklemler yazınız.



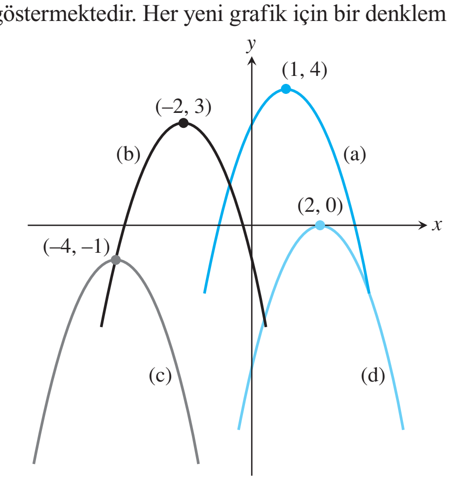
17. (a)-(d)'deki denklemlere Şekildeki grafiklerden hangilerinin karşılık geldiğini bulun..

a. $y = (x-1)^2 - 4$ **b.** $y = (x-2)^2 + 2$

c. $y = (x+2)^2 + 2$ **d.** $y = (x+3)^2 - 2$



18. Aşağıdaki şekil $y = -x^2$'nin grafiğini dört yeni konuma kaydırılmış olarak göstermektedir. Her yeni grafik için bir denklem yazınız.



19-28 alıştırmalarında verilen denklemlerin hangi yönde kaç birim kaydırılacakları söylenmektedir. Kaydırılmış grafiğin denklemini yazın. Orijinal ve kaydırılmış grafikleri denklemleriyle isimlendirerek birlikte çizin.

19. $x^2 + y^2 = 49$ Aşağı 3, sola 2

20. $x^2 + y^2 = 25$ Yukarı 3, aşağı 4

21. $y = x^3$ Sola 1, aşağı 1

22. $y = x^{2/3}$ Sağa 1, aşağı 1

23. $y = \sqrt{x}$ Sola 0.81

24. $y = -\sqrt{x}$ Sağa 3

25. $y = 2x - 7$ Yukarı 7

26. $y = \frac{1}{2}(x + 1) + 5$ Aşağı 5, sağa 1

27. $y = 1/x$ Yukarı 1, sağa 1

28. $y = 1/x^2$ Sola 2, aşağı 1

29–48 alıştırmalarındaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

29. $y = \sqrt{x + 4}$

30. $y = \sqrt{9 - x}$

31. $y = |x - 2|$

32. $y = |1 - x| - 1$

33. $y = 1 + \sqrt{x - 1}$

34. $y = 1 - \sqrt{x}$

35. $y = (x + 1)^{2/3}$

36. $y = (x - 8)^{2/3}$

37. $y = 1 - x^{2/3}$

38. $y + 4 = x^{2/3}$

39. $y = \sqrt[3]{x - 1} - 1$

40. $y = (x + 2)^{3/2} + 1$

41. $y = \dfrac{1}{x - 2}$

42. $y = \dfrac{1}{x} - 2$

43. $y = \dfrac{1}{x} + 2$

44. $y = \dfrac{1}{x + 2}$

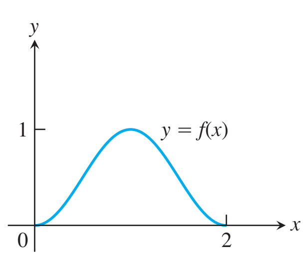
45. $y = \dfrac{1}{(x - 1)^2}$

46. $y = \dfrac{1}{x^2} - 1$

47. $y = \dfrac{1}{x^2} + 1$

48. $y = \dfrac{1}{(x + 1)^2}$

49. Aşağıdaki şekil tanım aralığı [0, 2], değer aralığı [0, 1] olan $f(x)$ fonksiyonunu göstermektedir. Verilmiş fonksiyonların tanım ve değer aralıklarını bulun ve grafiklerini çizin.



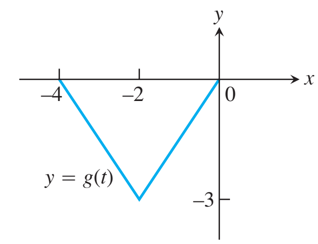
a. $f(x) + 2$ **b.** $f(x) - 1$

c. $2f(x)$ **d.** $-f(x)$

e. $f(x + 2)$ **f.** $f(x - 1)$

g. $f(-x)$ **h.** $-f(x + 1) + 1$

50. Aşağıdaki şekil tanım aralığı [-4, 0], değer aralığı [-3, 0] olan $g(t)$ fonksiyonu bulunmaktadır. Verilen fonksiyonların tanım ve değer aralıklarını bulun ve grafiklerini çizin.



a. $g(-t)$ **b.** $-g(t)$

c. $g(-t) + 3$ **d.** $1 - g(t)$

e. $g(-t + 2)$ **f.** $g(t - 2)$

g. $g(1 - t)$ **h.** $-g(t - 4)$

Dikey ve Yatay Ölçekleme

51–60 alıştırmaları verilen fonksiyonların grafiklerinin ne oranda ve hangi yönde uzatılacağını veya sıkıştırılacağını söylemektedir. Uzatılmış veya sıkıştırılmış grafik için bir denklem yazınız.

51. $y = x^2 - 1$, dikey olarak 3 kat uzatılmış

52. $y = x^2 - 1$, yatay olarak 2 kat sıkıştırılmış

53. $y = 1 + \dfrac{1}{x^2}$, dikey olarak 2 kat sıkıştırılmış

54. $y = 1 + \dfrac{1}{x^2}$, yatay olarak 3 kat uzatılmış

55. $y = \sqrt{x + 1}$, yatay olarak 4 kat sıkıştırılmış

56. $y = \sqrt{x + 1}$, dikey olarak 3 kat uzatılmış

57. $y = \sqrt{4 - x^2}$, yatay olarak 2 kat uzatılmış

58. $y = \sqrt{4 - x^2}$, dikey olarak 3 kat sıkıştırılmış

59. $y = 1 - x^3$, yatay olarak 3 kat sıkıştırılmış

60. $y = 1 - x^3$, yatay olarak 2 kat uzatılmış

Grafik Çizmek

61–68 alıştırmalarındaki fonksiyonların grafiklerini, noktaları işaretlemekle değil, Şekil 1.36–1.38 de grafiği verilen standart fonksiyonlardan biri ile başlayıp uygun dönüşümleri uygulamakla çizin.

61. $y = -\sqrt{2x + 1}$

62. $y = \sqrt{1 - \dfrac{x}{2}}$

63. $y = (x - 1)^3 + 2$

64. $y = (1 - x)^3 + 2$

65. $y = \dfrac{1}{2x} - 1$

66. $y = \dfrac{2}{x^2} + 1$

67. $y = -\sqrt[3]{x}$

68. $y = (-2x)^{2/3}$

69. $y = |x^2 - 1|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

70. $y = \sqrt{|x|}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Elipsler

71–76 alıştırmalarında elips formülleri verilmektedir. Her denklemi standart forma getirin ve elipsi çizin.

71. $9x^2 + 25y^2 = 225$

72. $16x^2 + 7y^2 = 112$

73. $3x^2 + (y - 2)^2 = 3$

74. $(x + 1)^2 + 2y^2 = 4$

75. $3(x - 1)^2 + 2(y + 2)^2 = 6$

76. $6\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 9\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 54$

77. 4 birim sola ve 3 birim yukarıya kaydırılmış olan $(x^2/16) + (y^2/9) = 1$ elipsi için bir denklem yazınız. Elipsi çiziniz ve merkezi ile asal eksenini belirtiniz.

78. 3 birim sağa ve 2 birim aşağıya kaydırılmış olan $(x^2/4) + (y^2/25) = 1$ elipsi için bir denklem yazınız. Elipsi çiziniz ve merkezi ile asal eksenini belirtiniz.

Çift ve Tek Fonksiyonlar

79. f'nin bir çift fonksiyon ve g'nin bir tek fonksiyon olduğunu ve her ikisinin de bütün reel doğru $\mathbb{R}$. üzerinde tanımlı olduğunu varsayın. Aşağıdakilerden hangileri (tanımlı oldukları yerlerde) çifttir? tektir?

a. fg **b.** f/g **c.** g/f

d. $f^2 = ff$ **e.** $g^2 = gg$ **f.** $f \circ g$

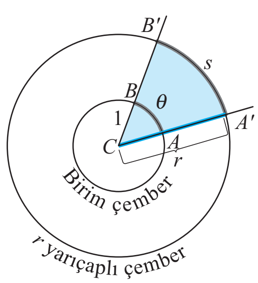
g. $g \circ f$ **h.** $f \circ f$ **i.** $g \circ g$

80. Bir fonksiyon hem çift ve hem de tek olabilir mi? Cevabınızı açıklayın.

T **81.** (*Örnek 1 in devamı*) $f(x) = \sqrt{x}$ ve $g(x) = \sqrt{1 - x}$ fonksiyonlarının grafiklerini (a) toplamlarının, (b) çarpımlarının, (c) her iki farklarını, (d) her iki oranlarının grafikleri ile birlikte çiziniz.

T **82.** $f(x) = x - 7$ ve $g(x) = x^2$ olsun. f ve g grafiklerini $f \circ g$ ve $g \circ f$ grafikleri ile birlikte çizin.

1.6 Trigonometrik Fonksiyonlar



ŞEKİL 1.63 *ABC* açısının radyan ölçüsü, merkezi *C* de olan birim çember üzerindeki *AB* dairesel yayının θ uzunluğudur. θ değeri başka herhangi bir çemberden de s/r oranı olarak bulunabilir. Böylece, θ radyan olarak ölçüldüğünde, $s = r\theta$ değeri r yarıçaplı bir çember üzerinde yay uzunluğudur.

Dönüşüm Formülleri

1 derece $= \frac{\pi}{180}$ (≈ 0.02) radyan

Dereceden radyana: $\frac{\pi}{180}$ ile çarpın

1 radyan $= \frac{180}{\pi}$ (≈ 57) derece

Radyandan dereceye : $\frac{180}{\pi}$ ile çarpın

Bu bölümde radyan ölçü, trigonometrik fonksiyonlar, periyodiklik ve temel trigonometrik eşitlikler incelenmektedir. Trigonometrik fonksiyonlar periyodik, veya tekrarlı, olmaları ve bundan dolayı, doğal olarak ortaya çıkan birçok periyodik süreci modellemeleri sebebiyle önemlidirler.

Radyan Ölçü

Denizcilik ve astronomide, açılar derece ile ölçülür, ancak analizde daha ilerideki hesaplamaları kolaylaştıracağı için *radyan* olarak adlandırılan birimleri kullanmak daha iyidir.

Birim çemberin merkezindeki *ACB* açısının **radyan ölçüsü** (Şekil 1.63) *ACB* açısının birim çemberden kestiği yayın uzunluğuna eşittir. Şekil 1.63 te, karşı gelen θ açısı radyan olarak ölçüldüğünde, r yarıçaplı bir çemberden kesilen **yay uzunluğu** nun $s = r\theta$ olduğu gösterilmektedir.

Çemberin çevresi 2π ve bir çemberin bir tam deviri 360° olduğundan, radyan ile derece arasındaki bağıntı

$$\pi \text{ radyan} = 180°$$

Örneğin, 45° nin radyan ölçüsü

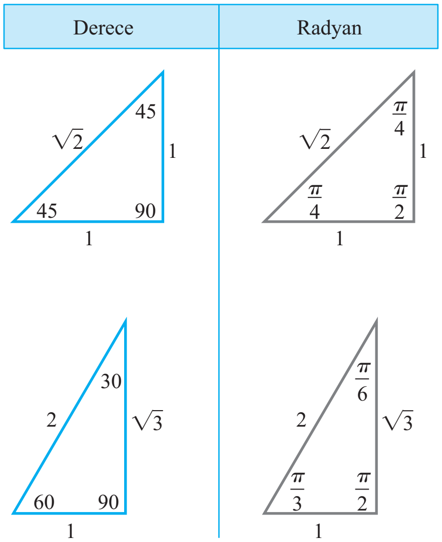
$$45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{ rad},$$

ve $\pi/6$ radyan

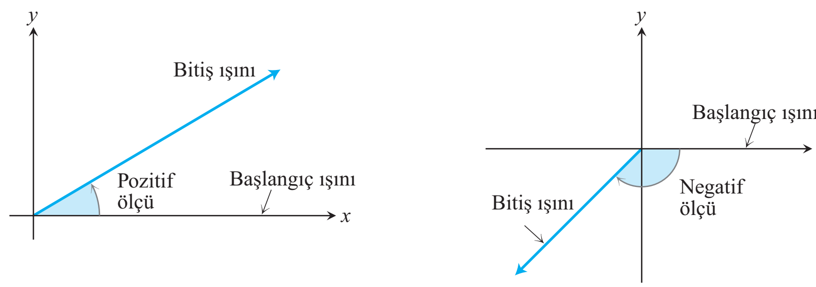
$$\frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 30°.$$

Şekil 1.64 te bir üçgenin açıları her iki ölçü biriminde görülmektedir.

xy-düzlemindeki bir açının köşesi orijindeyse ve başlangıç ışını pozitif *x*-ekseni üzerindeyse, açı **standart konumundadır** denir (Şekil 1.65). Pozitif *x*-ekseninden saat yönünün tersine doğru ölçülen açılar pozitif, saat yönüne doğru ölçülen açılar negatiftir.

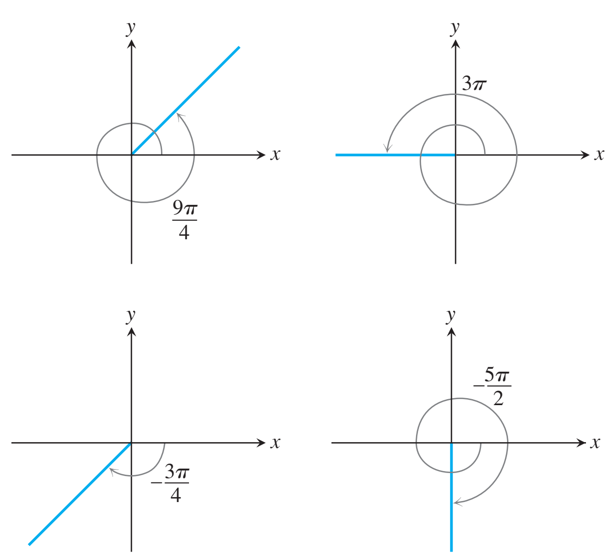


ŞEKİL 1.64 Bir üçgenin açıları, derece ve radyan cinsinden.

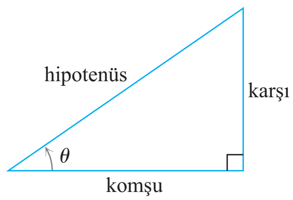


ŞEKİL 1.65 xy-düzleminde standart konumda açılar.

Açılar saat yönünün tersine dönmeleri tanımlamakta kullanıldıklarında, ölçümlerimiz 2π radyanın veya 360°'nin çok dışına çıkabilirler. Aynı şekilde saat yönünde dönmelerin de her büyüklükte negatif ölçüleri olabilir (Şekil 1.66).



ŞEKİL 1.66 Sıfırdan farklı radyan ölçüleri pozitif veya negatif olabilir ve 2π'nin çok dışına çıkabilirler.

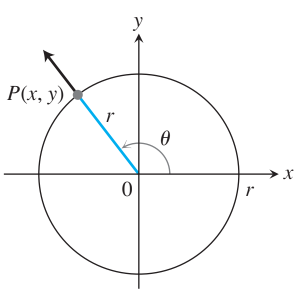


$$\sin\theta = \frac{\text{karşı}}{\text{hipotenüs}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hipotenüs}}{\text{karşı}}$$

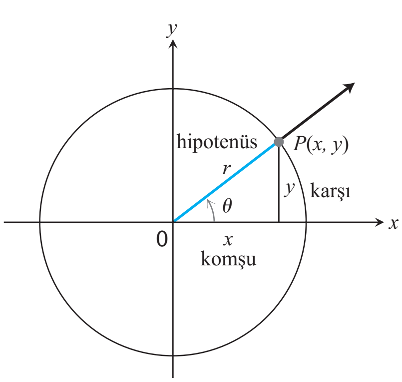
$$\cos\theta = \frac{\text{komşu}}{\text{hipotenüs}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenüs}}{\text{komşu}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{karşı}}{\text{komşu}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{komşu}}{\text{karşı}}$$

ŞEKİL 1.67 Bir dar açının trigonometrik oranları.



ŞEKİL 1.68 Genel bir θ açısının trigonometrik fonksiyonları x, y ve r cinsinden tanımlanır.



ŞEKİL 1.69 Dar açı için yeni ve eski tanımlar uyuşur.

> **Açı Uyumu: Radyan Kullanın**
> Şu andan itibaren bu kitapta ölçülen bütün açılar, derece veya başka bir birim açık olarak belirtilmedikçe, radyan olarak alınacaktır. $\pi/3$ açısından bahsederken, $\pi/3$ derece değil, $\pi/3$ radyan (60°) anlaşılacaktır. Analiz yaparken, hesap makinenizin modunu radyana ayarlayın.

Altı Temel Trigonometrik Fonksiyon

Büyük olasılıkla bir dar açının trigonometrik fonksiyonlarını bir dik üçgenin kenarları cinsinden tanımlamayı biliyorsunuzdur (Şekil 1.67). Bu tanımı geniş ve negatif açılara genişletmek için, önce açıyı r yarıçaplı bir çember içinde standart konumuna yerleştirerek, trigonometrik fonksiyonları açının bitiş ışınının çemberi kestiği $P(x, y)$ noktasının koordinatları cinsinden tanımlayacağız (Şekil 1.68).

$$\textbf{sinüs:} \quad \sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \textbf{kosekant:} \quad \csc\theta = \frac{r}{y}$$

$$\textbf{cosinüs:} \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \textbf{sekant:} \quad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\textbf{tanjant:} \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \textbf{kotanjant:} \quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

Bu genişletilmiş tanımlar açı dar olduğunda dik-üçgen tanımlarıyla uyuşmaktadırlar (Şekil 1.69).

Ayrıca, bölüm tanımlı olduğunda, aşağıdaki tanımları not edin.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

Görebileceğiniz gibi, $x = 0$ ise $\tan\theta$ ve $\sec\theta$ tanımlı değildirler. Yani, θ'nın değeri $\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$ ise tanımsızdırlar. Aynı şekilde, $\cot\theta$ ve $\csc\theta$ da $y = 0$ olan θ değerleri, yani $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ için tanımlı değillerdir.

Bazı açılar için bu trigonometrik oranların tam değerleri Şekil 1.64 teki üçgenlerden bulunabilir.

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

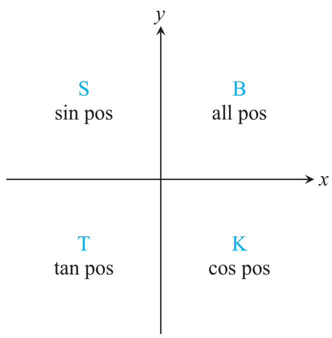
$$\tan\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

olduğunu görürüz.

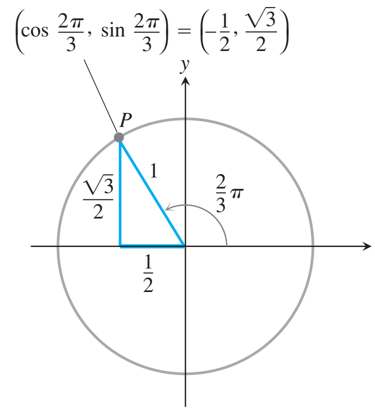
Temel trigonometrik fonksiyonların ne zaman pozitif veya negatif olduklarını hatırlamanın bir yolu BSTK (Bütün Sınıf Tahtaya Kalkar) kuralıdır (Şekil 1.70). Örneğin, Şekil 1.71 deki üçgenden

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \qquad \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

Benzer bir yöntem kullanarak Tablo 1.4 te gösterilen $\sin\theta$, $\cos\theta$ ve $\tan\theta$ değerlerini elde ederiz.



Şekil 1.70 BSTK kuralı, "Bütün Sınıf Tahtaya Kalkar" cümlesinden hatırlanabilir. Herbir bölgede hangi fonksiyonların pozitif olduğunu söyler.



ŞEKİL 1.71 $2\pi/3$ radyanın sinüs ve kosinüs'ünün hesaplandığı üçgen. Kenar uzunlukları, dik üçgenlerin geometrisinden gelmektedir.

Hesap makineleri ve bilgisayarlar çoğunlukla, açı ister radyan ister derece olarak verilsin, bir açının trigonometrik oranlarını kolaylıkla verirler.

TABLO 1.4 Seçilmiş bazı θ değerleri için $\sin\theta$, $\cos\theta$ ve $\tan\theta$ değerleri

Derece	–180	–135	–90	–45	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
θ (radyan)	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\theta$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan\theta$	0	1		-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0		0

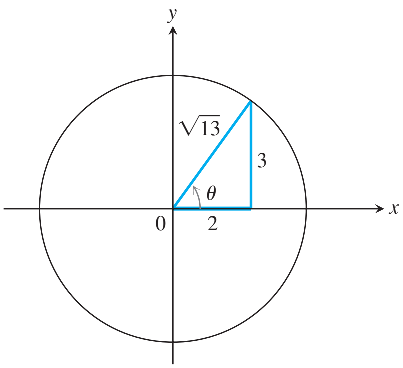
ÖRNEK 1 Trigonometrik Fonksiyon Değerlerini Bulmak

$\tan\theta = 3/2$ ve $0 < \theta < \pi/2$ ise θ nın diğer beş trigonometrik fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm $\tan\theta = 3/2$ den Şekil 1.72 deki yüksekliği 3 (karşı) ve tabanı 2 (komşu) olan üçgeni çizeriz. Pisagor Teoremi hipotenüs uzunluğunu verir $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. Üçgenden diğer beş trigonometrik fonksiyonun değerlerini yazarız:

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}, \qquad \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}, \qquad \sec\theta = \frac{\sqrt{13}}{2}, \qquad \csc\theta = \frac{\sqrt{13}}{3}, \qquad \cot\theta = \frac{2}{3}$$

■



ŞEKİL 1.72 Örnek 1 deki trigonometrik fonksiyonların hesaplandığı üçgen.

Trigonometrik Fonksiyonların Periyodikliği ve Grafikleri

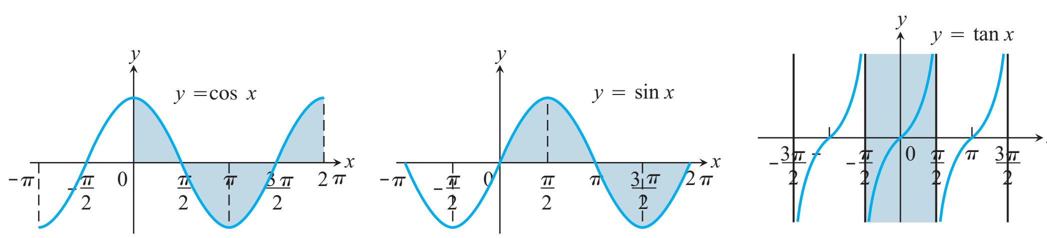
θ ölçüsünde bir açı ile $\theta + 2\pi$ ölçüsünde bir açı standart konumdaysalar, bitiş ışınları çakışır. Dolayısıyla iki açının da trigonometrik değerleri aynıdır:

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta \qquad \sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta \qquad \tan(\theta + 2\pi) = \tan\theta$$
$$\sec(\theta + 2\pi) = \sec\theta \qquad \csc(\theta + 2\pi) = \csc\theta \qquad \cot(\theta + 2\pi) = \cot\theta$$

Benzer olarak, $\cos(\theta - 2\pi) = \cos\theta$, $\sin(\theta - 2\pi) = \sin\theta$ vs. Bu tekrar etme davranışını, altı temel trigonometrik fonksiyon *periyodiktir* şeklinde tanımlarız.

TANIM Periyodik Fonksiyon
Her x değeri için, $f(x+p) = f(x)$ olacak şekilde bir p değeri bulunabiliyorsa, $f(x)$ fonksiyonu periyodiktir. Böyle en küçük p değerine f'nin **periyodu** denir.

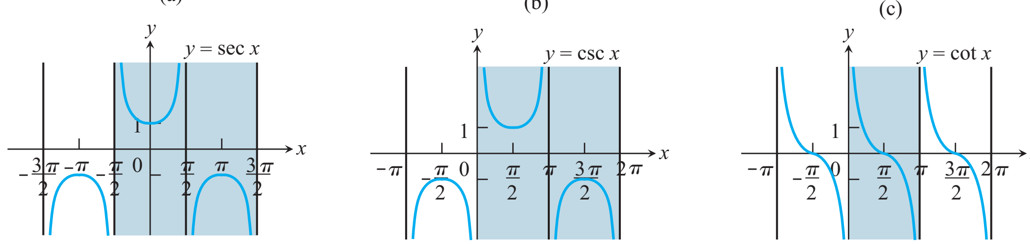
Trigonometrik fonksiyonları koordinat düzleminde çizerken, genellikle bağımsız değişkeni θ yerine x ile belirtiriz. Şekil 1.73'e bakın.



(a) Tanım kümesi: $-\infty < x < \infty$
Değer kümesi: $-1 \le y \le 1$
Periyot: 2π

(b) Tanım kümesi: $-\infty < x < \infty$
Değer kümesi: $-1 \le y \le 1$
Periyot: 2π

(c) Tanım kümesi: $x \ne \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Değer kümesi: $-\infty < y < \infty$
Periyot: π



(d) Tanım kümesi: $x \ne \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Değer kümesi: $y \le -1$ ve $y \ge 1$
Periyot: 2π

(e) Tanım kümesi: $x \ne 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Değer kümesi: $y \le -1$ ve $y \ge 1$
Periyot: 2π

(f) Tanım kümesi: $x \ne 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Değer kümesi: $-\infty < y < \infty$
Periyot: π

ŞEKİL 1.73 Radyan ölçü kullanarak (a) kosinüs, (b) sinüs, (c) tanjant, (d) sekant, (e) cosekant ve (f) kotanjant grafikleri. Gölgeli bölümler her bir fonksiyonun periyodunu belirtmektedir.

Trigonometrik Fonksiyonların Periyodu

Periyot π: $\tan(x+\pi) = \tan x$
$\cot(x+\pi) = \cot x$

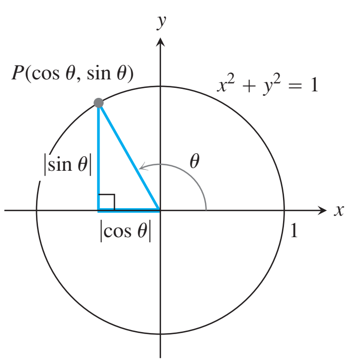
Periyot 2π: $\sin(x+2\pi) = \sin x$
$\cos(x+2\pi) = \cos x$
$\sec(x+2\pi) = \sec x$
$\csc(x+2\pi) = \csc x$

Şekil 1.73'ten gördüğümüz gibi, tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının periyodu $p = \pi$'dir. Diğer dört fonksiyonun periyodu ise 2π'dir. Periyodik fonksiyonların önemi bilimde incelenen davranışların çoğunun yaklaşık olarak periyodik olmalarından kaynaklanmaktadır.

İleri analizden bir teorem şunu söyler: matematiksel modellemede kullanmak istediğimiz her periyodik fonksiyon sinüs ve kosinüslerin cebirsel bir kombinasyonu olarak yazılabilir. Bunun nasıl yapıldığını Bölüm 11.11 de göreceğiz.

Şekil 1.73'teki grafiklerdeki simetriler, kosinüs ve sekant fonksiyonlarının çift, diğer dört fonksiyonun tek olduğunu göstermektedir.

Çift	**Tek**
$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\sec(-x) = \sec x$	$\tan(-x) = -\tan x$
	$\csc(-x) = -\csc x$
	$\cot(-x) = -\cot x$



ŞEKİL 1.74 Genel bir θ açısının referans üçgeni

Bağıntılar

Düzlemdeki herhangi bir $P(x, y)$ noktasının koordinatları, noktanın orijinden uzaklığı ve OP ışınının pozitif x-ekseni ile yaptığı açı cinsinden ifade edilebilir (Şekil 1.69). $x/r = \cos\theta$ ve $y/r = \sin\theta$ olduğundan

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

bağıntıları vardır.

$r = 1$ olduğunda Şekil 1.74 teki referans dik üçgene, aşağıdaki eşitliği elde etmek için Pisagor teoremini uygulayabiliriz.

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad (1)$$

Her θ değeri için doğru olan bu denklem, trigonometride en fazla kullanılan özdeşliktir. Bu denklemi sırasıyla $\cos^2\theta$ ve $\sin^2\theta$ ile bölmek şu bağıntıları verir:

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Aşağıdaki formüller her A ve B açısı için sağlanır (Alıştırma 53 ve 54).

Toplama Formülleri

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$
$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B \qquad (2)$$

$\cos(A - B)$ ve $\sin(A - B)$ için de benzer formüller bulunmaktadır (Alıştırma 35 ve 36). Bu kitapta ihtiyaç duyacağınız tüm trigonometrik bağıntılar (1) ve (2) denklemlerinden türemiştir. Örneğin, açı toplam formüllerinde hem A hem de B yerine θ yazarsak şu bağıntıları elde ederiz,

Çift -Açı Formülleri

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\cos 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \tag{3}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \qquad \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$$

İki denklemi toplayarak $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$ ve ikinci denklemi birinciden çıkartarak $2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$ elde ederiz. Buradan, integral hesapta kullanışlı olan aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

Yarım-Açı Formülleri

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \tag{4}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \tag{5}$$

Kosinüs Kuralı

a, b ve c bir ABC üçgeninin kenarları ve θ'da c'nin karşısındaki açıysa

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \tag{6}$$

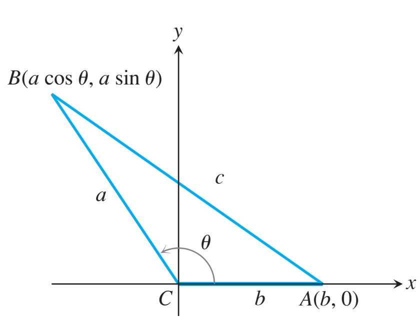
denklemi elde edilir. Bu denkleme **kosinüs kuralı** denir.

Şekil 1.75'teki gibi, koordinat eksenlerinin orijinini C 'de alır ve pozitif x-eksenini üçgenin kenarlarından birine yerleştirirsek, bu kuralın neden doğru olduğunu görebiliriz. A'nın koordinatları $(b, 0)$, B'ninkiler $(a\cos\theta, a\sin\theta)$' dır. Dolayısıyla, A ile B arasındaki uzaklığın karesi

$$\begin{aligned} c^2 &= (a\cos\theta - b)^2 + (a\sin\theta)^2 \\ &= a^2\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1} + b^2 - 2ab\cos\theta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \end{aligned}$$

olur.

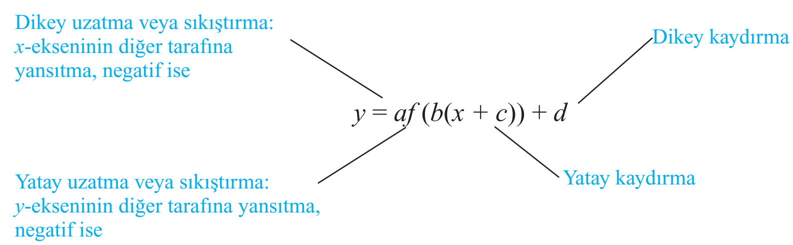
Kosinüs kuralı Pisagor teoremini genelleştirir. $\theta = \pi/2$ ise, $\cos\theta = 0$ ve $c^2 = a^2 + b^2$ olur.



Şekil 1.75 A ile B arasındaki uzaklığın karesi kosinüs kuralını verir.

Trigonometrik Grafiklerin Dönüşümü

Kaydırma, uzatma, sıkıştırma ve yansıtma kuralları trigonometrik fonksiyonlara uygulanır. Aşağıdaki diyagram size, parametrelerin kontrolünü hatırlatacaktır.

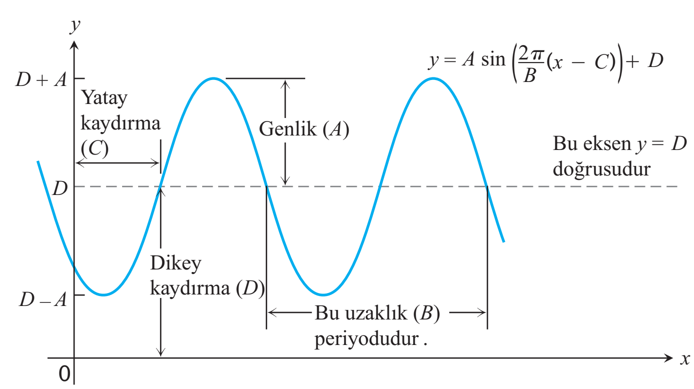


ÖRNEK 2 Alaska'daki Sıcaklığı Modelleme

Trans-Alaska boru hattının yapımcıları boru hattındaki sıcak petrolün ısısının alttaki sürekli olarak donmuş bulunan toprağı eritmesini engellemek için yalıtıcı yastıklar kullanmışlardır. Yastıklara şekil verebilmek için, yıl içindeki hava sıcaklığı değişimlerini hesaba katmaları gerekmiştir. Değişimler,

$$f(x) = A \sin\left[\frac{2\pi}{B}(x - C)\right] + D$$

şeklinde genel bir **sinüs fonksiyonu** veya **sinüzoid** ile temsil edilmiştir. Burada $|A|$ *genliği*, $|B|$ *periyodu*, C *yatay kaymayı* ve D *dikey kaymayı* göstermektedir. (Şekil 1.76)

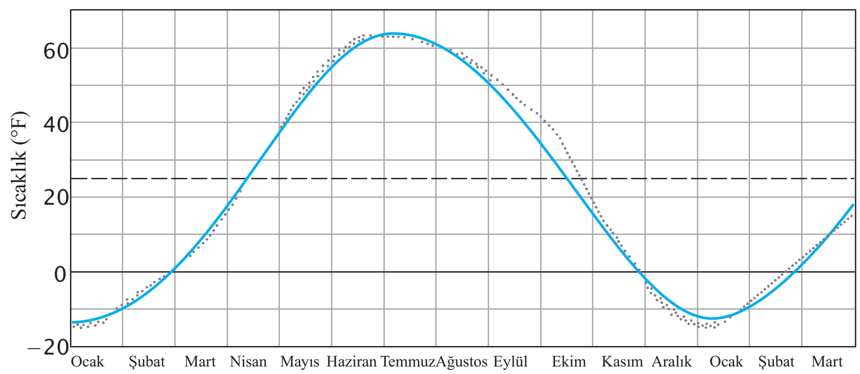


ŞEKİL 1.76 Pozitif A, B, C ve D için $y = A\sin[(2\pi/B)(x - c)] + D$ genel sinüs eğrisi (Örnek 2).

Şekil 1.77 böyle bir fonksiyonun sıcaklık verilerini temsil etmekte nasıl kullanılacağını göstermektedir. Şekildeki veri noktaları 1941'den 1970'e kadar Ulusal Hava Servisi'nden alınan verilere dayanan Fairbanks, Alaska için ortalama hava sıcaklıklarıdır. Verilere uydurulan sinüs fonksiyonu, f Fahrenheit cinsinden sıcaklık ve x yılın başından itibaren geçen gün sayısı olmak üzere

$$f(x) = 37 \sin\left[\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right] + 25$$

ile verilmektedir. Bir hesap makinesi veya bilgisayar üzerinde sinüzoidal yaklaşım seçeneği ile elde edilen uyum, sonraki bölümde tartışacağız, verinin gidişatını yakalamak için oldukça iyidir.



ŞEKİL 1.77 Fairbanks, Alaska, için normal ortalama hava sıcaklıkları veri noktaları olarak işaretlenmiştir (lacivert). Sinus yaklaşım fonksiyonu (kahverengi)

$$f(x) = 37 \sin [(2\pi/365)(x - 101)] + 25$$

ALIŞTIRMALAR 1.6

Radyan, Derece ve Dairesel Yaylar

1. 10 m yarıçaplı bir çemberde, (a) $4\pi/5$ radyanlık, (b) 110°'lik bir merkez açıya karşılık gelen yayın uzunluğu ne kadardır?

2. 8 yarıçaplı bir çemberdeki merkez açı 10π uzunluğunda bir yaya karşılık gelmektedir? Açıyı radyan ve derece cinsinden bulun.

3. 12 inç çaplı bir çemberin çevresinde bir yay işaretleyip, yayın uçlarından çemberin merkezine doğrular çizerek 80°'lik bir açı elde etmek istiyorsunuz. Bir inçin onda biri hassasiyetle yayın uzunluğu ne olmalıdır?

4. 1 m çapında bir tekerleği yer seviyesinin 30 cm yukarısına döndürürseniz, tekerlek hangi açıyla döner? Cevabınızı radyan (1/10 hassasiyetle) ve derece (1 derecelik hassasiyetle) cinsinden veriniz.

Trigonometrik Fonksiyonları Hesaplamak

5. Aşağıda verilen fonksiyon değerleri tablosunu doldurun. Verilen bir açıda fonksiyon tanımlı değilse, "TNSZ" yazın. Tablo veya hesap makinesi kullanmayın.

θ	$-\pi$	$-2\pi/3$	0	$\pi/2$	$3\pi/4$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					
$\cot\theta$					
$\sec\theta$					
$\csc\theta$					

6. Aşağıda verilen fonksiyon değerleri tablosunu doldurun. Verilen bir açıda fonksiyon tanımlı değilse, "TNSZ" yazın. Tablo veya hesap makinesi kullanmayın.

θ	$-3\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/6$	$\pi/4$	$5\pi/6$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					
$\cot\theta$					
$\sec\theta$					
$\csc\theta$					

7-12 alıştırmalarında sin x, cos x ve tan x'ten biri verilmiştir. x belirtilen aralıktaysa, diğer ikisini bulunuz.

7. $\sin x = \frac{3}{5}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

8. $\tan x = 2, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

9. $\cos x = \frac{1}{3}, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

10. $\cos x = -\frac{5}{13}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

11. $\tan x = \frac{1}{2}, \quad x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

12. $\sin x = -\frac{1}{2}, \quad x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

Trigonometrik Fonksiyonları Çizmek

13-22 alıştırmalarındaki fonksiyonları çizin. Her fonksiyonun periyodu nedir?

13. $\sin 2x$

14. $\sin (x/2)$

15. $\cos \pi x$

16. $\cos \dfrac{\pi x}{2}$

17. $-\sin \dfrac{\pi x}{3}$

18. $-\cos 2\pi x$

19. $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

20. $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

21. $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 1$

22. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 1$

23-26 alıştırmalarındaki fonksiyonları *ts*-düzleminde (*t* yatay, *s* dikey eksen) çizin. Her fonksiyonun periyodu nedir? Grafiklerin simetrileri nelerdir?

23. $s = \cot 2t$

24. $s = -\tan \pi t$

25. $s = \sec\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)$

26. $s = \csc\left(\dfrac{t}{2}\right)$

T **27.** **a.** $-3\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$ için $y = \cos x$ ve $y = \sec x$ fonksiyonlarını birlikte çizin. $\cos x$'in işaretlerine ve değerlerine göre $\sec x$'in davranışını açıklayın.

b. $-\pi \leq x \leq 2\pi$ için $y = \sin x$ ve $y = \csc x$ fonksiyonlarını birlikte çizin. $\sin x$'in işaretlerine ve değerlerine göre $\csc x$'in davranışını açıklayın.

T **28.** $-7 \leq x \leq 7$ için $y = \tan x$ ve $y = \cot x$ fonksiyonlarını birlikte çizin. $\tan x$'in işaretlerine ve değerlerine göre $\cot x$'in davranışını açıklayın.

29. $y = \sin x$ ve $y = \lfloor \sin x \rfloor$ fonksiyonlarını birlikte çizin. $\lfloor \sin x \rfloor$'in değer ve tanım kümeleri nedir?

30. $y = \sin x$ ve $y = \lceil \sin x \rceil$ fonksiyonlarını birlikte çizin. $\lceil \sin x \rceil$'in değer ve tanım kümeleri nedir?

Ek Trigonometrik Bağıntılar

31-36 alıştırmalarındaki bağıntıları türetmek için açı toplama formüllerini kullanın.

31. $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin x$

32. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$

33. $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$

34. $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos x$

35. $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ (Alıştırma 53 farklı bir türetme tanıtmaktadır)

36. $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

37. $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ bağıntısında $B = A$ alırsanız ne olur? Bu sonuç daha önceden bildiğiniz bir şeyle uyuşuyor mu?

38. Açı toplama formüllerinde $B = 2\pi$ alırsanız ne olur? Sonuçlar daha önceden bildiğiniz bir şeylerle uyuşuyor mu?

Açı Toplama Formüllerini Kullanma

39-42 alıştırmalarında, verilen büyüklüğü sin*x* ve cos*x* cinsinden ifade edin.

39. $\cos(\pi + x)$

40. $\sin(2\pi - x)$

41. $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$

42. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$

43. $\sin \dfrac{7\pi}{12}$'nin değerini $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3}\right)$'ü hesaplayarak bulun.

44. $\cos \dfrac{11\pi}{12}$'nin değerini $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{3}\right)$'ü hesaplayarak bulun.

45. $\cos \dfrac{\pi}{12}$'nin değerini bulun.

46. $\sin \dfrac{5\pi}{12}$'nin değerini bulun.

Çift Açı Formüllerini Kullanma

47-50 alıştırmalarındaki fonksiyonların değerlerini bulun.

47. $\cos^2 \dfrac{\pi}{8}$

48. $\cos^2 \dfrac{\pi}{12}$

49. $\sin^2 \dfrac{\pi}{12}$

50. $\sin^2 \dfrac{\pi}{8}$

Teori ve Örnekler

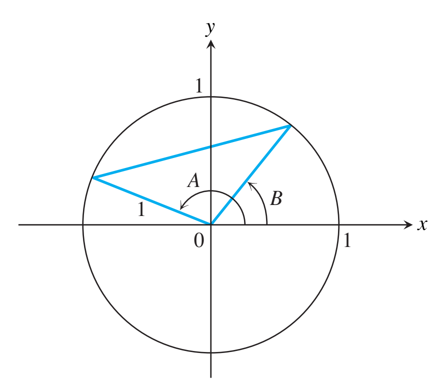
51. **Tanjant toplama formülü** İki açının toplamının tanjantının standart toplamı

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

olarak verilir. Formülü çıkartın.

52. *(Alıştırma 51'in devamı)* $\tan(A - B)$ için bir formül türetin.

53. Aşağıdaki şekildeki üçgene kosinüs kuralını uygulayarak $\cos(A - B)$ için bir formül türetin.



54. **a.** $\sin(A + B)$ için toplama formülünü elde etmek üzere $\sin\theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ denklemine $\cos(A - B)$ formülünü uygulayın.

b. Alıştırma 35 teki $\cos(A - B)$ formülünde B yerine $-B$ yazarak $\cos(A + B)$ için formül türetin.

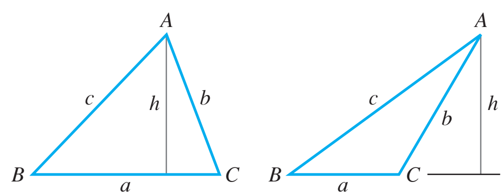
55. Bir üçgenin iki kenarı $a = 2$, $b = 3$ ve bir açısı $C = 60°$'dir. c kenarının uzunluğunu bulunuz.

56. Bir üçgenin iki kenarı $a = 2$, $b = 3$ ve bir açısı $C = 40°$'dir. c kenarının uzunluğunu bulun

57. Sinüs kuralı a, b ve c bir üçgendeki A, B ve C açılarının karşılarındaki kenarlarsa, **sinüs kuralı**

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

olacağını söyler. Verilen şekilleri ve $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ bağıntısını kullanarak bu kuralı çıkarın.



58. Bir üçgenin iki kenarı $a = 2$, $b = 3$ ve bir açısı $C = 60°$'dir (Alıştırma 55'teki gibi). Sinüs kuralını kullanarak B açısının sinüsünü bulun.

59. Bir üçgenin bir kenarı $c = 2$ ve iki açısı $A = \pi/4$ ve $B = \pi/3$'tür. A'nın karşısındaki a kenarının uzunluğunu bulun.

60. sin $x \approx x$ yaklaşımı x radyan olarak ölçüldüğünde, x'in küçük sayısal değerleri için, $\sin x \approx x$ olduğunu bilmek yararlıdır. Bölüm 3.8'de, bu yaklaşımın neden doğru olduğunu göreceğiz. $|x| < 0.1$ ise, yaklaşımın hatası 5000'de 1'den azdır.

T

a. Grafik çizicinizi radyan moduna ayarlarayarak, $y = \sin x$ ve $y = x$ grafiklerini orijin yakınında birlikte çizin. x orijine yaklaştıkça ne gözlüyorsunuz?

b. Grafik çizicinizi derece moduna ayarlayarak, $y = \sin x$ ve $y = x$ grafiklerini orijin etrafında yine beraber çizin. Görüntünün radyan modunda elde edilenden farkı nedir?

c. Çabuk bir radyan mod kontrolü Hesap makineniz radyan modunda mı? x'in orijine yakın bir değerinde, örneğin $x = 0.1$'de, $\sin x$'i hesaplayın. $\sin x \approx x$ ise, hesap makineniz radyan modunda, yoksa değildir. Deneyin.

Genel Sinüs Eğrileri

$$f(x) = A\sin\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D$$

için, 61–64 alıştırmalarındaki sinüs fonksiyonlarında A, B, C ve D'yi bulun ve grafiklerini çizin (Şekil 1.76 ya bakın).

61. $y = 2\sin(x + \pi) - 1$

62. $y = \frac{1}{2}\sin(\pi x - \pi) + \frac{1}{2}$

63. $y = -\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{1}{\pi}$

64. $y = \frac{L}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{L}, \quad L > 0$

65. Fairbanks, Alaska'daki sıcaklık Genel bir

$$f(x) = 37\sin\left(\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right) + 25$$

sinüs fonksiyonunun **(a)** genliğini, **(b)** periyodunu, **(c)** yatay kaymasını ve (d) dikey kaymasını bulun.

66. Fairbanks, Alaska'daki sıcaklık Alıştırma 65'teki denklemi kullanarak, aşağıdaki sorularda Şekil 1.77'de gösterilen Fairbanks, Alaska'daki sıcaklık hakkında sorulanlara yaklaşık cevaplar bulun. Bir yılın 365 gün olduğunu varsayın.

a. Görülen en düşük ve en yüksek ortalama günlük sıcaklık nedir?

b. Görülen en düşük ve en yüksek günlük ortalama sıcaklıkların ortalaması nedir? Bu ortalama neden fonksiyonun dikey kaymasıdır?

BİLGİSAYARLI İNCELEMELER

67-70 alıştırmalarında, grafik olarak A, B, C ve D sabitlerinin değerlerlerini değiştirerek, genel

$$f(x) = A\sin\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D$$

sinüs eğrisini inceleyeceksiniz. Alıştırmalardaki adımlar için bir *BCS* veya bilgisayar grafik programı kullanın.

67. Periyod *B* $A = 3$, $C = D = 0$ alın.

a. $B = 1, 3, 2\pi, 5\pi$ değerleri için $-4\pi \le x \le 4\pi$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunu çizin. Periyod arttıkça genel sinüs fonksiyonuna ne olduğunu açıklayın.

b. B'nin negatif değerlerlerinde grafiğe ne olur? $B = -3$ ve $B = -2\pi$ için deneyin.

68. Yatay kayma *C* $A = 3$, $B = 6$ ve $D = 0$ alın.

a. $C = 0$, 1 ve 2 değerleri için $-4\pi \le x \le 4\pi$ aralığında $f(x)$'i çizin. C pozitif olarak artarken genel sinüs fonksiyonuna ne olduğunu açıklayın.

b. C'nin negatif değerlerinde grafiğe ne olur?

c. Grafiğin yatay bir kayma göstermemesi için C'ye verilebilecek en küçük değer nedir? Cevabınızı çizerek gösterin.

69. Dikey kayma *D* $A = 3$, $B = 6$ ve $C = 0$ alın.

a. $D = 0$, 1 ve 3 değerleri için $-4\pi \le x \le 4\pi$ aralığında $f(x)$' i çizin. D pozitif olarak artarken genel sinüs fonksiyonuna ne olduğunu açıklayın.

b. D'nin negatif değerlerinde grafiğe ne olur?

70. Genellikle *A* $B = 6$, $C = D = 0$ alın.

a. A pozitif olarak artarken genel sinüs fonksiyonuna ne olduğunu açıklayın. Cevabınızı $A = 1$, 5 ve 9 için $f(x)$'i çizerek gösterin.

b. A'nın negatif değerlerinde grafiğe ne olur?

1.7 Hesap Makinesi ve Bilgisayarla Grafik Çizmek

Grafik çizen bir hesap makinesi veya grafik çizim programı olan bir bilgisayar, çok karmaşık fonksiyonların grafiklerini büyük bir doğrulukla çizmemizi sağlar. Aksi halde bu fonksiyonların bir çoğu kolaylıkla çizilemez. Bununla birlikte, bu gibi araçları grafik çizmek maksatlı kullanırken dikkatli olmak gerekir. Bu bölümde bu konulara yöneliyoruz. Bölüm 4 te, bir fonksiyonun grafiğinin bütün önemli özelliklerini doğru olarak gördüğümüze emin olmamızda, analizin nasıl yardımcı olduğunu göreceğiz.

Grafik Çerçeveleri

Grafik çizim aracı olarak grafik çizen bir hesap makinesi veya bilgisayar kullanıldığında, dikdörtgen bir **ekranda** veya görüntü çerçevesinde, grafiğin bir bölümü gösterilir. Ana çerçeve çoğu kez grafiğin tam olmayan veya yanıltıcı bir resmini verir. Her iki eksende de **birimler** veya **ölçüler** aynı olduğunda **kare çerçeve** terimini kullanırız. Bu, görüntü çerçevesinin kendisinin şekil olarak kare olması demek değildir (genellikle dikdörtgendir), x-biriminin y-birimine eşit olması demektir.

Bir grafik ana ekranda gösterildiğinde, grafiği ekrana uydurmak için x-birimleri y-birimlerinden farklı olabilir. Ekrandaki görüntü çerçevesi, bağımsız ve bağlı değişkenlerin minimum ve maksimum değerleri belirtilerek ayarlanır. Yani, bir $a \leq x \leq b$ aralığı ve bir $c \leq y \leq d$ değer aralığı belirlenir. Makine, a ile b arasında eşit aralıklarla belirli sayıda x değerleri seçer. x için bir ilk değerle başlayarak, grafiği çizilen fonksiyonun tanım kümesinde yer alıyorsa ve $f(x)$, $[c, d]$ değer kümesinde yer alıyorsa $(x, f(x))$ noktası işaretlenir. x, f'nin tanım kümesinin dışında ise veya $f(x)$ belirlenen $[c, d]$ değer aralığının dışında ise bu durumda makine $(x, f(x))$ noktasını işaretleyemediğinden bir sonraki x-değerine geçer.

Makine bu yolla çok fazla sayıda $(x, f(x))$ noktası işaretler ve işaretlenen her nokta ile komşu nokta arasında, elle de yapabileceğimiz gibi, kısa bir doğru parçası çizerek grafiği temsil eden eğriye yaklaşır. Genellikle, komşu noktalar birbirlerine o kadar yakındırlar ki temsili grafik düzgün bir eğri görünümündedir. Bu işlem sırasında bazı şeyler ters gidebilir. Aşağıdaki örneklerde en çok karşılaşılan problemler gösterilmektedir.

ÖRNEK 1 Bir Görüntü Çerçevesi Seçmek

$f(x) = x^3 - 7x^2 + 28$ fonksiyonunun grafiğini, aşağıdaki her bir ekran veya görüntü çerçevesi içinde çizin.

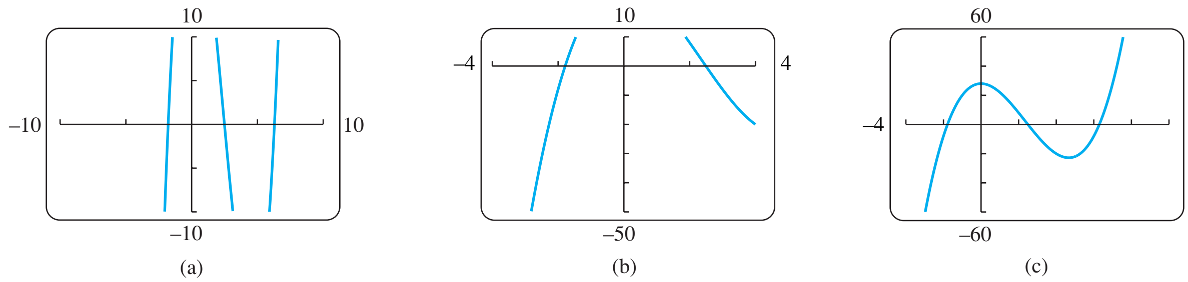
(a) $[-10, 10]$'a $[-10, 10]$ **(b)** $[-4, 4]$'a $[-50, 10]$ **(c)** $[-4, 10]$'a $[-60, 60]$

Çözüm

(a) Çerçeve için, x-değerleri aralığını ve y-değerleri aralığını belirlemek için $a = -10$, $b = 10$, $c = -10$ ve $d = 10$ seçeriz. Sonuç grafik Şekil 1.78a da gösterilmiştir. Çerçevenin, grafiğin alt bölümünü kestiği ve x-değerleri aralığının çok geniş olduğu gözükmektedir. Bir sonraki çerçeveyi deneyelim.

(b) Şimdi grafiğin daha çok özelliğini görüyoruz (Şekil 1.78b), fakat üst kısım kayıptır ve $x = 4$ ten daha sağı görmeliyiz. Bir sonraki çerçeve yardımcı olacaktır.

(c) Şekil 1.78c grafiği yeni görüntü çerçevesi içinde göstermektedir. Bu çerçevede grafiğin daha bütün bir resmini elde ettiğimize ve bunun 3. dereceden bir polinom grafiğine uygun olduğuna dikkat edin. İyi bir görüntü çerçevesi seçmek bir deneme-yanılma sürecidir ve bazı sorunları çözmeyi gerektirebilir.



ŞEKİL 1.78 Farklı görüntü çerçevelerinde $f(x) = x^3 - 7x^2 + 28$'in grafiği (Örnek 1).

ÖRNEK 2 Kare Çerçeve

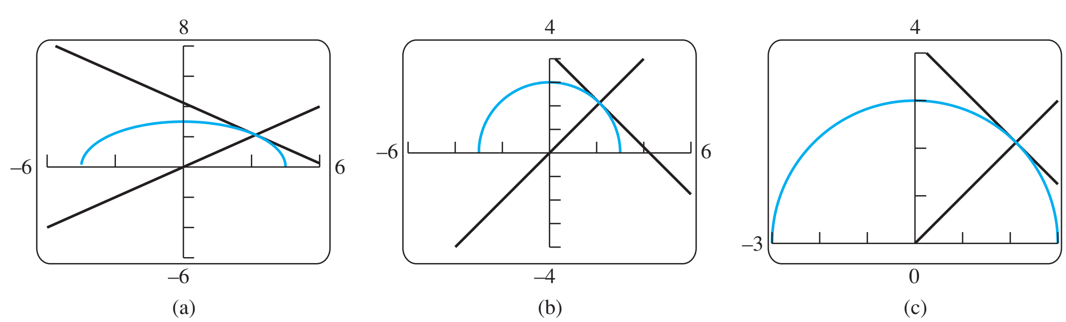
Bir grafik görüntülendiğinde Şekil 1.78b ve 1.78c.de olduğu gibi x-birimi y-biriminden farklı olabilir. Sonuç, resimde yanıltıcı olabilecek bir bozulmadır.

Bir eksendeki birimleri, diğerindeki ölçeğe uydurmak için, sıkıştırarak veya uzatarak görüntü çerçevesi doğru grafiği veren kare çerçeve yapılabilir. Çoğu sistemin içinde ekranı "kare" yapacak fonksiyonlar bulunmaktadır. Sizinki kare değilse, bazı hesaplamalar yaparak ekran boyutunuzu elle kare haline getirmeniz veya gerçek çizimi önceden biliyor olmanız gerekir.

Şekil 1.79a da birbirine dik $y = x$ ve $y = -x + 3\sqrt{2}$ doğruları ile $y = \sqrt{9 - x^2}$ yarım çemberinin grafikleri, kare olmayan [–6, 6]'ya [–6, 8]'lik bir görüntü ekranında görülmektedir. Bozulmaya dikkat edin. Doğrular dikmiş gibi gözükmemekte, yarım çember şekil olarak elips gibi gözükmektedir.

Şekil 1.79b de aynı fonksiyonların grafikleri, x-birimleri y-birimleri ile aynı olacak şekilde ölçeklenmiş bir kare ekranda gözükmektedir. Her iki şekilde de [–6, 6]'ya [–4, 4]'lük ekranındaki x-ekseninin aynı olduğuna, fakat Şekil 1.79b de ekranı kare yapmak için x-eksenindeki ölçeklemenin sıkıştırılmış olduğuna dikkat edin.

Şekil 1.79c, [–3, 3]'e [0, 4]'lük bir ekranda genişletilmiş bir görüntüyü kare içinde vermektedir.



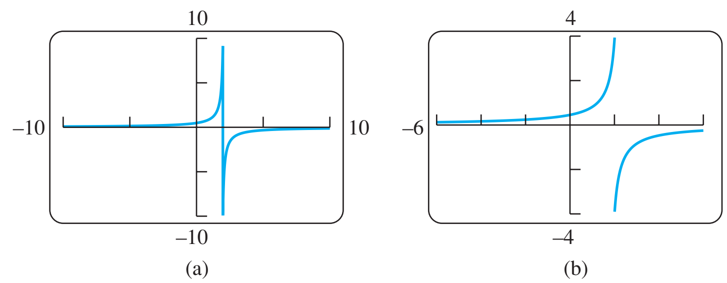
ŞEKİL 1.79 Birbirine dik $y = x$ ve $y = -x + 3\sqrt{2}$ doğruları ve $y = \sqrt{9 - x^2}$ yarım çemberinin grafikleri (a) kare olmayan ekranda, (b) ve (c) kare ekranda (Örnek 2).

Bir rasyonel fonksiyonun paydası, görüntü ekranındaki bazı x-değerlerinde sıfır oluyorsa hesap makinesi veya bilgisayar grafik programı ekranın üstünden altına dikeye yakın bir doğru parçası çizer. İşte bir örnek.

ÖRNEK 3 Bir Rasyonel Fonksiyonun Grafiği

$y = \dfrac{1}{2 - x}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm Şekil 1.80a grafiği [–10, 10]’a [–10, 10] luk bir kare çerçeve içinde göstermektedir. $x = 2$ de neredeyse dikey olan doğru parçasına dikkat edin. O, aslında grafiğin bir parçası değildir ve $x = 2$ fonksiyonun tanım kümesinde değildir. Bu doğru parçasını, deneme-yanılma yoluyla görüntü çerçevesini daha küçük olan ve daha iyi bir grafik veren [–6, 6]’ya [–4, 4]’lük bir çerçeveye değiştirerek ortadan kaldırabiliriz (Şekil 1.80b).



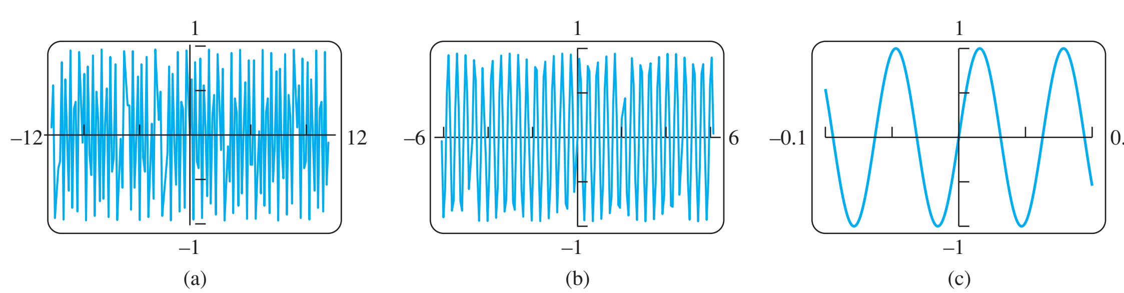
ŞEKİL 1.80 $y = \dfrac{1}{2 - x}$ fonksiyonunun grafiği (Örnek 3). ■

Bazen bir trigonometrik fonksiyonun grafiği çok hızlı salınır. Bir hesap makinesi veya bilgisayar programı grafiğin noktalarını işaretleyip onları birleştirirken, maksimum ve minimum noktalarının bir çoğu kaybolur. Neticede grafik çok yanıltıcıdır.

ÖRNEK 4 Hızla Salınan bir Fonksiyonun Grafiği

$f(x) = \sin 100x$ fonksiyonunun grafiğini çizin.

Çözüm Şekil 1.81a f’nin grafiğini [–12, 12]’ye [–1, 1]’lik bir görüntü çerçevesi içinde göstermektedir. Sinüs eğrisinin –1 ile 1 arasında periyodik olarak salınması gerektiğinden grafiğin çok tuhaf gözüktüğünü görüyoruz. Bu davranış Şekil 1.81a. da sergilenmedi. Daha küçük, örneğin [–6, 6]’ya [–1, 1]’lik bir görüntü çerçevesi ile deneme yapabiliriz fakat grafik daha iyi değildir (Şekil 1.81b). Zorluk şuradadır; $f(x) = \sin 100x$ fonksiyonunun periyodu çok küçüktür ($2\pi/100 \approx 0.063$). Çok daha küçük [–0.1, 0.1]’e [–1, 1]’lik görüntü çerçevesini seçersek Şekil 1.81c de gösterilen grafiği elde ederiz. Bu grafik bir sinüs eğrisinin beklenen salınımlarını gösterir.

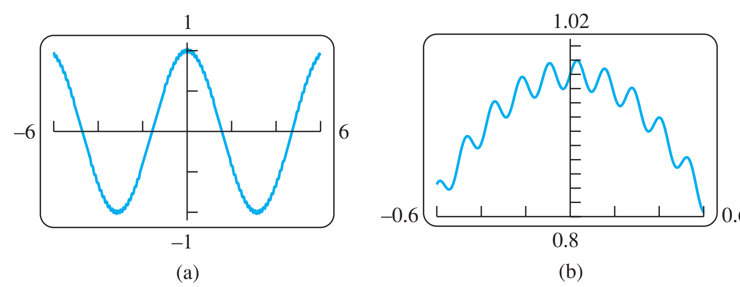


ŞEKİL 1.81 Üç görüntü çerçevesinde $f(x) = \sin 100x$ fonksiyonunun grafikleri. Periyot $2\pi/100 \approx 0.063$ olduğundan, hızla salınan bu fonksiyonun gerçek görünüşünü en iyi (c) deki küçük çerçeve gösterir (Örnek 4). ■

ÖRNEK 5 Hızla Salınan Başka Bir Fonksiyon

$y = \cos x + \frac{1}{50}\sin 50x$ fonksiyonunun grafiğini çizin.

Çözüm [–6, 6]'ya [–1, 1]'lik görüntü çerçevesinde, grafik daha çok üzerinde küçük, keskin oynamalar olan kosinüs fonksiyonu gibi gözükmektedir (Şekil 1.82a). Çerçeveyi önemli ölçüde küçülttüğümüzde, [–0.6, 0.6]'ya [0.8, 1.02]'lik çerçevede daha iyi bir görünüş elde ederiz (Şekil 1.82b). Şimdi, kosinüs eğrisinin göreceli olarak daha büyük değerlerine eklenmiş, ikinci terim $1/50 \sin 50x$'in küçük fakat hızlı salınımlarını görüyoruz.



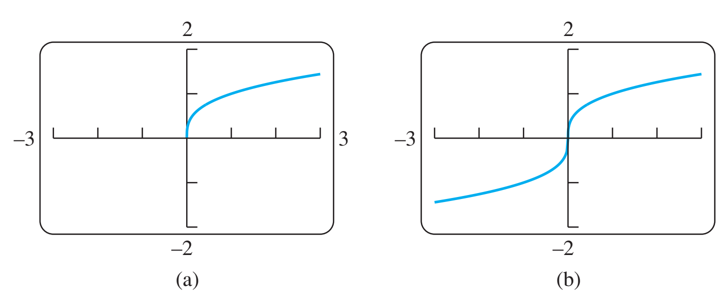
ŞEKİL 1.82 (a) da grafiği çizilmiş olan $y = \cos x + \frac{1}{50}\sin 50x$ fonksiyonun (b) de yakın görüntüsünü görüyoruz. cos x terimi, kosinüs eğrisi boyunca hızlı salınımlar üreten ikinci terim $\frac{1}{50}\sin 50x$ 'e göre baskındır (Örnek 5).

■

ÖRNEK 6 Kesirli Bir Tek Kuvvet Grafiği

$y = x^{1/3}$ fonksiyonunun grafiğini çizin.

Çözüm Grafik çizim aygıtlarının çoğu Şekil 1.83a'daki grafiği gösterir. Şekil 1.38 deki $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ grafiği ile karşılaştırdığımızda, $x < 0$ için sol kolun olmadığını görürüz. Grafiklerin farklı olmalarının nedeni, çoğu hesap makinesi veya bilgisayar programının



ŞEKİL 1.83 $y = x^{1/3}$'nin grafiği, sol kol eksik (a). (b) de $f(x) = \frac{x}{|x|}\cdot|x|^{1/3}$ fonksiyonunun grafiğini her iki kolu da elde ederek çizdik. (Örnek 6 ya bakınız)

$x^{1/3}$'ü $e^{(1/3)\ln x}$ olarak hesaplamasıdır. (Üstel ve logaritmik fonksiyonlar Bölüm 7 de incelenmektedir.) Logaritma fonksiyonu x'in negatif değerlerinde tanımlı olmadığından, hesaplama aygıtı yalnızca $x > 0$ olduğu sağ kolu üretebilir.

Her iki kolu da gösteren tam resmi elde etmek için

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot |x|^{1/3}$$

fonksiyonunun grafiğini çizebiliriz. Bu fonksiyon, $x = 0$ hariç ($0^{1/3} = 0$ olmasına rağmen, burada f tanımsızdır) $x^{1/3}$'e eşittir. Şekil 1.83b de f'nin grafiği gösterilmiştir. ■

Deneysel Modelleme: Toplanmış Verilerin Eğilimini Yakalamak

Bölüm 1.4, Örnek 3 te, Kepler'in "bir gezegenin yörüngesinin periyodu, gezegenin güneşe olan ortalama uzaklığının 3/2 kuvveti ile orantılıdır" hipotezinin makul olup olmadığını gerçekledik. Bir bağlı değişken ile bir bağımsız değişken arasındaki bir ilişkiyi hipotezleştiremezsek, veri noktaları toplamalıyız ve bunlara uyan ve işaretli noktaların eğilimini yakalayan bir eğri bulmaya çalışmalıyız. Veri noktalarına uyan bir eğri bulma işlemine **yaklaşım analizi** ve eğriye bir **yaklaşım eğrisi** denir. Bir bilgisayar veya grafik çizen hesap makinesi, eğri ile veri noktaları arasındaki dikey uzaklıkların kareleri toplamını minimize eden özel bir eğri bularak, yaklaşım eğrisini bulur. Bu **en küçük kareler** yöntemi Bölüm 14.7 alıştırmaları içinde incelenmektedir.

Birçok kullanışlı yaklaşım eğrisi tipi vardır: doğrular, kuvvet, polinom, üstel, logaritmik ve sinüzoidal eğriler gibi. Çoğu bilgisayar veya grafik çizen hesap makinesinin, çeşitli yaklaşım eğrileri uyduran yaklaşım analizi özelliği vardır. Aşağıdaki örnek, Tablo 1.5'teki verileri lineer (doğrusal) bir denkleme uydurmak için, grafik çizen bir hesap makinesinin lineer yaklaşım özelliğinin kullanılmasını göstermektedir.

ÖRNEK 7 Bir Yaklaşım Doğrusu Uydurmak

Tablo 1.5'teki verilerle başlayarak, posta pulu fiyatı için zamanın bir fonksiyonu olarak bir model kurun. Modelin anlamlı olduğunu sağladıktan sonra 2010 yılındaki fiyatı tahmin etmekte kullanın.

TABLO 1.5 Bir A.B.D. posta pulunun fiyatı

Yıl x	**Fiyat y**
1968	0.06
1971	0.08
1974	0.10
1975	0.13
1977	0.15
1981	0.18
1981	0.20
1985	0.22
1987	0.25
1991	0.29
1995	0.32
1998	0.33
2002	0.37

Çözüm Bir pulun fiyatı için 1968 den itibaren bir model kuruyoruz. 1981de, birincisi üç sent ikincisi iki sent olan iki artış vardır. 1981 yılını listedeki diğer yıllarla karşılaştırılabilir kılmak için, bunları beş sentlik tek bir artış olarak, Tablo 1.6'daki datayı vermek üzere birleştiriyoruz. Şekil 1.84a, Tablo 1.6 için data çizimini vermektedir.

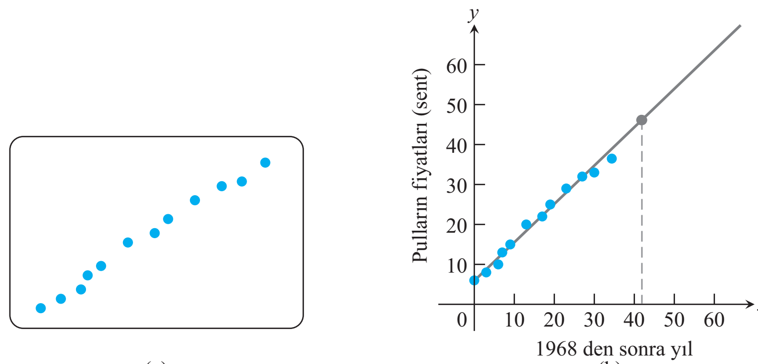
TABLO 1.6 Bir A.B.D. posta pulunun 1968 den itibaren fiyatı

x	0	3	6	7	9	13	17	19	23	27	30	34
y	6	8	10	13	15	20	22	25	29	32	33	37

Data çizimi oldukça doğrusal olduğundan, doğrusal bir model ararız. Datayı bir hesap makinesine (veya bilgisayar programına) girdikten sonra lineer yaklaşım özelliğini seçerek yaklaşım doğrusunun

$$y = 0.94x + 6.10$$

olduğunu buluruz.



ŞEKİL 1.84 (a) Tablo 1.6 daki (x, y) datasının çizimi. (b) Yaklaşım doğrusunun, 2010'daki pul fiyatını tahmin etmede kullanılması (Örnek 7).

Şekil 1.84b doğruyu ve data çizimini birlikte göstermektedir. Uyum dikkate değer ölçüde iyidir, dolayısıyla model kabul edilebilir gözükmektedir.

Yaklaşım doğrusundan hesaplayarak 2010 ($x = 42$) da bir pulun fiyatının

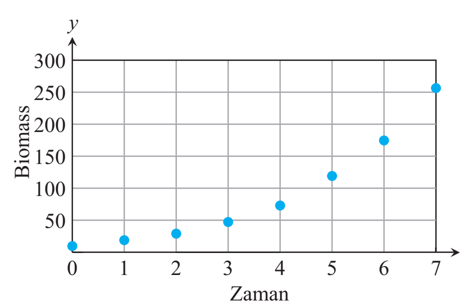
$$y = 0.94(42) + 6.10 \approx 46 \text{ sent}$$

olacağı sonucuna ulaşırız.

Öngörü, Şekil 1.84b'deki yaklaşım doğrusu üzerinde kahverengi nokta olarak işaretlenmiştir. ■

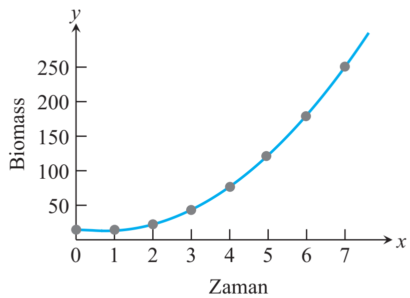
ÖRNEK 8 Nüfus Tahmini İçin bir Eğri Bulmak

Bir balık çiftliğinde, gelecekteki alabalık veya kedibalığı nüfusunu tahmin etmek isteyebiliriz. Şekil 1.85'te bir besin içindeki maya hücreleri topluluğunun (**biomass** olarak ölçülen) bir zaman içinde (saat olarak ölçülen) büyümesi hakkında R. Pearl tarafından toplanan datanın çizimi görülmektedir.



ŞEKİL 1.85 Bir maya kültürünün geçen zamana göre biomass büyüklüğü (Örnek 8).
(Data from R. Pearl, "The Growth of Population," *Quart. Rev. Biol.*, Vol. 2 (1927), pp. 532–548.)

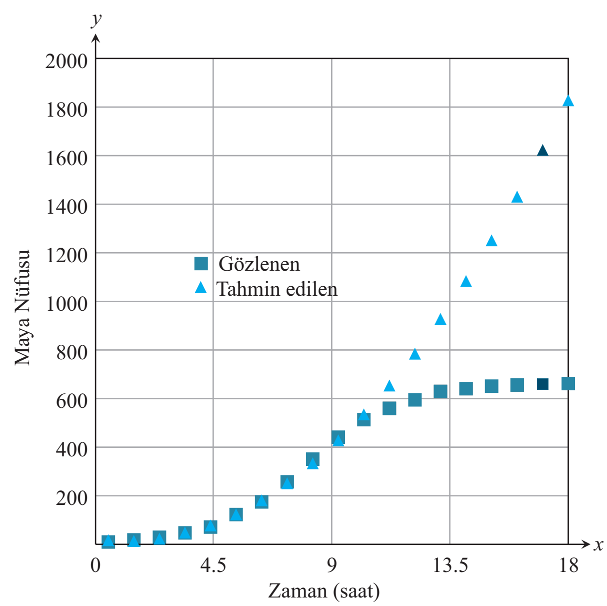
Noktaların çizimi, yukarı doğru eğrilme eğilimiyle oldukça düzgün gözükmektedir. Bu eğilimi bir polinom (örneğin, $y = ax^2 + bx + c$ kuadratiği ile), bir kuvvet eğrisi ($y = ax^b$) veya bir üstel eğri ($y = ae^{bx}$) uydurmakla yakalamayı deneyebiliriz. Şekil 1.86 bir kuadratik model uydurmak için bir hesap makinesinin kullanılması sonucunu göstermektedir.



ŞEKİL 1.86 Pearl datasına bir kuadratik uydurmak $y = 6.10x^2 - 9.28x + 16.43$ denklemini ve $y(17) = 1622.65$ tahmini verir (Örnek 8).

$y = 6.10x^2 - 9.28x + 16.43$ kuadratik modelinin toplanan dataya oldukça iyi uyduğu gözükmektedir (Şekil 1.86). Bu modeli kullanarak 17 saat sonraki nüfusu $y(17) = 1622.65$ olarak tahmin ederiz. Kuadratik modelimizin iyi bir model olup olmadığını görmek için Pearl datasını biraz daha inceleyelim.

Şekil 1.87 de bütün Pearl datasını gösterdik. Şimdi, $y(17) = 1622.65$ tahmininin gözlenen 659.6 nüfusunu çok fazla aştığını görüyorsunuz. Kuadratik model daha doğru bir değeri neden tahmin edememiştir?



ŞEKİL 1.87 Pearl datasının geri kalanı (Örnek 8).

Problem, deneysel modeli kurmak için kullanılan datanın sınırları dışındaki değerlerde tahminde bulunmakta yatar (Bizim modelimizi oluşturan datanın sınırları $0 \leq x \leq 7$ idi). Böyle ekstrapolasyon , özellikle seçilen model, temel oluşturan bir rasyonel öneri ile desteklenmediğinde tehlikelidir. Bizim maya örneğimizde, nüfus artışını belirleyen fonksiyonun neden kuadratik olmasını bekledik? Neden bir üstel fonksiyon değil? Bu durum karşısında, gelecekteki değerleri nasıl tahmin ederiz? Çoğunlukla analiz yardım edebilir. Bölüm 9 da nüfus artışını modellemede analizi kullanacağız. ■

Yaklaşım Analizi

Yaklaşım analizinin dört adımı vardır:

1. Datayı çizin.

2. Bir yaklaşım denklemi bulun. Bir doğru için $y = mx + b$ formunda, bir kuadratik için $y = ax^2 + bx + c$ formundadır.

2. Uyumu görmek için, yaklaşımın denkleminin grafiğini data grafiği üstüne çizin.

4. Uyum tatmin edici ise tabloda olmayan x değerleri için y değerlerini tahmin etmede yaklaşım denklemini kullanın.

ALIŞTIRMALAR 1.7

Bir Görüntü Çerçevesi Seçmek

1–4 alıştırmalarında, verilen görüntü çerçevelerinden hangilerinin, belirtilen fonksiyon grafiğini en uygun gösterdiğini tespit etmek için grafik çizen bir hesap makinesi veya bilgisayar kullanın.

1. $f(x) = x^4 - 7x^2 + 6x$

a. $[-1, 1]$'ye $[-1, 1]$ **b.** $[-2, 2]$'ye $[-5, 5]$

c. $[-10, 10]$'ye $[-10, 10]$ **d.** $[-5, 5]$'ye $[-25, 15]$

2. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

a. $[-1, 1]$'ye $[-5, 5]$ **b.** $[-3, 3]$'ye $[-10, 10]$

c. $[-5, 5]$'ye $[-10, 20]$ **d.** $[-20, 20]$'ye $[-100, 100]$

3. $f(x) = 5 + 12x - x^3$

a. $[-1, 1]$'ye $[-1, 1]$ **b.** $[-5, 5]$'ye $[-10, 10]$

c. $[-4, 4]$'ye $[-20, 20]$ **d.** $[-4, 5]$'ye $[-15, 25]$

4. $f(x) = \sqrt{5 + 4x - x^2}$

a. $[-2, 2]$'ye $[-2, 2]$ **b.** $[-2, 6]$'ye $[-1, 4]$

c. $[-3, 7]$'ye $[0, 10]$ **d.** $[-10, 10]$'ye $[-10, 10]$

Bir Görüntü Çerçevesi Belirlemek

5–30 alıştırmalarında verilen fonksiyon için uygun bir görüntü çerçevesi belirleyin ve bunu grafiği göstermek için kullanın.

5. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 15$ **6.** $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 1$

7. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10$ **8.** $f(x) = 4x^3 - x^4$

9. $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$ **10.** $f(x) = x^2(6 - x^3)$

11. $y = 2x - 3x^{2/3}$ **12.** $y = x^{1/3}(x^2 - 8)$

13. $y = 5x^{2/5} - 2x$ **14.** $y = x^{2/3}(5 - x)$

15. $y = |x^2 - 1|$ **16.** $y = |x^2 - x|$

17. $y = \frac{x + 3}{x + 2}$ **18.** $y = 1 - \frac{1}{x + 3}$

19. $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$ **20.** $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

21. $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - x - 6}$ **22.** $f(x) = \frac{8}{x^2 - 9}$

23. $f(x) = \frac{6x^2 - 15x + 6}{4x^2 - 10x}$ **24.** $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$

25. $y = \sin 250x$ **26.** $y = 3\cos 60x$

27. $y = \cos\left(\frac{x}{50}\right)$ **28.** $y = \frac{1}{10}\sin\left(\frac{x}{10}\right)$

29. $y = x + \frac{1}{10}\sin 30x$ **30.** $y = x^2 + \frac{1}{50}\cos 100x$

31. $x^2 + 2x = 4 + 4y - y^2$ denklemi ile tanımlanan çemberin alt yarısının grafiğini çizin.

32. $y^2 - 16x^2 = 1$ hiperbolünün üst kolunu çizin.

33. $f(x) = -\tan 2x$ fonksiyonunun dört periyodunu çizin.

34. $f(x) = 3\cot\frac{x}{2} + 1$ fonksiyonunun iki periyodunu çizin.

35. $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$ fonksiyonunun grafiğini çizin.

36. $f(x) = \sin^3 x$ fonksiyonunun grafiğini çizin.

Nokta Modunda Çizim

Bir grafik çizim aracı kullanırken yanlış birleştirmelerden kaçınmanın bir başka yolu, sadece noktaları çizen "nokta modu"nu kullanmaktır. Grafik aracınızda bu özellik varsa 37– 40 alıştırmalarındaki fonksiyonları çizmek için onu kullanın.

37. $y = \frac{1}{x - 3}$ **38.** $y = \sin\frac{1}{x}$

39. $y = x\lfloor x \rfloor$ **40.** $y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

Yaklaşım Analizi

T **41.** Tablo 1.7, inşaat işçilerinin yıllık ortalama tazminatlarını göstermektedir.

TABLO 1.7 İnşaat işçilerinin ortalama yıllık tazminatları

Yıl	Yıllık Tazminat (dolar)
1980	22,033
1985	27,581
1988	30,466
1990	32,836
1992	34,815
1995	37,996
1999	42,236
2002	45,413

Kaynak: A.B.D Ekonomik Analiz Bürosu

a. Data için bir lineer yaklaşım denklemi bulunuz.

b. Yaklaşım doğrusunun eğimini bulunuz. Eğim neyi temsil eder?

c. Lineer yaklaşım denkleminin grafiğini datanın nokta çizimi üzerine yerleştirin.

d. Yaklaşım denklemini, inşaat işçilerinin 2010 daki yıllık ortalama tazminatlarını tahminde kullanın.

T **42.** Mevcut tek-aile evlerinin medyan fiyatı 1970 den beri sürekli olarak artmıştır. Oysa, Tablo 1.8 deki data ülkenin çeşitli bölgelerinde farklılıklar olduğunu göstermektedir.

a. Kuzeydoğudaki ev fiyatları için bir lineer yaklaşım denklemi bulunuz.

b. Yaklaşım doğrusunun eğimi neyi temsil eder?

c. Orta-batıdaki ev fiyatları için bir lineer yaklaşım denklemi bulunuz.

d. Medyan fiyat nerede daha hızlı artar, Kuzeydoğuda mı veya Orta-batıda mı?

TABLO 1.8 Tek-aile evlerinin medyan fiyatı

Yıl	Kuzeydoğu (Dolar)	Orta-Batı (Dolar)
1970	25,200	20,100
1975	39,300	30,100
1980	60,800	51,900
1985	88,900	58,900
1990	141,200	74,000
1995	197,100	88,300
2000	264,700	97,000

Kaynak: Ulusal Emlakçılar Birliği®

T **43. Vasıta durma mesafesi** Tablo 1.9 bir otomobilin toplam durma mesafesini hızının bir fonksiyonu olarak göstermektedir.

a. Tablo 1.9 daki data için kuadratik yaklaşım denklemi bulunuz.

b. Kuadratik yaklaşım denkleminin grafiğini datanın nokta çizimi üzerine yerleştirin.

c. 72 ve 85 mil/sa hızları için ortalama toplam durma mesafelerini tahmin etmede kuadratik yaklaşım denklemin grafiğini kullanın. Cebirsel olarak doğrulayın.

d. Şimdi, 72 ve 85 mil/sa hızları için ortalama toplam durma mesafelerini tahmin etmede *lineer* yaklaşım kullanın. Yaklaşım doğrusunu datanın nokta çizimi üzerine yerleştirin. Hangisi daha iyi uyumu verir, buradaki doğrumu yoksa (b) deki grafik mi?

TABLO 1.9 Vasıta durma mesafesi

Hız (mil/sa)	Ortalama toplam durma mesafesi (ft)
20	42
25	56
30	73.5
35	91.5
40	116
45	142.5
50	173
55	209.5
60	248
65	292.5
70	343
75	401
80	464

Kaynak: A.B.D Kamu Yolları Bürosu

T **44. Stern dalgaları** Bir gemiyi rotasına dik açılarla takip eden stern dalgalarının gözlemi şunu ortaya çıkarmıştır: bu dalgaların tepeleri arasındaki mesafe (bunların *dalga boyları*) geminin hızıyla artmaktadır. Tablo 1.10 dalga boyu ile geminin hızı arasındaki bağıntıyı göstermektedir.

TABLO 1.10 Dalga boyu

Dalga boyu (m)	Hız (km/h)
0.20	1.8
0.65	3.6
1.13	5.4
2.55	7.2
4.00	9.0
5.75	10.8
7.80	12.6
10.20	14.4
12.90	16.2
16.00	18.0
18.40	19.8

a. Tablo 1.10 daki data için x dalga boyu ve y geminin hızı olmak üzere bir $y = ax^b$ kuvvet yaklaşım denklemi bulunuz.

b. Kuvvet yaklaşım denkleminin grafiğini datanın nokta çizimi üzerine yerleştirin.

c. Kuvvet yaklaşım denkleminin grafiğini, dalga boyu 11m iken geminin hızını tahmin etmek için kullanın. Cebirsel olarak doğrulayın.

d. Şimdi, dalga boyu 11m iken hızı tahmin etmek için *lineer* yaklaşım kullanın. Yaklaşım doğrusunu datanın nokta çizimi üzerine yerleştirin. Hangisi daha iyi uyumu verir, buradaki doğrumu yoksa (b) deki grafik mi?

Bölüm 1 Tekrar Soruları

1. Reel sayılar nasıl gösterilirler? Reel sayılar sisteminin özelliklerini karakterize eden temel kategoriler nelerdir? Reel sayıların başlıca alt kümeleri nelerdir?
2. Rasyonel sayılar, ondalık açılımlarla nasıl tanımlanırlar? İrrasyonel sayılar nelerdir? Örnek veriniz.
3. Reel sayıların sıralanma özellikleri nelerdir? Bunlar denklem çözmede nasıl kullanılırlar?
4. Bir sayının mutlak değeri nedir? Örnekler veriniz. $|-a|$, $|ab|$, $|a/b|$ ve $|a+b|$'nin $|a|$ ve $|b|$ ile ilişkileri nedir?
5. Mutlak değerler aralıkları veya aralıkların birleşimlerini tanımlamakta nasıl kullanılırlar? Örnek verin.
6. Kartezyen koordinat sistemini kullanarak düzlemdeki noktaları nasıl tanımlarız? x ve y değişkenlerine bağlı bir denklemin grafiği nedir?
7. Bir doğru üzerindeki iki noktanın koordinatlarını biliyorsanız, bu doğrunun denklemini nasıl yazarsınız? Ya doğrunun eğimini ve doğru üzerindeki noktalardan birini? Ya da doğrunun eğimini ve y-kesim noktasını? Örnek verin.
8. Koordinat eksenlerine dik doğruların standart denklemleri nedir?
9. Aralarında dik doğruların eğimleri arasında nasıl bir ilişki vardır? Ya doğrular paralelse? Örnek verin.
10. Dikey olmayan bir doğrunun eğimi ile eğim açısı arasındaki ilişki nedir?
11. Koordinat düzleminde iki nokta arasındaki uzaklığı nasıl bulursunuz?
12. Merkezi (h, k) ve yarıçapı a olan bir çemberin standart denklemi nedir? Birim çember ve denklemi nedir?
13. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$ çemberinin grafiğini çizmek için atacağınız adımları açıklayın.
14. Koordinat sisteminde merkezi (h, k) ve yarıçapı a olan çemberin içindeki noktaları hangi eşitsizlik tanımlar? Ya çemberin içindeki ve üzerindeki noktaları? Çemberin dışındaki noktaları? Ya da çemberin dışındaki ve üzerindeki noktaları?
15. a, b ve c sabitler ve $a \neq 0$ ise, $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiği hakkında ne söyleyebilirsiniz? Özel olarak, $y = 2x^2 + 4x$ eğrisini nasıl çizersiniz?
16. Fonksiyon nedir? Tanım kümesi nedir? Ya değerler kümesi? Bir fonksiyon için ok diyagramı nedir? Örnek verin.
17. Reel değişkenli bir reel-değerli fonksiyonunun grafiği nedir? Dikey doğru testi nedir?
18. Parçalı tanımlı fonksiyon nedir? Örnek verin.
19. Analizde sık karşılaşılan önemli fonksiyon tipleri nelerdir? Her tipte bir örnek verin.
20. Grafiği bakımından, artan fonksiyon ne anlama gelir? Ya azalan fonksiyon? Her birine örnek verin.
21. Çift fonksiyon nedir? Ya tek fonksiyon? Böyle fonksiyonların ne gibi simetri özellikleri vardır? Bunlardan nasıl yararlanabiliriz? Ne tek ne çift olan bir fonksiyona örnek verin.
22. y, x ile orantılıdır demek ne demektir? Ya $x^{3/2}$ ile? Orantılı olmanın geometrik açıklaması nedir? Bu açıklama ileri sürülen bir orantılılığı test etmek için nasıl kullanılabilir?
23. f ve g reel değerli iki fonksiyonsa, $f + g$, $f - g$, fg ve f/g'nin tanım aralıkları f ve g'ninkilere nasıl bağlıdır?
24. Bir fonksiyonun bir diğeriyle bileşkesini almak ne zaman mümkündür? Bileşkelere ve değişik noktalardaki değerlerine örnekler verin. Fonksiyonların bileşkesinin hangi sırada alındığının bir önemi var mıdır?
25. Grafiğini $k > 0$ kadar yukarı veya aşağı, yahut sağa veya sola kaydırmak için $y = f(x)$ fonksiyonunu nasıl değiştirirsiniz? Örnek verin.
26. Grafiğini $c > 1$ kat sıkıştırmak veya uzatmak için $y = f(x)$ fonksiyonunu nasıl değiştirirsiniz? Ya grafiği bir koordinat ekseninin diğer tarafına yansıtmak için? Örnek verin.
27. Merkezi (h, k) olan bir elipsin standart denklemi nedir? Asal ekseni nedir? Yedek ekseni nedir? Örnekler verin.
28. Radyan ölçü nedir? Radyandan dereceye nasıl geçersiniz? Ya dereceden radyana?
29. Altı temel trigonometrik fonksiyonu çizin. Bu grafiklerin simetrileri nelerdir?
30. Periyodik bir fonksiyon nedir? Örnek verin. Altı temel trigonometrik fonksiyonun periyotları nedir?

31. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ve $\cos(A + B)$ ile $\sin(A + B)$'nin formülleri kullanılarak, başka trigonometrik bağıntıların nasıl üretilebileceğini gösterin.

32. $f(x) = A\sin((2\pi/B)(x - C)) + D$ genel sinüs fonksiyonunun formülü, grafiğini kaydırma, uzatma, sıkıştırma ve yansıtma ile nasıl bağlıdır? Örnekler verin. Genel sinüs eğrisini çizin ve *A, B, C* ve *D* sabitlerini tanımlayın.

33. Hesap makinesi veya bilgisayar grafik programı ile grafik çizerken ortaya çıkan üç sorun söyleyin. Örnekler verin.

Bölüm 1 Problemler

Eşitsizlikler

1–4 alıştırmalarında eşitsizlikleri çözün ve çözüm kümelerini reel doğru üzerinde gösterin.

1. $7 + 2x \geq 3$

2. $-3x < 10$

3. $\frac{1}{5}(x - 1) < \frac{1}{4}(x - 2)$

4. $\frac{x - 3}{2} \geq -\frac{4 + x}{3}$

Mutlak Değer

5–8 Alıştırmalarındaki denklemleri veya eşitsizlikleri çözün.

5. $|x + 1| = 7$

6. $|y - 3| < 4$

7. $\left|1 - \frac{x}{2}\right| > \frac{3}{2}$

8. $\left|\frac{2x + 7}{3}\right| \leq 5$

Koordinatlar

9. Bir parçacık düzlemde $A(-2, 5)$ noktasından y-eksenine Δy $3\Delta x$'e eşit olacak şekilde ilerliyor. Parçacığın yeni koordinatları nedir?

10. **a.** $A(8, 1)$, $B(2, 10)$, $C(-4,6)$, $D(2, -3)$ ve $E(14/3, 6)$ noktalarını çizin.

b. *AB, BC, CD, DA, CE* ve *BD* doğrularının eğimini bulun.

c. *A, B, C, D* ve *E* noktalarından herhangi dördü bir paralelkenar oluşturur mu?

d. Beş noktanın herhangi üçü aynı doğru üstünde midir? Nereden biliyorsunuz?

e. Bu beş nokta tarafından belirlenen doğruların hangileri orijinden geçer?

11. $A(6, 4)$, $B(4, -3)$ ve $C(-2, 3)$ noktaları bir eşkenar üçgen oluşturur mu? Peki ya bir dik üçgen? Açıklayın.

12. $y = 3x + 1$ doğrusu üzerinde bulunan ve (0, 0) ile (–3, 4)' dan eşit uzaklıkta olan noktanın koordinatlarını bulun.

Doğrular

13–24 alıştırmalarında, belirtilen doğru için bir denklem yazın.

13. (1, –7)'dan geçen ve eğimi 3 olan

14. (–1, 2) den geçen ve eğimi $-1/2$ olan

15. (0, –3) ten geçen dikey doğru

16. (–3, 6) ve (1, –2)den geçen

17. (0, 2) den geçen yatay doğru

18. (3, 3) ve (–2, 5) ten geçen

19. eğimi –3 ve y-kesimi 3 olan

20. (3, 1) den geçen ve $2x - y = -2$ doğrusuna paralel olan

21. (4, –12) den geçen ve $4x + 3y = 12$ doğrusuna paralel olan

22. (–2, –3) ten geçen ve $3x - 5y = 1$ doğrusuna dik olan

23. (–1, 2) den geçen ve $(1/2)x + (1/3)y = 1$ doğrusuna dik olan

24. x-kesimi 3 ve y-kesimi -5 olan

Fonksiyonlar ve Grafikleri

25. Bir çemberin alanını ve çevresini çemberin yarıçapının fonksiyonu olarak ifade edin. Sonra alanı çevrenin bir fonksiyonu olarak yazın.

26. Bir çemberin alanını ve çevresini çemberin yarıçapının fonksiyonu olarak ifade edin. Sonra alanı çevrenin bir fonksiyonu olarak yazın.

27. Birinci dörtte bir bölgedeki bir P noktası $y = x^2$ parabolünün üzerindedir. P'nin koordinatlarını P'yi orijine bağlayan doğrunun eğim açısının bir fonksiyonu olarak yazın.

28. Yerden yükselen bir sıcak hava balonu kalkış noktasından 500 ft uzağa yerleştirilmiş bir tarayıcıyla izleniyor. Balonun yüksekliğini tarayıcıyla balon arasındaki doğrunun yerle yaptığı açının fonksiyonu olarak ifade edin.

29–32 alıştırmalarında, verilen fonksiyonun grafiğinin y-eksenine göre, orijine göre simetrik olup olmadığını veya her iki simetrininde bulunmadığını belirleyin.

29. $y = x^{1/5}$

30. $y = x^{2/5}$

31. $y = x^2 - 2x - 1$

32. $y = e^{-x^2}$

33–40 alıştırmalarında, verilen fonksiyonun çift, tek olup olmadığını veya her ikisinin de olmadığını belirleyin.

33. $y = x^2 + 1$

34. $y = x^5 - x^3 - x$

35. $y = 1 - \cos x$

36. $y = \sec x \tan x$

37. $y = \frac{x^4 + 1}{x^3 - 2x}$

38. $y = 1 - \sin x$

39. $y = x + \cos x$

40. $y = \sqrt{x^4 - 1}$

41–50 Alıştırmalarında, **(a)** tanım ve **(b)** değer kümelerini bulun.

41. $y = |x| - 2$

42. $y = -2 + \sqrt{1 - x}$

43. $y = \sqrt{16 - x^2}$

44. $y = 3^{2-x} + 1$

45. $y = 2e^{-x} - 3$

46. $y = \tan(2x - \pi)$

47. $y = 2\sin(3x + \pi) - 1$

48. $y = x^{2/5}$

49. $y = \ln(x - 3) + 1$

50. $y = -1 + \sqrt[3]{2 - x}$

Parçalı Tanımlı Fonksiyonlar

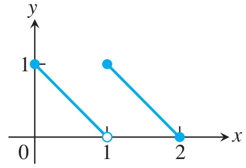
51 ve 52 alıştırmalarında, **(a)** tanım ve **(b)** değer kümelerini bulun.

51. $y = \begin{cases} \sqrt{-x}, & -4 \le x \le 0 \\ \sqrt{x}, & 0 < x \le 4 \end{cases}$

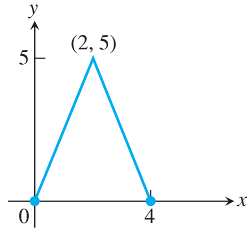
52. $y = \begin{cases} -x - 2, & -2 \le x \le -1 \\ x, & -1 < x \le 1 \\ -x + 2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

53 ve 54 alıştırmalarında, fonksiyon için bir parçalı formül yazınız.

53.



54.



Fonksiyonların Bileşkesi

55 ve 56 alıştırmalarında,

a. $(f \circ g)(-1)$. **b.** $(g \circ f)(2)$.

c. $(f \circ f)(x)$. **d.** $(g \circ g)(x)$.

bileşkelerini bulunuz.

55. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$

56. $f(x) = 2 - x$, $\quad g(x) = \sqrt[3]{x + 1}$

57 ve 58 alıştırmalarında, **(a)** $f \circ g$ ve $g \circ f$ için birer formül yazınız ve her birinin **(b)** tanım kümesini **(c)** değer kümesini bulunuz.

57. $f(x) = 2 - x^2$, $\quad g(x) = \sqrt{x + 2}$

58. $f(x) = \sqrt{x}$, $\quad g(x) = \sqrt{1 - x}$

Mutlak değerli bileşkeler 59–64 Alıştırmalarında, f_1 ve f_2 yi birlikte çizin. Sonra, f_1 fonksiyonu uygulamadan önce mutlak değer fonksiyonunu uygulamak grafiği nasıl etkiler açıklayınız.

	$f_1(x)$	$f_2(x) = f_1(\lvert x \rvert)$
59.	x	$\lvert x \rvert$
60.	x^3	$\lvert x \rvert^3$
61.	x^2	$\lvert x \rvert^2$
62.	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{\lvert x \rvert}$
63.	$\sqrt{x}$	$\sqrt{\lvert x \rvert}$
64.	$\sin x$	$\sin \lvert x \rvert$

Mutlak değerli bileşkeler 65–68 alıştırmalarında, g_1 ve g_2 yi birlikte çizin. Sonra, g_1 fonksiyonu uyguladıktan sonra mutlak değer almak grafiği nasıl etkiler açıklayınız.

	$g_1(x)$	$g_2(x) = \lvert g_1(x) \rvert$
65.	x^3	$\lvert x^3 \rvert$
66.	$\sqrt{x}$	$\lvert \sqrt{x} \rvert$
67.	$4 - x^2$	$\lvert 4 - x^2 \rvert$
68.	$x^2 + x$	$\lvert x^2 + x \rvert$

Trigonometri

69–72 alıştırmalarında, verilen fonksiyonun grafiğini çizin. Fonksiyonun periyodu nedir?

69. $y = \cos 2x$

70. $y = \sin \dfrac{x}{2}$

71. $y = \sin \pi x$

72. $y = \cos \dfrac{\pi x}{2}$

73. $y = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ grafiğini çiziniz.

74. $y = 1 + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ grafiğini çiziniz.

75–78 alıştırmalarında, C açısı dik ve A, B ve C açılarının karşılarındaki kenarları sırası ile a, b ve c olan bir ABC dik üçgeni veriliyor.

75. **a.** $c = 2$ ve $B = \pi/3$ ise a ve b yi bulunuz.

b. $b = 2$ ve $B = \pi/3$ ise a ve c yi bulunuz.

76. **a.** a'yı A ve c cinsinden ifade ediniz.

b. a'yı A ve b cinsinden ifade ediniz.

77. **a.** a'yı B ve b cinsinden ifade ediniz.

b. c'yi A ve a cinsinden ifade ediniz.

78. **a.** $\sin A$'yı a ve c cinsinden ifade ediniz.

b. $\sin A$'yı b ve c cinsinden ifade ediniz.

79. **Bir direğin yüksekliği** Dikey bir direğin T tepesinden yerdeki B ve C noktalarına iki tel geriliyor. C noktası direğin dibine B den 10 metre daha yakındır. BT teli yatayla 35° lik bir açı ve CT teli yatayla 50° lik bir açı yapıyorsa direğin yüksekliği ne kadardır?

80. **Bir su balonunun yüksekliği** Aralarındaki uzaklık 2 km olan A ve B noktalarındaki gözlemciler aynı anda bir su balonunun yükseklik açısını sırasıyla 40° ve 70° olarak ölçüyorlar. Balon, A ve B arasındaki doğru parçasının bir noktasının dikey olarak üzerinde ise balonun yüksekliğini bulunuz.

T **81.** **a.** $f(x) = \sin x + \cos(x/2)$ fonksiyonunu çiziniz.

b. Fonksiyonun periyodu ne olarak gözüküyor?

c. (b) de bulduklarınızı cebirsel olarak doğrulayın.

T **82.** **a.** $f(x) = \sin(1/x)$ fonksiyonunu çiziniz.

b. f'nin tanım ve değer kümeleri nelerdir?

c. f periyodik midir? Cevabınızı açıklayınız.

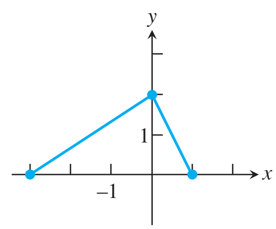
Bölüm 1 Ek ve İleri Alıştırmalar

Fonksiyonlar ve Grafikleri

1. f'nin grafiği veriliyor. Her bir fonksiyonun grafiğini çiziniz.

a. $y = f(-x)$ **b.** $y = -f(x)$

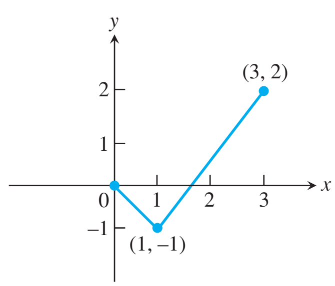
c. $y = -2f(x+1) + 1$ **d.** $y = 3f(x-2) - 2$



2. [–3, 3] te tanımlı bir fonksiyonun grafiğinin bir parçası verilmiştir. Fonksiyonun

a. çift **b.** tek

olduğunu varsayarak grafiği tamamlayınız.



3. $f \circ g = g \circ f$ olacak şekilde iki f ve g fonksiyonu var mıdır? Cevabınızın nedenini açıklayın.

4. Aşağıdaki özelliği sağlayan iki f ve g fonksiyonu var mıdır? f ve g'nin grafikleri doğrular değil, ancak $f \circ g$'nin grafiği bir doğrudur. Cevabınızın nedenini açıklayın.

5. $f(x)$ tek bir fonksiyonsa, $g(x) = f(x) - 2$ hakkında ne söylenebilir? Ya f çiftse? Cevabınızın nedenini açıklayın.

6. $g(x)$, x'in bütün değerleri için tanımlı bir tek fonksiyonsa, $g(0)$ hakkında bir şey söylenebilir mi? Cevabınızın nedenini açıklayın.

7. $|x| + |y| = 1 + x$ denklemini çizin.

8. $y + |y| = x + |x|$ denklemini çizin.

Trigonometri

9-14 alıştırmalarında, ABC kenarları a, b ve c ve karşılarındaki açılar sırasıyla A, B ve C olan herhangi bir üçgendir.

9. $a = \sqrt{3}, A = \pi/3, B = \pi/4$ ise, b'yi bulun.

10. $a = 4, b = 3, A = \pi/4$ ise, sin B'yi bulun.

11. $a = 2, b = 2, c = 3$ ise cos A'yı bulun.

12. $a = 2, b = 3, C = \pi/4$ ise c'yi bulun.

13. $a = 2, b = 3, c = 4$ ise sin B'yi bulun.

14. $a = 2, b = 4, c = 5$ ise sin C'yi bulun.

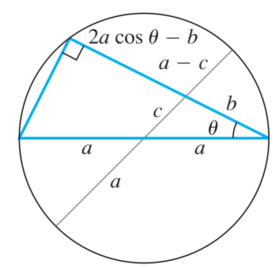
Türetmeler ve İspatlar

15. Aşağıdaki bağıntıları ispatlayın.

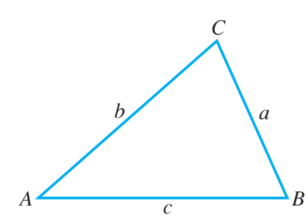
a. $\dfrac{1 - \cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$

b. $\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \tan^2 \dfrac{x}{2}$

16. Kosinüs kuralının aşağıda sözsüz olarak yapılan ispatını açıklayın. (Kaynak: "Proof without Words: The Law of Cosines," Sidney H. Kung, *Mathematics Magazine*, Vol. 63, No.5, Dec. 1990, sayfa 342.)



17. ABC üçgeninin alanının $(1/2)ab \sin C = (1/2)bc \sin A = (1/2)ca \sin B$ ile verildiğini gösterin.



18. ABC üçgeninin alanının

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ile verildiğini gösterin.

Burada $s = (a + b + c)/2$ üçgenin çevresinin yarısıdır.

19. **Eşitsizliklerin özellikleri** a ve b iki reel sayıysa, (ancak ve yalnız) $b - a$ pozitifse ***a b*'den küçüktür** deriz ve $a < b$ yazarız. Bu tanımı kullanarak aşağıda verilen eşitsizlik özelliklerini ispatlayın.

a, b ve c reel sayılarsa,

1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

2. $a < b \Rightarrow a - c < b - c$

3. $a < b$ ve $c > 0 \Rightarrow ac < bc$

4. $a < b$ ve $c < 0 \Rightarrow bc < ac$
(Özel durum: $a < b \Rightarrow -b < -a$)

5. $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$

6. $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

7. $a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

20. Aşağıdaki eşitsizliklerin bütün a ve b reel sayıları için doğru olduğunu gösterin.

a. Ancak ve yalnız $a^2 < b^2$ ise $|a| < |b|$

b. $|a - b| \geq ||a| - |b||$

Üçgen eşitsizliğinin genelleştirilmesi Matematiksel tümevarımla aşağıdaki eşitsizliklerin herhangi n tane $a_1,\ a_2, \ldots , a_n$ reel sayısı için geçerli olduğunu ispatlayın. (Matematiksel tümevarım Ek 1'de ele alınmaktadır.)

21. $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$

22. $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \geq |a_1| - |a_2| - \cdots - |a_n|$

23. f hem tek hem de çiftse, f'nin tanım aralığındaki her x için $f(x) = 0$ olduğunu gösterin.

24. a. Tek-çift ayrışımları f, tanım aralığı orijin etrafında simetrik, yani x tanım aralığındaysa $-x$'in de tanım aralığında bulunduğu bir fonksiyon olsun. f'nin bir tek ve bir çift fonksiyonun toplamı olduğunu gösterin:

$$f(x) = E(x) + O(x)$$

Burada E çift, O ise tek bir fonksiyondur (*İpucu*: $E(x) = (f(x) + f(-x))/2$ alın. $E(-x) = E(x)$ olduğunu gösterin, dolayısıyla E çiftir. Sonra $O(x) = f(x) - E(x)$ olduğunu gösterin)

b. Teklik f'yi bir tek ve bir çift fonksiyonun toplamı olarak yazmanın tek bir yolu olduğunu gösterin. (*İpucu*: Bir yol (a) şıkkında verilendir. Ayrıca, $f(x) = E_1(x) + O_1(x)$ ise (burada E_1 çift, O_1 tektir), $E - E_1 = O_1 - O$ olduğunu gösterin. Sonra Alıştırma 23'ü kullanarak, $E = E_1,\ \ O = O_1$ olduğunu gösterin.)

Grafik Araştırmaları - Parametrelerin Etkisi

25. Aşağıdaki durumlarda $y = ax^2 + bx + c$ grafiğine ne olur?

a. b ve c sabit kalırken a değişir.

b. b değişir (a ve c sabit, $a \neq 0$)?

c. c değişir (a ve b sabit, $a \neq 0$)?

26. Aşağıdaki durumlarda $y = a(x + b)^3 + c$ grafiğine ne olur?

a. b ve c sabit kalırken a değişir.

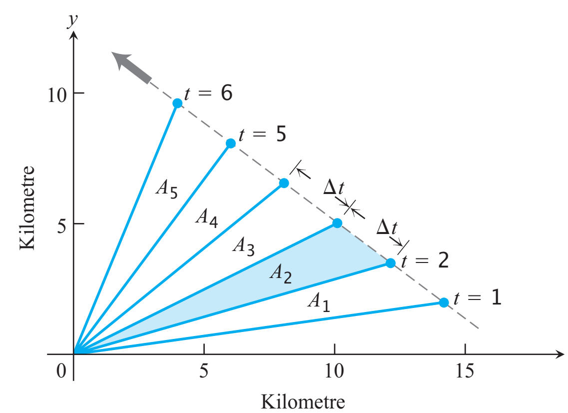
b. b değişir (a ve c sabit, $a \neq 0$)?

c. c değişir (a ve b sabit, $a \neq 0$)?

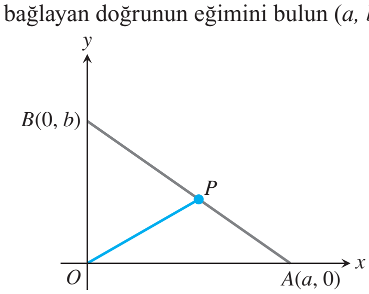
27. $y = mx + 2$ grafiğinin x-keseninin $1/2$'den büyük olduğu bütün eğimlerini bulun.

Geometri

28. Bir nesnenin kütle merkezi orijinden geçen bir doğru üzerinde sabit bir v hızıyla ilerlemektedir. Aşağıdaki şekil koordinat sistemini ve hareket doğrusunu göstermektedir. Noktalar 1 saniye aralıklı konumları belirtmektedir. Şekildeki $A_1, A_2, \ldots, A_5$ alanları neden aynıdır? Kepler'in eşit alanlar kanunundaki gibi (Bölüm 13.6'e bakın), nesnenin kütle merkezini orijine bağlayan doğru eşit zamanda eşit alanlar taramaktadır.



29. a. Aşağıdaki şekildeki üçgenin AB kenarının orta noktası P'yi orijine bağlayan doğrunun eğimini bulun ($a, b > 0$).



b. OP ne zaman AB'ye diktir?

BÖLÜM 1 Teknoloji Uygulama Projeleri

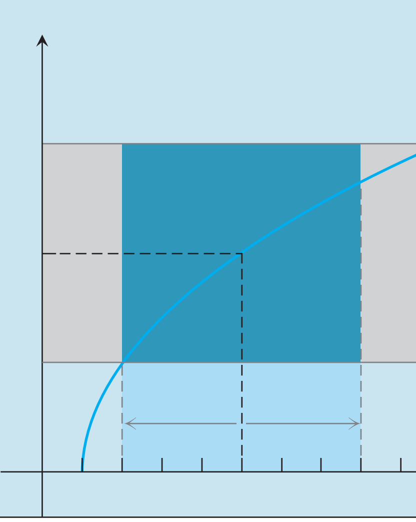
Mathematica ya Bir Bakış

Web sitesindeki *Mathematica* modullerini tamamlamak için *Mathematica* ya bir bakış yeterlidir.

Mathematica/Maple Module

Modeling Change: Yaylar, Sürüş Güvenliği, Radyoaktivite, Ağaçlar, Balıklar ve Memeliler.

Matematik modeller kurun ve yorumlayın, bunları analiz edin ve geliştirin ve bunları kullanarak tercihler yapın.



Bölüm

2

LİMİT VE SÜREKLLİK

GİRİŞ Limit kavramı, analizi cebir ve trigonometriden ayıran ana fikirdir. Bir eğriye teğet bulmak veya bir nesnenin hızını bulmada temeldir.

Bu bölümde önce sezgisel, sonra da matematiksel olarak limiti geliştireceğiz. Limiti bir f fonksiyonunun nasıl değiştiğini tanımlamak için kullanırız. Bazı fonksiyonlar sürekli olarak değişir; x'teki küçük değişiklikler $f(x)$'te de küçük değişikliklere neden olur. Bazı fonksiyonların değerleri kesikli veya çok hızlı değişiyor olabilir. Limit kavramı bu davranışları ayırt etmek için kesin bir yol verir. Ayrıca, fonksiyon grafiklerinin teğet doğrularını bulmakta da limiti kullanırız Bu geometrik uygulama bizi hemen bir fonksiyonun türevi kavramına götürür. Bölüm 3'te derinlemesine inceleyeceğimiz türev bir fonksiyonun değerlerinin nasıl değiştiğini belirler.

2.1 Değişim Oranları ve Limitler

Bu bölümde ortalama ve anlık değişim oranlarını tanıtıyoruz. Bu da bizi bu bölümün ana fikrine, limit fikrine götürecektir.

Ortalama ve Anlık Hız

Hareket eden bir cismin bir zaman aralığındaki **ortalama hızı** katedilen mesafenin geçen zamana bölünmesi ile bulunur. Ölçü birimi, uzunluk/birim zaman dır: kilometre/saat, feet/saniye veya eldeki probleme ne uyuyorsa.

ÖRNEK 1 Bir Ortalama Hız Bulmak

Bir taş yüksek bir uçurumun tepesinden serbest düşmeye bırakılır.

(a) ilk 2 saniyedeki,

(b) birinci ve ikinci saniyeler arasındaki 1 saniyelik aralıktaki ortalama hızı nedir?

Çözüm Bu problemin çözümünde 16. yy sonlarında Galileo tarafından keşfedilen şu gerçeği kullanırız: dünya yüzeyine yakın yerlerde durgun (hareketsiz) durumdan yere doğru serbest düşmeye bırakılan bir katı cisim, geçen zamanın karesi ile orantılı bir yol katedecektir (Cismi yavaşlatacak hava direncinin ihmal edildiği ve cisme etkiyen tek

TARIHSEL BIYOGRAFI*

Galileo Galilei
(1564–1642)

kuvvetin yer çekimi ivmesi olduğu kabul ediliyor. Bu tip harekete **serbest düşme** deriz). t saniyede düşülen mesafe feet olarak y ise Galileo kanunu

$$y = 16t^2$$

dir. Burada 16 orantı sabitidir.

Verilen bir zaman aralığında taşın ortalama hızı, konumdaki değişiklik Δy'nin zaman aralığı Δt'ye bölümüdür.

(a) İlk 2 saniyede: $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{16(2)^2 - 16(0)^2}{2 - 0} = 32 \dfrac{\text{ft}}{\text{sn}}$

(b) İlk saniyeden ikinci saniyeye $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{16(2)^2 - 16(1)^2}{2 - 1} = 48 \dfrac{\text{ft}}{\text{sn}}$ ■

Şimdiki örnek, düşmekte olan bir cismin ortalama hızına gittikçe kısalan zaman aralıklarında baktığımızda neler olduğunu incelemektedir.

ÖRNEK 2 Bir Anlık Hız Bulmak

Düşmekte olan bir taşın $t = 1$ sn. ve $t = 2$ sn. zamanlarındaki hızını bulun.

Çözüm Uzunluğu $\Delta t = h$ olan $[t_0, t_0 + h]$ zaman aralığında taşın ortalama hızını

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(t_0 + h)^2 - 16t_0^2}{h} \tag{1}$$

olarak hesaplayabiliriz.
Bu formülü, $h = 0$ alarak $t_0 = 0$ anındaki "anlık" hızı hesaplamakta kullanamayız, çünkü 0 ile bölme yapamayız. Ancak, $t_0 = 1$ ve $t_0 = 2$ zamanlarında başlayan ve giderek kısalan zaman aralıklarındaki ortalama hızları hesaplamada *kullanabiliriz*. Bunu yaptığımız zaman, karşımıza belirli bir kalıp çıkar (Tablo 2.1).

TABLO 2.1 Kısa zaman aralıklarında ortalama hızlar

Ortalama hız: $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{16(t_0 + h)^2 - 16t_0^2}{h}$

Zaman aralığının uzunluğu h	$t_0 = 1$'de başlayan h zaman aralığında ortalama hız	$t_0 = 2$'de başlayan h zaman aralığında ortalama hız
1	48	80
0.1	33.6	65.6
0.01	32.16	64.16
0.001	32.016	64.016
0.0001	32.0016	64.0016

$t_0 = 1$ anında başlayan aralıklardaki ortalama hız, aralığın uzunluğu azaldıkça 32 gibi bir sınır değere yaklaşıyor gibidir. Bu da $t_0 = 1$ anında taşın 32 ft/sn hızla düştüğüne işaret etmektedir. Bunu cebirsel olarak doğrulayalım.

Calculus'un tarihsel figürleri, esas elemanların gelişimleri ve konuları hakkında daha fazlasını öğrenmek için **www.aw-bc.com/thomas**'ı ziyaret edin.

Yukarıdaki (1) denkleminde $t_0 = 1$ alır ve payı açıp kısaltmaları yaparsak

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(1+h)^2 - 16(1)^2}{h} = \frac{16(1+2h+h^2) - 16}{h}$$

$$= \frac{32h + 16h^2}{h} = 32 + 16h$$

buluruz.

h'nin 0'dan farklı değerleri için iki taraftaki ifadeler özdeştir ve ortalama hız $32 + 16h$ ft/sn dir. Şimdi, h 0'a yaklaşırken ortalama hızın neden $32 + 16(0) = 32$ ft/sn gibi bir sınır değerinin var olduğunu görebliriz.

Aynı şekilde (1) denkleminde $t_0 = 2$ almak, h'nin 0'dan farklı değerleri için

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = 64 + 16h$$

verir. h gittikçe 0'a yaklaştğında $t_0 = 2$ s deki ortalama hızın sınır değeri 64 ft/sn dir. ■

Ortalama Değişim Oranları ve Kirişler

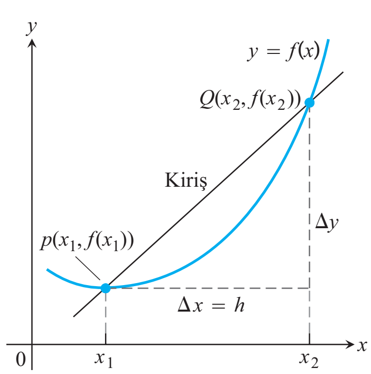
Herhangi bir $y = f(x)$ fonksiyonu verilmişse, y'nin $[x_1, x_2]$ aralığında x'e bağlı ortalama değişimini y'deki değişim değeri $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$'i değişimin oluştuğu aralığın uzunluğu $\Delta x = x_2 - x_1 = h$'ye bölerek hesaplarız.

TANIM **Bir Aralık Üzerinde Ortalama Değişim Oranı**

$y = f(x)$'in $[x_1, x_2]$ aralığında x'e bağlı ortalama değişiminin oranı

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \qquad h \neq 0.$$

Geometrik olarak, $[x_1, x_2]$ aralığında f'nin ortalama değişim oranı $P(x_1, f(x_1))$ ile $Q(x_2, f(x_2))$ noktalarından geçen doğrunun eğimidir (Şekil 2.1). Geometride, bir eğrinin iki noktasını birleştiren doğruya eğrinin **kirişi** denir. Yani, f'nin x_1'den x_2'ye ortalama değişim oranı PQ kirişinin eğimiyle aynıdır.



ŞEKİL 2.1 $y = f(x)$ grafiğinin bir kirişi. Eğimi $\Delta y/\Delta x$, f'nin $[x_1, x_2]$ aralığındaki ortalama değişim oranıdır.

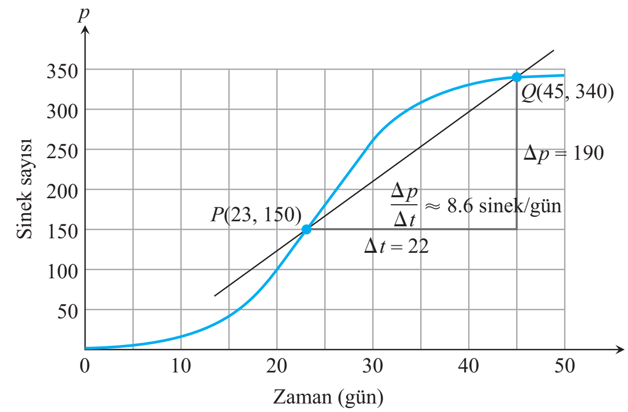
Deney yapan biyologlar çoğunlukla kontrollü laboratuvar ortamında toplulukların büyüme hızını bilmek isterler.

ÖRNEK 3 Bir Laboratuvar Topluluğunun Ortalama Büyüme Oranı

Şekil 2.2, 50 günlük bir deneyde bir meyve sineği (*Drosophila*) topluluğunun nasıl büyüdüğünü göstermektedir. Sinek sayısı belirli aralıklarla sayılmış, bulunan değerler zamana karşı işaretlenmiş ve noktalar düzgün bir eğriyle birleştirilmiştir (Şekil 2.2 de mavi renkli). 23. günden 45. güne ortalama büyüme oranını bulun.

Çözüm 23. günde 150, 45. günde 340 sinek vardır. Yani, 45 – 23 = 22 günde sinek sayısı 340 – 150 = 190 artmıştır. Topluluğun 23. günden 45. güne kadar ortalama değişim oranı

$$\text{Ortalama değişim oranı:} \quad \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{340 - 150}{45 - 23} = \frac{190}{22} \approx 8.6 \text{ sinek/gün}$$



ŞEKİL 2.2 Kontrollü bir deneyde bir meyve sineği topluluğunun büyümesi. 22 günde ortalama değişim oranı, kirişin $\Delta p/\Delta t$ eğimidir.

olarak bulunur. Bu ortalama, Şekil 2.2'deki grafiğin P ve Q noktalarından geçen kirişin eğimidir. ■

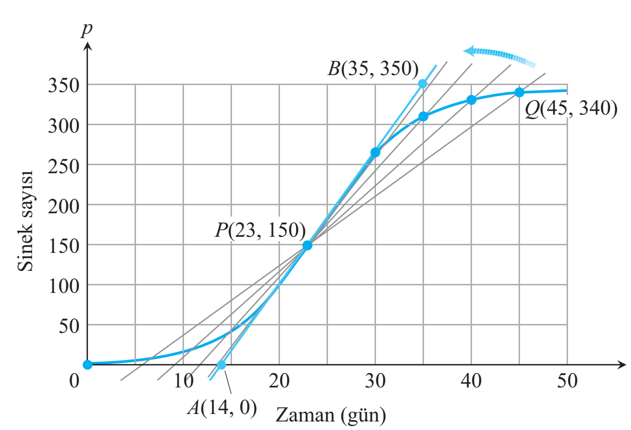
Örnek 3'te hesaplanan 23. günden 45. güne kadarki ortalama değişim oranı 23. günde topluluğun ne kadar hızlı değiştiğini belirtmez. Bunun için, söz konusu gün içindeki zaman aralıklarını incelememiz gerekir.

ÖRNEK 4 23. Gündeki Büyüme Oranı

Örnek 3'teki topluluktaki sinek sayısının 23. gündeki büyüme hızı nasıldır?

Çözüm Bu soruyu yanıtlamak için, 23. günden başlayarak gittikçe küçülen zaman aralıklarındaki değişim oranını inceleriz. Geometrik olarak, bu oranları eğri üzerinde giderek P'ye yaklaşan bir Q noktaları dizisi için P'den Q'ya giden kirişlerin eğimlerini hesaplayarak buluruz (Şekil 2.3).

Q	**PQ'nun eğimi = $\Delta p/\Delta t$ (sinek/gün)**
(45, 340)	$\dfrac{340 - 150}{45 - 23} \approx 8.6$
(40, 330)	$\dfrac{330 - 150}{40 - 23} \approx 10.6$
(35, 310)	$\dfrac{310 - 150}{35 - 23} \approx 13.3$
(30, 265)	$\dfrac{265 - 150}{30 - 23} \approx 16.4$



ŞEKİL 2.3 Meyve sineği grafiğindeki P noktasından geçen dört kirişin konumları ve eğimleri (Örnek 4).

Tablodaki değerler Q'nun t koordinatı 45'ten 30'a düşerken kiriş eğimlerinin 8.6'dan 16.4'e yükseldiğini göstermektedir ve t 23'e giderken bu eğimlerin biraz daha artmasını bekleriz. Geometrik olarak, kirişler P etrafında dönmekte ve şekildeki eğrinin P'den geçtiği yönde giden kırmızı doğruya yaklaşmaktadır. İleride bu doğrunun P'deki eğrinin *teğeti* olduğunu göreceğiz. Bu doğru (14, 0) ve (35, 350) noktalarından geçtiği için, eğimi

$$\frac{350 - 0}{35 - 14} = 16.7 \quad \text{sinek/gün (yaklaşık olarak)}$$

bulunur. 23. günde, topluluk 16.7 sinek/gün gibi bir hızla artmaktadır. ■

Örnek 2'deki taşın $t = 1$ ve $t = 2$ anlarındaki düşüş oranlarına ve Örnek 4' teki topluluğun $t = 23$ günündeki değişim oranına *anlık değişim oranları* denir. Örneklerin belirttiği gibi, anlık oranları ortalama oranların sınır değerleri olarak buluruz. Örnek 4'te, nüfus eğrisinin 23. gündeki teğetinin kirişlerin bir sınır konumu olduğunu gördük. Yakından ilişkili olan anlık oran ve teğetler bir çok başka olayda da karşımıza çıkar. Bu ikisinden yapıcı bir şekilde bahsetmek ve aralarındaki bağlantıyı daha iyi anlamak için, süreci sınır değerleri veya bundan sonra kullanacağımız adıyla *limitler* yardımıyla incelememiz gerekir.

Fonksiyon Değerlerinin Limitleri

Örneklerimiz limitin kavramını akla getirmiştir. Yeterince ilerleyene kadar kesin tanımı erteleyerek şu gayrı resmi tanımla başlayalım.

$f(x)$, x_0 civarında açık bir aralıkta tanımlı olsun (*x_0'da tanımlı olmayabilir*). x_0'a yeterince yakın bütün x için $f(x)$ L değerine keyfi derecede (istediğimiz ölçüde L'ye yakın) yaklaşıyorsa, x x_0'a yaklaşırken, f L **limitine** yaklaşıyor deriz ve "x x_0'a yaklaşırken $f(x)$'in limiti L dir" diye okunan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

yazarız. Aslında tanım şunu söyler: x x_0'a yakın iken (x_0'ın her iki tarafında) $f(x)$ değerleri L sayısına yakındır.

Bu tanım gayrı resmidir, çünkü keyfi derecede yakın ve yeterince yakın gibi terimler açık değildir; anlamları duruma göre değişir. Piston yapan bir işçiye göre yakın, bir inç'in bir kaç binde biri anlamına gelebilirken, uzak galaksileri inceleyen bir astronom için birkaç ışık yılı uzaklıkta anlamına gelebilir. Yine de, bu tanım belirli bazı fonksiyonların limitini bulmamızı sağlayacak kadar açıktır. Ancak limit teoremlerini ispatlamaya koyulduğumuzda, Bölüm 2.3'teki daha açık tanıma gerek duyacağız.

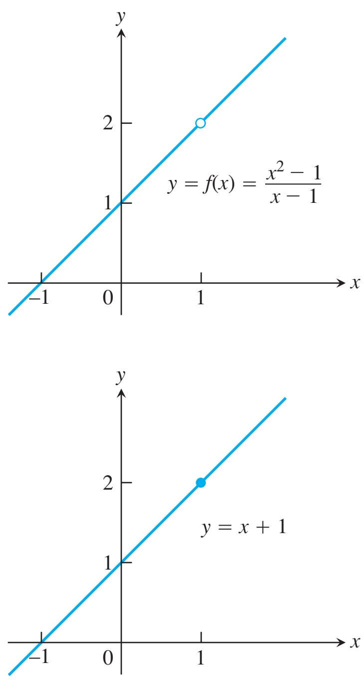
ÖRNEK 5 Bir Fonksiyonun Bir Nokta Civarındaki Davranışı

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

fonksiyonu $x = 1$ civarında nasıl davranır?

Çözüm Verilen formül, $x = 1$ hariç bütün x reel sayıları için f'yi tanımlı kılar. (0 ile bölemeyiz). Herhangi bir $x \neq 1$ değeri için, payı çarpanlarına ayırıp, ortak çarpanı sadeleştirerek formülü basitleştirebiliriz:

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1, \quad x \neq 1$$



ŞEKİL 2.4 f'nin grafiği, f'nin tanımsız olduğu $x = 1$ dışında, $y = x + 1$ doğrusuyla özdeştir (Örnek 5).

Böylece f'nin grafiği bir noktası, yani (1, 2), çıkartılmış olan $y = x + 1$ doğrusu olur. Bu çıkartılmış nokta Şekil 2.4'te bir "boşluk" olarak gösterilmektedir. $f(1)$ tanımlı olmadığı halde x'i 1'e *yeterince yakın seçerek*, $f(x)$'in değerini 2'ye *istediğimiz kadar yakın* bulabileceğimiz açıktır (Tablo 2.2).

TABLO 2.2 x 1'e yaklaştıkça, $f(x) = (x^2 - 1) / (x - 1)$ 2'ye o kadar yaklaşır.

x'in 1'in altında ve üstündeki değerleri	$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1, \quad x \neq 1$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999999	1.999999
1.000001	2.000001

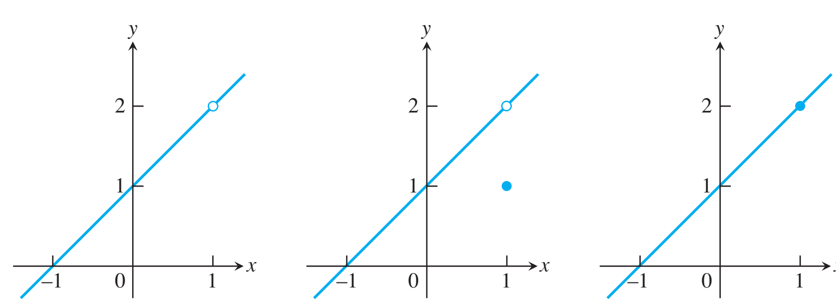
x 1'e yaklaşırken $f(x)$ 2 *limitine* yaklaşır deriz ve bunu

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \quad \text{veya} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

olarak yazarız. ■

ÖRNEK 6 Limit Değeri Fonksiyonun x_0'da Nasıl Tanımlandığına Bağlı Değildir.

Şekil 2.5'teki f fonksiyonu $x = 1$'de f tanımsız olduğu halde, $x \to 1$ iken limiti 2'dir. $2 \neq g(1)$ olduğu halde, $x \to 1$ iken, g fonksiyonunun limiti 2'dir. h fonksiyonu, $x \to 1$ iken

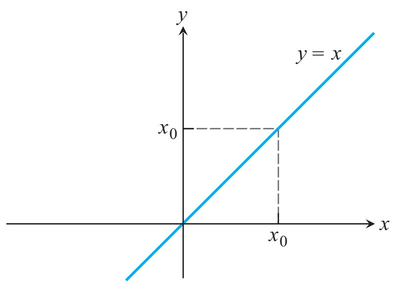


(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

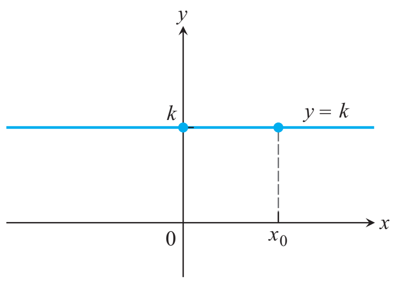
(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

(c) $h(x) = x + 1$

ŞEKİL 2.5 x 1'e yaklaşırken $f(x)$, $g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonlarının hepsinin limiti 2 dir. Halbuki, $x = 1$ de yalnız $h(x)$'in değeri limiti ile aynıdır (Örnek 6).



(a) Birim fonksiyon



(b) Sabit fonksiyon

ŞEKİL 2.6 Örnek 8'deki fonksiyonlar

limiti $x = 1$'deki değerine eşit olan tek fonksiyondur. h için, $\lim_{x\to 1} h(x) = h(1)$ dir. Limitin ve fonksiyon değerinin bu şekilde eşitliği özel bir durumdur ve Bölüm 2.6'da buna döneceğiz. ■

Bazen $\lim_{x\to x_0} f(x)$ $f(x_0)$ hesaplanarak bulunabilir. Örneğin, $f(x)$, $f(x_0)$'ın tanımlı olduğu polinomların ve trigonometrik fonksiyonların cebirsel bir kombinasyonuysa, bu geçerlidir (Bölüm 2.2 ve 2.6'te bunun hakkında daha çok şey söyleyeceğiz).

ÖRNEK 7 $f(x_0)$'ı Hesaplayarak Limit Bulmak

(a) $\lim_{x\to 2}(4) = 4$

(b) $\lim_{x\to -13}(4) = 4$

(c) $\lim_{x\to 3} x = 3$

(d) $\lim_{x\to 2}(5x - 3) = 10 - 3 = 7$

(e) $\lim_{x\to -2} \dfrac{3x + 4}{x + 5} = \dfrac{-6 + 4}{-2 + 5} = -\dfrac{2}{3}$ ■

ÖRNEK 8 Birim ve Sabit Fonksiyonların Her Noktada Limitleri Vardır

(a) ***f* birim fonksiyon** $f(x) = x$ ise, x_0'ın herhangi bir değeri için (Şekil 2.6a)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0$$

(b) ***f* sabit fonksiyon** $f(x) = k$ ise, (k sabit değerli fonksiyon) x_0'ın herhangi bir değeri için (Şekil 2.6b)

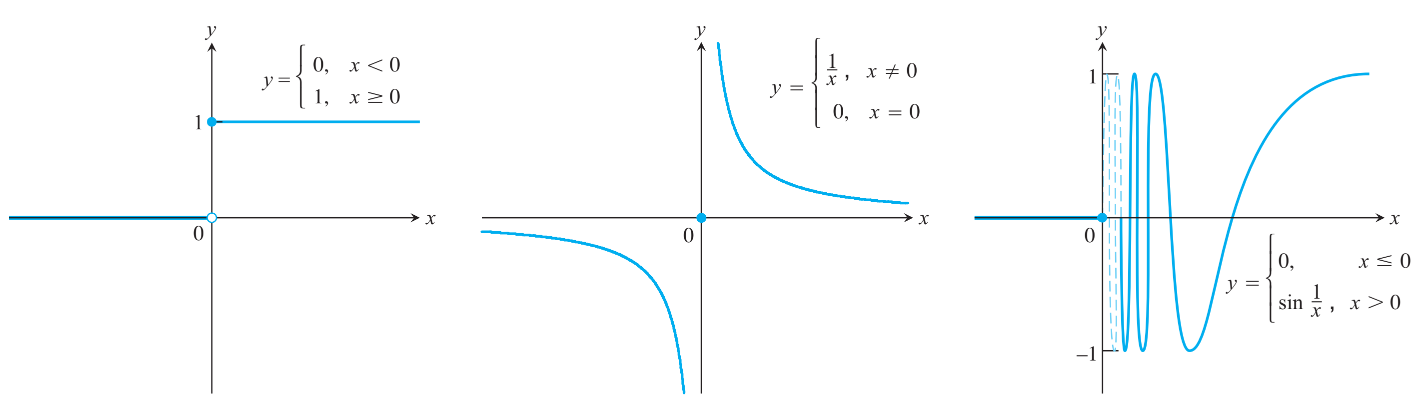
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} k = k$$

Örneğin,

$$\lim_{x\to 3} x = 3 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to -7}(4) = \lim_{x\to 2}(4) = 4$$

tür. Bu sonuçları Bölüm 2.3 Örnek 3'te ispat edeceğiz. ■

Limitin var olmadığı birkaç durum Şekil 2.7'de gösterilmekte ve bir sonraki örnekte incelenmektedir.



(a) Birim basamak fonksiyonu $U(x)$ (b) $g(x)$ (c) $f(x)$

ŞEKİL 2.7 x 0'a yaklaşırken bu fonksiyonlardan hiç birinin limiti yoktur (Örnek 9).

ÖRNEK 9 Bir Fonksiyonun Tanım Kümesindeki Bir Noktada Limiti Olmayabilir.

$x \to 0$ iken aşağıdaki fonksiyonların davranışlarını inceleyin.

(a) $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

Çözüm

(a) Sıçrar: Birim basamak fonksiyonu $U(x)$'in $x \to 0$ iken limiti yoktur, çünkü değerleri $x = 0$'da sıçrama yapar. x'in sıfıra yakın negatif değerleri için $U(x) = 0$'dır. x'in sıfıra yakın pozitif değerleri içinse $U(x) = 1$'dir. $x \to 0$ iken, $U(x)$'in yaklaştığı tek bir L değeri yoktur (Şekil 2.7a).

(b) Çok büyür: $x \to 0$ iken $g(x)$'in limiti yoktur, çünkü $x \to 0$ iken g'nin değerleri mutlak değer olarak çok büyür ve herhangi bir reel sayıya yaklaşmaz (Şekil 2.7b)

(c) Çok fazla salınır: $x \to 0$ iken $f(x)$'in limiti yoktur, çünkü fonksiyonun değerleri 0'ı içeren bütün açık aralıklarda –1 ile +1 arasında salınır. $x \to 0$ iken, değerleri herhangi bir sayının yakınında kalmaz (Şekil 2.7c). ■

Limitleri Tahmin Etmek İçin Hesap Makinesi ve Bilgisayar Kullanmak

Tablo 2.1 ve Tablo 2.2, x x_0'a yaklaştıkça bir limiti numerik olarak tahmin etmede bir hesap makinesi veya bilgisayar kullanımını göstermektedir. Bu prosedür Örnek 7 deki gibi fonksiyonların limitleri için de başarılı olabilir (bunlar *sürekli* fonksiyonlardır ve Bölüm 2.6 da inceleneceklerdir). Ancak, hesap makineleri veya bilgisayarlar, bir noktada tanımlı olmayan veya limiti olmayan fonksiyonlar için *yanlış değerler* verebilir veya *yanlış izlenimlere* yol açabilir. Bir fonksiyonun bir nokta civarındaki davranışı hakkında, bir hesap makinesinin veya bir bilgisayarın ne zaman garip veya muğlak bilgiler verdiğini bilmemizde diferansiyel hesap bize yardımcı olacaktır (Bölüm 4.4 ve 4.6'ya bakın). Şimdilik, bir limit değerini tahmin etmek için hesaplama araçları kullandığımızda gizli tuzakların ortaya çıkabileceği konusunda basitçe dikkatli olmamız gerekir. İşte bir örnek.

ÖRNEK 10 Bir Limiti Tahmin Etmek

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}$$ limitini tahmin edin.

Çözüm Tablo 2.3 te $x = 0$'a yakın bazı değerler için fonksiyonun değerleri listelenmiştir. x, $\pm 1, \pm 0.5, \pm 0.10$ ve ± 0.01 değerleri ile 0'a yaklaşırken fonksiyon 0.05 değerine yaklaşıyor gibi gözükmektedir.

x'in ± 0.0005, ± 0.0001, ± 0.00001 ve ± 0.000001 gibi daha küçük değerlerini alırsak fonksiyon 0 değerine yaklaşıyor gibi gözükür.

Şu halde cevap nedir? 0.05 veya 0 mı yoksa başka bir değer mi? Hesap makinesi veya bilgisayar değerleri muğlaktır. Fakat, sonraki bölümde tanıtılan limit teoremleri doğru li-

TABLO 2.3 $x = 0$ civarında $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}$'nin bilgisayar değerleri

x	$f(x)$	
± 1	0.049876	0.05'e yaklaşır?
± 0.5	0.049969	
± 0.1	0.049999	
± 0.01	0.050000	
± 0.0005	0.080000	0'a yaklaşır?
± 0.0001	0.000000	
± 0.00001	0.000000	
± 0.000001	0.000000	

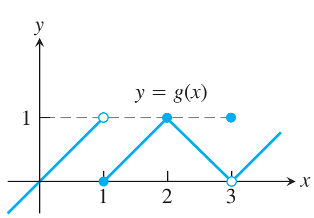
mit değerinin olduğunu doğrulayacaktır. Bu gibi problemler, birkaç gözlem yaparak elde edebileceğimiz sonuçlar üzerine geliştirilen matematiksel muhakemenin gücünü gösterir. Her iki yaklaşımın doğa gerçekleri karşısında avantajları ve dezavantajları vardır. ■

ALIŞTIRMALAR 2.1

Grafiklerden Limitler

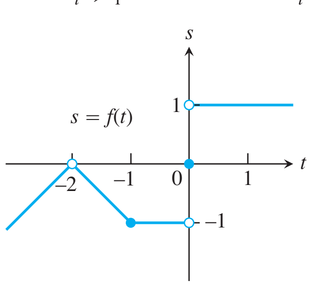
1. Grafiği çizilen $g(x)$ fonksiyonu için, aşağıdaki limitleri bulun veya neden bulunmadıklarını açıklayın.

   a. $\lim_{x\to 1} g(x)$ **b.** $\lim_{x\to 2} g(x)$ **c.** $\lim_{x\to 3} g(x)$



2. Grafiği çizilen $f(t)$ fonksiyonu için, aşağıdaki limitleri bulun veya neden bulunmadıklarını açıklayın.

   a. $\lim_{t\to -2} f(t)$ **b.** $\lim_{t\to -1} f(t)$ **c.** $\lim_{t\to 0} f(t)$



3. Grafiği çizilen $y = f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadelerden hangileri doğru, hangileri yanlıştır?

   a. $\lim_{x\to 0} f(x)$ vardır.

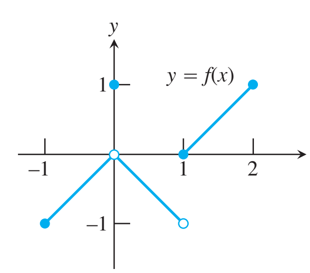
   b. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

   c. $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

   d. $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

   e. $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$.

   f. $(-1, 1)$deki her x_0 için $\lim_{x\to x_0} f(x)$ vardır.



4. Grafiği çizilen $y = f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadelerden hangileri doğru, hangileri yanlıştır?

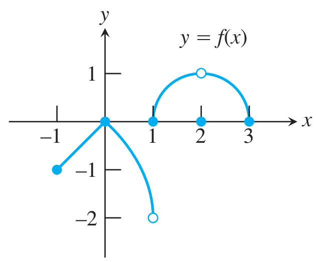
   a. $\lim_{x\to 2} f(x)$ yoktur.

   b. $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$.

c. $\lim_{x\to 1} f(x)$ yoktur.

d. $(-1, 1)$ deki her x_0 için $\lim_{x\to x_0} f(x)$ vardır.

e. $(1, 3)$ teki her x_0 için $\lim_{x\to x_0} f(x)$ vardır.



Limitlerin Varlığı

5 ve 6 alıştırmalarında limitlerin neden olmadığını açıklayın.

5. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ **6.** $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$

7. Bir $f(x)$ fonksiyonu $x = x_0$ hariç bütün reel x değerlerinde tanımlı olsun. $\lim_{x\to x_0} f(x)$'in varlığı hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

8. Bir $f(x)$ fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığındaki bütün x değerlerinde tanımlı olsun. $\lim_{x\to 0} f(x)$'in varlığı hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

9. $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ ise f $x = 1$'de tanımlı olmak zorunda mıdır? Tanımlıysa, $f(1) = 5$ midir? $x = 1$'de f'nin değerleri hakkında herhangi bir sonuca varabilir miyiz? Açıklayın.

10. $f(1) = 5$ ise, $\lim_{x\to 1} f(x)$ var olmak zorunda mıdır? Varsa, $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ olmak zorunda mıdır? $\lim_{x\to 1} f(x)$ hakkında *herhangi* bir sonuca varabilir miyiz?

Limitleri Tahmin Etme

T 11–20 alıştırmalarında grafik çizin bir hesap makinesi faydalı olabilir.

11. $f(x) = (x^2 - 9)/(x + 3)$ olsun.

a. $x = -3.1, -3.01, -3.001$ ve hesap makinenizin izin verdiği uzunluktaki noktalarda f'nin değerlerinin bir tablosunu yapın. Sonra $\lim_{x\to -3} f(x)$'i tahmin edin. Bunun yerine f'yi $x = -2.9, -2.99, -2.999, \ldots$ gibi değerlerde hesaplarsanız ne bulursunuz?

b. (a)'da bulduklarınızı f'yi $x_0 = -3$ civarında çizerek ve $x \to -3$ iken grafikteki y değerlerini bulmak için ZOOM ve TRACE kullanarak doğrulayın.

c. $\lim_{x\to -3} f(x)$'i cebirsel olarak bulun.

12. $g(x) = (x^2 - 2)/\left(x - \sqrt{2}\right)$ olsun.

a. $x = 1.4, 1.41, 1.414$ ve $\sqrt{2}$'nin artan ondalıklı değerleriyle g'nin bir tablosunu yapın. $\lim_{x\to \sqrt{2}} g(x)$'i tahmin edin.

b. (a)'daki sonuçlarınızı g'yi $x_0 = \sqrt{2}$ civarında çizerek ve $x \to \sqrt{2}$ iken grafikteki y değerlerini bulmak için ZOOM ve TRACE kullanarak doğrulayınız.

c. $\lim_{x\to \sqrt{2}} g(x)$'i cebirsel olarak bulun.

13. $G(x) = (x + 6)/(x^2 + 4x - 12)$ olsun.

a. $x = -5.9, -5.99, -5.999, \ldots$ noktalarında G'nin değerlerinin bir tablosunu yapın. Sonra $\lim_{x\to -6} G(x)$'i tahmin edin. G'yi $x = -6.1, -6.01, -6.001, \ldots$ gibi değerlerde hesaplarsanız ne bulursunuz?

b. (a)'da bulduklarınızı G'yi çizerek ve $x \to -6$ iken grafikteki y-değerlerini bulmak için ZOOM ve TRACE kullanarak doğrulayın.

c. $\lim_{x\to -6} G(x)$'i cebirsel olarak bulun.

14. $h(x) = (x^2 - 2x - 3)/(x^2 - 4x + 3)$ olsun.

a. $x = 2.9, 2.99, 2.999,$ noktalarında h'nin değerlerinin $\lim_{x\to 3} h(x)$'i tahmin edin. h'yi $x = 3.1, 3.01, 3.001, \ldots$ değerlerde hesaplarsanız ne bulursunuz?

b. (a)'da bulduklarınızı h'yi $x_0 = 3$ civarında çizerek ve $x \to 3$ iken grafikteki y değerlerini bulmak için ZOOM ve TRACE kullanarak doğrulayın.

c. $\lim_{x\to 3} h(x)$ cebirsel olarak bulun.

15. $f(x) = (x^2 - 1)/(|x| - 1)$. olsun.

a. $x_0 = -1$'e alttan ve üstten yaklaşan x değerleri için f'nin değerlerinin bir tablosunu yapın. Sonra $\lim_{x\to -1} f(x)$'i tahmin edin.

b. (a)'da bulduklarınızı f'yi $x_0 = -1$ civarında çizerek ve $x \to -1$ iken grafikteki y-değerlerini bulmak için ZOOM ve TRACE kullanarak doğrulayın.

c. $\lim_{x\to -1} f(x)$ cebirsel olarak bulun.

16. $F(x) = (x^2 + 3x + 2)/(2 - |x|)$ olsun.

a. $x_0 = -2$'ye alttan ve üstten yaklaşan x değerleri için F'nin değerlerinin bir tablosunu yapın. Sonra $\lim_{x\to -2} F(x)$'i tahmin edin.

b. (a)'da bulduklarınızı F'yi $x_0 = -2$ civarında çizerek ve $x \to -2$ iken grafikteki y-değerlerini bulmak için ZOOM ve TRACE kullanarak doğrulayın.

c. $\lim_{x\to -2} F(x)$ cebirsel olarak bulun.

17. $g(\theta) = (\sin\theta)/\theta$ olsun.

a. $\theta_0 = 0$'a alttan ve üstten yaklaşan θ değerleri için g'nin değerlerinin bir tablosunu yapın. Sonra $\lim_{\theta\to 0} g(\theta)$ 'yı tahmin edin.

b. (a)'da bulduklarınızı g'yi $\theta_0 = 0$ civarında çizerek doğrulayın.

18. $G(t) = (1 - \cos t)/t^2$ olsun.

a. $t_0 = 0$'a alttan ve üstten yaklaşan t değerleri için G'nin değerlerinin bir tablosunu yapın. Sonra $\lim_{x\to 0} G(t)$'yi tahmin edin.

b. (a)'da bulduklarınızı G'yi $t_0 = 0$ civarında çizerek doğrulayın.

19. $f(x) = x^{1/(1-x)}$ olsun.

a. $x_0 = 1$'e alttan ve üstten yaklaşan x değerleri için f değerlerinin bir tablosunu yapın. $x \to 1$ iken f'nin bir limiti var mıdır? Varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?

b. (a)'da bulduklarınızı f'yi $x_0 = 1$ civarında çizerek doğrulayın.

20. $f(x) = (3^x - 1)/(x)$ olsun.

a. $x_0 = 0$'a alttan ve üstten yaklaşan x değerleri için f değerlerinin bir tablosunu yapın. $x \to 0$ iken f'nin bir limiti var mıdır? Varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?

b. (a)'da bulduklarınızı f'yi $x_0 = 0$ civarında çizerek doğrulayın.

Yerine Koyarak Limit Bulma

21–28 alıştırmalarında değerleri yerine koyarak limitleri bulun. *Eğer mümkünse bir hesap makinesi veya bir grafik programıyla yanıtlarınızı doğrulayın.*

21. $\lim_{x\to 2} 2x$

22. $\lim_{x\to 0} 2x$

23. $\lim_{x\to 1/3} (3x - 1)$

24. $\lim_{x\to 1} \dfrac{-1}{(3x - 1)}$

25. $\lim_{x\to -1} 3x(2x - 1)$

26. $\lim_{x\to -1} \dfrac{3x^2}{2x - 1}$

27. $\lim_{x\to \pi/2} x \sin x$

28. $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\cos x}{1 - \pi}$

Ortalama Değişim Oranları

29–34 alıştırmalarında verilen aralık veya aralıklarda fonksiyonun ortalama değişim oranını bulun.

29. $f(x) = x^3 + 1;$

a. $[2, 3]$ **b.** $[-1, 1]$

30. $g(x) = x^2;$

a. $[-1, 1]$ **b.** $[-2, 0]$

31. $h(t) = \cot t;$

a. $[\pi/4, 3\pi/4]$ **b.** $[\pi/6, \pi/2]$

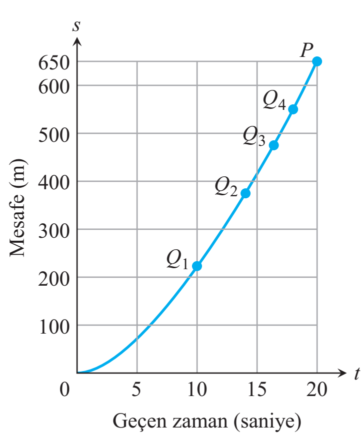
32. $g(t) = 2 + \cos t;$

a. $[0, \pi]$ **b.** $[-\pi, \pi]$

33. $R(\theta) = \sqrt{4\theta + 1};\quad [0, 2]$

34. $P(\theta) = \theta^3 - 4\theta^2 + 5\theta;\quad [1, 2]$

35. Bir Ford Mustang Cobra'nın Hızı Aşağıdaki şekilde hareketsizken ivmelenen bir 1994 Ford Mustang Cobra'nın zaman-konum grafiği görülmektedir.



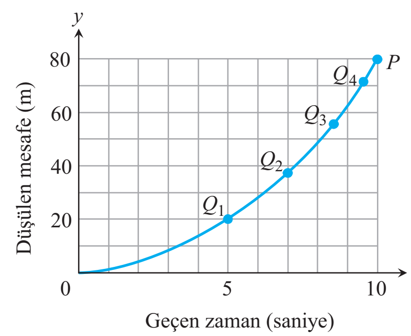
a. PQ_1, PQ_2, PQ_3 ve PQ_4 kirişlerinin eğimlerini, sırasıyla Şekil 2.3 teki gibi bir tablo düzenleyerek tahmin edin. Eğimlerin uygun birimi nedir?

b. $t = 20$ s anında Cobra'nın hızını bulun.

36. Şekilde, ay yüzeyine 80 m mesafedeki bir indirme modülünden düşen bir nesnenin zamana karşı düşülen mesafe (m) grafiği görülmektedir.

a. PQ_1, PQ_2, PQ_3 ve PQ_4 kirişlerinin eğimlerini, sırasıyla Şekil 2.3 teki gibi bir tablo düzenleyerek tahmin edin.

b. Yüzeye çarptığında nesnenin hızı nedir?



T **37.** Küçük bir firmanın ilk beş yılındaki yıllık kâr tablosu aşağıda verilmektedir:

Yıl	1000$ olarak kâr
1990	6
1991	27
1992	62
1993	111
1994	174

a. Kârları temsil eden noktaları yılın fonksiyonu olarak işaretleyin ve olabildiğince düzgün bir eğriyle birleştirin.

b. 1992 ve 1994 arasındaki ortalama kâr artış oranı nedir?

c. Grafiğinizi kullanarak, 1992'de kârın hangi oranda değiştiğini bulun.

T **38.** $x = 1.2, x = 11/10, x = 101/100, x = 1001/1000, x = 10001/10000$ ve $x = 1$ noktalarında $F(x) = (x+2)/(x-2)$ fonksiyonunun değerlerinin tablosunu yapın.

a. Tablonuzdaki her $x \neq 1$ için $[1, x]$ aralığında $F(x)$'in ortalama değişim oranını bulun.

b. Gerekirse tablonuzu genişleterek, $x = 1$'de $F(x)$'in değişim oranını bulmaya çalışın.

T **39.** $x \geq 0$ için $g(x) = \sqrt{x}$ olsun.

a. $[1, 2]$, $[1, 1.5]$ ve $[1,\ 1 + h]$ aralıklarında $g(x)$'in x'e göre ortalama değişim oranını bulun.

b. h'nin sıfıra yaklaşan değerlerinde, örneğin $h = 0.1,\ 0.01,$

0.001, 0.0001, 0.00001 ve 0.000001 için, $[1, 1+h]$ aralığında $g(x)$'in x'e göre ortalama değişim oranlarının bir tablosunu yapın.

c. Tablonuz $g(x)$'in $x = 1$'deki x'e göre değişim oranı hakkında ne söyler?

d. h sıfıra yaklaşırken, $[1, 1+h]$ aralığında $g(x)$'in x'e göre ortalama değişim oranının limitini hesaplayın.

T **40.** $t \neq 0$ için, $f(t) = 1/t$ olsun.

a. (i) $t = 2$'den $t = 3$'e, (ii) $t = 2$'den $t = T$'ye kadar olan aralıklarda f'nin t'ye göre ortalama değişim oranını bulun.

b. T'nin ikiye yaklaşan değerlerinde, örneğin $T = 2.1$, 2.01, 2.001, 2.0001, 2.00001 ve 2.000001 için, $[2, T]$ aralığında f(t)'nin t'ye göre ortalama değişim oranlarının bir tablosunu yapın.

c. Tablonuz $f(t)$'nin $t = 2$'deki t'ye göre değişim oranı hakkında ne söyler?

d. T ikiye yaklaşırken, 2'den T'ye kadar olan aralıkta f'nin t'ye göre ortalama değişim oranının limitini hesaplayın. $T = 2$ almadan önce biraz hesap yapmanız gerekecektir.

BİLGİSAYARLI İNCELEMELER

Limitlerin Grafiksel Tahminleri

41-46 alıştırmalarında, aşağıdaki adımlar için BCS kullanın.

a. Yaklaşılan x_0 noktası yakınında fonksiyonu çizin.

b. Çiziminizden fonksiyonun limitini tahmin edin.

41. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$

42. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{(x+1)^2}$

43. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$

44. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2+7} - 4}$

45. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \sin x}$

46. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2}{3 - 3\cos x}$

2.2 Limitleri Hesaplamak Limit Kurallarını Kullanmak

TARİHSEL DENEME*

Limitler

Bölüm 2.1 de limit değerlerini tahmin emek için grafikler ve hesap makineleri kullandık. Bu bölüm limitlerin hesaplanmalarıyla ilgili teoremleri vermektedir. İlk üçü geçen bölümdeki Örnek 8'in sonuçlarını kullanarak polinomların, rasyonel fonksiyonların ve kuvvetlerin limitlerini bulmamızı sağlar. Dördüncüsü ise daha ilerideki hesaplar için hazırlık yapar.

Limit Kuralları

Aşağıdaki teorem, limitlerini bildiğimiz fonksiyonların matematiksel kombinasyonları olan fonksiyonların limitlerinin nasıl hesaplanacağını söyler.

TANIM 1 Limit Kuralları

L, M, c ve k reel sayılar ve

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to c} g(x) = M, \quad \text{ise}$$

1. *Toplama Kuralı*: $\lim\limits_{x\to c}(f(x) + g(x)) = L + M$

İki fonksiyonun toplamının limiti limitlerinin toplamıdır.

2. *Fark Kuralı*: $\lim\limits_{x\to c}(f(x) - g(x)) = L - M$

İki fonksiyonun farklarının limiti limitlerinin farkıdır.

3. *Çarpım Kuralı*: $\lim\limits_{x\to c}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

İki fonksiyonun çarpımının limiti limitlerinin çarpımıdır.

Calculus'un tarihsel figürleri, esas elemanların gelişimleri ve konuları hakkında daha fazlasını öğrenmek için **www.aw-bc.com/thomas**'ı ziyaret edin.

4. *Sabitle Çarpım Kuralı:* $\lim_{x \to c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$

Bir fonksiyonun bir sabit katının limiti fonksiyonun limitinin sabit katıdır.

5. *Bölüm Kuralı:* $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$

İki fonksiyonun bölümünün limiti, bölenin limitinin sıfır olmaması koşuluyla, limitlerinin bölümüdür.

6. *Kuvvet Kuralı: r* ve *s* ortak çarpanı bulunmayan iki tamsayı $s \neq 0$ ve ise $L^{r/s}$'nin bir reel sayı olması koşuluyla,

$$\lim_{x \to c} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

dir. (s çift ise $L > 0$ olduğunu varsayıyoruz)

Bir fonksiyonun herhangi bir rasyonel kuvvetinin limiti, bir reel sayı olması koşuluyla, limitin o kuvvetidir.

Teorem 1 deki özelliklerin doğru olduğuna kendimizi ikna etmemiz kolaydır (bu sezgisel iddialar ispat içermese de). Limitin gayri resmi tanımından, x c'ye yeterince yakın ise $f(x) + g(x)$'in $L + M$'ye; $f(x) - g(x)$'in $L - M$'ye; $f(x)g(x)$'in LM'ye; $kf(x)$'in kL'ye ve $M \neq 0$ ise $f(x)/g(x)$'in L/M'ye yakın olmaları anlamlıdır. Limitin kesin tanımına dayanarak, toplam kuralını Bölüm 2.3 te ispat ediyoruz. 2–5 kuralları Ek 2 de ispat edilmiştir. Kural 6 ise daha ileri düzeyde kitaplarda ispat edilmektedir.

Aşağıda, polinom fonksiyonların ve rasyonel fonksiyonların limitlerinin bulunmasında Teorem 1'in nasıl kullanılabileceğini gösteren bazı örnekler verilmiştir.

ÖRNEK 1 Limit Kurallarını Kullanmak

Aşağıdaki limitleri bulmak için $\lim_{x \to c} k = k$ ve $\lim_{x \to c} x = c$ gözlemlerini (Bölüm 2.1, Örnek 8) ve limit özelliklerini kullanın.

(a) $\lim_{x \to c} (x^3 + 4x^2 - 3)$ **(b)** $\lim_{x \to c} \dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5}$ **(c)** $\lim_{x \to -2} \sqrt{4x^2 - 3}$

Çözüm

(a)
$$\lim_{x \to c} (x^3 + 4x^2 - 3) = \lim_{x \to c} x^3 + \lim_{x \to c} 4x^2 - \lim_{x \to c} 3 \qquad \text{Toplam ve Fark Kuralları}$$
$$= c^3 + 4c^2 - 3 \qquad \text{Çarpım ve Sabit Kat Kuralları}$$

(b)
$$\lim_{x \to c} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} = \frac{\lim_{x \to c} (x^4 + x^2 - 1)}{\lim_{x \to c} (x^2 + 5)} \qquad \text{Bölüm Kuralı}$$
$$= \frac{\lim_{x \to c} x^4 + \lim_{x \to c} x^2 - \lim_{x \to c} 1}{\lim_{x \to c} x^2 + \lim_{x \to c} 5} \qquad \text{Toplam ve Fark Kuralları}$$
$$= \frac{c^4 + c^2 - 1}{c^2 + 5} \qquad \text{Kuvvet veya Çarpım Kuralları}$$

(c) $\lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2-3} = \sqrt{\lim_{x\to -2}(4x^2-3)}$ — $r/s = 1/2$ ile Kuvvet Kuralı

$= \sqrt{\lim_{x\to -2} 4x^2 - \lim_{x\to -2} 3}$ — Fark Kuralı

$= \sqrt{4(-2)^2 - 3}$ — Çarpım ve Sabit Kat Kuralları

$= \sqrt{16-3}$

$= \sqrt{13}$ ■

Teorem 1'in iki sonucu polinomların ve rasyonel fonksiyonların limitlerini bulma işini daha da basitleştirmektedir. Bir polinom fonksiyonun x c'ye yaklaşırken limitini hesaplamak için fonksiyonun formülünde x yerine basitçe c yazın. Bir rasyonel fonksiyonun x c'ye yaklaşırken (*paydanın sıfır olmadığı bir* c) limitini hesaplamak için fonksiyonun formülünde x yerine basitçe c yazın (Örnek 1.a ve 1.b ye bakın).

TANIM 2 Polinomların Limitleri Değer Yerine Koyma İle Bulunabilir

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, ise

$$\lim_{x\to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0.$$

olur.

TANIM 3 Bölenin Limiti Sıfır Değilse, Rasyonel Fonksiyonların Limitleri Değer Yerine Konularak Bulunabilir

$P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom ve $Q(c) \neq 0$, ise

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

olur.

ÖRNEK 2 Bir Rasyonel Fonksiyonun Limiti

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5} = \frac{(-1)^3+4(-1)^2-3}{(-1)^2+5} = \frac{0}{6} = 0$$

Bu sonuç, $c = -1$ ile Örnek 1 deki ikinci limite benzerdir. Burada bir adımda hesaplanmıştır. ■

Sıfır Paydayı Cebirsel Olarak Elemek

Teorem 3 sadece c limit noktasında paydası sıfır olmayan rasyonel fonksiyonlara uygulanır. Payda sıfır ise pay ve paydadaki ortak çarpanları kısaltmakla c noktasında paydası sıfır olmayan bir kesir elde edilebilir. Böyle olursa sadeleştirilmiş kesirde yerine yazma ile limiti bulabiliriz.

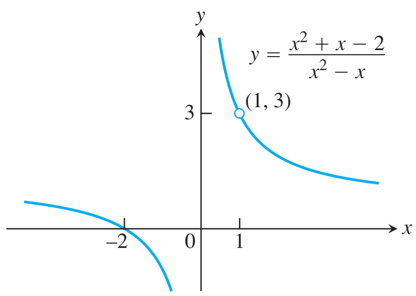
Ortak Çarpanları Belirlemek

$Q(x)$ bir polinom ve $Q(c) = 0$ ise $Q(x)$'in bir çarpanının $(x - c)$ olduğu gösterilebilir. Böylece, x'in bir rasyonel fonksiyonunun pay ve paydası bir c için sıfır ise $(x - c)$ ortak çarpanlarıdır.

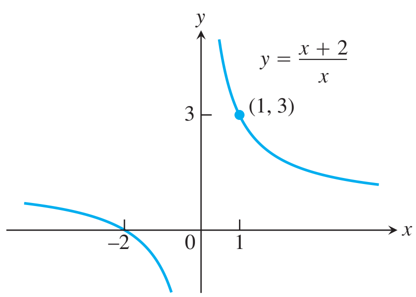
ÖRNEK 3 Bir Ortak Çarpanı Kısaltmak

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}.$$

limitini hesaplayınız.



(a)



(b)

ŞEKİL 2.8 $f(x) = (x^2 + x - 2)/(x^2 - x)$ grafiği (a) da ile $g(x) = (x + 2)/x$ grafiği (b) de f'nin tanımsız olduğu $x = 1$ dışında aynıdır. $x \to 1$ iken her iki fonksiyonun limiti aynıdır (Örnek 3).

Çözüm Paydayı sıfır yaptığından $x = 1$ yazamayız. $x = 1$ de payın da sıfır olup olmadığını görmek için pay'ı inceleriz. Pay sıfırdır, şu halde payda ile ortak $(x - 1)$ çarpanı vardır. $(x - 1)$'leri kısaltmak $x \neq 1$ için değerleri orijinali ile aynı olan daha basit bir kesir verir.

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x - 1)(x + 2)}{x(x - 1)} = \frac{x + 2}{x}, \qquad x \neq 1$$

Daha basit olan kesri kullanarak $x \to 1$ için limiti yerine yazma ile buluruz:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{x + 2}{x} = \frac{1 + 2}{1} = 3.$$

Şekil 2.8'a bakınız. ■

ÖRNEK 4 Bir Ortak Çarpan Oluşturmak ve Kısaltmak

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}.$$

limitini hesaplayınız.

Çözüm Bu, önceki bölümde Örnek 10 da ele aldığımız limittir. $x = 0$ yazamayız, ayrıca pay ve paydanın hemen görülen bir ortak çarpanı yoktur. Pay ve paydayı $\sqrt{x^2 + 100} + 10$ (karekökten sonraki işareti değiştirerek elde edilen) ifadesi ile çarparak bir ortak çarpan oluşturabiliriz. Basit bir hesap pay'ı rasyonel hale getirir:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} &= \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 100} + 10}{\sqrt{x^2 + 100} + 10} \\
&= \frac{x^2 + 100 - 100}{x^2\left(\sqrt{x^2 + 100} + 10\right)} \\
&= \frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2 + 100} + 10\right)} && \text{Ortak Çarpan } x^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 100} + 10}. && x \neq 0 \text{ için } x^2\text{'yi kısaltın}
\end{aligned}$$

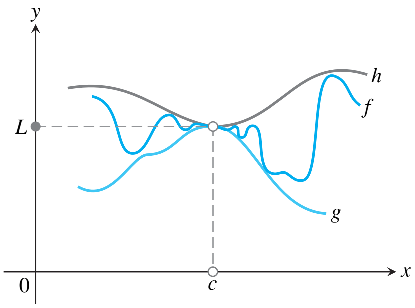
Bu nedenle,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 100} + 10} \\
&= \frac{1}{\sqrt{0^2 + 100} + 10} && x = 0\text{'da payda sıfır değidir; yerine yazın} \\
&= \frac{1}{20} = 0.05.
\end{aligned}$$

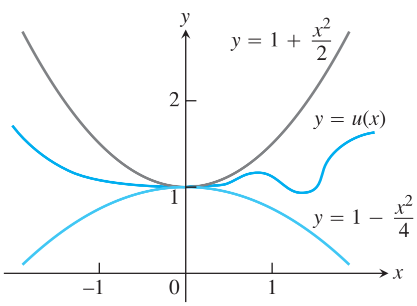
Bu hesap, önceki bölümde Örnek 10'daki belirsiz bilgisayar sonuçlarına karşılık doğru cevabı verir. ■

Sandöviç Teoremi

Aşağıdaki teorem ilerideki bölümlerde çeşitli limitleri hesaplamamızı sağlayacaktır. İsmi Sandöviç Teoremidir, çünkü değerleri, c noktasındaki limitleri aynı ve L olan başka iki g ve h fonksiyonunun değerleri arasına sıkıştırılmış bulunan f fonksiyonundan bahsetmek-



ŞEKİL 2.9 g ve h fonksiyonlarının grafikleri arasına sıkıştırılmış f fonksiyonunun grafiği.



ŞEKİL 2.10 Grafiği $y = 1 + (x^2/2)$ ve $y = 1 - (x^2/4)$ eğrileri arasındaki bölgede bulunan bir $u(x)$ fonksiyonun $x \to 0$ iken limiti 1'dir. (Örnek 5)

tedir. Değerleri L'ye yaklaşan iki fonksiyonun değerleri arasında sıkışmış olduğundan, f'nin değerleri de L'ye yaklaşmalıdır (Şekil 2.9). İspatını Ek 2'de bulabilirsiniz.

TEOREM 4 Sandöviç Teoremi
c'yi içeren bir açık aralıktaki bütün x'ler için, belki $x = c$ hariç olabilir, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ olduğunu varsayalım. Ayrıca

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L.$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\lim_{x \to c} f(x) = L$ olur.

ÖRNEK 5 Sandöviç Teoremini Uygulamak

Her $x \neq 0$ için

$$1 - \frac{x^2}{4} \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2}$$

veriliyor. $\lim_{x \to 0} u(x)$'i bulun, u ne kadar karmaşık olursa olsun.

Çözüm

$$\lim_{x \to 0} (1 - (x^2/4)) = 1 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x \to 0} (1 + (x^2/2)) = 1$$

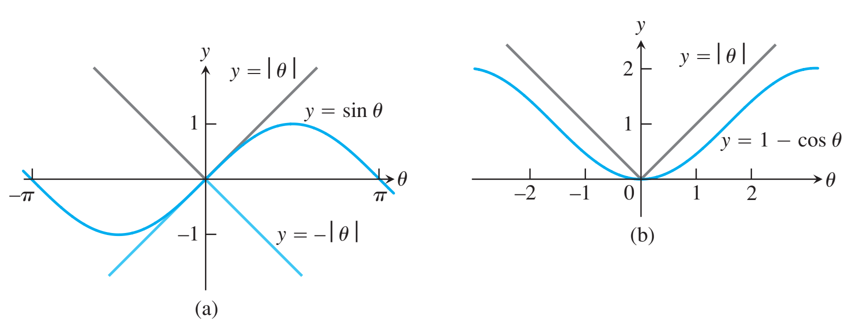
olduğundan, Sandöviç Teoreminden $\lim_{x \to 0} u(x) = 1$ bulunur (Şekil 2.10). ■

ÖRNEK 6 Sandöviç Teoreminin Başka Uygulamaları

(a) (Şekil 2.11a'ya bakınız) sin θ'nın tanımından (Ek B3'e bakınız) her θ için $-|\theta| \leq \sin\theta \leq |\theta|$ olduğu görülür. Ayrıca, $\lim_{\theta \to 0} (-|\theta|) = \lim_{\theta \to 0} |\theta| = 0$ olduğundan

$$\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0$$

elde ederiz.



ŞEKİL 2.11 Sandöviç Teoremi (a) $\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0$ ve (b) $\lim_{\theta \to 0} (1 - \cos\theta) = 0$ olduğunu doğrular (Örnek 6).

(b) (Şekil 2.11b'ye bakınız). cos θ'nın tanımından, her θ için $0 \le 1 - \cos\theta \le |\theta|$ olduğu görülür ve $\lim_{\theta\to 0}(1 - \cos\theta) = 0$ veya

$$\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$$

dir.

(c) Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için, $\lim_{x\to c}|f(x)| = 0$, ise $\lim_{x\to c} f(x) = 0$.dır. Düşünce: $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ ve $x \to c$ iken $-|f(x)|$ ve $|f(x)|$'in limitleri 0 dır. ■

Limitlerin bir başka önemli özelliği aşağıdaki teoremde veriliyor. Sonraki bölümde bir ispatı verilmektedir.

TEOREM 5 c'yi içeren bir açık aralıktaki bütün x'ler için (c'nin kendisi hariç olabilir) $f(x) \le g(x)$ ise ve x c'ye yaklaşırken f ve g'nin her ikisinin de limitleri varsa

$$\lim_{x\to c} f(x) \le \lim_{x\to c} g(x)$$

dir.

Teorem 5 te küçük veya eşittir $\le$ eşitsizliğini kesin küçük $<$ eşitsizliği ile değiştirmekle elde edilen iddia yanlıştır. Şekil 2.11a her $\theta \ne 0$ için $-|\theta| < \sin\theta < |\theta|$, olduğunu fakat $\theta \to 0$ limitinde eşitliğin sağlandığını göstermektedir.

ALIŞTIRMALAR 2.2

Limit Hesaplamaları

1–18 alıştırmalarında limitleri bulunuz.

1. $\lim_{x\to -7}(2x + 5)$
2. $\lim_{x\to 12}(10 - 3x)$
3. $\lim_{x\to 2}(-x^2 + 5x - 2)$
4. $\lim_{x\to -2}(x^3 - 2x^2 + 4x + 8)$
5. $\lim_{t\to 6} 8(t - 5)(t - 7)$
6. $\lim_{s\to 2/3} 3s(2s - 1)$
7. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x + 3}{x + 6}$
8. $\lim_{x\to 5} \dfrac{4}{x - 7}$
9. $\lim_{y\to -5} \dfrac{y^2}{5 - y}$
10. $\lim_{y\to 2} \dfrac{y + 2}{y^2 + 5y + 6}$
11. $\lim_{x\to -1} 3(2x - 1)^2$
12. $\lim_{x\to -4}(x + 3)^{1984}$
13. $\lim_{y\to -3}(5 - y)^{4/3}$
14. $\lim_{z\to 0}(2z - 8)^{1/3}$
15. $\lim_{h\to 0} \dfrac{3}{\sqrt{3h + 1} + 1}$
16. $\lim_{h\to 0} \dfrac{5}{\sqrt{5h + 4} + 2}$
17. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{3h + 1} - 1}{h}$
18. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{5h + 4} - 2}{h}$

19–36 alıştırmalarında limitleri bulunuz.

19. $\lim_{x\to 5} \dfrac{x - 5}{x^2 - 25}$
20. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$
21. $\lim_{x\to -5} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$
22. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}$
23. $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^2 + t - 2}{t^2 - 1}$
24. $\lim_{t\to -1} \dfrac{t^2 + 3t + 2}{t^2 - t - 2}$
25. $\lim_{x\to -2} \dfrac{-2x - 4}{x^3 + 2x^2}$
26. $\lim_{y\to 0} \dfrac{5y^3 + 8y^2}{3y^4 - 16y^2}$
27. $\lim_{u\to 1} \dfrac{u^4 - 1}{u^3 - 1}$
28. $\lim_{v\to 2} \dfrac{v^3 - 8}{v^4 - 16}$
29. $\lim_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$
30. $\lim_{x\to 4} \dfrac{4x - x^2}{2 - \sqrt{x}}$
31. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$
32. $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2 + 8} - 3}{x + 1}$
33. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2 + 12} - 4}{x - 2}$
34. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$

35. $\lim_{x\to -3} \dfrac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3}$

36. $\lim_{x\to 4} \dfrac{4-x}{5-\sqrt{x^2+9}}$

Limit Kurallarını Kullanmak

37. $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ ve $\lim_{x\to 0} g(x) = -5$ olduğunu varsayın. Teorem 1'in, aşağıdaki işlemlerde (a), (b) ve (c) adımlarını gerçekleştirmek için kullanılan, kurallarını belirtin.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2f(x)-g(x)}{(f(x)+7)^{2/3}} = \frac{\lim_{x\to 0}(2f(x)-g(x))}{\lim_{x\to 0}(f(x)+7)^{2/3}} \quad \text{(a)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0} 2f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{\left(\lim_{x\to 0}\left(f(x)+7\right)\right)^{2/3}} \quad \text{(b)}$$

$$= \frac{2\lim_{x\to 0} f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{\left(\lim_{x\to 0} f(x) + \lim_{x\to 0} 7\right)^{2/3}} \quad \text{(c)}$$

$$= \frac{(2)(1)-(-5)}{(1+7)^{2/3}} = \frac{7}{4}$$

38. $\lim_{x\to 1} h(x) = 5$, $\lim_{x\to 1} p(x) = 1$ ve $\lim_{x\to 1} r(x) = 2$ olduğunu varsayın. Teorem 1'in, aşağıdaki işlemlerde (a), (b) ve (c) adımlarını gerçekleştirmek için kullanılan, kurallarını belirtin.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4-r(x))} = \frac{\lim_{x\to 1}\sqrt{5h(x)}}{\lim_{x\to 1}(p(x)(4-r(x)))} \quad \text{(a)}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 1} 5h(x)}}{\left(\lim_{x\to 1} p(x)\right)\left(\lim_{x\to 1}\left(4-r(x)\right)\right)} \quad \text{(b)}$$

$$= \frac{\sqrt{5\lim_{x\to 1} h(x)}}{\left(\lim_{x\to 1} p(x)\right)\left(\lim_{x\to 1} 4 - \lim_{x\to 1} r(x)\right)} \quad \text{(c)}$$

$$= \frac{\sqrt{(5)(5)}}{(1)(4-2)} = \frac{5}{2}$$

39. $\lim_{x\to c} f(x) = 5$ ve $\lim_{x\to c} g(x) = -2$ olduğunu varsayın. Aşağıdaki limitleri hesaplayın.

a. $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$ **b.** $\lim_{x\to c} 2f(x)g(x)$

c. $\lim_{x\to c} (f(x)+3g(x))$ **d.** $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{f(x)-g(x)}$

40. $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$ ve $\lim_{x\to 4} g(x) = -3$ olduğunu varsayın. Aşağıdaki limitleri hesaplayın.

a. $\lim_{x\to 4} (g(x)+3)$ **b.** $\lim_{x\to 4} xf(x)$

c. $\lim_{x\to 4} (g(x))^2$ **d.** $\lim_{x\to 4} \dfrac{g(x)}{f(x)-1}$

41. $\lim_{x\to b} f(x) = 7$ ve $\lim_{x\to b} g(x) = -3$ olduğunu varsayın. Aşağıdaki limitleri hesaplayın.

a. $\lim_{x\to b} (f(x)+g(x))$ **b.** $\lim_{x\to b} f(x)\cdot g(x)$

c. $\lim_{x\to b} 4g(x)$ **d.** $\lim_{x\to b} f(x)/g(x)$

42. $\lim_{x\to 2} p(x) = 4$, $\lim_{x\to -2} r(x) = 0$ ve $\lim_{x\to -2} s(x) = -3$ olduğunu varsayın. Aşağıdaki limitleri bulun.

a. $\lim_{x\to -2} (p(x)+r(x)+s(x))$

b. $\lim_{x\to -2} p(x)\cdot r(x)\cdot s(x)$

c. $\lim_{x\to -2} (-4p(x)+5r(x))/s(x)$

Ortalama Değişim Oranlarının Limitleri

Kirişler, teğetler ve anlık hızlarla olan ilişkileri yüzünden,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

şeklindeki limitlerle analizde çok sık karşılaşılır. 43–48 alıştırmalarında verilen x değerleri ve f fonksiyonları için bu limiti hesaplayın.

43. $f(x) = x^2, \quad x = 1$ **44.** $f(x) = x^2, \quad x = -2$

45. $f(x) = 3x-4, \quad x = 2$ **46.** $f(x) = 1/x, \quad x = -2$

47. $f(x) = \sqrt{x}, \quad x = 7$ **48.** $f(x) = \sqrt{3x+1}, \quad x = 0$

Sandöviç Teoremini Kullanmak

49. $-1 \le x \le 1$ için $\sqrt{5-2x^2} \le f(x) \le \sqrt{5-x^2}$ ise $\lim_{x\to 0} f(x)$'i bulun.

50. Her x için $2-x^2 \le g(x) \le 2\cos x$ ise $\lim_{x\to 0} g(x)$'i bulun.

51. a. Sıfıra yakın bütün x değerleri için

$$1-\frac{x^2}{6} < \frac{x\sin x}{2-2\cos x} < 1$$

eşitsizliklerinin geçerli olduğu ispatlanabilir. Bu size

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{2-2\cos x}$$

hakkında ne söyler? Yanıtınızı açıklayın.

T **b.** $-2 \le x \le 2$ için $y = 1-(x^2/6)$, $y = (x\sin x)/(2-2\cos x)$ ve $y = 1$ grafiklerini birlikte çizin. $x \to 0$ iken grafiklerin davranışını açıklayın.

52. a. Sıfıra yakın tüm x değerleri için

$$\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24} < \frac{1-\cos x}{x^2} < \frac{1}{2}$$

eşitsizliklerinin doğru olduğunu düşünün (Bölüm 11.9'da bunun geçerli olduğunu göreceksiniz). Bu size

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

hakkında ne söyler? Yanıtınızı açıklayın.

b. $-2 \le x \le 2$ için $y = (1/2)-(x^2/24)$ $y = (1-\cos x)/x^2$ ve $y = 1/2$ grafiklerini birlikte çizin. $x \to 0$ iken grafiklerin davranışını açıklayın.

Teori ve Örnekler

53. $[-1, 1]$'deki bütün x'ler için $x^4 \leq f(x) \leq x^2$ ve $x < -1$ ve $x > 1$ için $x^2 \leq f(x) \leq x^4$ ise, hangi c noktalarında otomatik olarak $\lim_{x\to c} f(x)$ limitini bulabilirsiniz? Bu noktalardaki limitin değeri hakkında ne söyleyebilirsiniz?

54. Her $x \neq 2$ için $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ve

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} h(x) = -5$$

olduğunu varsayın, f, g ve h''nin $x = 2$'deki değerleri için bir şey söyleyebilir miyiz? $f(2) =$ olabilir mi? $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$ olabilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

55. $\lim_{x\to 4} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$ ise, $\lim_{x\to 4} f(x)$ 'i bulun.

56. $\lim_{x\to -2} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$ ise

a. $\lim_{x\to -2} f(x)$ **b.** $\lim_{x\to -2} \dfrac{f(x)}{x}$'i bulun.

57. a. $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$ ise, $\lim_{x\to 2} f(x)$'i bulun.

b. $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2} = 4$ ise, $\lim_{x\to 2} f(x)$'i bulun.

58. $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$ ise

a. $\lim_{x\to 0} f(x)$ **b.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$'i bulun.

T **59. a.** Orijine gerektiği kadar yaklaşarak, $g(x) = x \sin(1/x)$ grafiğini çizip, $\lim_{x\to 0} g(x)$ limitini tahmin edin.

b. (a)'daki yanıtınızı bir ispatla doğrulayın.

T **60. a.** Orijine gerektiği kadar yaklaşarak, $h(x) = x^2 \cos(1/x^3)$ grafiğini çizip, $\lim_{x\to 0} h(x)$ limitini tahmin edin.

b. (a)'daki yanıtınızı bir ispatla doğrulayın.

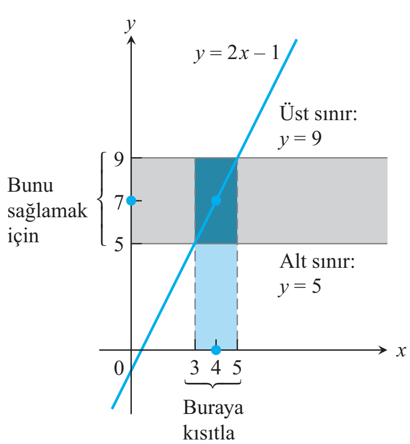
2.3 Bir Limitin Kesin Tanımı

Gayri resmi tanımla sezgisel olarak çalışmak suretiyle limit kavramı hakkında biraz fikir sahibi olduğumuzu düşünerek dikkatimizi limitin kesin tanımına çeviriyoruz. Gayrı resmi tanımdaki "yeterince yakın" gibi terimleri herhangi özel bir örneğe uygulanabilecek özel koşullarla değiştireceğiz. Bir kesin tanımla önceki bölümde verilen limit özelliklerini kesin bir şekilde ispat edebileceğiz ve analiz çalışmada başka önemli limitleri saptayabileceğiz.

$x \to x_0$ iken $f(x)$'in limitinin L'ye eşit olduğunu göstermek için x x_0'a "yeterince yakın" tutularak $f(x)$ ile L arasındaki aralığın "seçtiğimiz kadar küçük" yapılabileceğini göstermemiz gerekir. Bunun, $f(x)$ ile L arasındaki aralığın ölçüsünü belirlediğimizde ne gerektireceğine bakalım.

ÖRNEK 1 Bir Lineer Fonksiyon

$y = 2x - 1$ fonksiyonunu $x_0 = 4$ yakınında ele alalım. Sezgisel olarak, x 4'e yakın iken y'nin 7'ye yakın olduğu açıktır, şu halde, $\lim_{x\to 4}(2x - 1) = 7$. Halbuki, $y = 2x - 1$'in $y_0 = 7$'den, örneğin, 2 birimden daha az fark etmesi için x değeri $x_0 = 4$'e ne kadar yakın olmalıdır?



ŞEKİL 2.12 x'i $x_0 = 4$'ün 1 birim yakınında tutmak y'yi $y_0 = 7$'nin 2 birim yakınında tutar (Örnek 1).

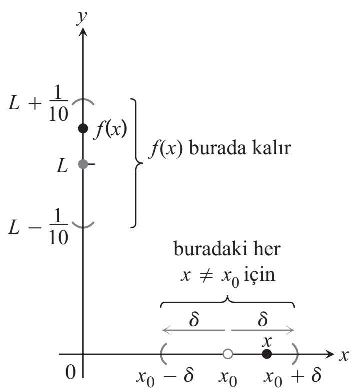
Çözüm Bize sorulan şu: x'in hangi değerleri için $|y - 7| < 2$ olur? Yanıtı bulmak için önce $|y - 7|$'yi x cinsinden açmalıyız.

$$|y - 7| = |(2x - 1) - 7| = |2x - 8|$$

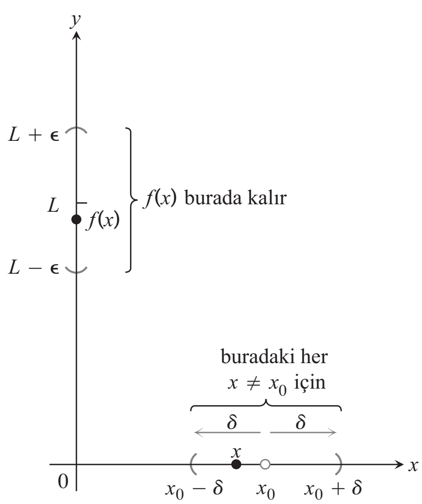
Soru artık şu hale gelir: Hangi x değerleri $|2x - 8| < 2$ eşitsizliğini sağlar? Bulmak için, eşitsizliği çözeriz:

$$\begin{aligned} |2x - 8| &< 2 \\ -2 < 2x - 8 &< 2 \\ 6 < 2x &< 10 \\ 3 < x &< 5 \\ -1 < x - 4 &< 1. \end{aligned}$$

x'i x_0=4'ün 1 birim yakınında tutmak y'yi y_0=7'nin 2 birim yakınında tutar (Şekil 2.12). ■



ŞEKİL 2.13 x'i $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ aralığı içinde tutmakla $f(x)$'i $\left(L - \frac{1}{10}, L + \frac{1}{10}\right)$ aralığının içinde tutacak şekilde bir $\delta > 0$'ı nasıl tanımlamalıyız?



ŞEKİL 2.14 Limit tanımında δ ile ϵ'nun ilişkisi.

Önceki örnekte bir fonksiyonun $f(x)$ çıktısının bir L limit değeri civarında belirlenmiş bir aralıkta kaldığından emin olmak için x'in belirli bir x_0 değerine ne kadar yakın olması gerektiği belirledik. $x \to x_0$ iken $f(x)$'in limitinin gerçekten L olduğunu göstermek için x'i x_0'a yeterince yakın tutmakla $f(x)$ ile L arasındaki aralığın, ne kadar küçük olursa olsun, *belirlenmiş herhangi bir hatadan* daha küçük yapılabildiğini göstermeliyiz.

Limitin Tanımı

x (x_0 değerini almadan) x_0'a yaklaşırken bir $f(x)$ fonksiyonunun değerlerini izlediğimizi varsayalım. Elbette, x x_0'ın δ kadar yakınındayken $f(x)$ L'nin bir birimin onda biri kadar yakınındadır diyebilmeyi istiyoruz (Şekil 2.13). Fakat bu kadarı da yeterli değildir, çünkü x x_0'a yaklaşmaya devam ettikçe, $f(x)$'i L'ye yaklaşmadan $L - 1/10$ ile $L + 1/10$ aralığında salınmaktan ne alıkoyacaktır?

Hatanın $1/100$ veya $1/1000$ veya $1/10,000$'den fazla olmaması istenebilir. Her defasında, x_0 etrafında, x'i o aralık içinde tutmanın yeni bir hata değeri tanımlayacağı bir δ-aralığı buluruz. Ve her defasında, $f(x)$'in son anda L'den kaçma olasılığı vardır.

Aşağıdaki şekiller problemi göstermektedir. Bunu bir şüpheci ile bir bilim adamı arasındaki kavgaya benzetebilirsiniz. Şüpheci, limitin bulunmayacağını, veya varlığından kuşku duyulabileceğini ispatlamak için ϵ-değerleri ile meydan okur ve bilim adamı da her meydan okumayı x_0 etrafında bir δ-aralığıyla yanıtlar.

Bu sonsuz gibi görünen meydan okuma ve yanıt dizisini nasıl durdurabiliriz? Meydan okuyanın üretebileceği her ϵ hata değeri için, $f(x)$'i L'den o hata kadar uzak bir aralık içinde bulunduracak şekilde x'i x_0'a "yeterince yakın" tutacak bir δ uzaklığı bulabileceğimizi, hesaplayabileceğimizi veya yaratabileceğimizi ispat ederek (Şekil 2.14). Bu bizi limitin kesin tanımına götürür.

TANIM **Bir Fonksiyonun Limiti**

$f(x)$, x_0 civarında (x_0'da tanımlı olmayabilir) bir açık aralıkta tanımlı olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık,

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ eşitsizliğini sağlayan bütün } x\text{'ler için } |f(x) - L| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, x x_0'a yaklaşırken, $f(x)$ L limitine yaklaşıyor der ve

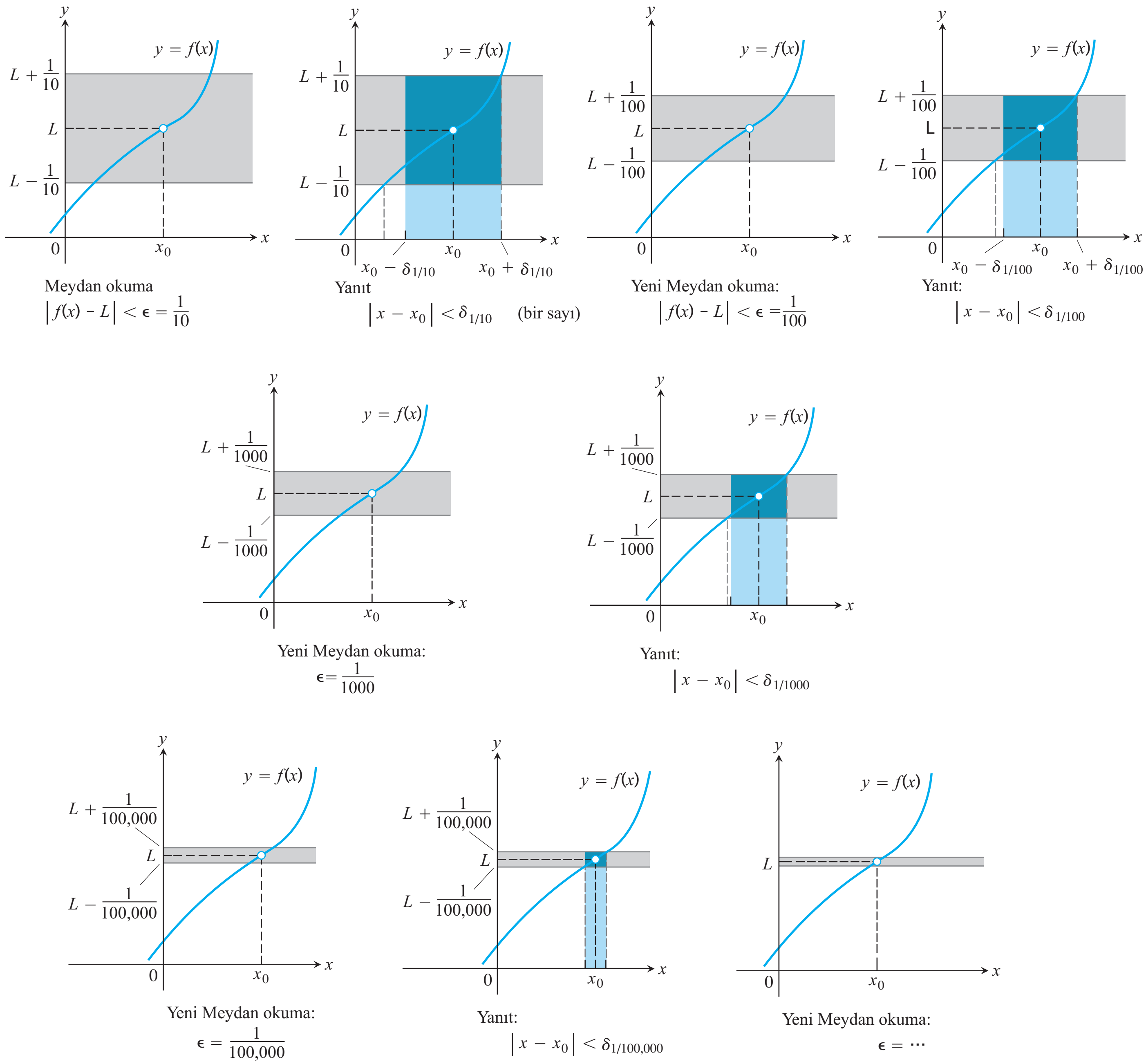
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

yazarız.

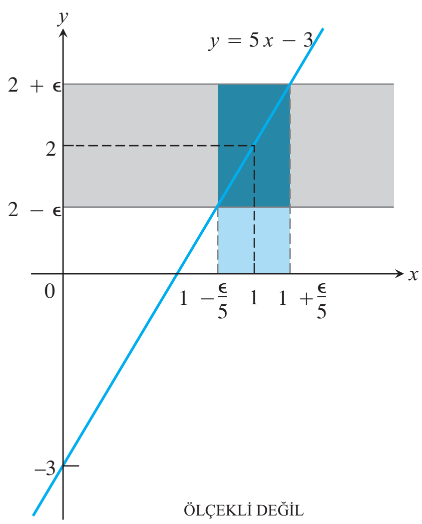
Tanım hakkında düşünmenin bir yolu, yakın bir hata dahilinde bir jeneratör mili yaptığımızı varsaymaktır. L çapına ulaşmayı deneyebiliriz, ama hiçbir şey mükemmel olmadığından $L - \epsilon$ ile $L + \epsilon$ arasında bir $f(x)$ çapıyla yetinmek zorunda kalabiliriz. δ, milin çapındaki bu hassaslığı garantilemek için x'in kontrol ayarında ne kadar hassas olmamız gerektiğinin ölçüsüdür. Hata payı değiştikçe δ'yı yeniden ayarlamak zorunda olduğumuza dikkat edin. Yani, kontrol aralığınızın ne kadar olması gerektiğini söyleyen δ değeri hata payı ϵ'nun değerine bağlıdır.

Tanımı Test Eden Örnekler

Limitin esas tanımı bir fonksiyonun limitinin nasıl bulunacağını söylemek yerine, düşünülen bir limitin doğru olup olmadığını anlamamızı sağlar. Aşağıdaki örnekler belirli



fonksiyonlar için bu tanımın nasıl kullanılacağını göstermektedir (İlk iki örnek Bölüm 2.1'deki 7 ve 8 örneklerinin bazı kısımlarına karşılık gelir). Ancak, tanımın asıl amacı bu gibi hesaplamalar yapmak değil, belirli limitlerin hesaplanmasını kolaylaştıracak genel teoremlerin ispatını sağlamaktır.



ŞEKİL 2.15 $f(x) = 5x - 3$ ise, $0 < |x - 1| < \epsilon/5$ olması $|f(x) - 2| < \epsilon$ olmasını garantiler (Örnek 2).

ÖRNEK 2 Tanımı Test Etmek

$$\lim_{x \to 1} (5x - 3) = 2.$$

olduğunu gösterin.

Çözüm Limit tanımında $x_0 = 1$, $f(x) = 5x - 3$ ve $L = 2$ koyun. Verilen herhangi bir $\epsilon > 0$ için, $x \neq 1$ve $\delta > 0$ ve x'in $x_0 = 1$'e uzaklığı δ'dan küçük ise, yani

$$0 < |x - 1| < \delta,$$

ise $f(x)$'in $L = 2$'ye uzaklığı ϵ'dan küçüktür, yani

$$|f(x) - 2| < \epsilon.$$

ifadesinin doğru olacağı uygun bir δ bulmalıyız.
δ'yı ϵ-eşitsizliğinden geriye doğru giderek buluruz:

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| < \epsilon$$
$$5|x - 1| < \epsilon$$
$$|x - 1| < \epsilon/5.$$

Böylece, $\delta = \epsilon/5$ alabiliriz (Şekil 2.15). $0 < |x - 1| < \delta = \epsilon/5$ ise,

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| = 5|x - 1| < 5(\epsilon/5) = \epsilon,$$

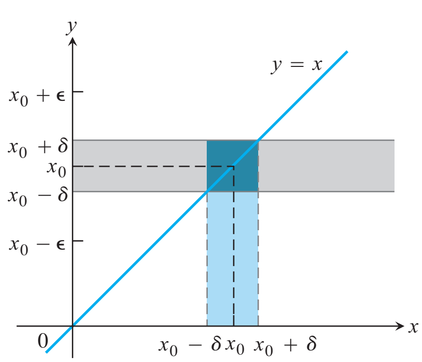
dur ve bu $\lim_{x\to 1}(5x - 3) = 2$ olduğunu ispatlar.

$0 < |x - 1| < \delta$ olmasının $|5x - 5| < \epsilon$ olmasını gerektirdiği tek değer $\delta = \epsilon/5$ değeri değildir. Daha küçük herhangi bir δ da olur. Tanım "en iyi" pozitif δ sormuyor, işe yarayacak bir tane soruyor. ■

ÖRNEK 3 Birim ve Sabit Fonksiyonların Limitleri

İspatlayın:

(a) $\lim_{x \to x_0} x = x_0$ **(b)** $\lim_{x \to x_0} k = k$ (k sabit).



ŞEKİL 2.16 $f(x) = x$ fonksiyonu için $\delta \leq \epsilon$ iken $0 < |x - x_0| < \delta$ olmasının $|f(x) - x_0| < \epsilon$ olmasını garantilediğini görürüz (Örnek 3a).

Çözüm

(a) $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$0 < |x - x_0| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her x için $|x - x_0| < \epsilon$

eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta > 0$ bulmalıyız. ϵ'a eşit veya daha küçük bir δ için bu sağlanır (Şekil 2.16). Bu da $\lim_{x\to x_0} x = x_0$ olduğunu ispatlar.

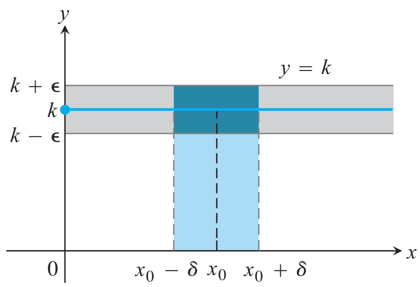
(b) $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$0 < |x - x_0| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her x için $|k - k| < \epsilon$

eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta > 0$ bulmalıyız. $k - k = 0$ olduğundan herhangi bir pozitif sayıyı δ olarak kullanabiliriz (Şekil 2.17). Bu da $\lim_{x\to x_0} k = k$ olduğunu ispatlar. ■

Verilen Epsilonlar İçin Deltaları Cebirsel Olarak Bulma

Örnek 2 ve 3'te, $|f(x) - L|$'nin ϵ'dan küçük olduğu x değerleri aralığı x_0 etrafında simetrikti ve δ'yı aralığın uzunluğunun yarısı olarak alabildik. Böyle bir simetri, genelde



ŞEKİL 2.17 $f(x) = k$ fonksiyonu için, herhagi bir pozitif δ için $|f(x) - k| < \epsilon$'un sağladığını görürüz (Örnek 3b).

olduğu gibi, bulunmadığında, δ'yı x_0'dan aralığın en yakın uç noktasına olan uzaklık olarak alırız.

ÖRNEK 4 Deltayı Cebirsel Olarak Bulmak

$\lim_{x\to 5}\sqrt{x-1} = 2$ limiti için, $\epsilon = 1$ olduğunda işe yarayacak bir $\delta > 0$ değeri bulun. Yani, $\delta > 0$ eşitsizliğini sağlayan her x için

$$0 < |x-5| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |\sqrt{x-1} - 2| < 1$$

gerektirmesi sağlanacak şekilde bir $\delta > 0$ değeri bulun.

Çözüm Araştırmamızı, aşağıda verildiği gibi iki adımda gerçekleştiririz.

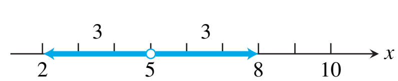
1. *$x_0 = 5$'i içeren ve içerdiği her $x \neq x_0$ için eşitsizliğin sağlandığı bir aralık bulmak üzere $|\sqrt{x-1} - 2| < 1$ eşitsizliğini çözün.*

$$|\sqrt{x-1} - 2| < 1$$
$$-1 < \sqrt{x-1} - 2 < 1$$
$$1 < \sqrt{x-1} < 3$$
$$1 < x - 1 < 9$$
$$2 < x < 10$$

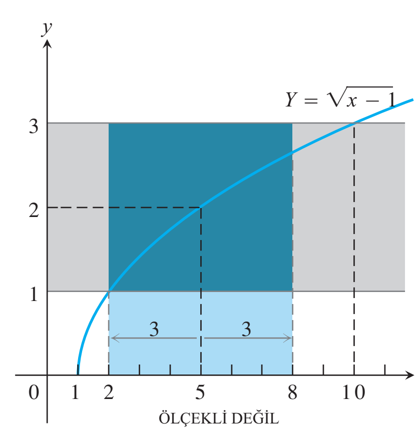
Eşitsizlik (2, 10) açık aralığındaki her x için geçerli olduğundan dolayı bu aralıktaki her $x \neq 5$ için geçerlidir (Şekil 2.19'a bakınız).

2. *Merkezi $x_0 = 5$ olan ve $5 - \delta < x < 5 + \delta$ aralığını (2, 10) aralığı içine yerleştiren bir $\delta > 0$ değeri bulun.* 5'ten (2, 10) açık aralığının en yakın uç noktasına olan uzaklık 3'tür (Şekil 2.18). $\delta = 3$ veya daha küçük herhangi bir pozitif sayı alırsak, $0 < |x - 5| < \delta$ eşitsizliği otomatik olarak x'i, $|\sqrt{x-1} - 2| < 1$ olacak şekilde, 2 ile 10 arasına yerleştirecektir (Şekil 2.19).

$$0 < |x-5| < 3 \qquad \Rightarrow \qquad |\sqrt{x-1} - 2| < 1$$



ŞEKİL 2.18 $x_0 = 5$ civarındaki 3 yarıçaplı bir açık aralık (2, 10) açık aralığının içinde kalacaktır.



ŞEKİL 2.19 Örnek 4'teki fonksiyon ve aralıklar.

Verilen, f, L, x_0 ve $\epsilon > 0$ Değerleri İçin δ'nın Cebirsel Bulunuşu

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{iken} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

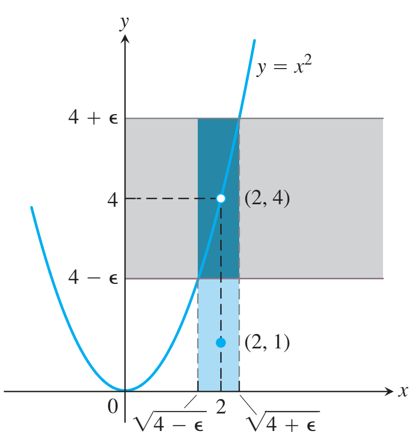
eşitsizliğinin geçerli olmasını sağlayacak bir $\delta > 0$ sayısının bulunması iki adımda gerçekleşir.

1. x_0'ı içeren ve içerdiği her $x \neq x_0$ için eşitsizliğin sağlandığı bir (a, b) açık aralığı bulmak üzere $|f(x) - L| < \epsilon$ *eşitsizliğini çözün.*
2. Merkezi x_0'da olan $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ açık aralığını (a, b) aralığı içine yerleştirecek bir $\delta > 0$ değeri bulun. Bu δ-aralığındaki her $x \neq x_0$ için $|f(x) - L| < \epsilon$ eşitsizliği sağlanacaktır.

ÖRNEK 5 Deltayı Cebirsel Olarak Bulmak

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2. \end{cases}$$

ise, $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ olduğunu ispat edin.



ŞEKİL 2.20 Örnek 5 teki fonksiyon için $x = 2$'yi içeren ve $|f(x) - 4| < \epsilon$'un sağlandığı bir aralık

Çözüm Amacımız $\epsilon > 0$ verildiğinde, $0 < |x - 2| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her x için

$$|f(x) - 4| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunduğunu göstermektir.

1. $x_0 = 2$'yi içeren ve içerdiği her $x \neq x_0$ *için eşitsizliğin sağlandığı bir açık aralık bulmak üzere* $|f(x) - 4| < \epsilon$ *eşitsizliğini çözün.*

   $x \neq x_0 = 2$ için, $f(x) = x^2$ ve çözülecek eşitsizlik $|x^2 - 4| < \epsilon$'dur.

$$|x^2 - 4| < \epsilon$$
$$-\epsilon < x^2 - 4 < \epsilon$$
$$4 - \epsilon < x^2 < 4 + \epsilon$$
$$\sqrt{4 - \epsilon} < |x| < \sqrt{4 + \epsilon} \qquad \epsilon < 4 \text{ varsayımı; aşağıya bakın}$$
$$\sqrt{4 - \epsilon} < x < \sqrt{4 + \epsilon} \qquad x_0 = 2 \text{ etrafında eşitsizliği çözen bir açık aralık.}$$

   $|f(x) - 4| < \epsilon$ eşitsizliği $\left(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon}\right)$ açık aralığındaki her $x \neq 2$ için geçerlidir (Şekil 2.20).

2. $(2 - \delta, 2 + \delta)$ *simetrik aralığını* $\left(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon}\right)$ *aralığı için yerleştirecek bir* $\delta > 0$ *değeri bulun.*

   δ'yı $x_0 = 2$'den $\left(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon}\right)$ aralığının en yakın uç noktasına uzaklık olarak alın. Başka bir deyişle, $\delta = \min\left\{2 - \sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon} - 2\right\}$ yani $2 - \sqrt{4 - \epsilon}$ ve $\sqrt{4 + \epsilon} - 2$ değerinin *en küçüğü* olarak kabul edin. Eğer δ'nın değeri bu veya bundan küçük bir pozitif sayıysa, $0 < |x - 2| < \delta$ eşitsizliği otomatik olarak x'i, $|f(x) - 4| < \epsilon$ olacak şekilde, $\sqrt{4 - \epsilon}$ ile $\sqrt{4 + \epsilon}$ arasına yerleştirecektir. $0 < |x - 2| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her x için

$$|f(x) - 4| < \epsilon$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

$\epsilon < 4$ olduğunu varsaymak neden doğrudur? Çünkü, x, $0 < |x-2| < \delta$ eşitsizliğinin $|f(x)-4| < \epsilon < 4$ anlamına geleceği bir δ değeri bulurken, daha büyük ϵ değerleri için de geçerli olacak bir δ değeri bulduk.

Son olarak, $\delta = \min\left\{2 - \sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon} - 2\right\}$ seçerken kazandığımız özgürlüğü ele alalım. Hangisinin en küçük olduğunu düşünmek için hiç zaman harcamadık. Sadece δ'nın küçüğünü temsil ettiğini kabul edip, ispatımızı tamamladık. ■

Tanımı Kullanarak Teorem İspatlama

Genelde, limitin esas tanımını deminki örneklerde olduğu gibi belirli limitlerin doğru olduğunu göstermekte kullanmayız. Bunun yerine limit hakkındaki genel teoremlere, özellikle de Bölüm 2.2'dekilere başvururuz. Tanım bu teoremleri ispatlamakta kullanılır (EK 2). Bir örnek olarak, Teorem 1'in 1. bölümünü, Toplama Kuralını ispatlayalım.

ÖRNEK 6 Bir Toplamın Limiti Kuralının İspatı

$\lim_{x\to c} f(x) = L$ ve $\lim_{x\to c} g(x) = M$ veriliyor.

$$\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = L + M$$

olduğunu ispatlayın.

Çözüm $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$0 < |x-c| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her x için $|f(x)+g(x)-(L+M)| < \epsilon$ olacak şekilde bir δ sayısı bulmak istiyoruz. Terimleri bir araya getirerek

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L+M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\le |f(x) - L| + |g(x) - M| \end{aligned}$$

Üçgen eşitsizliği: $|a+b| \le |a| + |b|$

buluruz. $\lim_{x\to c} f(x) = L$ olduğundan,

$$0 < |x-c| < \delta_1 \text{ eşitsizliğini sağlayan her } x \text{ için } |f(x) - L| < \epsilon/2$$

olacak şekilde bir $\delta_1 > 0$ sayısıda bulunabilir. Aynı şekilde, $\lim_{x\to c} g(x) = M$ olduğundan

$$0 < |x-c| < \delta_2 \text{ eşitsizliğini sağlayan her } x \text{ için } |g(x) - M| < \epsilon/2$$

olacak şekilde bir $\delta_2 > 0$ sayısı da bulunabilir. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, yani δ_1 ve δ_2'nin en küçüğü olsun. $0 < |x-c| < \delta$ ise $|x-c| < \delta_1$ ve dolayısıyla $|f(x)-L| < \epsilon/2$ olur ve $0 < |x-c| < \delta$ ise $|x-c| < \delta_2$ ve $|g(x)-M| < \epsilon/2$ olacaktır. Buradan,

$$|f(x) + g(x) - (L+M)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

bulunur. Bu da $\lim_{x\to c} (f(x)+g(x)) = L+M$ olduğunu gösterir. ■

Bölüm 2.2 deki Teorem 5'i de ispat edelim

ÖRNEK 7 $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ve $\lim_{x\to c} g(x) = M$ ve c'yi içeren bir açık aralıktaki bütün x'ler (c'nin kendisi hariç olabilir) için $f(x) \le g(x)$ olduğu veriliyor. $L \le M$ olduğunu ispat edin.

Çözüm Çelişki yöntemi ile ispatı kullanacağız. $L > M$ olduğunu kabul edelim. Teorem 1 deki farkın limiti özelliğine göre,

$$\lim_{x\to c} (g(x) - f(x)) = M - L$$

dir. Bu nedenle, her $\epsilon > 0$ için, $0 < |x-c| < \delta$ oldukça

$$|(g(x) - f(x)) - (M - L)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır.

Kabulümüze göre $L - M > 0$ olduğundan özel olarak $\epsilon = L - M$ alırız ve $0 < |x - c| < \delta$ oldukça $|(g(x) - f(x)) - (M - L)| < L - M$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Herhangi bir a için $a \leq |a|$ olduğundan

$$0 < |x - c| < \delta \quad \text{oldukça} \quad |(g(x) - f(x)) - (M - L)| < L - M$$

bulunur ve kısaltmalar yapılarak

$$g(x) < f(x) \ \text{ oldukça } 0 < |x - c| < \delta$$

elde edilir. Fakat bu, $f(x) \leq g(x)$ olması ile çelişir. Böylece, $L > M$ eşitsizliği yanlış olmalıdır. Bu yüzden $L \leq M$ dir. ∎

ALIŞTIRMALAR 2.3

Bir Nokta Etrafına Aralık Yerleştirme

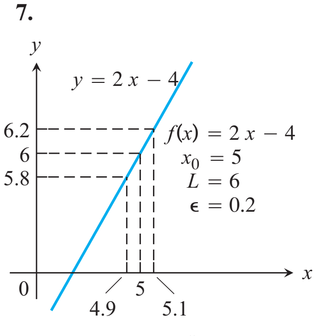
1-6 alıştırmalarında, x-ekseninde x_0 noktasını da içeren (a, b) aralığını çizin. Sonra, $0 < |x - x_0| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her x için $a < x < b$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ değeri bulun.

1. $a = 1, \quad b = 7, \quad x_0 = 5$
2. $a = 1, \quad b = 7, \quad x_0 = 2$
3. $a = -7/2, \quad b = -1/2, \quad x_0 = -3$
4. $a = -7/2, \quad b = -1/2, \quad x_0 = -3/2$
5. $a = 4/9, \quad b = 4/7, \quad x_0 = 1/2$
6. $a = 2.7591, \quad b = 3.2391, \quad x_0 = 3$

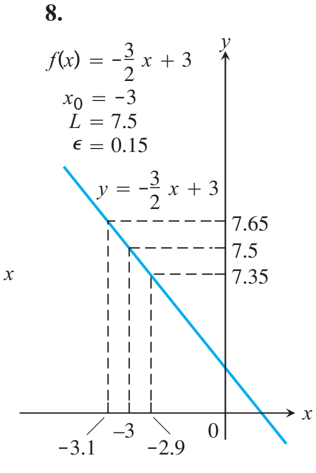
Deltaları Grafikten Bulma

7–14 alıştırmalarında, $0 < |x - x_0| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her x için $|f(x) - L| < \epsilon$ olmasını sağlayacak $\delta > 0$ bulmak için grafikleri kullanın.

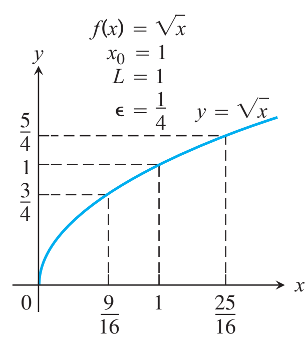
7.



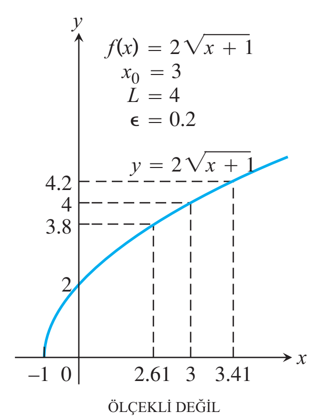
8.



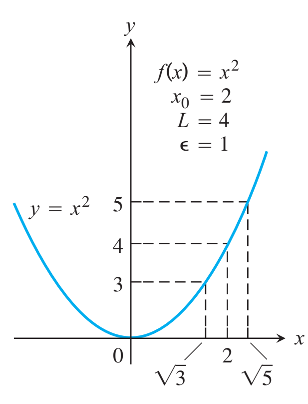
9.



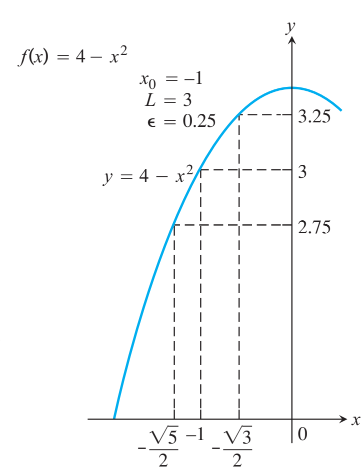
10.



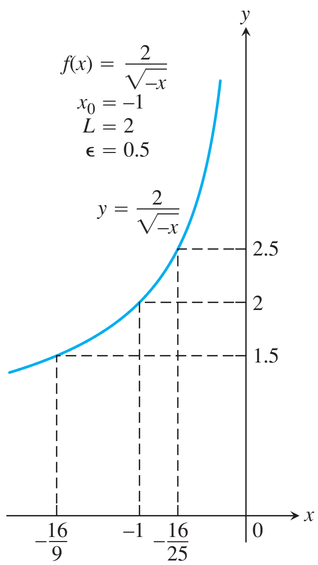
11.



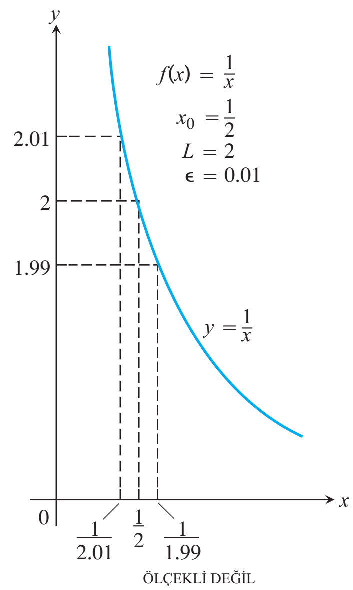
12.



13.



14.



Deltaları Cebirsel Olarak Bulma

15–30 alıştırmalarının her birinde bir $f(x)$ fonksiyonu ile L, x_0 ve $\epsilon > 0$ sayıları verilmektedir. Her bir durumda, x_0 civarında $|f(x) - L| < \epsilon$ eşitsizliğinin sağlandığı bir açık aralık bulun. Sonra $0 < |x - x_0| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her x noktasında $|f(x) - L| < \epsilon$ eşitsizliğinin geçerli olacağı bir $\delta > 0$ sayısı bulun.

15. $f(x) = x + 1, \quad L = 5, \quad x_0 = 4, \quad \epsilon = 0.01$

16. $f(x) = 2x - 2, \quad L = -6, \quad x_0 = -2, \quad \epsilon = 0.02$

17. $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad L = 1, \quad x_0 = 0, \quad \epsilon = 0.1$

18. $f(x) = \sqrt{x}, \quad L = 1/2, \quad x_0 = 1/4, \quad \epsilon = 0.1$

19. $f(x) = \sqrt{19 - x}, \quad L = 3, \quad x_0 = 10, \quad \epsilon = 1$

20. $f(x) = \sqrt{x - 7}, \quad L = 4, \quad x_0 = 23, \quad \epsilon = 1$

21. $f(x) = 1/x, \quad L = 1/4, \quad x_0 = 4, \quad \epsilon = 0.05$

22. $f(x) = x^2, \quad L = 3, \quad x_0 = \sqrt{3}, \quad \epsilon = 0.1$

23. $f(x) = x^2, \quad L = 4, \quad x_0 = -2, \quad \epsilon = 0.5$

24. $f(x) = 1/x, \quad L = -1, \quad x_0 = -1, \quad \epsilon = 0.1$

25. $f(x) = x^2 - 5, \quad L = 11, \quad x_0 = 4, \quad \epsilon = 1$

26. $f(x) = 120/x, \quad L = 5, \quad x_0 = 24, \quad \epsilon = 1$

27. $f(x) = mx, \quad m > 0, \quad L = 2m, \quad x_0 = 2, \quad \epsilon = 0.03$

28. $f(x) = mx, \quad m > 0, \quad L = 3m, \quad x_0 = 3,$
$\epsilon = c > 0$

29. $f(x) = mx + b, \quad m > 0, \quad L = (m/2) + b,$
$x_0 = 1/2, \quad \epsilon = c > 0$

30. $f(x) = mx + b, \quad m > 0, \quad L = m + b, \quad x_0 = 1,$
$\epsilon = 0.05$

Limit Üzerine Biraz Daha Alıştırma

31-36 alıştırmalarında bir $f(x)$ fonksiyonu, bir x_0 noktası ve bir pozitif ϵ sayısı verilmektedir. $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$'i ve $0 < |x - x_0| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her x için $|f(x) - L| < \epsilon$ olmasını sağlayacak bir $\delta > 0$ sayısı bulun.

31. $f(x) = 3 - 2x, \quad x_0 = 3, \quad \epsilon = 0.02$

32. $f(x) = -3x - 2, \quad x_0 = -1, \quad \epsilon = 0.03$

33. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, \quad x_0 = 2, \quad \epsilon = 0.05$

34. $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 5}{x + 5}, \quad x_0 = -5, \quad \epsilon = 0.05$

35. $f(x) = \sqrt{1 - 5x}, \quad x_0 = -3, \quad \epsilon = 0.5$

36. $f(x) = 4/x, \quad x_0 = 2, \quad \epsilon = 0.4$

37–50 alıştırmalarındaki limitleri ispatlayın.

37. $\lim_{x \to 4} (9 - x) = 5$

38. $\lim_{x \to 3} (3x - 7) = 2$

39. $\lim_{x \to 9} \sqrt{x - 5} = 2$

40. $\lim_{x \to 0} \sqrt{4 - x} = 2$

41. $\lim_{x \to 1} f(x) = 1, \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

42. $\lim_{x \to -2} f(x) = 4, \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq -2 \\ 1, & x = -2 \end{cases}$

43. $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{x} = 1$

44. $\lim_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{3}$

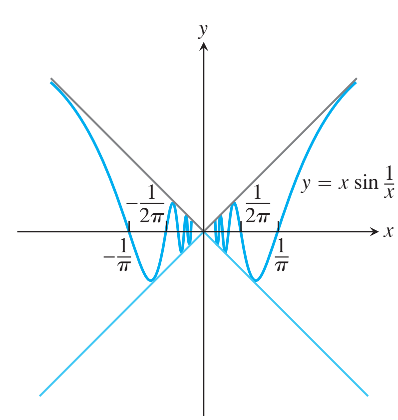
45. $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} = -6$

46. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

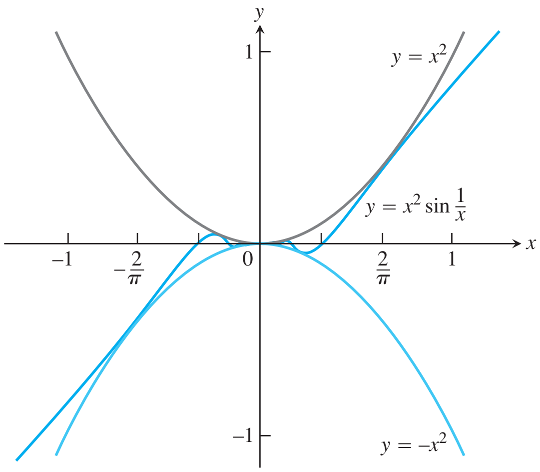
47. $\lim_{x \to 1} f(x) = 2, \quad f(x) = \begin{cases} 4 - 2x, & x < 1 \\ 6x - 4, & x \geq 1 \end{cases}$

48. $\lim_{x \to 0} f(x) = 0, \quad f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ x/2, & x \geq 0 \end{cases}$

49. $\lim_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$



50. $\lim_{x\to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$



Teori ve Örnekler

51. $\lim_{x\to 0} g(x) = k$ demenin ne anlama geldiğini açıklayın.

52. İspatlayın; $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ve $\lim_{h\to 0} f(h + c) = L$.

53. Limitler hakkında yanlış bir ifade Örnek vererek aşağıdaki ifadenin yanlış olduğunu gösterin.

x x_0'a yaklaşırken $f(x)$ L'ye yaklaşıyorsa, $f(x)$'in x x_0'a yaklaşırkenki limiti L sayısıdır.

Örneğinizdeki fonksiyonun limitinin $x \to x_0$ iken neden L olmadığını açıklayın.

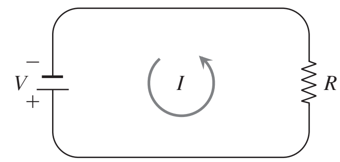
54. Limitler hakkında yanlış bir ifade daha Örnek vererek aşağıdaki ifadenin yanlış olduğunu gösterin.

Verilen bir $\epsilon > 0$ için, $|f(x) - L| < \epsilon$ olacak şekilde bir x bulunuyorsa, L sayısı $f(x)$'in x x_0'a yaklaşırkenki limitidir.

Örneğinizdeki fonksiyonun limitinin $x \to x_0$ iken neden L olmadığını açıklayın.

T **55. Motor silindiri yapma** Kesit alanı 9 in^2'lik bir motor silindiri yapmadan önce, yarıçapı $x_0 = 3.385$ inç olan ideal bir silindirin çapından ne kadar sapma yapabileceğinizi ve istenen 9 in^2'lik alanın 0.01 in^2 civarında bir alan elde edebileceğinizi bilmek zorundasınızdır. Bunu bulmak için, $A = \pi(x/2)^2$ kabul edin ve $|A - 9| \le 0.01$ olabilmesi için x'i hangi aralıkta tutmanız gerektiğini bulun. Hangi aralığı bulursunuz?

56. Eletriksel direnç imal etme Şekilde gösterilen elektrik devreleri gibi devreler için Ohm Kanunu $V = RI$ olduğunu söyler. Bu denklemde V sabit bir gerilim, I amper olarak akım ve R de ohm olarak dirençtir. Firmanızdan V'nin 120 volt, I'nın da 5 ± 0.1 A olacağı bir devreye direnç hazırlaması istenmiş olsun. I'nın hedef değer $I_0 = 5$'in 0.1 A civarında olması için R hangi aralıkta olmalıdır?

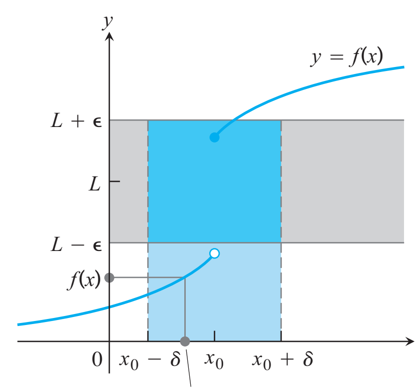


$x \to x_0$ iken Ne Zaman L sayısı $f(x)$'in Limiti Değildir?

$0 < |x - x_0| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her x için $|f(x) - L| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunamayacağını gösteren bir $\epsilon > 0$ bularak $\lim_{x\to x_0} f(x) \ne L$ olduğunu ispatlayabiliriz. Bunu, seçtiğimiz ϵ'na karşılık her $\delta > 0$ için

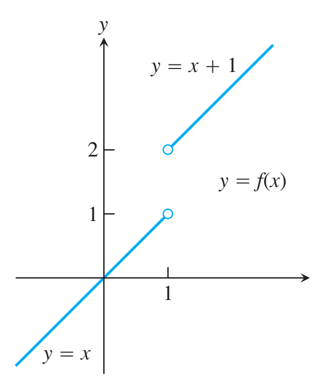
$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{ve} \quad |f(x) - L| \ge \epsilon.$$

olacak şekilde bir x-değeri bulunduğunu göstererek yaparız.



$0 < |x - x_0| < \delta$ ve $|f(x) - L| \ge \epsilon$
olacak şekilde bir x değeri

57. $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$ olsun.



a. $\epsilon = 1/2$ olsun. Hiçbir $\delta > 0$'ın aşağıdaki koşulu sağlamayacağını gösterin:
$0 < |x - 1| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her x için $|f(x) - 2| < 1/2$
Yani, her $\delta > 0$ için,

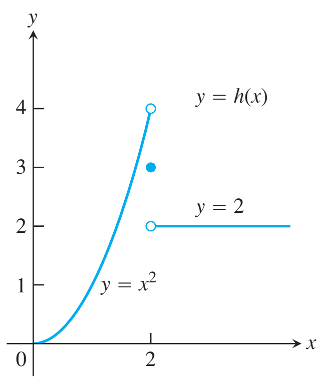
$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ ve } |f(x) - 2| \geq 1/2$$

olacak şekilde bir x değeri olduğunu gösterin.
Bu $\lim_{x\to 1} f(x) \neq 2$ olduğunu gösterecektir.

b. $\lim_{x\to 1} f(x) \neq 1$ olduğunu gösterin.

c. $\lim_{x\to 1} f(x) \neq 1.5$ olduğunu gösterin.

58. $h(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ 2, & x > 2. \end{cases}$ olsun.



Şunları gösterin.

a. $\lim_{x\to 2} h(x) \neq 4$

b. $\lim_{x\to 2} h(x) \neq 3$

c. $\lim_{x\to 2} h(x) \neq 2$

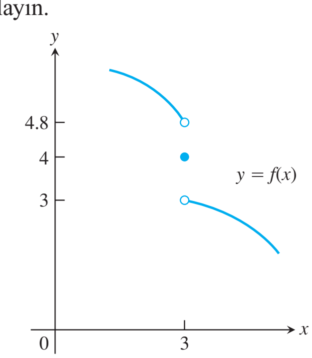
59. Aşağıda grafiği verilen fonksiyon için, neden

a. $\lim_{x\to 3} f(x) \neq 4$

b. $\lim_{x\to 3} f(x) \neq 4.8$

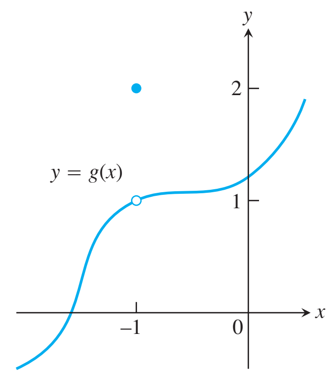
c. $\lim_{x\to 3} f(x) \neq 3$

olduğunu açıklayın.



60. **a.** Aşağıdaki grafik için $\lim_{x\to -1} g(x) \neq 2$ olduğunu gösterin.

b. $\lim_{x\to -1} g(x)$ var mıdır? Varsa limitin değeri nedir? Yoksa, neden yoktur?



BİLGİSAYAR ALIŞTIRMALARI

61–66 alıştırmalarında deltaları grafik yöntemlerle bulmaya çalışacaksınız. Aşağıdaki adımlar için BCS kullanın.

a. yaklaşılan x_0 noktası civarında $y = f(x)$ fonksiyonunu çizin.

b. L limitinin değerini tahmin edin ve tahmininizin doğru olup olmadığını görmek için limiti analitik olarak bulun.

c. $\epsilon = 0.2$ değerini kullanarak. $y_1 = L - \epsilon$ ve $y_2 = L + \epsilon$ doğrularını x_0 civarında f fonksiyonuyla birlikte çizin.

d. (c) şıkkındaki grafikten

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{eşitsizliğini sağlayan her } x \text{ için}$$

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ değeri bulun. Tahmininizi f, y_1, ve y_2'yi $0 < |x - x_0| < \delta$ aralığında beraber çizerek kontrol edin. Görüş aralığı olarak $x_0 - 2\delta \leq x \leq x_0 + 2\delta$ ve $L - 2\epsilon \leq y \leq L + 2\epsilon$ aralığının dışına taşıyorsa, δ değerini çok büyük seçmişsinizdir. Daha küçük bir değerle yeniden deneyin.

e. $\epsilon = 0.1$, 0.05 ve 0.001 için (c) ve (d) şıklarını tekrarlayın.

61. $f(x) = \dfrac{x^4 - 81}{x - 3}, \quad x_0 = 3$

62. $f(x) = \dfrac{5x^3 + 9x^2}{2x^5 + 3x^2}, \quad x_0 = 0$

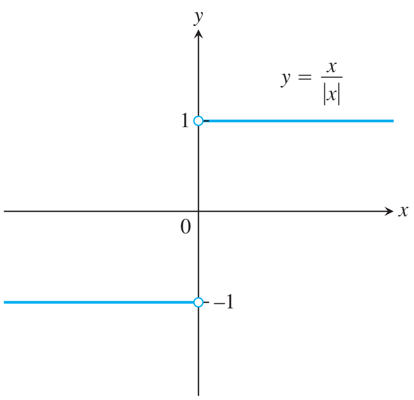
63. $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{3x}, \quad x_0 = 0$

64. $f(x) = \dfrac{x(1 - \cos x)}{x - \sin x}, \quad x_0 = 0$

65. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}, \quad x_0 = 1$

66. $f(x) = \dfrac{3x^2 - (7x + 1)\sqrt{x} + 5}{x - 1}, \quad x_0 = 1$

2.4 Tek Taraflı Limitler ve Sonsuzda Limitler



ŞEKİL 2.21 Orijinde farklı sağ ve sol taraflı limitler

Bu bölümde limit kavramını, x x_0'a sadece soldan ($x < x_0$) veya sadece sağdan ($x > x_0$) yaklaşırkenki limitler olan tek *taraflı limitlere* genişletiyoruz. Ayrıca, $x \to \pm\infty$ iken belirli rasyonel fonksiyonlar ve diğer bazılarının grafiklerini analiz ediyoruz.

Tek Taraflı Limitler

x c'ye yaklaşırken bir L limitinin olabilmesi için, bir f fonksiyonunun a'nın *iki tarafında* da tanımlı olması ve x c'ye herhangi bir taraftan yaklaşırken $f(x)$ değerlerinin de L'ye yaklaşması gerekir. Bu yüzden, normal limitlere bazen **iki taraflı** limitler de denir.

f'nin bir c noktasında iki-taraflı bir limitinin olmaması halinde bir tek-taraflı limiti, yani yaklaşımın sadece tek taraflı olması durumunda bir limiti bulunabilir. Yaklaşım sağdan ise limit bir **sağdan limit** dir. Soldan ise **soldan limit**.

$f(x) = x/|x|$ fonksiyonunun (Şekil 2.21) limiti, x sıfıra sağdan yaklaşırken 1, soldan yaklaşırken –1'dir. Bu tek taraflı limit değerleri aynı olmadığından x sıfıra yaklaşırken $f(x)$'in yaklaştığı tek bir değer yoktur. Dolayısıyla, $f(x)$'in 0 da bir limiti (iki taraflı) yoktur.

Sezgisel olarak , $f(x)$ fonksiyonu $c < b$ olmak üzere bir (c, b) aralığında tanımlanmış ise ve x c'ye bu aralığın içinde kalarak yaklaşıyorken $f(x)$ L'ye oldukça yakınlaşıyorsa, f'nin c'de **sağdan** bir L limiti vardır deriz ve

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L.$$

yazarız.
"$x \to c^+$" sembolü, sadece x'in c'den daha büyük değerlerini göz önüne aldığımız anlamındadır.

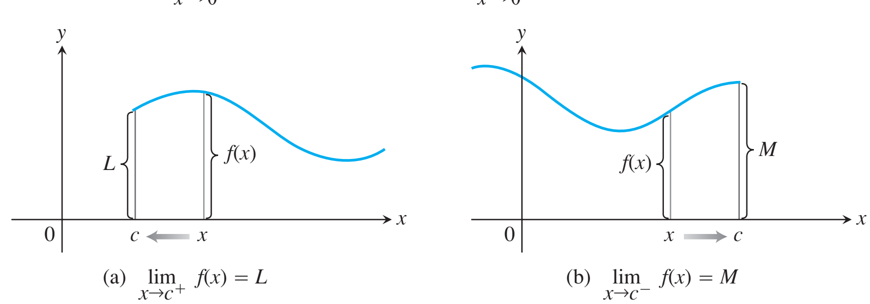
Benzer şekilde, $f(x)$ fonksiyonu $a < c$ olmak üzere bir (a, c) aralığında tanımlanmış ise ve x c'ye bu aralığın içinde kalarak yaklaşıyorken $f(x)$ M'ye oldukça yakınlaşıyorsa, f'nin c'de **soldan** bir M limiti vardır deriz ve

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = M.$$

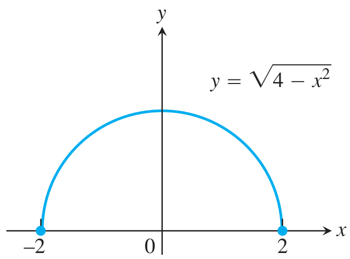
yazarız.
"$x \to c^-$" sembolü, sadece x'in c'den daha küçük değerlerini göz önüne aldığımız anlamındadır.

Bu resmi olmayan tanımlar Şekil 2.22'de gösterilmiştir. Şekil 2.21'deki $f(x) = x/|x|$ fonksiyonu için

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1. \text{ dir.}$$



ŞEKİL 2.22 (a) x c'ye yaklaşırken sağdan limit. (b) x c'ye yaklaşırken soldan limit.



ŞEKİL 2.23 $\lim_{x\to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$ ve $\lim_{x\to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0$ (Örnek 1).

ÖRNEK 1 Bir Yarım Çember İçin Tek Taraflı Limitler

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ fonksiyonunun tanım aralığı [–2, 2]'dir ve grafiği Şekil 2.23'teki yarım çemberdir. Limitleri şu şekildedir:

$$\lim_{x\to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$$

Fonksiyonun $x = -2$'de soldan bir limiti veya $x = 2$'de sağdan bir limiti yoktur. –2 veya 2'de iki taraflı bir limiti bulunmamaktadır.

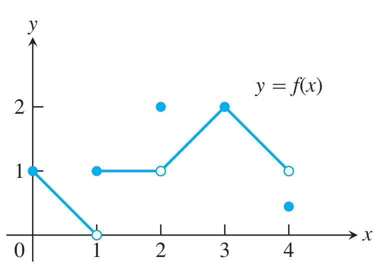
Tek taraflı limitlerde Bölüm 2.2 Teorem 1'de verilen limit özelliklerinin hepsi bulunur. İki fonksiyonun toplamının sağdan limiti fonksiyonların sağdan limitlerinin toplamıdır gibi. Sandöviç Teoremi ve Teorem 5 gibi, polinom ve rasyonel fonksiyonların limitleriyle ilgili teoremler de tek taraflı limitler için geçerlidir.

Tek taraflı ve iki taraflı limitler arasındaki bağlantı aşağıdaki gibidir:

TEOREM 6

x c'ye yaklaşırken bir $f(x)$ fonksiyonunun, ancak ve yalnız o noktada sağdan ve soldan limitleri varsa ve bu limitler eşitse, bir limiti vardır

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = L \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = L$$



ŞEKİL 2.24 Örnek 2'deki fonksiyonun grafiği.

ÖRNEK 2 Şekil 2.24'te Grafikleri Çizilen Fonksiyonların Limitleri.

$x = 0$'da : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$,
$\lim_{x\to 0^-} f(x)$ ve $\lim_{x\to 0} f(x)$ yoktur. Fonksiyon $x = 0$'ın solunda tanımlı değildir.

x = 1'de : $f(1) = 1$, olduğu halde $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ 'dır.
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$,
$\lim_{x\to 1} f(x)$ yoktur. Sağdan ve soldan limitler eşit değildir.

$x = 2$'de : $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$,
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$,
$f(2) = 2$. olduğu halde $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$'dir.

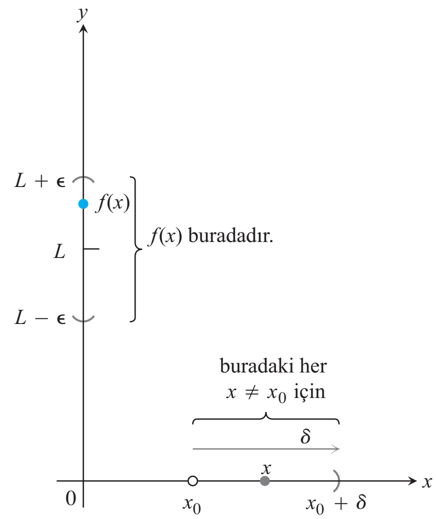
$x = 3$'te : $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 2$.

$x = 4$'te : $f(4) \neq 1$, olduğu halde $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1$'dir.
$\lim_{x\to 4^+} f(x)$ ve $\lim_{x\to 4} f(x)$ yoktur. Fonksiyon $x = 4$'ün sağında tanımlı değildir.

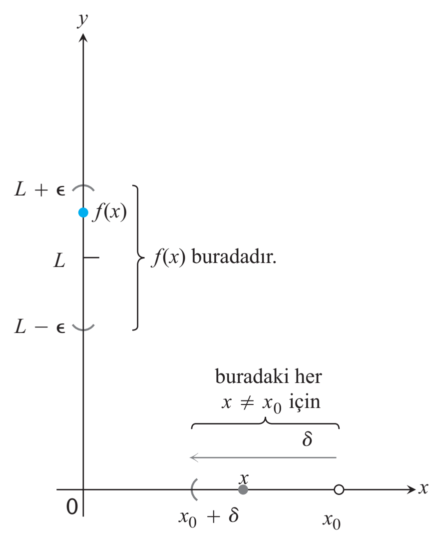
[0, 4]'teki diğer bütün c noktalarında $f(x)$'in limiti $f(c)$'dir. ■

Tek Taraflı Limitlerin Tam Tanımı

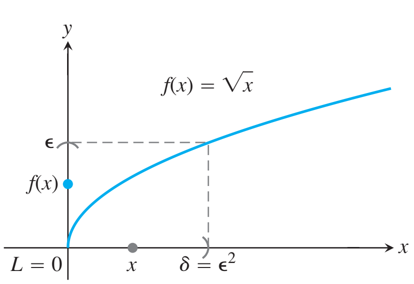
Bölüm 2.3'teki iki taraflı limitin esas tanımı tek taraflı limitlere göre düzenlenebilir.



ŞEKİL 2.25 Sağdan limit tanımı ile ilgili aralıklar.



ŞEKİL 2.26 Soldan limit tanımı ile ilgili aralıklar



ŞEKİL 2.27 Örnek 3'teki $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0$

TANIMLAR Sağdan Limit, Soldan Limit

Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık

$$x_0 < x < x_0 + \delta \qquad \text{iken} \qquad |f(x) - L| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, $f(x)$'in **x_0'da sağdan bir L limiti** vardır der ve

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \qquad \text{(Şekil 2.25'e bakın)}$$

yazarız.

Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık

$$x_0 - \delta < x < x_0 \qquad \text{iken} \qquad |f(x) - L| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, $f(x)$'in **x_0'da soldan bir L limiti** vardır der ve

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \qquad \text{(Şekil 2.26'ya bakın)}$$

yazarız.

ÖRNEK 3 Delta Bulmak İçin Tanımı Uygulamak

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0$$

olduğunu ispat edin.

Çözüm $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Burada $x_0 = 0$ ve $L = 0$'dır, dolayısıyla

$$0 < x < \delta \text{ eşitsizliğini sağlayan her } x \text{ için } |\sqrt{x} - 0| < \epsilon$$

olacak şekilde veya

$$0 < x < \delta \qquad \text{iken} \qquad \sqrt{x} < \epsilon$$

gerektirmesi sağlanacak şekilde bir $\delta > 0$ bulmak istiyoruz.
Her iki tarafın karesini alarak

$$0 < x < \delta \qquad \text{ise} \qquad x < \epsilon^2$$

buluruz. $\delta = \epsilon^2$ seçersek

$$0 < x < \delta = \epsilon^2 \qquad \text{iken} \qquad \sqrt{x} < \epsilon$$

veya

$$0 < x < \epsilon^2 \qquad \text{iken} \qquad |\sqrt{x} - 0| < \epsilon$$

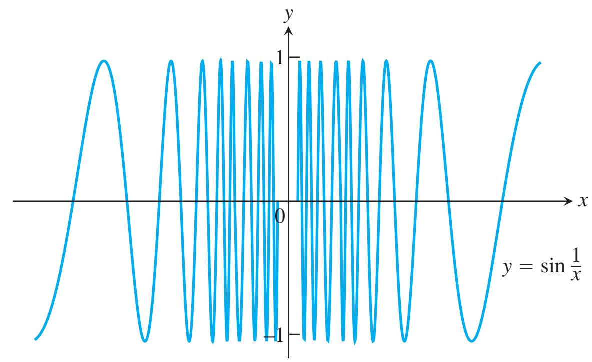
gerektirmesi sağlanır.
Tanıma göre bu, $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0$ olduğunu gösterir (Şekil 2.27). ■

Şimdiye kadar incelenen örneklerde, ele alınan her noktada bir tür limit vardı. Genelde bunun böyle olması gerekmez.

ÖRNEK 4 Çok Fazla Salınan Bir Fonksiyon

$y = \sin(1/x)$'in x iki taraftan da sıfıra yaklaşırken bir limitinin olmadığını gösterin (Şekil 2.28).

Çözüm x sıfıra yaklaşırken, çarpmaya göre tersi, $1/x$, sınırsızca büyür ve $\sin(1/x)$'in değerleri –1 ile 1 arasında gidip gelir. x sıfıra yaklaşırken fonksiyon değerlerinin giderek

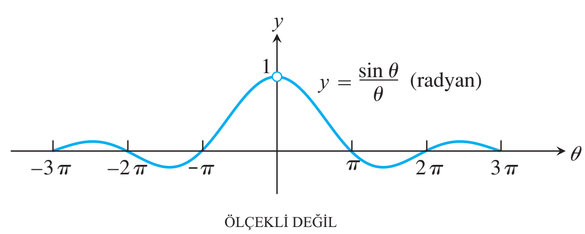


ŞEKİL 2.28 $y = \sin(1/x)$ fonksiyonunun x sıfıra yaklaşırken sağdan veya soldan limiti yoktur (Örnek 4).

yaklaştıkları tek bir L sayısı yoktur. x'i sadece pozitif veya negatif değerlerle de sınırlasak, bu durum geçerlidir. $x = 0$'da fonksiyonun sağdan veya soldan bir limiti yoktur. ■

$(\sin\theta)/\theta$ İçeren Limitler

$(\sin\theta)/\theta$ hakkındaki temel gerçek şudur: radyan ölçüde $\theta \to 0$ iken limiti 1 dir. Bunu Şekil 2.29 da görebilir ve Sandöviç Teoremi yardımıyla cebirsel olarak doğrulayabiliriz. Bu limitin önemini, trigonometrik fonksiyonların anlık değişim oranlarının incelendiği Bölüm 3.4'te göreceksiniz.



ŞEKİL 2.29 $f(\theta) = (\sin\theta)/\theta$'nın grafiği.

TEOREM 7

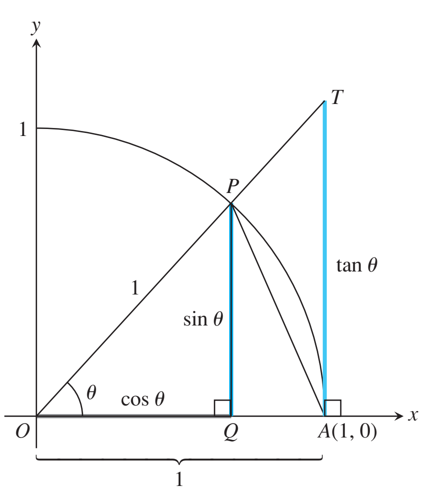
$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \quad (\theta \text{ radyan ölçüde}) \tag{1}$$

İspat Plan, sağdan ve soldan limitlerin her ikisinin de 1 olduğunu göstermektir. Bunun sonunda iki taraflı limitin de 1 olduğunu söyleyebiliriz.

Sağdan limitin 1 olduğunu göstermek için θ'nın $\pi/2$'den küçük pozitif değerleri ile başlıyoruz (Şekil 2.30).

$$\text{Alan } \Delta OAP < OAP \text{ daire diliminin alanı} < \text{alan } \Delta OAT$$

olduğuna dikkat edin.



ŞEKİL 2.30 Teorem 7'nin ispatındaki şekil $TA/OA = \tan\theta$ fakat $OA = 1$ olduğundan $TA = \tan\theta$'dır.

(2) denklemi radyan ölçünün çıkış noktasıdır: yalnızca θ radyan olarak ölçülürse OAP daire diliminin alanı $\theta/2$'dir.

Bu alanları θ'ya bağlı olarak şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\text{Alan } \Delta OAP = \frac{1}{2} \text{ taban} \times \text{yükseklik} = \frac{1}{2}(1)\ (\sin\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$OAP \text{ daire diliminin alanı} = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(1)^2\theta = \frac{\theta}{2} \qquad (2)$$

$$\text{Alan } \Delta OAT = \frac{1}{2} \text{ taban} \times \text{yükseklik} = \frac{1}{2}(1)\ (\tan\theta) = \frac{1}{2}\tan\theta$$

Böylece,

$$\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta$$

dır.

$0 < \theta < \pi/2$ olduğundan, pozitif olan $(1/2)\sin\theta$ sayısı ile her üç tarafı da bölersek bu son eşitsizlik doğru kalmaya devam eder:

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

Çarpmaya göre terslerini alırsak

$$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta$$

buluruz. $\lim_{\theta\to 0^+}\cos\theta = 1$ olduğundan (Bölüm 2.2 Örnek 6b), Sandöviç Teoremine göre

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

bulunur.

$\sin\theta$ ve θ fonksiyonlarının her ikisi de *tek fonksiyonlar* (Bölüm 1.4). Bu nedenle, $f(\theta) = (\sin\theta)/\theta$ fonksiyonu, grafiği y-eksenine göre simetrik olan bir çift fonksiyondur (Şekil 2.29'a bakın). Bu simetri, 0 da soldan limitin var olduğunu ve sağdan limitle aynı olduğunu gösterir:

$$\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta}$$

Şu halde Teorem 6'ya göre $\lim_{\theta\to 0}(\sin\theta)/\theta = 1$ dir. ■

ÖRNEK 5 $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ limitini kullanarak

(a) $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0$ ve **(b)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5}$

olduğunu gösterin.

Çözüm

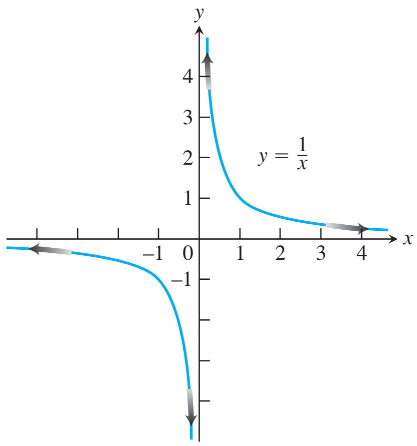
(a) $\cos h = 1 - 2\sin^2(h/2)$ yarım açı formülünü kullanarak

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h\to 0} -\frac{2\sin^2(h/2)}{h}\\ &= -\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\sin\theta \qquad \theta = h/2 \text{ olsun}\\ &= -(1)(0) = 0.\end{aligned}$$

(b) (1) denklemi orijinal fonksiyona uygulanamaz. Paydada $5x$'e değil bir $2x$'e ihtiyacımız vardır. Pay ve paydayı $2/5$ ile çarparak bunu oluştururuz:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(2/5)\cdot\sin 2x}{(2/5)\cdot 5x}\\ &= \frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} \qquad \text{Şimdi, } \theta = 2x \text{ ile (1) denklemi uygulanır.}\\ &= \frac{2}{5}(1) = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

■



ŞEKİL 2.31 $y = 1/x$'in grafiği

$x \to \pm\infty$ iken Sonlu Limitler

Sonsuzluk için kullanılan (∞) sembolü bir reel sayı göstermez. ∞ sembolünü bir fonksiyonun tanım kümesindeki veya değer kümesindeki değerler her sonlu sınırı aştığındaki davranışını tanımlamak için kullanırız. Örneğin, $f(x) = 1/x$ fonksiyonu her $x \neq 0$ için tanımlıdır (Şekil 2.31). x pozitif olarak giderek büyürken, $1/x$ giderek küçülür. x negatif iken büyüklüğü giderek artarken, $1/x$ yine giderek küçülür. Bu gözlemleri, $x \to \pm\infty$ iken $f(x) = 1/x$'in limiti 0 dır veya $f(x) = 1/x$'*in sonsuzda ve negatif sonsuzda* limiti 0 dır diyerek özetleriz. Aşağıda kesin tanım verilmektedir.

TANIMLAR **$x \to \infty$ veya $x \to -\infty$ iken Limitler**

1. Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık,

$x > M$ eşitsizliğini sağlayan bütün x'ler için $|f(x) - L| < \epsilon$

olacak şekilde bir M sayısı bulunabilirse **x sonsuza giderken** $f(x)$ fonksiyonunun **limiti L** dir deriz ve

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

yazarız.

2. Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık,

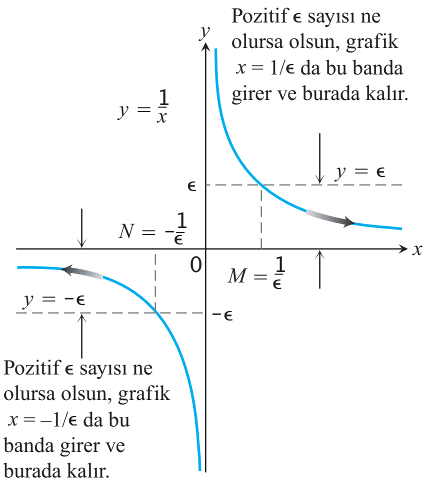
$x > N$ eşitsizliğini sağlayan bütün x'ler için $|f(x) - L| < \epsilon$

olacak şekilde bir N sayısı bulunabilirse **x eksi sonsuza giderken** $f(x)$ fonksiyonunun **limiti L** dir deriz ve

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

yazarız.

Sezgisel olarak, x pozitif yönde orijinden giderek uzaklaşırken, $f(x)$ istenilen ölçüde L'ye yaklaşıyorsa $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ dir. Benzer şekilde, x negatif yönde orijinden giderek uzaklaşırken, $f(x)$ istenilen ölçüde L'ye yaklaşıyorsa $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ dir. $x \to \pm\infty$ iken limit hesaplama stratejisi, Bölüm 2.2 deki sonlu limitlerdekine benzerdir. Orada önce $y = k$ sabit ve $y = x$ birim fonksiyonların limitlerini bulduk. Sonra bu sonuçları, cebirsel kombinasyonlarla ilgili bir teorem uygulayarak, diğer fonksiyonlara genişlettik. Burada da, başlangıç fonksiyonlarının $y = k$ ve $y = x$ yerine $y = k$ ve $y = 1/x$ olması dışında, aynı şeyi yapacağız.



ŞEKİL 2.32 Örnek 6'daki tartışmanın arkasındaki geometri.

Esas tanımı uygulayarak gerçeklenmesi gereken temel şeyler:

$$\lim_{x\to\pm\infty} k = k \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{3}$$

dir.

İkinciyi burada ispatlayacak ve birincisini Alıştırma 71 ve 72'ye bırakacağız.

ÖRNEK 6 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ için Sonsuzda Limit

Şunları gösterin

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ **(b)** $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

Çözüm

(a) $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x > M \quad \text{olduk\c{c}a} \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

olacak şekilde bir M sayısı bulmamız gerekmektedir. $M = 1/\epsilon$ veya daha büyük herhangi bir pozitif sayı için bu önerme geçerlidir (Şekil 2.32). Bu da, $\lim x_{\to\infty}(1/x) = 0$

(b) $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x < N \quad \text{olduk\c{c}a} \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

olacak şekilde bir N sayısı bulmamız gerekmektedir. $N = -1/\epsilon$ veya $-1/\epsilon$ 'dan daha küçük herhangi bir negatif sayı için bu önerme geçerlidir (Şekil 2.32). Bu da, $\lim x_{\to-\infty}(1/x) = 0$ olduğunu ispatlar. ■

Sonsuzda limitlerin sonlu limitlere benzer özellikleri vardır.

TEOREM 8 $x \to \pm\infty$ **Durumunda Limit Kuralları**

L, M ve k reel sayılar ve

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M \quad \text{ise}$$

1. *Toplama Kuralı:* $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) + g(x)) = L + M$
2. *Fark Kuralı:* $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - g(x)) = L - M$
3. *Çarpım Kuralı:* $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
4. *Sabitle Çarpım Kuralı:* $\lim_{x\to\pm\infty} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$
5. *Bölüm Kuralı:* $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$
6. *Kuvvet Kuralı:* r ve s ortak çarpanı bulunmayan tamsayılar ve $s \neq 0$ ise $L^{r/s}$ 'nin bir reel sayı olması koşuluyla

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

dir. (s çift ise $L > 0$ olduğunu varsayıyoruz .)

Bu özellikler Bölüm 2.2'deki Teorem 1 ile aynıdır ve bunları aynı şekilde kullanırız.

ÖRNEK 7 Teorem 8'i Kullanma

(a) $$\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 5 + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$$ Toplama Kuralı

$$= 5 + 0 = 5$$ Bilinen limitler

(b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\pi\sqrt{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\pi\sqrt{3}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$$ Çarpma Kuralı

$$= \pi\sqrt{3}\cdot 0\cdot 0 = 0$$ Bilinen limitler ■

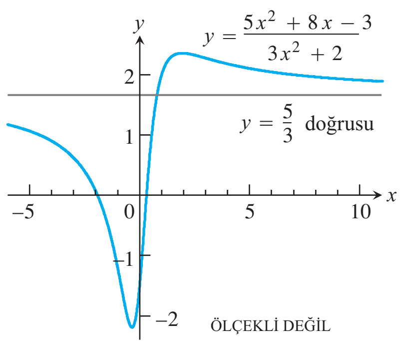
Rasyonel Fonksiyonların Sonsuzdaki Limitleri

$x \to \pm\infty$ iken bir rasyonel fonksiyonun limitini belirlemek için, pay ve paydayı paydadaki en büyük x kuvvetiyle böleriz. Bundan sonra ne olacağı polinomların derecesine bağlıdır.

ÖRNEK 8 Pay ve payda aynı derecede

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{5+(8/x)-(3/x^2)}{3+(2/x^2)}$$ Pay ve paydayı x^2 ile bölün.

$$= \frac{5+0-0}{3+0} = \frac{5}{3}$$ Şekil 2.33'e bakın ■

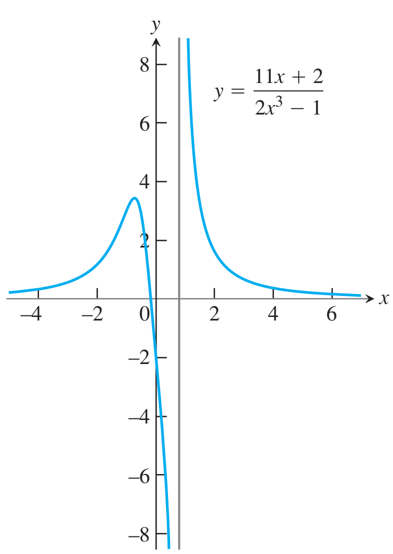


ŞEKİL 2.33 Örnek 8'deki fonksiyonun grafiği. $|x|$ arttıkça grafik $y = 5/3$ doğrusuna yaklaşır.

ÖRNEK 9 Payın derecesi paydanın derecesinden küçük

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{11x+2}{2x^3-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(11/x^2)+(2/x^3)}{2-(1/x^3)}$$ Pay ve paydayı x^3 ile bölün.

$$= \frac{0+0}{2-0} = 0$$ Şekil 2.34'e bakın. ■



ŞEKİL 2.34 Örnek 9'deki fonksiyonun grafiği. $|x|$ arttıkça, grafik x-eksenine yaklaşır.

Payın derecesinin paydanın derecesinden büyük olması durumuna ait bir örneği bundan sonraki bölümde vereceğiz (Bölüm 2.5 Alıştırma 8).

Yatay Asimptotlar

Bir fonksiyonun grafiği ile belirli bir doğru arasındaki uzaklık, grafik üzerindeki bir nokta orijinden çok fazla uzaklaştığında, sıfıra yaklaşıyorsa, grafik doğruya asimptotik olarak yaklaşıyor ve doğru grafiğin bir asimptotudur deriz.

$f(x) = 1/x$'e bakarak (Şekil 2.31'e bakın)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

olduğundan sağ tarafta

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

ve $f(x) = 1/x$ olduğundan sol tarafta, x-ekseni eğrinin asimptotu dur.

x-ekseni $f(x) = 1/x$'in grafiğinin bir yatay asimptotudur deriz.

TANIM **Yatay Asimptot**

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{veya} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

ise, $y = b$ doğrusu $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin bir **yatay asimptotudur**.

$$f(x) = \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2}$$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{5}{3}$ ve $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{5}{3}$ olduğundan $y = 5/3$ doğrusu, grafiği Şekil 2.33'te çizilen (Örnek 8)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{5}{3} \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{5}{3}$$

ÖRNEK 10 Yeni Bir Değişkene Dönüşüm

$\lim_{x\to\infty} \sin(1/x)$ limitini bulun.

Çözüm Yeni değişken $t = 1/x$'i tanımlayalım. Örnek 6'dan $x \to \infty$ iken $t \to 0^+$ olduğunu biliyoruz (Şekil 2.31'e bakın). Bu nedenle,

$$\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0^+} \sin t = 0$$ ■

dır. Benzer şekilde, $x \to \pm\infty$ iken $f(x)$'i inceleyerek $x \to 0$ iken $y = f(1/x)$'in davranışını araştırabiliriz.

Sandöviç Teoremine Tekrar Bir Bakış

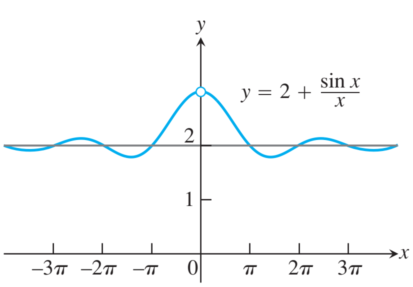
Sandöviç Teoremi $x \to \pm\infty$ iken ki limitler için de geçerlidir.

ÖRNEK 11 Bir Eğri Yatay Asimptotunu Kesebilir

Sandöviç Teoremini kullanarak

$$y = 2 + \frac{\sin x}{x}$$

eğrisinin yatay asimptotunu bulun.



ŞEKİL 2.35 Bir eğri, asimptotlarından birini sonsuz defa kesebilir (Örnek 11).

Çözüm $x \to \pm\infty$ iken ki davranışlarla ilgileniyoruz.

$$0 \le \left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \left|\frac{1}{x}\right|$$

ve $\lim_{x\to\pm\infty} |1/x| = 0$ olduğu için, Sandöviç Teoremine göre $\lim_{x\to\pm\infty} (\sin x)/x = 0$ olur. Dolayısıyla,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(2 + \frac{\sin x}{x}\right) = 2 + 0 = 2,$$

olur ve $y = 2$ doğrusu eğrinin hem sağdan hem de soldan asimptotudur (Şekil 2.35).

Bu örnek, bir eğinin yatay asimptotlarından birini bir çok defa kesebileceğini gösterir. ■

Eğik Asimptotlar

Rasyonel bir fonksiyonun payının derecesi paydasının derecesinden bir fazla ise, grafiğinin **bir eğik asimptotu** vardır. f'yi bir lineer fonksiyon ile $x \to \pm\infty$ iken sıfıra giden bir kalanın toplamı olarak yazmak için payı paydaya bölerek asimptot için bir denklem buluruz. İşte bir örnek.

ÖRNEK 12 Bir Eğik Asimptot Bulmak

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4}$$

fonksiyonunun Şekil 2.36 daki grafiği için eğik asimptot bulunuz.

Çözüm Uzun bir bölme işlemiyle

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4}$$

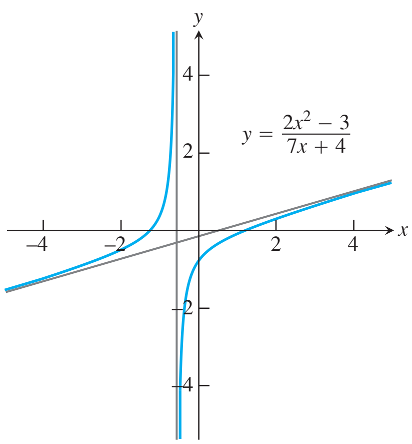
$$= \underbrace{\left(\frac{2}{7}x - \frac{8}{49}\right)}_{\text{lineer fonksiyon } g(x)} + \underbrace{\frac{-115}{49(7x + 4)}}_{\text{kalan}}$$

linear function $g(x)$ remainder

buluruz. $x \to \pm\infty$ iken, büyüklüğü f ve g'nin grafikleri arasındaki dikey uzaklığı veren kalan, sıfıra gider ve

$$g(x) = \frac{2}{7}x - \frac{8}{49}$$

eğimli doğrusu f'nin grafiğinin bir asimptotu olur (Şekil 2.36). $y = g(x)$ doğrusu hem sağdan hem de soldan asimptottur. Gelecek bölümde, x paydanın sıfır olduğu $-4/7$'ye yaklaşırken $f(x)$'in mutlak değerce sınırsız arttığını göreceksiniz (Şekil 2.36). ■

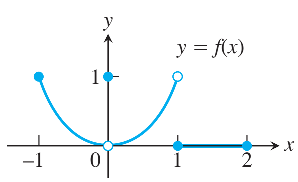


ŞEKİL 2.36 Örnek 12'deki fonksiyonun bir eğik asimptotu vardır.

ALIŞTIRMALAR 2.4

Limitleri Grafikten Bulma

1. Aşağıda grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu hakkında söylenenlerden hangileri doğru, hangileri yanlıştır?



a. $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$ **b.** $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

c. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$ **d.** $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

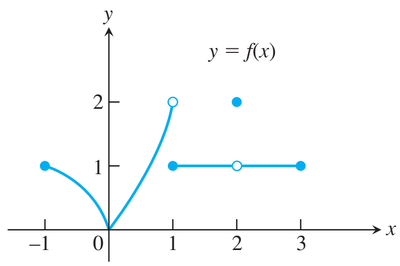
e. $\lim_{x \to 0} f(x)$ vardır. **f.** $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

g. $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ **h.** $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

i. $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$ **j.** $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$

k. $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ yoktur. **l.** $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 0$

2. Aşağıda grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu hakkında söylenenlerden hangileri doğru, hangileri yanlıştır?



a. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$ **b.** $\lim_{x\to 2} f(x)$ yoktur.

c. $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$ **d.** $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$

e. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ **f.** $\lim_{x\to 1} f(x)$ yoktur.

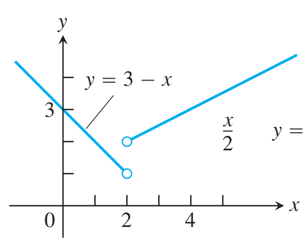
g. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

h. $(-1, 1)$ aralığındaki her c noktasında $\lim_{x\to c} f(x)$

i. (1.3) aralığındaki her c noktasında $\lim_{x\to c} f(x)$

j. $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0$ **k.** $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ yoktur.

3. $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ \dfrac{x}{2} + 1, & x > 2 \end{cases}$ olsun.



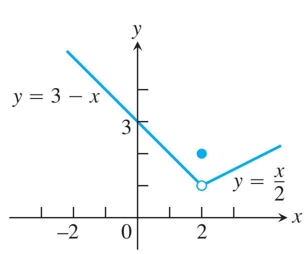
a. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ ve $\lim_{x\to 2^-} f(x)$'i bulun.

b. $\lim_{x\to 2} f(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?

c. $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ ve $\lim_{x\to 4^+} f(x)$'i bulun.

d. $\lim_{x\to 4} f(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?

4. $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ \dfrac{x}{2}, & x > 2. \end{cases}$ olsun.



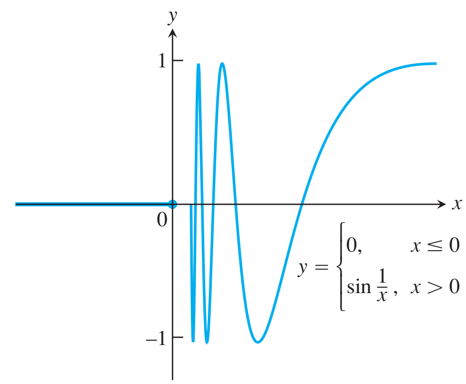
a. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ve $f(2)$'yi bulun.

b. $\lim_{x\to 2} f(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?

c. $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ ve $\lim_{x\to 1^+} f(x)$'i bulun.

d. $\lim_{x\to -2} f(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?

5. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sin \dfrac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$ olsun.

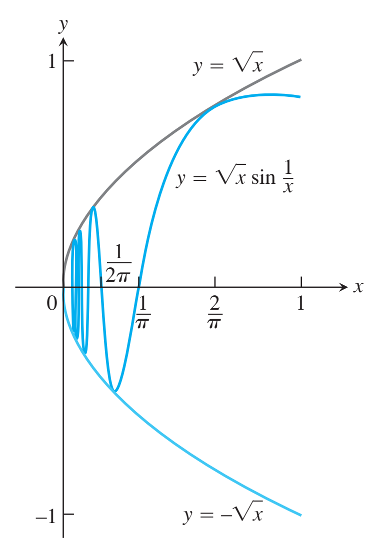


a. $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?

b. $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?

c. $\lim_{x\to 0} f(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?

6. $g(x) = \sqrt{x}\sin(1/x)$ olsun.



a. $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?

b. $\lim_{x\to 0^-} g(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?

c. $\lim_{x\to 0} g(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?

7. a. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$'in grafiğini çizin.

b. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ ve $\lim_{x\to 1^+} f(x)$'i bulun.

c. $\lim_{x\to 1} f(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?

8. a. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$'in grafiğini çizin.

b. $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ ve $\lim_{x\to 1^-} f(x)$'i bulun.

c. $\lim_{x\to 1} f(x)$ var mıdır, varsa nedir? Yoksa, neden yoktur?

9 ve 10 alıştırmalarında verilen fonksiyonların grafiklerini çizin ve aşağıdaki soruları yanıtlayın.

a. f'nin tanım ve değer aralıkları nelerdir?

b. Eğer varsa $\lim_{x\to c} f(x)$ hangi c noktalarında vardır?

c. Hangi noktalarda sadece soldan-limit vardır?

d. Hangi noktalarda sadece sağdan-limit vardır?

9. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \le x < 0 \text{ veya } 0 < x \le 1 \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x < -1 \text{ veya } x > 1 \end{cases}$

Tek Taraflı Limitleri Cebirsel Olarak Bulma

11–18 alıştırmalarındaki limitleri bulun.

11. $\lim_{x\to -0.5^-} \sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}$

12. $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$

13. $\lim_{x\to -2^+} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)\left(\dfrac{2x+5}{x^2+x}\right)$

14. $\lim_{x\to 1^-} \left(\dfrac{1}{x+1}\right)\left(\dfrac{x+6}{x}\right)\left(\dfrac{3-x}{7}\right)$

15. $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{\sqrt{h^2+4h+5} - \sqrt{5}}{h}$

16. $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{5h^2+11h+6}}{h}$

17. a. $\lim_{x\to -2^+} (x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$ **b.** $\lim_{x\to -2^-} (x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$

18. a. $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{2x}\,(x-1)}{|x-1|}$ **b.** $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{2x}\,(x-1)}{|x-1|}$

Alıştırma 19 ve 20'deki limitleri bulmak için en büyük tamsayı fonksiyonu $y = \lfloor x \rfloor$y = 'in grafiğini kullanın Bölüm 1.3 Şekil 1.31.

19. a. $\lim_{\theta\to 3^+} \dfrac{\lfloor \theta \rfloor}{\theta}$ **b.** $\lim_{\theta\to 3^-} \dfrac{\lfloor \theta \rfloor}{\theta}$

20. a. $\lim_{t\to 4^+} (t - \lfloor t \rfloor)$ **b.** $\lim_{t\to 4^-} (t - \lfloor t \rfloor)$

$\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$'i kullanmak

21–36 alıştırmalarındaki limitleri bulun.

21. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\sqrt{2}\theta}{\sqrt{2}\theta}$

22. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin kt}{t}$ (k bir sabit)

23. $\lim_{y\to 0} \dfrac{\sin 3y}{4y}$

24. $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{h}{\sin 3h}$

25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{x}$

26. $\lim_{t\to 0} \dfrac{2t}{\tan t}$

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \csc 2x}{\cos 5x}$

28. $\lim_{x\to 0} 6x^2(\cot x)(\csc 2x)$

29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x + x\cos x}{\sin x \cos x}$

30. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 - x + \sin x}{2x}$

31. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin(1 - \cos t)}{1 - \cos t}$

32. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sin(\sin h)}{\sin h}$

33. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\theta}{\sin 2\theta}$

34. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$

35. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\sin 8x}$

36. $\lim_{y\to 0} \dfrac{\sin 3y \cot 5y}{y \cot 4y}$

$x \to \pm\infty$ İken Limit Hesaplama

37–42 alıştırmalarında verilen her fonksiyonun **(a)** $x \to \infty$ iken ve **(b)** $x \to -\infty$ iken limitini bulun. (Yanıtınızı bir grafik programı veya bilgisayar kullanarak doğrulayabilirsiniz.)

37. $f(x) = \dfrac{2}{x} - 3$

38. $f(x) = \pi - \dfrac{2}{x^2}$

39. $g(x) = \dfrac{1}{2 + (1/x)}$

40. $g(x) = \dfrac{1}{8 - (5/x^2)}$

41. $h(x) = \dfrac{-5 + (7/x)}{3 - (1/x^2)}$

42. $h(x) = \dfrac{3 - (2/x)}{4 + \left(\sqrt{2}/x^2\right)}$

43–46 alıştırmalarındaki limitleri bulun.

43. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin 2x}{x}$

44. $\lim_{\theta\to -\infty} \dfrac{\cos\theta}{3\theta}$

45. $\lim_{t\to -\infty} \dfrac{2 - t + \sin t}{t + \cos t}$

46. $\lim_{r\to\infty} \dfrac{r + \sin r}{2r + 7 - 5\sin r}$

Rasyonel Fonksiyonların Limitleri

47–56 alıştırmalarında her rasyonel fonksiyonun **(a)** $x \to \infty$ iken ve **(b)** $x \to -\infty$ iken limitini bulun.

47. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{5x + 7}$

48. $f(x) = \dfrac{2x^3 + 7}{x^3 - x^2 + x + 7}$

49. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 3}$

50. $f(x) = \dfrac{3x + 7}{x^2 - 2}$

51. $h(x) = \dfrac{7x^3}{x^3 - 3x^2 + 6x}$

52. $g(x) = \dfrac{1}{x^3 - 4x + 1}$

53. $g(x) = \dfrac{10x^5 + x^4 + 31}{x^6}$

54. $h(x) = \dfrac{9x^4 + x}{2x^4 + 5x^2 - x + 6}$

55. $h(x) = \dfrac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^3 + 3x^2 - 5x}$

56. $h(x) = \dfrac{-x^4}{x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 9}$

Tamsayı Olmayan veya Negatif Kuvvetlerin Limitleri

Rasyonel fonksiyonların limitlerini belirlemekte kullandığımız yöntemleri x'in tamsayı olmayan veya negatif kuvvetlerini içeren oranlar için de kullanabiliriz. Pay ve paydayı paydadaki en büyük x kuvveti ile bölün ve işlemlere devam edin. 57–62 alıştırmalarındaki limitleri bulun.

57. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\sqrt{x} + x^{-1}}{3x - 7}$

58. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$

59. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$

60. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{-1} + x^{-4}}{x^{-2} - x^{-3}}$

61. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^{5/3} - x^{1/3} + 7}{x^{8/5} + 3x + \sqrt{x}}$

62. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 5x + 3}{2x + x^{2/3} - 4}$

Theori ve Örnekler

63. f'nin tanım aralığının içinde bir noktada $\lim_{x\to a^+} f(x)$ ve $\lim_{x\to a^-} f(x)$'i biliyorsanız, bu $\lim_{x\to a} f(x)$'i de biliyorsunuz demek midir? Yanıtınızın nedenlerini açıklayın.

64. $\lim_{x\to c} f(x)$'in var olduğunu biliyorsanız, $\lim_{x\to c^+} f(x)$'i hesaplayarak değerini bulabilir misiniz? Yanıtınızın nedenlerini açıklayın.

65. f'nin x'in bir tek fonksiyonu olduğunu varsayın. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$ olduğunu bilmeniz size $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ hakkında bir şey söyler mi? Yanıtınızın nedenini açıklayın.

66. f'nin x'in bir çift fonksiyonu olduğunu varsayın. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 7$ olduğunu bilmeniz size $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ veya $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ hakkında bir şey söyler mi? Yanıtınızın nedenini açıklayın.

67. $f(x)$ ve $g(x)$'in x'in polinomları olduklarını ve $\lim_{x\to\infty} (f(x)/g(x)) = 2$ olduğunu varsayın. $\lim_{x\to-\infty} (f(x)/g(x))$ hakkında bir şey söyleyebilir misiniz? Yanıtınızın nedenini açıklayın.

68. $f(x)$ ve $g(x)$'in x'in polinomları olduklarını varsayın. $g(x)$ hiç bir zaman sıfır olmuyorsa $f(x)/g(x)$'in grafiğinin bir asimptotu olabilir mi? Yanıtınızın nedenini açıklayın.

69. Verilen bir rasyonel fonksiyonun grafiğinin kaç tane yatay asimptotu olabilir? Yanıtınızın nedenini açıklayın.

70. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right)$ limitini bulun.

71 ve 72 Alıştırmalarındaki limitleri doğrulamak için $x \to \pm\infty$ limitin kesin tanımını kullanın.

71. $f(x) = k$, sabit fonksiyon ise $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = k$ dır.

72. $f(x) = k$, sabit fonksiyon ise $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = k$ dır.

Tek Taraflı Limitlerin Kesin Tanımı

73. $\epsilon > 0$ verilmişse, öyle bir $I = (5{,}5 + \delta)$, $\delta > 0$ aralığı bulun ki, x I'nın içindeyse, $\sqrt{x - 5} < \epsilon$ olsun. Hangi limit doğrulanmaktadır ve değeri nedir?

74. $\epsilon > 0$ verilmişse, öyle bir $I = (4 - \delta, 4)$, $\delta > 0$ aralığı bulun ki, x I'nın içindeyse, $\sqrt{4 - x} < \epsilon$ olsun. Hangi limit doğrulanmaktadır ve değeri nedir?

Sağdan ve soldan-limitlerin tanımlarını kullanarak 75 ve 76 alıştırmalarındaki ifadeleri ispatlayın.

75. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|} = -1$

76. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x - 2}{|x - 2|} = 1$

77. En büyük tam sayı fonksiyonu (a) $\lim_{x\to 400^+} \lfloor x \rfloor$ ve (b) $\lim_{x\to 400^-} \lfloor x \rfloor$'i bulun ve limit tanımlarını kullanarak bulduklarınızı doğrulayın. (c) (a) ve (b)'de bulduklarınıza dayanarak $\lim_{x\to 400} \lfloor x \rfloor$ hakkında bir şey söyleyebilir misiniz? Yanıtınızı açıklayın.

78. Tek taraflı limitler $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$ olsun.

(a) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ve **(b)** $\lim_{x\to 0^-} f(x)$'i bulun ve limit tanımlarını kullanarak bulduklarınızı doğrulayın. **(c)** (a) ve (b)'de bulduklarınıza dayanarak $\lim_{x\to 0} f(x)$ için bir şey söyleyebilir misiniz? Yanıtınızı açıklayın.

Grafik Araştırmaları - Sonsuzdaki Limitleri "Görmek"

Bazen, bir değişken dönüşümü yapmak tanıdık olmayan bir ifadeyi limitini bulmayı bildiğimiz bir ifadeye dönüştürebilir.
Örneğin,

$$\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = \lim_{\theta\to 0^+} \sin\theta \qquad \theta = 1/x \text{ dönüşümü yapın}$$
$$= 0.$$

Bu, sonsuzdaki limitleri "görmek" için yaratıcı bir yol önerir. Prosedürü açıklayın ve bunu 79–84 alıştırmalarındaki limitleri belirlemek için kullanın.

79. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x \sin\dfrac{1}{x}$

80. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cos(1/x)}{1 + (1/x)}$

81. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x + 4}{2x - 5}$

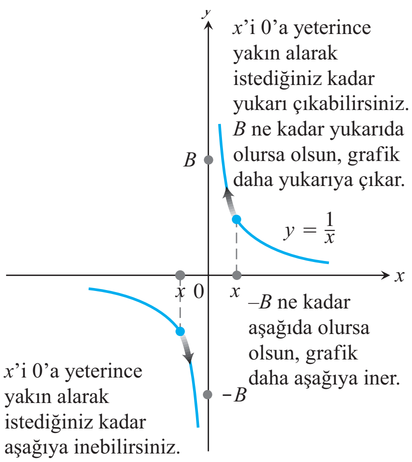
82. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{1/x}$

83. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(3 + \dfrac{2}{x}\right)\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$

84. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3}{x^2} - \cos\dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \sin\dfrac{1}{x}\right)$

2.5 Sonsuz Limitler ve Dikey Asimptotlar

Bu bölümde limit kavramını, limit teriminin öncekiler gibi olmayan biraz farklı olarak tamamen yeni bir kullanımı, sonsuz limitlere genişletiyoruz. Sonsuz limitler, değerleri pozitif veya negatif keyfi olarak büyüyen fonksiyonların davranışlarını tanımlamada, kullanışlı semboller ve lisan sağlar. x'in sayısal olarak büyük değerleri için, dikey asimptotlar ve baskın terimleri kullanarak, son bölümden rasyonel fonksiyonların grafiklerinin analizine devam ediyoruz.



ŞEKİL 2.37 Tek taraflı sonsuz limitler:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Sonsuz Limitler

$f(x) = 1/x$ fonksiyonuna yeniden bakalım. $x \to 0^+$ iken f'nin değerleri, her pozitif reel sayıya ulaşıp aşacak şekilde, sınırsız artar. Yani, ne kadar büyük olursa olsun herhangi bir B pozitif reel sayısı verilmişse, f'nin değerleri büyümeye devam eder ve B'yi aşar (Şekil 2.37). Dolayısıyla, $x \to 0^+$ iken, f'nin bir limiti yoktur. Buna rağmen, f'nin davranışını $x \to 0^+$, iken $f(x)$ ∞ 'a yaklaşıyor diyerek tanımlamak uygundur. Bunu

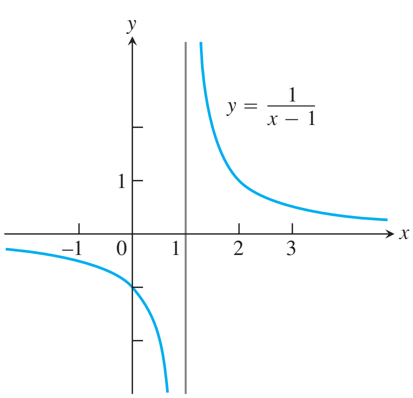
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

olarak yazarız. Bunu yazarken limitin *var olduğunu* söylemiyoruz. Bir ∞ reel sayısı olduğunu da söylemiyoruz, çünkü böyle bir sayı yok. Bunun yerine, $\lim_{x\to 0^+} (1/x)$'in bulunmadığını, çünkü $x \to 0^+$ iken $1/x$'in pozitif yönde çok fazla arttığını söylüyoruz.

$x \to 0^-$ iken $f(x) = 1/x$'in değerleri negatif yönde çok fazla artar. Herhangi bir negatif $-B$ sayısı verilmişse, f'nin değerleri eninde sonunda $-B$'nin altında kalır (Şekil 2.37'a bakın). Bunu

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

olarak yazarız. Yine, limitin var olduğunu veya $-\infty$ sayısına eşit olduğunu söylemiyoruz. Bir $-\infty$ reel sayısı yoktur. $x \to 0^-$ *iken değerleri negatifyönde çok fazla büyüdüğü için limiti olmayan* bir fonksiyonun davranışını tanımlıyoruz.



ŞEKİL 2.38 $x = 1$ civarında, $y = 1/(x-1)$ fonksiyonu, $y = 1/x$ fonksiyonunun $x = 0$ civarında davrandığı gibi davranır. Grafiği, $y = 1/x$ grafiğinin sağa doğru bir birim kaydırılmış halidir (Örnek 1).

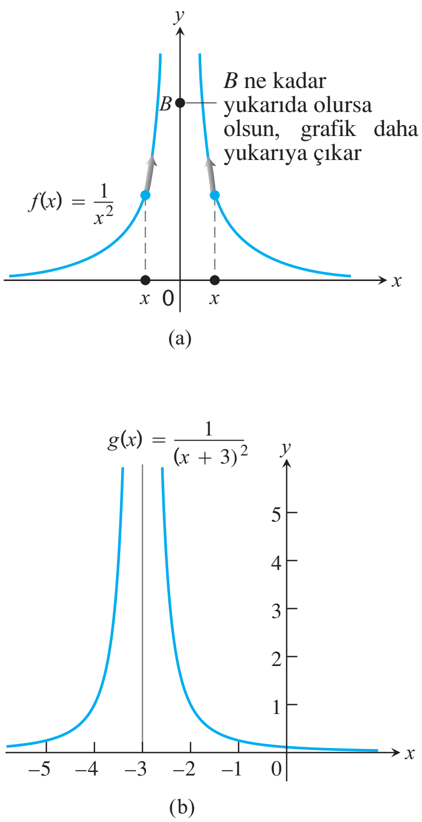
ÖRNEK 1 Tek taraflı sonsuz limitler

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} \quad \text{limitlerini bulun.}$$

Geometrik Çözüm $y = 1/(x-1)$'in grafiği $y = 1/x$ grafiğinin sağa doğru bir birim kaydırılmış halidir (Şekil 2.38). Dolayısıyla, $y = 1/(x-1)$ 1 civarında aynen $y = 1/x$'in 0 civarında davrandığı gibi davranır:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

Analitik Çözüm $x-1$ sayısı ve çarpmaya göre tersini düşünün. $x \to 1^+$ iken, $(x-1) \to 0^+$ ve $1/(x-1) \to \infty$, $x \to 1^-$ iken, $(x-1) \to 0^-$ ve $1/(x-1) \to -\infty$. ■



ŞEKİL 2.39 Örnek 2'deki fonksiyonların grafikleri. (a) $x \to 0$ iken $f(x)$ sonsuza yaklaşır. (b) $x \to -3$ iken $g(x)$ sonsuza yaklaşır.

ÖRNEK 2 İki taraflı sonsuz limitler

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$'nin $x = 0$ civarında ve

(b) $g(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2}$'nin $x = -3$ civarındaki

davranışlarını açıklayın.

Çözüm

(a) x sıfıra iki taraftan da yaklaşırken, $1/x^2$'nin değerleri pozitiftir ve çok fazla büyürler (Şekil 2.39a):

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

(b) $g(x) = 1/(x+3)^2$'nin grafiği $f(x) = 1/x^2$ grafiğinin sola doğru 3 birim kaydırılmış şeklidir (Şekil 2.39b). Dolayısıyla, g fonksiyonu -3 civarında aynen f'nin 0 civarında davrandığı gibi davranır.

$$\lim_{x\to -3} g(x) = \lim_{x\to -3} \frac{1}{(x+3)^2} = \infty.$$ ■

$y = 1/x$ fonksiyonu, $x \to 0$ iken tutarlı bir davranış göstermez. $x \to 0^+$ ise $1/x \to \infty$ 'dur, ancak $x \to 0^-$ ise $1/x \to -\infty$ olur. $\lim_{x\to 0}(1/x)$ için söyleyebileceğimiz tek şey varolmadığıdır. $y = 1/x^2$ fonksiyonu farklıdır. x sıfıra iki taraftan da yaklaşırken değerleri sonsuza gider, bu yüzden $\text{im}_{x\to 0}(1/x^2) = \infty$ olduğunu söyleyebiliriz.

ÖRNEK 3 Rasyonel fonksiyonlar paydalarının sıfırlarının civarında farklı davranabilirler.

(a) $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x+2} = 0$

(b) $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

(c) $\displaystyle \lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty$ — x 2 civarında olmak üzere, değerler $x > 2$ için negatiftir.

(d) $\displaystyle \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty$ — x 2 civarında olmak üzere, $x < 2$ için değerler pozitiftir.

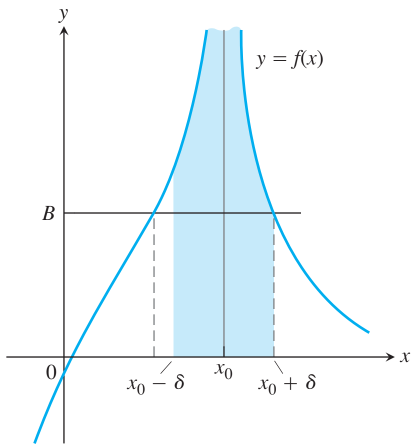
(e) $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)}$ yoktur. — (c) ve (d)'ye bakın.

(f) $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{(x-2)^3} = \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)^3} = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$

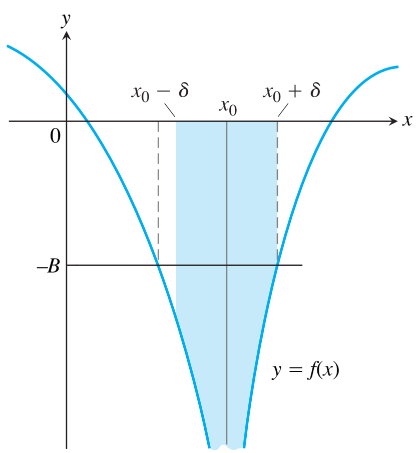
(a) ve (b) şıklarında, $x = 2$'de paydadaki sıfırın etkisi pay'ın da orada sıfır olması nedeniyle sadeleşir. Böylece sonlu bir limit bulunur. Aynı şey, sadeleştirmenin paydada hala bir sıfır bıraktığı (f) şıkkında geçerli değildir. ■

Sonsuz Limitlerin Kesin Tanımı

Sonsuz limitlerin tanımları, x_0'a yeterince yakın bütün x'ler için $f(x)$'in sonlu bir L sayısına keyfi olarak yakın olmasını gerektirmek yerine, $f(x)$'in orijinden keyfi olarak



ŞEKİL 2.40 $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ için $f(x)$'in grafiği $y = B$ doğrusunun üst tarafında kalır.



ŞEKİL 2.41 $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ için $f(x)$'in grafiği $y = -B$ doğrusunun üst tarafında kalır.

uzak olmasını gerektirir. Bu değişiklik dışında, kullanılan dil daha önce gördüklerimizle aynıdır. Şekil 2.40 ve 2.41 bu tanımları açıklamakadır.

TANIM **Limit Olarak Sonsuz ve Negatif Sonsuz**

1. Her pozitif B reel sayısına karşılık

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{iken} \quad f(x) > B$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, ***x*** ***x_0'a yaklaşırken $f(x)$ sonsuza yaklaşıyor*** der ve

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

yazarız.

2. Her negatif $-B$ reel sayısına karşılık

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{iken} \quad f(x) < -B$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, ***x*** ***x_0'a yaklaşırken $f(x)$ eksi sonsuza yaklaşıyor*** der ve

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

yazarız.

x_0'daki tek taraflı sonsuz limitlerin kesin tanımları da benzerdir ve alıştırmalarda verilmektedir.

ÖRNEK 4 Sonsuz Limitlerin Tanımını Kullanarak

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ olduğunu ispat edin.

Çözüm $B > 0$ verilsin,

$$0 < |x - 0| < \delta \quad \text{iken} \quad \frac{1}{x^2} > B$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulmak istiyoruz.

Şimdi,

Ancak ve yalnız $x^2 < \frac{1}{B}$ veya buna denk olarak $|x| < \frac{1}{\sqrt{B}}$ ise $\frac{1}{x^2} > B$ dir.

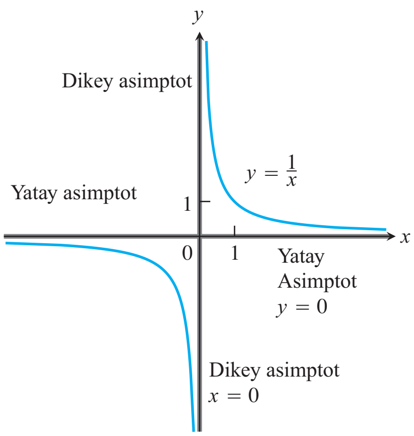
Böylece, $\delta = 1/\sqrt{B}$ (veya daha küçük bir pozitif sayı) seçersek

$$|x| < \delta \quad \text{olmasının} \quad \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} \geq B \quad \text{'yi gerektirdiğini görürüz.}$$

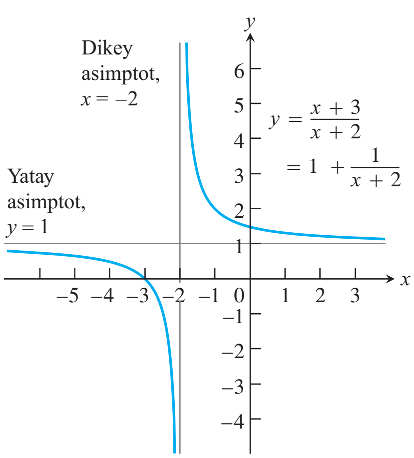
Bu nedenle, tanıma göre

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

dir. ■



ŞEKİL 2.42 Koordinat eksenleri $y = 1/x$ hiperbolünün her iki kolunun asimptotlarıdır.



ŞEKİL 2.43 $y = 1$ ve $x = -2$ doğruları $y = (x + 3)/(x + 2)$ eğrisinin asimptotlarıdır (Örnek 5).

Dikey Asimptotlar

$y = 1/x$ fonksiyonunun grafiğinin üstündeki bir nokta ile y-ekseni arasındaki uzaklık, nokta grafik üzerinde dikey olarak orijinden uzaklaştıkça, sıfıra yaklaşır (Şekil 2.42). Bu davranış meydana gelir çünkü

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

dir. $x = 0$ doğrusunun (y-ekseni), $y = 1/x$'in grafiğinin bir *dikey asimptotu* olduğunu söyleriz. Paydanın $x = 0$ da sıfır olduğuna ve fonksiyonun burada tanımlı olmadığına dikkat edin.

> **TANIM** **Dikey Asimptot**
>
> $$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{veya} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty.$$
>
> ise, $x = a$ doğrusu $y = f(x)$ fonksiyonunun bir dikey asimptotudur.

ÖRNEK 5 Asimtot Bulmak

Aşağıdaki eğrinin asimptotlarını bulun.

$$y = \frac{x+3}{x+2}$$

Çözüm $x \to \pm\infty$ iken ve paydanın sıfır olduğu $x \to -2$'deki davranışla ilgileniyoruz.

Rasyonel fonksiyonu $(x + 3)$'ü $(x + 2)$'ye bölerek elde edilecek kalanlı bir rasyonel fonksiyon olarak yazarsak, asimptotlar daha kolay bulunur:

$$\begin{array}{r|l} x+3 & x+2 \\ \underline{x+2} & 1 \\ 1 & \end{array}$$

Bu y'yi yeniden yazmamızı sağlar:

$$y = 1 + \frac{1}{x+2}$$

Bundan, sorudaki eğrinin $y = 1/x$ eğrisinin 1 birim yukarı ve 2 birim sola kaydırılmış hali olduğu anlaşılır (Şekil 2.43). Asimptotlar, koordinat eksenleri yerine, artık $y = 1$ ve $x = -2$ doğrularıdır. ■

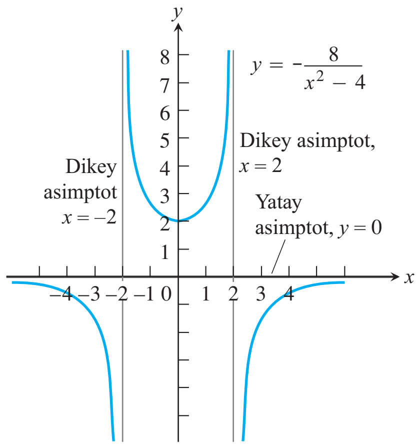
ÖRNEK 6 Asimptotlar İki Taraflı Olmak Zorunda Değildirler

Aşağıdaki eğrinin yatay ve dikey asimptotlarını bulun.

$$f(x) = -\frac{8}{x^2 - 4}$$

Çözüm $x \to \pm\infty$ ve paydanın sıfır olduğu $x = \to \pm 2$ iken ki davranışlarla ilgileniyoruz. f'nin bir çift fonksiyon olduğuna ve dolayısıyla grafiğinin y-eksenine göre simetrik olduğuna dikkat edin.

(a) $x \to \pm\infty$ *iken davranış*. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, olduğu için, $y = 0$ doğrusu grafiğin sağ taraftan bir asimptotudur. Simetriden dolayı, aynı zamanda soldan da asimptottur



ŞEKİL 2.44 $y = -8/(x^2 - 4)$'nin grafiği. Eğrinin x-eksenine yanlız bir taraftan yaklaştığına dikkat edin. Asimptotlar iki taraflı olmak zorunda değildirler (Örnek 6).

(Şekil 2.44). Eğrinin, x-eksenine yalnız negatif taraftan (veya attan) yaklaştığına dikkat edin.

(b) $x \to \pm 2$ *iken davranış.*

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = \infty$$

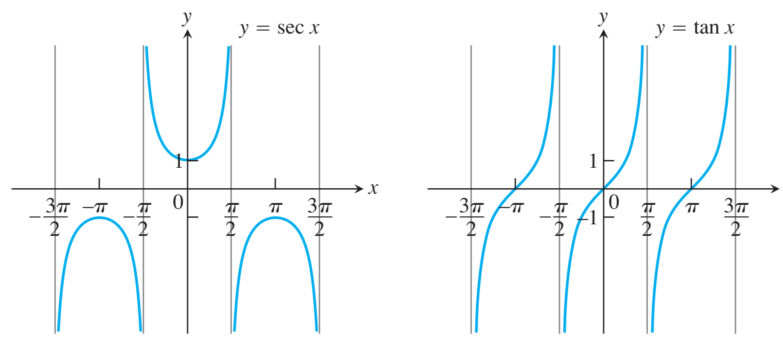
olduğu için $x = 2$ doğrusu hem soldan hem de sağdan bir asimptottur. Simetri dolayısıyla, aynısı $x = -2$ için de geçerlidir.

f'nin başka her noktada sonlu bir limiti olduğu için, başka asimptotu yoktur. ■

ÖRNEK 7 Sonsuz Sayıda Asimptotu Olan Eğriler

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \text{ve} \qquad y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

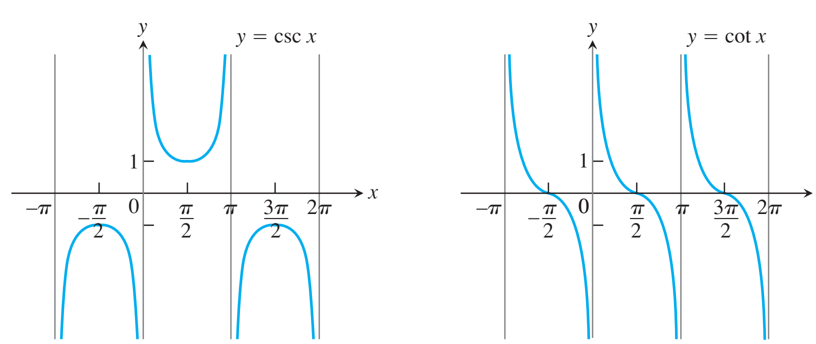
eğrilerinin grafiklerinin ikisinin de $\cos x = 0$ olduğu $\pi/2$'nin tek-tamsayı katlarında dikey asimptotları vardır (Şekil 2.45).



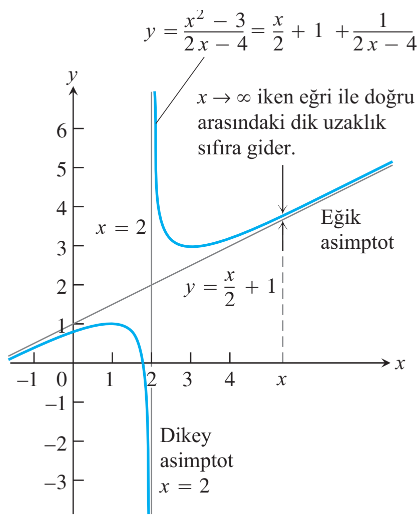
ŞEKİL 2.45 sec x ve tan x fonksiyonlarının grafiklerinin sonsuz sayıda dikey asimptotları vardır (Örnek 7).

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x} \qquad \text{ve} \qquad y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

eğrilerinin ikisinin de $\sin x = 0$ olduğu π'nin tamsayı katlarında dikey asimptotları vardır (Şekil 2.46).



ŞEKİL 2.46 csc x ve cot x fonksiyonlarının grafikleri (Örnek 7). ■



ŞEKİL 2.47 $f(x) = (x^2 - 3)/(2x - 4)$ fonksiyonunun grafiğinin bir dikey asimptotu ve bir yatay asimptotu vardır (Örnek 8).

ÖRNEK 8 Payının Derecesi Paydasının Derecesinden Büyük Olan Bir Rasyonel Fonksiyon

Aşağıdaki fonksiyonun asimptotlarını bulun.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

Çözüm $x \to \pm\infty$ ve paydanın sıfır olduğu $x \to 2$ iken ki davranışlarla ilgileniyoruz. Önce $(x^2 - 3)$'ü $(2x - 4)$'e böleriz:

$$\begin{array}{r} \frac{x}{2} + 1 \\ 2x - 4 \overline{\big) x^2 - 3} \\ \underline{x^2 - 2x} \\ 2x - 3 \\ \underline{2x - 4} \\ 1 \end{array}$$

Bu bize

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \underbrace{\frac{x}{2} + 1}_{\text{lineer}} + \underbrace{\frac{1}{2x - 4}}_{\text{kalan}}$$

olduğunu söyler. $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$ ve $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ olduğu için $x = 2$ doğrusu iki taraflı bir asimptottur. $x \to \pm\infty$ iken, kalan 0'a yaklaşır ve $f(x) \to (x/2) + 1$ olur. $y = (x/2) + 1$ doğrusu hem sağdan hem de soldan bir eğik asimptottur (Şekil 2.47). ■

Örnek 8 de şuna dikkat edin, bir rasyonel fonksiyonun payının derecesi paydasının derecesinden büyük ise, $|x|$ büyürken limit, pay ve paydasının işaretlerine bağlı olarak, $+\infty$ veya $-\infty$ dur.

Baskın Terimler

Örnek 8'deki

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

fonksiyonu hakkında çabucak yapabileceğimiz bütün gözlemlerden muhtemelen en yararlısı

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x - 4}$$

olduğudur. Bu bize derhal

$$f(x) \approx \frac{x}{2} + 1 \qquad \text{Büyük } x\text{'ler için}$$

$$f(x) \approx \frac{1}{2x - 4} \qquad \text{2'ye yakın } x\text{'ler için}$$

olduğunu söyler. f'nin nasıl davrandığını bilmek istiyorsak, bu şekilde bulabiliriz. x sayısal olarak büyük olduğunda, $y = (x/2) + 1$ gibi davranır ve $1/(2x - 4)$'ün f'nin

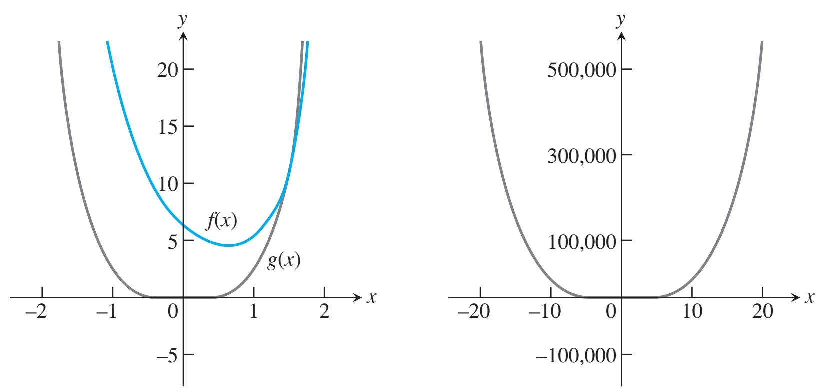
toplam değerine katkısı önemsizdir. x 2'ye yakın olduğundaysa, $1/(2x-4)$ gibi davranır, yani baskın katkı $1/(2x-4)$'den gelir.

x sayısal olarak büyük olduğunda $(x/2)+1$ baskın çıkar ve x 2 civarındayken $1/(2x-4)$ baskın çıkar deriz. Bunlar gibi baskın terimler bir fonksiyonun davranışını kestirmenin anahtarıdır. İşte bir başka örnek.

ÖRNEK 9 Büyük Ölçek Üzerinde Aynı Gibi Gözüken İki Grafik

$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6$ ve $g(x) = 3x^4$ olsun. x'in sayısal olarak küçük değerlerinde f ve g oldukça farklı olsalar da, çok büyük $|x|$ değerlerinde neredeyse aynı olduklarını gösterin.

Çözüm f ve g'nin grafikleri orijin yakınında oldukça farklı davranırlar (Şekil 2.48a), fakat büyük ölçekte neredeyse aynı gibi gözükürler (Şekil 2.48b).



(a) (b)

ŞEKİL 2.48 f ve g'nin grafikleri, (a) küçük $|x|$ değerlerinde farklıdırlar ve büyük $|x|$ değerlerinde neredeyse aynıdırlar (Örnek 9).

Grafik olarak g ile temsil edilen, f'deki $3x^4$ teriminin, x'in sayısal olarak büyük değerleri için f polinomuna baskın olduğunu, $x \to \pm\infty$ iken iki fonksiyonun oranlarını inceleyerek test edebiliriz.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6}{3x^4} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{3x^3} + \frac{2}{x^4}\right) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

olduğunu ve dolayısıyla büyük $|x|$ değerlerinde f ve g'nin neredeyse aynı olduklarını buluruz. ■

ALIŞTIRMALAR 2.5

Sonsuz Limitler

1–12 alıştırmalarındaki limitleri bulun.

1. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{3x}$

2. $\lim_{x \to 0^-} \frac{5}{2x}$

3. $\lim_{x \to 2^-} \frac{3}{x - 2}$

4. $\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x - 3}$

5. $\lim_{x \to -8^+} \frac{2x}{x + 8}$

6. $\lim_{x \to -5^-} \frac{3x}{2x + 10}$

7. $\lim_{x \to 7} \frac{4}{(x - 7)^2}$

8. $\lim_{x \to 0} \frac{-1}{x^2(x + 1)}$

9. **a.** $\lim_{x \to 0^+} \frac{2}{3x^{1/3}}$ **b.** $\lim_{x \to 0^-} \frac{2}{3x^{1/3}}$

10. **a.** $\lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x^{1/5}}$ **b.** $\lim_{x \to 0^-} \frac{2}{x^{1/5}}$

11. $\lim_{x \to 0} \frac{4}{x^{2/5}}$

12. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2/3}}$

13–16 alıştırmalarındaki limitleri bulun.

13. $\lim_{x \to (\pi/2)^-} \tan x$

14. $\lim_{x \to (-\pi/2)^+} \sec x$

15. $\lim_{\theta \to 0^-} (1 + \csc \theta)$

16. $\lim_{\theta \to 0} (2 - \cot \theta)$

Ek Hesaplamalar

17–22 alıştırmalarındaki limitleri verilen durumlarda bulun.

17. $\lim \frac{1}{x^2 - 4}$
   - **a.** $x \to 2^+$ **b.** $x \to 2^-$
   - **c.** $x \to -2^+$ **d.** $x \to -2^-$

18. $\lim \frac{x}{x^2 - 1}$
   - **a.** $x \to 1^+$ **b.** $x \to 1^-$
   - **c.** $x \to -1^+$ **d.** $x \to -1^-$

19. $\lim \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right)$
   - **a.** $x \to 0^+$ **b.** $x \to 0^-$
   - **c.** $x \to \sqrt[3]{2}$ **d.** $x \to -1$

20. $\lim \frac{x^2 - 1}{2x + 4}$
   - **a.** $x \to -2^+$ **b.** $x \to -2^-$
   - **c.** $x \to 1^+$ **d.** $x \to 0^-$

21. $\lim \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2}$
   - **a.** $x \to 0^+$ **b.** $x \to 2^+$
   - **c.** $x \to 2^-$ **d.** $x \to 2$
   - **e.** $x \to 0$ iken ki limit hakkında bir şey söylenebilir mi?

22. $\lim \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x}$
   - **a.** $x \to 2^+$ **b.** $x \to -2^+$
   - **c.** $x \to 0^-$ **d.** $x \to 1^+$
   - **e.** $x \to 0$ iken ki limit hakkında bir şey söylenebilir mi?

23–26 alıştırmalarındaki limitleri verilen durumlarda bulun.

23. $\lim \left(2 - \frac{3}{t^{1/3}}\right)$
   - **a.** $t \to 0^+$ **b.** $t \to 0^-$

24. $\lim \left(\frac{1}{t^{3/5}} + 7\right)$
   - **a.** $t \to 0^+$ **b.** $t \to 0^-$

25. $\lim \left(\frac{1}{x^{2/3}} + \frac{2}{(x - 1)^{2/3}}\right)$
   - **a.** $x \to 0^+$ **b.** $x \to 0^-$
   - **c.** $x \to 1^+$ **d.** $x \to 1^-$

26. $\lim \left(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x - 1)^{4/3}}\right)$
   - **a.** $x \to 0^+$ **b.** $x \to 0^-$
   - **c.** $x \to 1^+$ **d.** $x \to 1^-$

Rasyonel Fonksiyonların Grafiklerini Çizmek

27–38 alıştırmalarındaki rasyonel fonksiyonların grafiklerini çizin. Asimptot ve baskın terimlerin grafikleri ve denklemlerini de ekleyin.

27. $y = \frac{1}{x - 1}$

28. $y = \frac{1}{x + 1}$

29. $y = \frac{1}{2x + 4}$

30. $y = \frac{-3}{x - 3}$

31. $y = \frac{x + 3}{x + 2}$

32. $y = \frac{2x}{x + 1}$

33. $y = \frac{x^2}{x - 1}$

34. $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

35. $y = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$

36. $y = \frac{x^2 - 1}{2x + 4}$

37. $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

38. $y = \frac{x^3 + 1}{x^2}$

Değerler ve Limitlerden Grafik Yaratmak

39–42 alıştırmalarında, verilen koşulları sağlayan bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizin. Formül gerekmemektedir – sadece koordinat eksenlerine isim verin ve uygun bir grafik çizin (Yanıtlar tek değildir, dolayısıyla grafikleriniz cevaplar bölümündekilerle aynı olmayabilir).

39. $f(0) = 0, f(1) = 2, f(-1) = -2, \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ ve $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

40. $f(0) = 0, \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to0^+} f(x) = 2,$ ve $\lim_{x\to0^-} f(x) = -2$

41. $f(0) = 0, \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^+} f(x) = \infty,$ $\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$ ve $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$

42. $f(2) = 1, f(-1) = 0, \lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to0^+} f(x) = \infty,$ $\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ ve $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

Fonksiyon Yaratmak

43–46 alıştırmalarında, verilen koşulları sağlayan bir fonksiyon bulun ve grafiğini çizin (Yanıtlar tek değildir. Koşulları sağlayan herhangi bir fonksiyon kabul edilebilir. Yardımcı olacaksa parçalı olarak tanımlanmış fonksiyonlar kullanabilirsiniz).

43. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to2^-} f(x) = \infty$ ve $\lim_{x\to2^+} f(x) = \infty$

44. $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0, \lim_{x\to3^-} g(x) = -\infty$ ve $\lim_{x\to3^+} g(x) = \infty$

45. $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -1, \lim_{x\to\infty} h(x) = 1, \lim_{x\to0^-} h(x) = -1,$ ve $\lim_{x\to0^+} h(x) = 1$

46. $\lim_{x\to\pm\infty} k(x) = 1, \lim_{x\to1^-} k(x) = \infty$ ve $\lim_{x\to1^+} k(x) = -\infty$

Sonsuz Limitlerin Esas Tanımı

47–50 alıştırmalarındaki limitleri ispatlamak için tanımları kullanın.

47. $\lim_{x\to0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$

48. $\lim_{x\to0} \frac{1}{|x|} = \infty$

49. $\lim_{x\to3} \frac{-2}{(x-3)^2} = -\infty$

50. $\lim_{x\to-5} \frac{1}{(x+5)^2} = \infty$

Tek Taraflı Sonsuz Limitlerin Esas Tanımı

51. Aşağıda **sağdan sonsuz-limit** tanımı bulunmaktadır.

> Pozitif her B reel sayısına karşılık,
>
> $$x_0 < x < x_0 + \delta \quad \text{iken} \quad f(x) > B$$
>
> olmasını sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, x x_0'a sağdan yaklaşırken $f(x)$ sonsuza gider deriz ve
>
> $$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$$
>
> yazarız.

Tanımı aşağıdaki durumları kapsayacak şekilde değiştirin.

a. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$

b. $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$

c. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$

Alıştırma 51'daki esas tanımları kullanarak 52–56 alıştırmalarındaki ifadeleri ispatlayın.

52. $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = \infty$

53. $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

54. $\lim_{x\to2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$

55. $\lim_{x\to2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$

56. $\lim_{x\to1^-} \frac{1}{1-x^2} = \infty$

Terimlerin Grafiklerini Çizmek

57–60 alıştırmalarındaki fonksiyonlardan her biri iki terimin toplamı veya farkı olarak verilmektedir. Önce terimlerin grafiğini çizin (aynı eksen takımında). Sonra bu grafikleri rehber olarak kullanarak, fonksiyonun grafiğini çizin.

57. $y = \sec x + \frac{1}{x}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

58. $y = \sec x - \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

59. $y = \tan x + \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

60. $y = \frac{1}{x} - \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Grafikleri Formüllerle Karşılaştırma

61–64 alıştırmalarındaki eğrileri çizin ve eğrinin formülüyle gördükleriniz arasındaki ilişkiyi açıklayın.

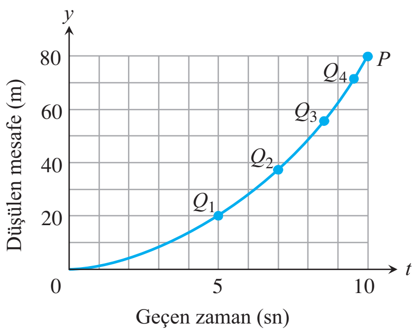
61. $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

62. $y = \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}}$

63. $y = x^{2/3} + \frac{1}{x^{1/3}}$

64. $y = \sin\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right)$

2.6 Süreklilik



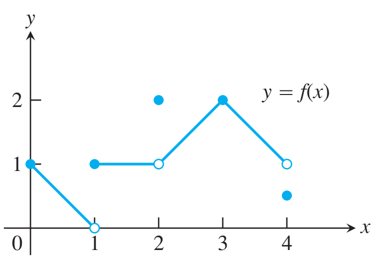
ŞEKİL 2.49 Serbest düşen bir cismin, çizilen deneysel $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ veri noktalarını kesiksiz bir eğri ile birleştirmek.

Laboratuvarda üretilen veya doğadan toplanan fonksiyon değerlerini işaretlerken, işaretlenen noktaları genellikle, ölçüm yapmadığımız zamanlarda fonksiyonun değerlerinin neler olabileceğini göstermek amacıyla, kesiksiz bir eğriyle birleştiririz (Şekil 2.49). Bunu yaparken, *sürekli bir fonksiyonla*, yani değerleri verilerle sürekli olarak değişen ve aradaki değerleri almadan bir değerden diğerine atlamayan bir fonksiyonla çalıştığımızı varsayarız. Sürekli bir fonksiyonun, x bir c ye yaklaşırkenki limiti basitçe fonksiyonun c deki değeri hesaplanarak bulunabilir. (Bunun, polinomlar için doğru olduğunu Bölüm 2.2 de gördük.)

Tanım kümesi üzerinde grafiği, kalemi kaldırmadan tek bir sürekli hareketle çizilebilen herhangi bir $y = f(x)$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyona bir örnektir. Bu bölümde bir fonksiyonun sürekli olmasının ne anlama geldiğini daha kesin olarak inceleyeceğiz. Ayrıca, sürekli fonksiyonların özelliklerini çalışacağız ve Bölüm 1.2 de gösterilen fonksiyon tiplerinin bir çoğunun sürekli olduklarını göreceğiz.

Bir Noktada Süreklilik

Sürekliliği anlamak için, Bölüm 2.4 Örnek 2 de limitlerini incelediğimiz Şekil 2.50 deki gibi bir fonksiyonu göz önüne almamız gerekir.



ŞEKİL 2.50 Fonksiyon, [0, 4] üzerinde $x = 1$, $x = 2$ ve $x = 4$ dışındaki noktalarda süreklidir (Örnek 1)

ÖRNEK 1 Sürekliliği Araştırmak

Şekil 2.50 deki f fonksiyonunun sürekli olduğu noktaları ve süreksiz olduğu noktaları bulun.

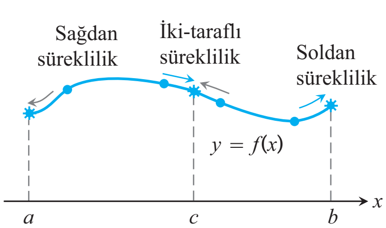
Çözüm f fonksiyonu [0, 4] tanım kümesi içinde, $x = 1$, $x = 2$ ve $x = 4$ dışındaki her noktada süreklidir. Bu noktalarda grafikte kopukluklar vardır. Tanım kümesi içindeki her noktada f'nin limiti ile f'nin değeri arasındaki ilişkiyi düşünün.

f'nin sürekli olduğu noktalar:

$x = 0$'da	$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.
$x = 3$'de	$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$.
$0 < c < 4,\ c \neq 1, 2$'de,	$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

f'nin süreksiz olduğu noktalar:

$x = 1$'de,	$\lim_{x\to 1} f(x)$ yoktur.
$x = 2$'de,	$\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ fakat $1 \neq f(2)$.
$x = 4$'te,	$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1$, fakat $1 \neq f(4)$.
$c < 0,\ c > 4$'te,	bu noktalar f'nin tanım kümesinde değildir. ■



ŞEKİL 2.51 a, b, ve c noktalarında süreklilik.

Bir fonksiyonun tanım kümesinde bir noktadaki sürekliliği tanımlamak için, bir iç noktadaki (iki-taraflı limit gerektiren) ve bir uç noktadaki (tek taraflı bir limit gerektiren) sürekliliği tanımlamamız gerekir (Şekil 2.51).

TANIM **Bir Noktada Sürekli**

İç nokta :

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

ise, $y = f(x)$ fonksiyonu tanım kümesinin c **iç noktasında süreklidir.**

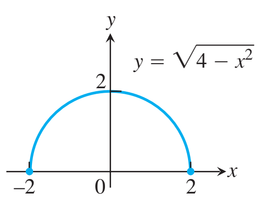
Uç nokta:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{veya} \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

ise, $y = f(x)$ fonksiyonu tanım kümesinin sırasıyla, a **sol uç noktasında süreklidir** veya b **sağ uç noktasında süreklidir.**

Bir f fonksiyonu bir c noktasında sürekli değilse, f fonksiyonu c'de **süreksizdir** ve c noktası f'nin **bir süreksizlik noktasıdır** deriz. c'nin f fonksiyonunun tanım kümesinde olması gerekmediğine dikkat edin.

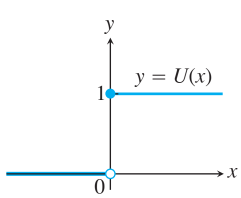
Bir f fonksiyonu için, $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$ ise, fonksiyon tanım aralığının $x = c$ noktasında **sağdan-sürekli**, $\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$ ise, fonksiyon c noktasında **soldan süreklidir**. Yani bir fonksiyon, a noktasında sağdan sürekliyse, tanım kümesinin sol uç noktası a'da sürekli, b noktasında soldan sürekliyse, b sağ uç noktasında süreklidir. Tanım aralığının bir c iç noktasında sürekli olabilmesi için, c'de hem sağdan hem de soldan sürekli olması gerekir (Şekil 2.51).



ŞEKİL 2.52 Tanım kümesinin her noktasında sürekli olan bir fonksiyon (Örnek 2).

ÖRNEK 2 Tanım Kümesinin Tamamında Sürekli Bir Fonksiyon

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ fonksiyonu [–2, 2] tanım aralığının her noktasında süreklidir (Şekil 2.52). Bu, f'nin sağdan sürekli olduğu $x = -2$ ve soldan sürekli olduğu $x = 2$ noktalarını da içerir. ■



ŞEKİL 2.53 Orijinde sağdan sürekli fakat soldan sürekli olmayan bir fonksiyon. Burada bir sıçramalı süreksizliği vardır (Örnek 3).

ÖRNEK 3 Birim Adım Fonksiyonunun Sıçramalı Süreksizliği Vardır

Şekil 2.53'te gösterilen $U(x)$ basamak fonksiyonu $x = 0$'da sağdan sürekli, ancak o noktada soldan sürekli veya sürekli değildir. $x = 0$'da sıçramalı süreksizliği vardır. ■

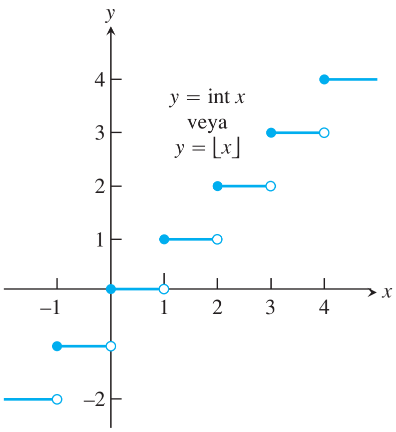
Sürekliliği bir test şeklinde özetleyebiliriz.

Süreklilik Testi

Bir $f(x)$ fonksiyonu asağıdaki üç koşulu da sağlıyorsa, $x = c$ noktasında süreklidir:

1. $f(c)$ vardır (c f'nin tanım kümesindedir)
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ vardır ($x \to c$ iken f'nin limiti vardır)
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ (limit fonksiyon değerine eşittir)

Tek taraflı süreklilik ve bir uç noktada süreklilik için, testin 2. ve 3. kısımlarındaki limitler uygun tek taraflı limitlerle değiştirilmelidir.



ŞEKİL 2.54 En büyük tamsayı fonksiyonu, tamsayı olmayan her noktada süreklidir. Her tamsayı sağdan sürekli fakat soldan sürekli değildir (Örnek 4).

ÖRNEK 4 En Büyük Tamsayı Fonksiyonu

Bölüm 1'de tanıtılan $y = \lfloor x \rfloor$ veya $y = \operatorname{int} x$, fonksiyonunun grafiği Şekil 2.54'te çizilmiştir. Her tamsayıda süreksizdir çünkü herhangi bir n tamsayısında limit yoktur:

$$\lim_{x\to n^-} \operatorname{int} x = n - 1 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to n^+} \operatorname{int} x = n$$

dir, dolayısıyla $x \to n$ iken soldan ve sağdan limitler eşit değildir. $\operatorname{int} n = n$ olduğundan en büyük tamsayı fonksiyonu her tamsayıda sağdan süreklidir (fakat soldan sürekli değildir).

En büyük tamsayı fonksiyonu, tamsayılardan farklı her reel sayıda süreklidir. Örneğin,

$$\lim_{x\to 1.5} \operatorname{int} x = 1 = \operatorname{int} 1.5$$

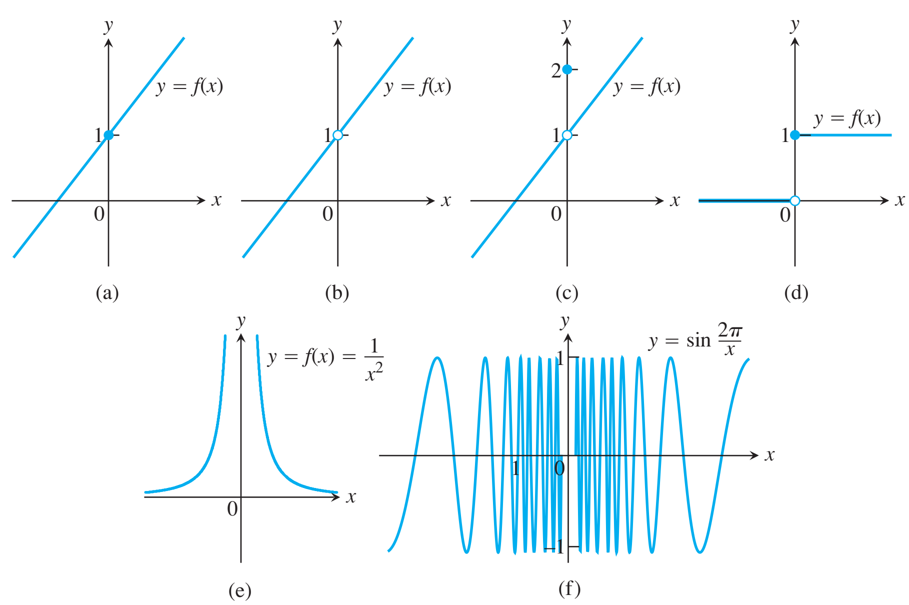
dir. Genel olarak, n bir tamsayı olmak üzere $n - 1 < c < n$ ise

$$\lim_{x\to c} \operatorname{int} x = n - 1 = \operatorname{int} c$$

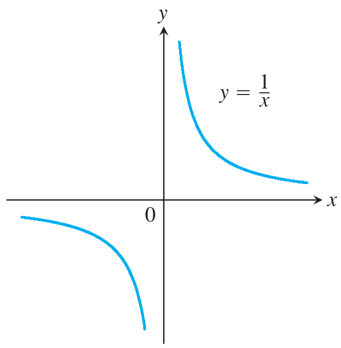
dir. ■

Şekil 2.55 süreksizlik tiplerinin bir kataloğudur. Şekil 2.55a'daki fonksiyon $x = 0$ da süreklidir. Şekil 2.55b'deki fonksiyon için $f(0) = 1$ olsaydı fonksiyon sürekli olurdu. Şekil 2.55c'deki fonksiyon için $f(0) = 2$ yerine $f(0) = 1$ olsaydı fonksiyon sürekli olurdu. Şekil 2.55b ve Şekil 2.55c'deki süreksizlikler **kaldırılabilir** süreksizliklerdir. Her fonksiyonun $x \to 0$ iken bir limiti vardır ve $f(0)$'ı bu limite eşit olarak tanımlamakla süreksizliği kaldırabiliriz.

Şekil 2.55d'den f'ye kadar olan süreksizlikler daha ciddidir: $\lim_{x\to 0} f(x)$ bulunmamaktadır ve f'yi 0 da değiştirerek durumu geliştirmenin bir yolu yoktur. Şekil 2.55d deki birim adım fonksiyonunun bir **sıçramalı süreksizliği** vardır: tek taraflı limitler vardır fakat değerleri farklıdır. Şekil 2.55e'deki $f(x) = 1/x^2$ fonksiyonunun bir **sonsuz süreksizliği** vardır. Şekil 2.55f'deki fonksiyonun bir **salınan süreksizliği** vardır: fonksiyon çok fazla salınmaktadır, dolayısıyla $x \to 0$ iken limiti yoktur.



ŞEKİL 2.55 (a) daki fonksiyon $x = 0$ da süreklidir; (b) den (f) ye kadar olanlar değildirler.



ŞEKİL 2.56 $y = 1/x$ fonksiyonu $x = 0$ dışındaki her değerde süreklidir. $x = 0$ da bir süreksizlik noktası vardır. (Örnek 5).

Sürekli Fonksiyonlar

Bir fonksiyon, ancak ve yalnız bir aralığın her noktasında sürekli ise **bu aralık üzerinde süreklidir**. Örneğin, Şekil 2.52 de çizilen yarım çember fonksiyonu, tanım kümesi olan [–2, 2] aralığının her noktasında süreklidir. Tanım kümesinin her noktasında sürekli olan bir fonksiyon **sürekli fonksiyondur**. Bir sürekli fonksiyon her aralıkta sürekli olmak zorunda değildir. Örneğin, $y = 1/x$ fonksiyonu [–1, 1] üzerinde sürekli değildir (Şekil 2.56), fakat $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ tanım kümesi zerinde süreklidir.

ÖRNEK 5 Sürekli Fonksiyonları Belirlemek

(a) $y = 1/x$ fonksiyonu (Şekil 2.56), tanım kümesinin her noktasında sürekli olduğundan, sürekli bir fonksiyondur. $x = 0$ da bir süreksizlik noktası vardır, ancak, orada tanımlı değildir;

(b) Bölüm 2.3 Örnek 3'e göre $f(x) = x$ birim fonksiyonu ve sabit fonksiyonlar her yerde süreklidirler. ■

Sürekli fonksiyonların cebirsel kombinasyonları tanımlı oldukları her yerde süreklidirler.

TEOREM 9 **Sürekli Fonksiyonların Özellikleri**

f ve g fonksiyonları $x = c$ de sürekli ise, aşağıdaki kombinasyonları da $x = c$ de süreklidir.

1. *Toplamlar*: $f + g$
2. *Farkları*: $f - g$
3. *Çarpımlar*: $f \cdot g$
4. *Sabite Çarpım*: $k \cdot f$ herhangi bir k için
5. *Bölümler*: f/g, $g(c) \neq 0$ olmak koşuluyla
6. *Kuvvetler*: $f^{r/s}$, r ve s tam sayılar olmak üzere, c'yi içeren bir açık aralıkta tanımlı olması koşuluyla.

Teorem 9'daki sonuçların çoğu Bölüm 2.2 Teorem 1 deki limit kurallarıyla kolayca ispatlanır. Örneğin, toplam kuralı için

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}(f+g)(x) &= \lim_{x\to c}(f(x)+g(x))\\ &= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x), \quad \text{Toplam kuralı, Teorem 1}\\ &= f(c)+g(c) \quad f \text{ ve } g\text{'nin } c \text{ deki sürekliliği}\\ &= (f+g)(c).\end{aligned}$$

Bu, $f + g$'nin sürekli olduğunu gösterir.

ÖRNEK 6 Polinomlar ve Rasyonel Fonksiyonlar Süreklidirler

(a) Her $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ polinomu süreklidir çünkü: Bölüm 2.2 Teorem 2'ye $\lim_{x\to c} P(x) = P(c)$.

(b) $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlar ise Teorem 9'daki Bölüm Kuralına göre $P(x)/Q(x)$ rasyonel fonksiyonu tanımlı olduğu her yerde süreklidir ($Q(c) \neq 0$).

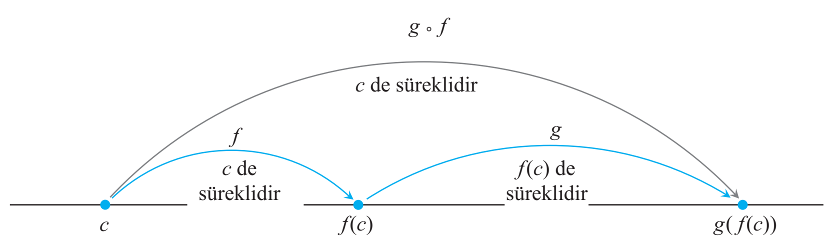
ÖRNEK 7 Mutlak Değer Fonksiyonunun Sürekliliği

$f(x) = |x|$ fonksiyonu x'in her değerinde süreklidir. $x > 0$ ise, $f(x) = x$ bir polinomdur. $x < 0$ ise, $f(x) = -x$ başka bir polinomdur. Son olarak, orijinde $\lim_{x\to 0}|x| = 0 = |0|$ olur. ■

Bölüm 2.2 Örnek 6'ya göre $y = \sin x$ ve $y = \cos x$ fonksiyonları $x = 0$ da süreklidirler. Aslında, her iki fonksiyon da her yerde süreklidir (bkz. Alıştırma 62). Buna göre, Teorem 9'dan, altı trigonometrik fonksiyonun hepsinin, tanımlı oldukları her yerde sürekli oldukları sonucu çıkar. Örneğin, $y = \tan x$ fonksiyonu $\cdots \cup (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2) \cup \cdots$ üzerinde süreklidir.

Bileşkeler

Sürekli fonksiyonların bütün bileşkeleri süreklidir. Fikir şudur: $f(x)$ $x = c$ de sürekli ise ve $g(x)$ $x = f(c)$ de sürekli ise, $g \circ f$ $x = c$ de süreklidir (Şekil 2.57). Bu durumda $x \to c$ iken limit $g(f(c))$ dir.



ŞEKİL 2.57 Sürekli fonksiyonların bileşkeleri süreklidir.

> **TEOREM 10 Sürekli Fonksiyonların Bileşkesi**
> f c'de sürekli ise ve g de $f(c)$'de sürekli ise, $g \circ f$ bileşkesi c'de süreklidir.

Sezgisel olarak, Teorem 10 anlamlıdır çünkü x c'ye yakın ise $f(x)$ te $f(c)$'ye yakındır ve g $f(c)$'de sürekli olduğundan $g(f(x))$ $g(f(c))$'ye yakındır sonucu çıkar.

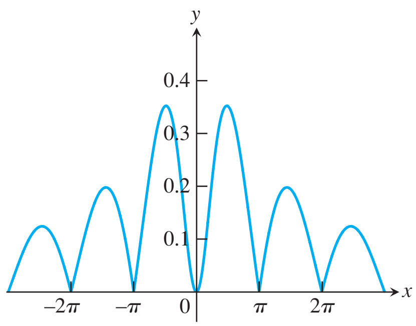
Bileşkelerin sürekliliği herhangi sonlu sayıda fonksiyon için geçerlidir. Tek istenen, her fonksiyonun uygulandığı noktada sürekli olmasıdır. Teorem 10'un ispatı için Ek 2'deki Alıştırma 6'ya bakın.

ÖRNEK 8 Teorem 9 ve 10 u uygulamak

Aşağıdaki fonksiyonların kendi tanım aralıklarında sürekli olduklarını gösterin.

(a) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$ **(b)** $y = \dfrac{x^{2/3}}{1 + x^4}$

(c) $y = \left|\dfrac{x - 2}{x^2 - 2}\right|$ **(d)** $y = \left|\dfrac{x \sin x}{x^2 + 2}\right|$



ŞEKİL 2.58 $y = |(x \sin x)/(x^2 + 2)|$ fonksiyonunun sürekliliğini düşündürmektedir (Örnek 8d).

Çözüm

(a) Karekök fonksiyonu üzerinde süreklidir çünkü $[0, \infty)$ sürekli birim $f(x) = x$ fonksiyonunun bir rasyonel kuvvetidir (Teorem 9 Bölüm 6). Verilen fonksiyon $f(x) = x^2 - 2x - 5$ da polinomu ile $g(t) = \sqrt{t}$ karekök fonksiyonunun bileşkesidir.

(b) Pay, birim fonksiyonun bir rasyonel kuvvetidir; payda heryerde pozitif bir polinomdur. Bu nedenle, bölüm süreklidir.

(c) $(x - 2)/(x^2 - 2)$ oranı her $x \neq \pm\sqrt{2}$, için süreklidir ve verilen fonksiyon bu oranla sürekli olan mutlak değer fonksiyonunun bileşkesidir (Örnek 7).

(d) Sinüs fonksiyonu her yerde sürekli olduğundan (Alıştırma 62), pay'daki terimi $x \sin x$ sürekli fonksiyonların çarpımıdır ve paydadaki $x^2 + 2$ terimi her yerde pozitif olan bir polinomdur. Verilen fonksiyon, sürekli fonksiyonların bir oranı ile sürekli olan mutlak değer fonksiyonunun bileşkesidir (Şekil 2.58). ■

Bir Noktaya Sürekli Genişlemeler

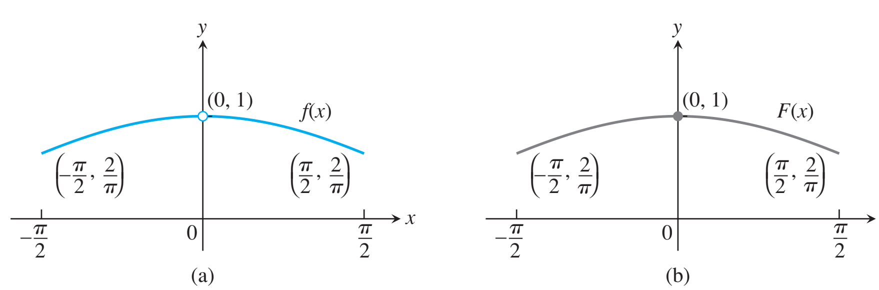
$y = (\sin x)/x$ fonksiyonu $x = 0$ dışındaki her noktada süreklidir. Bu anlamda $y = 1/x$ fonksiyonu gibidir. Fakat, $x \to 0$ iken $y = (\sin x)/x$'in sonlu bir limiti var olduğundan (Teorem 7) bu anlamda $y = 1/x$'ten farklıdır. Bu nedenle, fonksiyonun tanım kümesi, genişletilmiş fonksiyon $x = 0$ da sürekli olacak biçimde, $x = 0$ noktasını içerecek şekilde genişletilebilir.

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

fonksiyonu $F(x)$ da süreklidir $x = 0$ çünkü

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = F(0)$$

dır (Şekil 2.59).



ŞEKİL 2.59 $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ için $f(x) = (\sin x)/x$'in grafiği (0, 1) noktasını içermez çünkü fonksiyon $x = 0$ da tanımlı değildir. (b) yeni $F(x)$ fonksiyonunu $F(0) = 1$ ve başka her yerde $F(x) = f(x)$ olacak şekilde tanımlayarak grafikteki süreksizliği kaldırabiliriz. Şuna dikkat edin, $F(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$.

Daha genel olarak, bir fonksiyonun (bir rasyonel fonksiyon gibi) tanımlı olmadığı bir noktada bile limiti olabilir. $f(c)$ tanımlı değil, fakat $\lim_{x\to c} f(x) = L$ varsa,

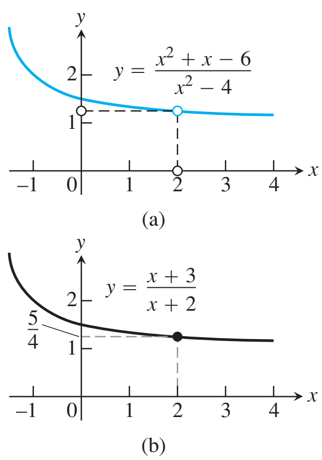
$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x\ f\text{'nin tanım aralığıysa} \\ L, & x = c \end{cases}$$

kuralıyla yeni bir fonksiyon tanımlayabiliriz. F fonksiyonu $x = c$'de süreklidir. $F(x)$ fonksiyonuna f'nin c'ye **sürekli genişlemesi** denir. f rasyonel fonksiyonları için, sürekli genişlemeler genellikle ortak çarpanlar sadeleştirilerek bulunur.

ÖRNEK 9 Bir Sürekli Genişleme

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

fonksiyonunun $x = 2$'ye sürekli bir genişlemesi olduğunu gösterin ve bu genişlemeyi bulun.



ŞEKİL 2.60 (a) $f(x)$'in grafiği ve (b) $F(x)$'in sürekli genişlemesi grafiği (Örnek 9).

Çözüm $f(2)$ tanımlı olmadığı halde, $x \neq 2$ ise

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$$

buluruz.

$$F(x) = \frac{x+3}{x+2}$$

fonksiyonu $x \neq 2$ için $f(x)$'e eşittir, fakat aynı zamanda $x = 2$'de süreklidir ve değeri $5/4$'tür. Yani F fonksiyonu f'nin $x = 2$'ye sürekli genişlemesidir ve

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} f(x) = \frac{5}{4}$$

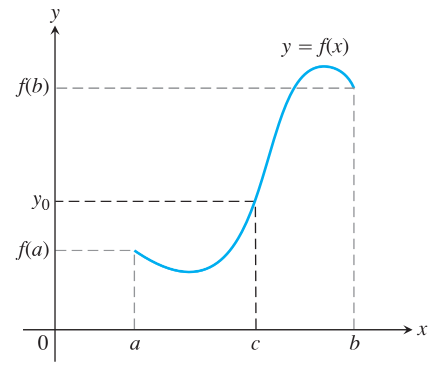
bulunur. f'nin grafiği Şekil 2.60'ta verilmektedir. F sürekli genişlemesinin grafiği bunun aynısıdır, fakat $(2, 5/4)$'te deliği yoktur. Aslında F fonksiyonu $x = 2$'deki süreksizlik noktası kaldırılmış f fonksiyonudur. ■

Sürekli Fonksiyonlar için Ara Değer Teoremi

Aralıklarda sürekli olan fonksiyonların matematikte ve uygulamalarında özel bir yer tutmalarını sağlayan özellikleri vardır. Bunlardan biri *Ara Değer Özelliğidir*. Bir fonksiyon, aldığı iki değer arsındaki bütün değerleri alıyorsa fonksiyonun **Ara Değer Özelliği** vardır denir.

TEOREM 11 Sürekli Fonksiyonlar için Ara Değer Teoremi

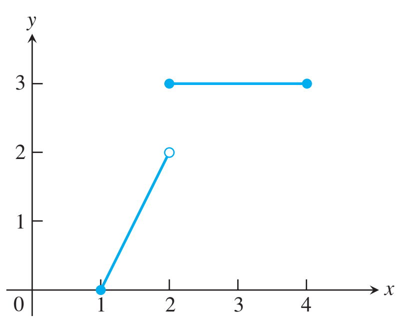
$[a, b]$ kapalı aralığında sürekli olan bir $f(x)$ fonksiyonu $f(a)$ ile $f(b)$ arasındaki her değeri alır. Başka bir deyişle, y_0 $f(a)$ ile $f(b)$ arasında herhangi bir değer ise, $[a, b]$ aralığındaki bir c için $f(c) = y_0$ dır.



Geometrik olarak, Ara Değer Teoremi şunu söylemektedir: y-eksenini $f(a)$ ile $f(b)$ sayıları arasında kesen herhangi bir $y = y_0$ yatay doğrusu $y = f(x)$ eğrisini $[a, b]$ aralığı üzerinde en az bir defa kesecektir.

Ara Değer Teoreminin ispatı reel sayı sisteminin bütünlük özelliğine dayanmaktadır ve daha ileri seviyedeki kitaplarda bulunabilir.

f'nin aralık üzerindeki sürekliliği Teorem 11 için gereklidir. Şekil 2.61'deki fonksiyonda olduğu gibi, f fonksiyonu aralığın tek bir noktasında bile süreksizse, teoremin sonucu doğrulanmayabilir.



ŞEKİL 2.61

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & 1 \le x < 2 \\ 3, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

fonksiyonu $f(1) = 0$ ve $f(4) = 3$ arasındaki her değeri almaz; 2 ile 3 arasındaki hiçbir değeri almaz.

Grafikler İçin Bir Sonuç: Birleştirilebilirlik Bir aralık üzerinde sürekli bir fonksiyonun grafiğinin, aralık boyunca kesikli olamamasının nedeni Teorem 11'dir. Grafik, sin x'in grafiği gibi **birleşik**, kesiksiz, tek bir eğri olacaktır. En büyük tamsayı fonksiyonu gibi (Şekil 2.54) sıçramaları veya $1/x$ gibi (Şekil 2.56) ayrı kolları olmayacaktır.

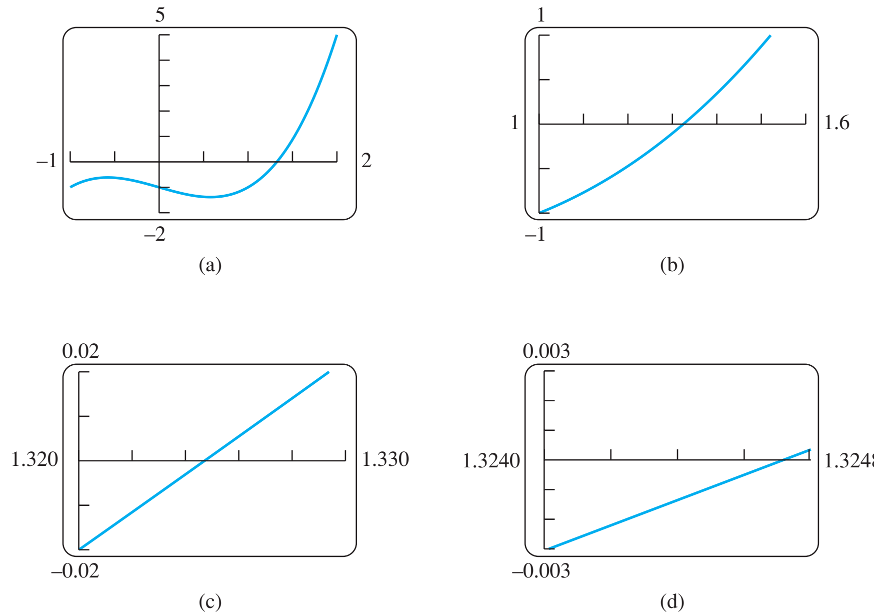
Kök Bulma İçin Bir Sonuç $f(x) = 0$ denkleminin çözümüne f fonksiyonunun bir **kökü** veya **sıfırı** deriz. Ara Değer Teoremi bize şunu söyler, f sürekliyse f'nin üzerinde işaret değiştirdiği herhangi bir aralık fonksiyonun bir sıfırını içerir.

Özel olarak, bir bilgisayar ekranında bir sürekli fonksiyonun grafiğinin yatay ekseni geçtiğini gördüğümüzde bunun atlayarak geçme olmadığını biliriz. Orada fonksiyon değerinin sıfır olduğu bir nokta gerçekten vardır. Bu sonuç, grafiklerini çizebildiğimiz herhangi sürekli fonksiyonların sıfırlarını tahmin etme işlemine götürür:

1. Sıfırlarının kabaca nerede olduğunu görmek için fonksiyonun grafiğini geniş bir aralıkta çizin.

2. Sonra, x-koordinat değerini tahmin etmek için her sıfıra yaklaşın.

Grafik çizer hesap makinenizde veya bilgisayarınızda bu işlem üzerine pratik yapabilirsiniz. Şekil 2.62'de $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin grafik çözümündeki tipik adımlar görülmektedir.



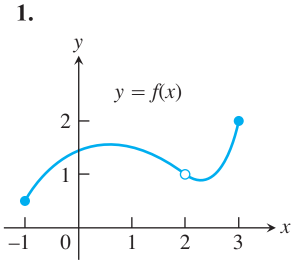
ŞEKİL 2.62 $f(x) = x^3 - x - 1$ fonksiyonunun bir sıfırına yakınlaşmak. Kök $x = 1.3247$ yakınındadır.

ALIŞTIRMALAR 2.6

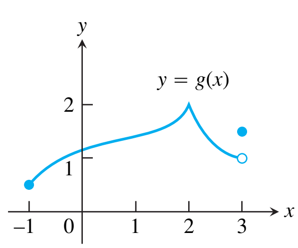
Grafiklerden Süreklilik

1-4 alıştırmalarında, verilen grafiğin [–1, 3] aralığında sürekli olup olmadığını söyleyin. Değilse, nerede ve neden değildir?

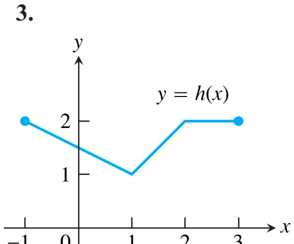
1.



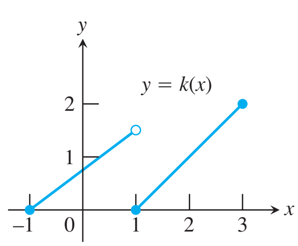
2.



3.



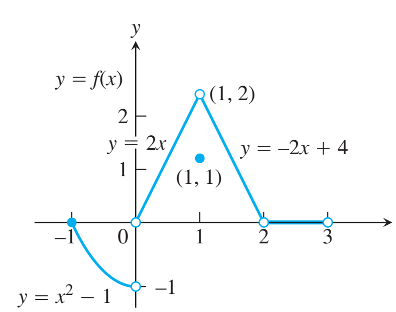
4.



5-10 Alıştırmaları aşağıdaki şekilde grafiği çizilen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \le x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -2x + 4, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

fonksiyonu hakkındadır.



5-10 Alıştırmalarındaki grafik

5. **a.** $f(-1)$ var mıdır?
   b. $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ var mıdır?
   c. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$ midir?
   d. $x = -1$'de f sürekli midir?
6. **a.** $f(1)$ var mıdır?
   b. $\lim_{x\to 1} f(x)$ var mıdır?
   c. $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ midir?
   d. $x = 1$'de f sürekli midir?
7. **a.** $x = 2$'de f tanımlı mıdır? (f'nin tanımına bakın.)
   b. $x = 2$'de f sürekli midir?
8. Hangi x değerlerinde f süreklidir?
9. Genişlemiş fonksiyonun $x = 2$'de sürekli olması için $f(2)$'ye hangi değer verilmelidir?
10. Süreksizliği ortadan kaldırmak için $f(1)$'in yeni değeri ne olmalıdır?

Süreklilik Testini Uygulamak

Aşağıdaki alıştırmalarda fonksiyonlar hangi noktalarda sürekli değildirler? Hangi noktalarda, mümkünse, süreksizlikler kaldırılabilir, hangilerinde kaldırılamaz? Açıklayın.

11. Bölüm 2.4, Alıştırma 1 **12.** Bölüm 2.4, Alıştırma 2

13-28 alıştırmalarındaki fonksiyonlar hangi noktalarda süreklidir?

13. $y = \dfrac{1}{x-2} - 3x$ **14.** $y = \dfrac{1}{(x+2)^2} + 4$

15. $y = \dfrac{x+1}{x^2 - 4x + 3}$ **16.** $y = \dfrac{x+3}{x^2 - 3x - 10}$

17. $y = |x - 1| + \sin x$ **18.** $y = \dfrac{1}{|x| + 1} - \dfrac{x^2}{2}$

19. $y = \dfrac{\cos x}{x}$ **20.** $y = \dfrac{x+2}{\cos x}$

21. $y = \csc 2x$ **22.** $y = \tan \dfrac{\pi x}{2}$

23. $y = \dfrac{x \tan x}{x^2 + 1}$ **24.** $y = \dfrac{\sqrt{x^4 + 1}}{1 + \sin^2 x}$

25. $y = \sqrt{2x + 3}$ **26.** $y = \sqrt[4]{3x - 1}$

27. $y = (2x - 1)^{1/3}$ **28.** $y = (2 - x)^{1/5}$

Bileşke Fonksiyonlar

29-34 alıştırmalarındaki limitleri bulun. Fonksiyonlar yaklaşılan noktalarda sürekli midirler?

29. $\lim_{x\to\pi} \sin(x - \sin x)$

30. $\lim_{t\to 0} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cos(\tan t)\right)$

31. $\lim_{y\to 1} \sec(y \sec^2 y - \tan^2 y - 1)$

32. $\lim_{x\to 0} \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\cos(\sin x^{1/3})\right)$

33. $\lim_{t\to 0} \cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{19 - 3\sec 2t}}\right)$

34. $\lim_{x\to\pi/6} \sqrt{\csc^2 x + 5\sqrt{3}\tan x}$

Sürekli Genişlemeler

35. $g(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$'ün $x = 3$'te sürekli olmasını sağlayacak $g(3)$ değerini bulun.

36. $h(t) = (t^2 + 3t - 10)/(t - 2)$'nin $t = 2$'de sürekli olmasını sağlayacak $h(2)$ değerini bulun.

37. $f(s) = (s^3 - 1)/(s^2 - 1)$'in $s = 1$'de sürekli olmasını sağlayacak $f(1)$ değerini bulun.

38. $g(x) = (x^2 - 16)/(x^2 - 3x - 4)$'ün $x = 4$'te sürekli olmasını sağlayacak $g(4)$ değerini bulun.

39. a'nın hangi değeri için

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 3 \\ 2ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

her x değerinde süreklidir?

40. b'nin hangi değeri için

$$g(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ bx^2, & x \geq -2 \end{cases}$$

her x değerinde süreklidir?

T 41–44 alıştırmalarında, orijinde sürekli bir genişlemesi olup olmadığını görmek için f fonksiyonunu çizin. Varsa, $x = 0$'daki genişleme fonksiyonunun değerini bulun. Fonksiyonun sürekli bir genişlemesi yok gibiyse, orijinde sağdan veya soldan sürekli olacak bir genişleme bulunabilir mi? Bulunabilirse, genişleme fonksiyonunun değer(ler)inin ne olmasını beklersiniz?

41. $f(x) = \dfrac{10^x - 1}{x}$ **42.** $f(x) = \dfrac{10^{|x|} - 1}{x}$

43. $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$ **44.** $f(x) = (1 + 2x)^{1/x}$

Theori ve Örnekler

45. Sürekli bir $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$'da negatif, $x = 1$'de pozitif olduğu biliniyor. $x = 0$ ile $x = 1$ arasında, $f(x) = 0$ denkleminin neden en az bir çözümü vardır? Çizerek gösterin.

46. $\cos x = x$'in neden en az bir çözümü olduğunu açıklayın.

47. Bir kübiğin kökleri $x^3 - 15x + 1 = 0$ denkleminin $[-4, 4]$ aralığında üç çözümünün olduğunu gösterin.

48. Bir fonksiyon değer $F(x) = (x - a)^2 \cdot (x - b)^2 + x$ fonksiyonunun x'in bazı değerleri için $(a + b)/2$ değerlerini aldığını gösterin.

49. Bir denklemi çözmek $f(x) = x^3 - 8x + 10$ ise, $f(c)$'nin **(a)** π; **(b)** $-\sqrt{3}$; **(c)** 5.000.000 değerlerine eşit olduğu c değerleri bulunduğunu gösterin.

50. Aşağıdaki beş ifadenin neden aynı bilgiyi gerektirdiklerini açıklayın.

a. $f(x) = x^3 - 3x - 1$'in köklerini bulun.

b. $y = x^3$ eğrisinin $y = 3x + 1$ doğrusunu kestiği noktaların x koordinatlarını bulun.

c. $x^3 - 3x = 1$ olan bütün x değerlerini bulun.

d. $y = x^3 - 3x$ eğrisinin $y = 1$ doğrusunu kestiği noktaların x koordinatlarını bulun.

e. $x^3 - 3x - 1 = 0$ denklemini çözün.

51. Kaldırılabilir süreksizlik $x = 2$ noktasında kaldırılabilir bir süreksizliği bulunan ve bunun dışında her yerde sürekli olan bir $f(x)$ fonksiyonu bulun. f'nin $x = 2$'de süreksiz olduğunu nasıl anladığınızı ve süreksizliğin neden kaldırılabileceğini açıklayın.

52. Kaldırılamaz süreksizlik $x = -1$ noktasında kaldırılamaz bir süreksizliği olan ve bunun dışında her yerde sürekli olan bir $f(x)$ fonksiyonu bulun. f'nin $x = -1$'de süreksiz olduğunu nasıl anladığınızı ve süreksizliğin neden kaldırılamayacağını açıklayın.

53. Her noktada süreksiz olan bir fonksiyon

a. Boş olmayan her reel sayı aralığının hem rasyonel hem de irrasyonel sayılar içerdiği bilgisini kullanarak,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel ise} \\ 0, & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun her noktada süreksiz olduğunu gösterin.

b. f herhangi bir noktada sağdan veya soldan sürekli midir?

54. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $0 \le x \le 1$ aralığında sürekliyse, $f(x)/g(x)$ $[0, 1]$'in herhangi bir noktasında süreksiz olabilir mi? Yanıtınızın nedenini açıklayın.

55. $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ çarpım fonksiyonu $x = 0$'da sürekliyse, $f(x)$ ve $g(x)$ de $x = 0$'da sürekli olmak zorunda mıdır? Yanıtınızın nedeninin açıklayın.

56. Sürekli fonksiyonların süreksiz bileşkesi $x = 0$'da bileşkeleri $f \circ g$ süreksiz, fakat kendileri sürekli olan f ve g fonksiyonlarına bir örnek verin. Bu Teorem 10'la çelişir mi? Yanıtınızı açıklayın.

57. Daima sıfırdan farklı sürekli fonksiyonlar Bir aralıkta sıfır değeri almayan sürekli bir fonksiyonun bu aralık üzerinde işaret değiştirmeyeceği doğru mudur? Yanıtınızı açıklayın.

58. Bir lastik bandı germek Bir lastik bandı bir taraftan sağa, diğer taraftan sola doğru gererken, banttaki bir noktanın yeniden eski konumuna geleceği doğru mudur? Yanıtınızı açıklayın.

59. Sabit nokta teoremi Bir f fonksiyonunun $[0, 1]$ kapalı aralığında sürekli olduğunu ve $[0, 1]$'deki her x için $0 \le f(x) \le 1$ olduğunu varsayın. $[0, 1]$ aralığında, $f(c) = c$ olacak şekilde bir c sayısı bulunması gerektiğini gösterin (c'ye f'nin **sabit noktası** denir).

60. Sürekli fonksiyonların işaret koruma özelliği f fonksiyonu (a, b) aralığında tanımlanmış olsun ve f'nin sürekli olduğu bir c değeri için $f(c) \ne 0$ olsun. c civarında f'nin $f(c)$ ile aynı işaretli olduğu bir $(c - \delta, c + \delta)$ aralığı bulunduğunu gösterin. Bu sonucun ne kadar önemli olduğuna dikkat edin. f fonksiyonu (a, b)'de tanımlı olduğu halde, c dışındaki bir noktada sürekli olması gerekmemektedir. Bu ve $f(c) \ne 0$ olması f'yi bütün aralık içinde (pozitif veya negatif) sıfırdan farklı yapmaya yeterlidir.

61. Ancak ve yalnız

$$\lim_{h \to 0} f(c + h) = f(c).$$

ise f'nin c 'de sürekli olduğunu gösterin.

62. $f(x) = \sin x$ ve $g(x) = \cos x$'in her $x = c$ noktasında sürekli olduklarını ispatlamak için Alıştırma 61'i ve

$$\sin(h + c) = \sin h \cos c + \cos h \sin c,$$
$$\cos(h + c) = \cos h \cos c - \sin h \sin c$$

özdeşliklerini kullanın

T Denklemleri Grafik Yöntemlerle Çözme

63-70 alıştırmalarındaki denklemleri çözmek için grafik çizen hesap makinesi veya bir grafik programı kullanın.

63. $x^3 - 3x - 1 = 0$

64. $2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$

65. $x(x - 1)^2 = 1$ (tek kök)

66. $x^x = 2$

67. $\sqrt{x} + \sqrt{1 + x} = 4$

68. $x^3 - 15x + 1 = 0$ (üç kök)

69. $\cos x = x$ (tek kök) Radyan mod kullanmaya dikkat edin.

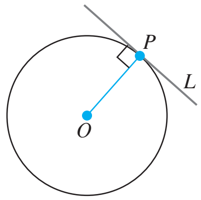
70. $2 \sin x = x$ (üç kök) Radyan mod kullanmaya dikkat edin.

2.7 Teğetler ve Türevler

Bu bölümde, Bölüm 2.1'de başlanan kiriş ve teğet tartışmasına devam edilmektedir. Eğrilerin teğetlerini bulmak için kirişlerin eğimlerinin limitlerini hesaplıyoruz.

Bir Eğrinin Teğeti Nedir?

Çemberler için teğet kavramı açıktır. Bir L doğrusu çemberin bir P noktasından P'deki yarıçapa dik olarak geçiyorsa, L çembere P'de teğettir (Şekil 2.63). Böyle bir doğru çembere sadece dokunur. Fakat bir L doğrusunun başka bir C eğrisine bir P noktasında teğet

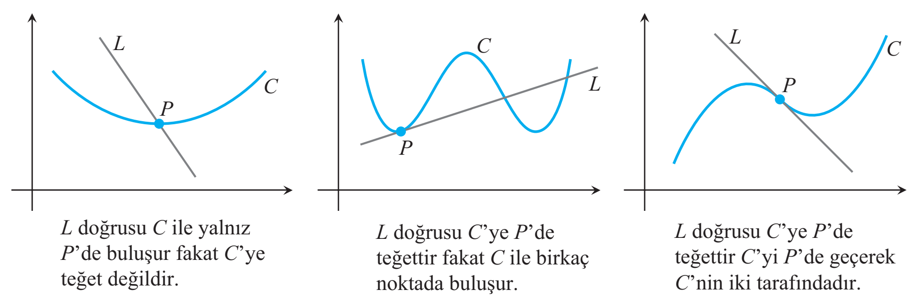


ŞEKİL 2.63 L doğrusu, P'den OP yarıçapına dik olarak geçerse çembere teğettir.

çembere sadece *dokunur*. Fakat bir L doğrusunun başka bir C eğrisine bir P noktasında teğet olması ne demektir? Çemberin geometrisinden genelleştirerek, bunun aşağıdakilerden biri anlamına geldiğini söyleyebiliriz.

1. L doğrusu P'den, P ile C'nin merkezini birleştiren doğruya dik olarak geçer.
2. L doğrusu C'nin tek bir noktasından, yani P'den geçer.
3. L doğrusu P'den geçer ve C'nin sadece bir tarafında bulunur.

Bu ifadeler, C bir çemberse geçerliyken, daha genel eğriler için hiçbiri tutarlı olarak çalışmaz. Çoğu eğrinin bir merkezi yoktur ve teğet olarak adlandırmak istediğimiz bir doğru C'yi başka noktalarda kesebilir veya teğet noktasında C'yi kesebilir (Şekil 2.64).



ŞEKİL 2.64 Teğet doğrular hakkında söylenenlerin doğrulanmaması

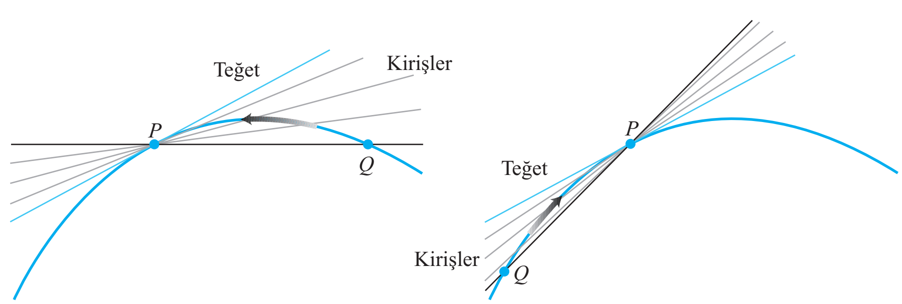
Tarihsel Biyografi

Pierre de Fermat
(1601–1665)

Genel eğrilerde teğet kavramını tanımlamak için, P'den ve eğri üzerinde giderek P'ye yaklaşan Q noktalarından geçen kirişleri de göz önüne alan dinamik bir yaklaşıma gerek vardır (Şekil 2.65). Bu yaklaşım şöyledir:

1. *Hesaplayabildiklerimizle*, yani PQ kirişinin eğimiyle işe başlarız.
2. Q eğri üzerinde P'ye yaklaşırken kiriş eğiminin limitine bakarız.
3. Limit varsa, bunu eğrinin P noktasındaki eğimi olarak alır ve eğrinin P noktasındaki teğetini P'den bu eğimle geçen doğru olarak tanımlarız.

Bu yaklaşım Bölüm 2.1 deki serbest düşen taş ve meyve sineği örneklerinde yapmış olduğumuz şeydir.



ŞEKİL 2.65 Teğet kavramına dinamik yaklaşım. Eğrinin P noktasındaki teğeti, eğimi $Q \to P$ ikenki kiriş eğimlerinin limiti olan, P'den geçen doğrudur.

ÖRNEK 1 Bir Parabole Teğet Doğru

$y = x^2$ parabolünün $P(2, 4)$ noktasındaki eğimini bulun. Parabolün bu noktadaki teğetinin denklemini yazın.

Çözüm $P(2, 4)$ ve yakınındaki $Q(2 + h, (2 + h)^2)$ noktalarından geçen bir kirişle işe başlarız. PQ kirişinin eğimi için bir ifade bulur ve Q eğri üzerinde P'ye yaklaşırken ne olduğuna bakarız.

$$\text{Kiriş eğimi} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4.$$

$h > 0$ ise, Q P'nin üst sağ tarafında bulunur (Şekil 2.66). $h < 0$ ise, Q P'nin sol tarafında bulunur (gösterilmemiştir). Her iki durumda da, Q eğri üzerinde P'ye yaklaşırken, h sıfıra ve kiriş eğimi 4'e yaklaşır:

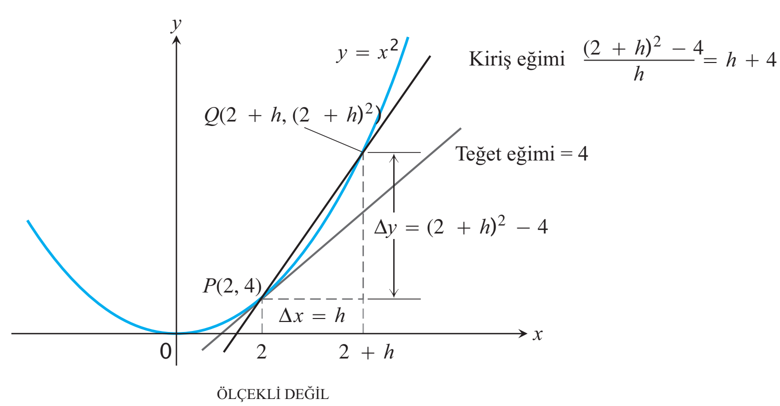
$$\lim_{h \to 0} (h + 4) = 4.$$

Parabolün P noktasındaki eğimini 4 olarak alırız.

Parabolün P'deki teğeti, P'den 4 eğimiyle geçen doğrudur:

$$y = 4 + 4(x - 2) \qquad \text{Nokta-eğim denklemi}$$
$$y = 4x - 4.$$

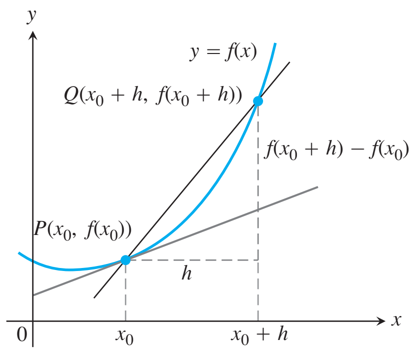
■



ŞEKİL 2.66 $y = x^2$ parabolünün $P(2, 4)$ noktasındaki eğimini bulunması (Örnek 1).

Bir Fonksiyonun Grafiğinin Teğetini Bulma

Bir eğriye teğet bulma problemi, onyedinci yüzyıl başlarının başlıca matematik problemi idi. Optikte, bir ışık ışınının eğrisel bir merceğe girdiği açıyı teğet belirliyordu. Mekanikte, hareket eden bir cismin, yolu boyunca her noktadaki yönünü teğet belirliyordu. Geometride, iki eğrinin kesim noktasındaki teğetleri eğrilerin hangi açı ile kesiştiklerini belirliyordu. Herhangi bir $y = f(x)$ eğrisinin $P(x_0, f(x_0))$ noktasındaki teğetini bulmak için, aynı dinamik yöntemi kullanırız. P'den ve bir $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$ noktasından geçen kirişin eğimini hesaplarız ve $h \to 0$ iken eğimin limitini buluruz (Şekil 2.67). Limit varsa, buna eğrinin P'deki eğimi deriz ve P'deki teğeti P'den bu eğimle geçen doğru olarak tanımlarız.



ŞEKİL 2.67 P deki teğet doğrunun eğimi $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 'dir.

TANIMLAR Eğim, Teğet Doğru

$y = f(x)$ **eğrisinin** $P(x_0, f(x_0))$ noktasındaki eğimi

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad \text{(limitin olması koşuluyla)}$$

sayısıdır. Eğrinin P'deki **teğeti** ise, P'den bu eğimle geçen doğrudur.

Her yeni tanım yaptığımızda, istediğimiz sonucu verip vermediğini görmek için bunu bildiğimiz şeyler üzerinde denemek yararlıdır. Örnek 2, eğimin bu yeni tanımının, dikey olmayan doğrulara uygulandığında Bölüm 1.2'deki eski tanımla uyuştuğunu göstermektedir.

ÖRNEK 2 Tanımı Test Etmek

$y = mx + b$ doğrusunun herhangi bir $(x_0, mx_0 + b)$ noktasındaki teğetinin kendisi olduğunu gösterin.

Çözüm $f(x) = mx + b$ yazar ve yapacaklarımızı üç adıma böleriz.

1. *$f(x_0)$ ve $f(x_0 + h)$'ı bulun.*

$$f(x_0) = mx_0 + b$$
$$f(x_0+h) = m(x_0+h) + b = mx_0 + mh + b$$

2. *$\lim_{h\to 0}(f(x_0+h) - f(x_0))/h$ eğimini bulun.*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(mx_0+mh+b)-(mx_0+b)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{mh}{h} = m$$

3. *Nokta-eğim denklemini kullanarak teğeti bulun.* $(x, mx_0 + b)$ noktasındaki teğet şu şekildedir:

$$y = (mx_0 + b) + m(x - x_0)$$
$$y = mx_0 + b + mx - mx_0$$
$$y = mx + b.$$

■

Örnek 2 deki adımları özetleyelim.

$y = f(x)$ eğrisinin (x_0, y_0) noktasındaki teğetinin bulunması

1. $f(x_0)$ ve $f(x_0 + h)$'ı hesaplayın.

2. Eğimi hesaplayın

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

3. Limit varsa, teğeti

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

olarak bulun.

ÖRNEK 3 $y = 1/x,\ x \neq 0$'ın eğimi ve teğeti

(a) $y = 1/x$ eğrisinin $x = a \neq 0$'daki eğimini bulun.

(b) Eğim nerede $-1/4$ olur?

(c) a değiştikçe, $(a, 1/a)$) noktasında eğrinin teğetine ne olur?

Çözüm

(a) Burada, $f(x) = 1/x$'tir. $(a, 1/a)$'daki eğim ise

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{ha(a+h)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}\end{aligned}$$

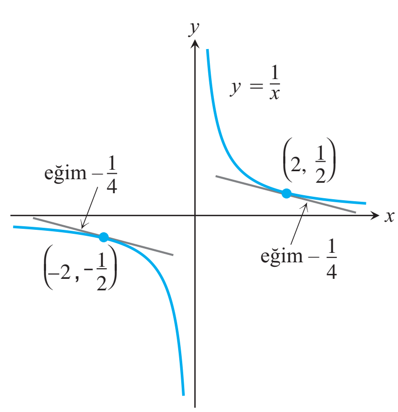
olarak bulunur. $h = 0$ yazıp limiti hesaplayabileceğimiz son adıma gelene kadar her satırın başında "$\lim_{h\to 0}$" yazmak zorunda olduğumuza dikkat edin. a sayısı pozitif veya negatif olabilir fakat sıfır olamaz.

(b) $x = a$ olduğu noktada $y = 1/xy$'in eğimi $-1/a^2$'dir.

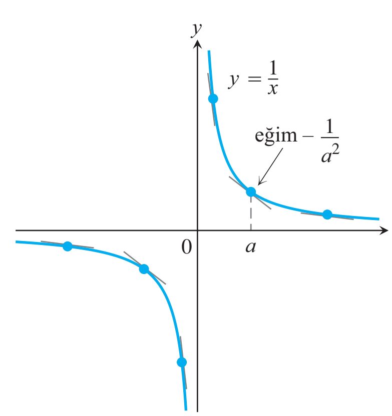
$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}$$

ise, eğim $-1/4$ olacaktır. Bu denklem $a^2 = 4$, yani $a = 2$ veya $a = -2$'ye denktir. $(2, 1/2)$ ve $(-2, -1/2)$ noktalarında eğrinin eğimi $-1/4$'tür (Şekil 2.68).

(c) $a \neq 0$ ise $-1/a^2$ eğimi her zaman negatiftir. $a \to 0^+$ iken, eğim $-\infty$'a yaklaşır ve teğet giderek dikleşir (Şekil 2.69). $a \to 0^-$ iken de bunu görürüz. a orijinden uzaklaştıkça, eğim 0^-'ye yaklaşır ve teğet yatay hale gelir. ■



ŞEKİL 2.68 $y = 1/x$'ın eğimi $-1/4$ olan iki teğeti (Örnek 3)



ŞEKİL 2.69 Orijine doğru dikleşen teğetler, teğet noktası uzaklaştıkça daha düz hale gelir.

Değişim Oranları: Bir Noktada Türev

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ifadesine **f'nin x_0'da h artımıyla fark bölümü** adı verilir. Fark bölümünün h sıfıra yaklaşırken bir limiti varsa, bu limite **f'nin x_0'daki türevi** denir. Fark bölümünü bir kirişin eğimi olarak yorumlarsak, türev $x = x_0$ noktasında eğrinin ve teğetinin eğimini verir. Fark bölümünü, Bölüm 2.1'de yaptığımız gibi, ortalama bir değişim oranı olarak yorumlarsak, türev $x = x_0$ noktasında fonksiyonun x'e göre değişim oranını verir. Türev, analizde kullanılan en önemli iki matematiksel araçtan biridir. Türevi Bölüm 3'de daha yakından inceleyeceğiz. Diğer önemli araç integraldir ve onun incelemesini Bölüm 5 te başlatıyoruz

ÖRNEK 4 Anlık hız (Bölüm 2.1'deki Örnek 1 ve 2'nin devamı)

Bölüm 2.1'deki Örnek 1 ve 2'de, dünya yüzeyi yakınında, durgun halden başlayıp serbest düşen bir taşın hızını inceledik. İlk t saniye içinde taşın $y = 16t^2$ ft düştüğünü bulduk ve taşın $t = 1$ anındaki hızını tahmin etmek için giderek azalan aralıklarda bir dizi ortalama hız dizisi kullandık. Bu anda taşın hızı tam olarak neydi?

Çözüm $f(t) = 16t^2$ olsun. Taşın $t = 1$ ve $t = 1 + h$ saniye aralığındaki ortalama hızı

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{16(1+h)^2-16(1)^2}{h} = \frac{16(h^2+2h)}{h} = 16(h+2)$$

idi. Taşın $t = 1$ anındaki hızı ise

$$\lim_{h\to 0} 16(h+2) = 16(0+2) = 32 \quad \text{ft/sn}$$

olur. Bu da başlangıçtaki 32 ft/sn'lik tahminimizi doğrular. ■

Özet

Eğrilerin eğimlerini, bir eğriye teğet olan doğruları, bir fonksiyonun değişim oranını, fark bölümünün limitini ve bir fonksiyonun bir noktadaki türevini tartışıyorduk. Bu fikirlerin hepsi aşağıda özetlenen aynı şeye götürür:

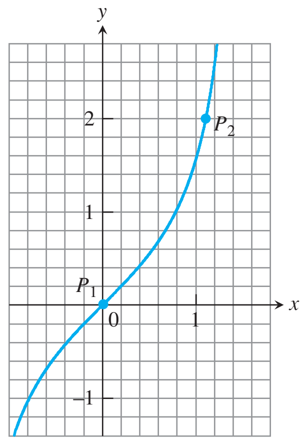
1. $y = f(x)$'in $x = x_0$'daki eğimi
2. $y = f(x)$ eğrisinin $x = x_0$'daki teğetinin eğimi
3. $f(x)$'in $x = x_0$'daki x'e göre değişim oranı
4. f'in $x = x_0$'daki türevi
5. Fark bölümünün limiti, $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

ALIŞTIRMALAR 2.7

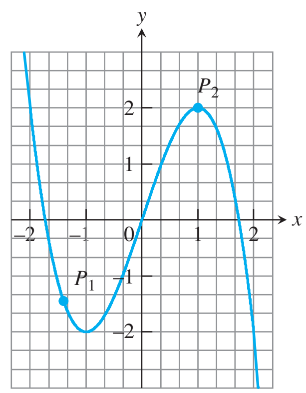
Eğimler ve Teğetler

1–4 alıştırmalarında, bölmeleri ve köşeleri kullanarak P_1 ve P_2 noktalarında (y-birim başına x-birim olarak) eğrinin eğimini kabaca bulun. Grafikler basımda kaymış olabileceklerinden, sonuçlarınız kitabın arkasındakilerden farklı olabilir.

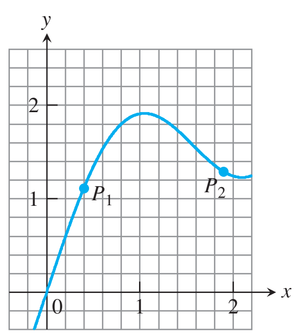
1.



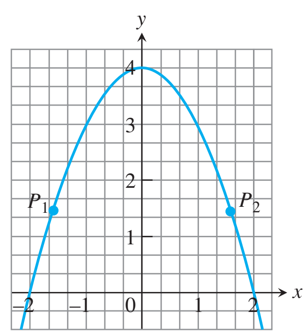
2.



3.



4.



5–10 alıştırmalarında, verilen noktada eğrinin teğet denklemini bulun. Eğriyi ve teğetini birlikte çizin.

5. $y = 4 - x^2, \quad (-1, 3)$ **6.** $y = (x-1)^2 + 1, \quad (1, 1)$

7. $y = 2\sqrt{x}, \quad (1, 2)$ **8.** $y = \dfrac{1}{x^2}, \quad (-1, 1)$

9. $y = x^3, \quad (-2, -8)$ **10.** $y = \dfrac{1}{x^3}, \quad \left(-2, -\dfrac{1}{8}\right)$

11–18 alıştırmalarında, verilen noktada fonksiyonun grafiğinin eğimini bulun. O noktadaki teğetin denklemini yazın.

11. $f(x) = x^2 + 1, \quad (2, 5)$ **12.** $f(x) = x - 2x^2, \quad (1, -1)$

13. $g(x) = \dfrac{x}{x-2}, \quad (3, 3)$ **14.** $g(x) = \dfrac{8}{x^2}, \quad (2, 2)$

15. $h(t) = t^3, \quad (2, 8)$ **16.** $h(t) = t^3 + 3t, \quad (1, 4)$

17. $f(x) = \sqrt{x}, \quad (4, 2)$ **18.** $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad (8, 3)$

19–22 alıştırmalarında, eğrinin verilen noktadaki eğimini bulun.

19. $y = 5x^2, \quad x = -1$ **20.** $y = 1 - x^2, \quad x = 2$

21. $y = \dfrac{1}{x-1}, \quad x = 3$ **22.** $y = \dfrac{x-1}{x+1}, \quad x = 0$

Belirtilen Eğimde Teğetler

23 ve 24 alıştırmalarındaki fonksiyonların grafiklerinin hangi noktalarında yatay teğet bulunur?

23. $f(x) = x^2 + 4x - 1$ **24.** $g(x) = x^3 - 3x$

25. Eğimleri –1 olan ve $y = 1/(x-1)$ eğrisine teğet olan bütün doğruların denklemlerini bulun.

26. Eğimi $1/4$ olan ve $y = \sqrt{x}$ eğrisine teğet olan doğrunun denklemini yazın.

Değişim Oranları

27. Bir kuleden düşen cisim 100m yüksekliğinde bir kulenin tepesinden bir cisim bırakılıyor. Cismin t saniye sonra yerden yüksekliği $100 - 4.9t^2$ metredir. Bırakıldıktan 2 sn. sonra düşüş hızı nedir?

28. Bir roketin hızı Fırlatıldıktan t saniye sonra, bir roketin yüksekliği $3t^2$ ft' dir. 10 sn. sonra roketin yükselme hızı nedir?

29. Bir roketin hızı Yarıçapı $r = 3$ olduğunda bir çemberin alanının $(A = \pi r^2)$ yarıçapına göre değişim oranı nedir?

30. Topun değişen hacmi Yarıçapı $r = 2$ olduğunda bir topun hacminin $(V = (4/3)\pi r^3)$ yarıçapına göre değişim oranı nedir?

Teğetleri Bulma

31.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğinin orijinde bir teğeti var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

32.

$$g(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğinin orijinde bir teğeti var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

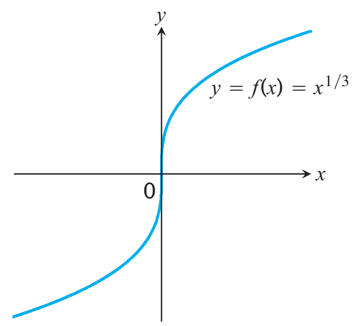
Dikey Teğetler

$\lim_{h\to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0))/h = \infty$ veya $-\infty$ ise, $y = f(x)$ eğrisinin $x = x_0$ noktasında dikey bir teğeti vardır deriz.

$x = 0$'da dikey teğet: (Şekle bakınız)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty$$

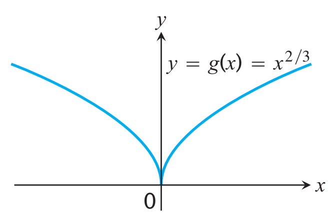


ORİJİNDE DİKEY TEĞET

$x = 0$'da dikey teğet yok: (aşağıdaki şekle bakınız)

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{2/3}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{1/3}}$$

çünkü limit sağdan ∞, soldan ise $-\infty$'dur.



ORİJİNDE DİKEY TEĞET YOK

33.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğinin orijinde dikey bir teğeti var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

34.

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğinin (0, 1) noktasında dikey bir teğeti var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

T **a.** 35–44 alıştırmalarındaki eğrileri çizin. Grafiklerin nerelerde dikey teğetleri vardır?

b. (a)'daki sonuçlarınızı limit hesaplamalarıyla doğrulayın. Ama önce alıştırma 33 ve 34'deki açıklamaları okuyun.

35. $y = x^{2/5}$

36. $y = x^{4/5}$

37. $y = x^{1/5}$

38. $y = x^{3/5}$

39. $y = 4x^{2/5} - 2x$

40. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

41. $y = x^{2/3} - (x-1)^{1/3}$

42. $y = x^{1/3} + (x-1)^{1/3}$

43. $y = \begin{cases} -\sqrt{|x|}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

44. $y = \sqrt{|4-x|}$

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Kirişleri ve Teğetleri Çizmek

45–48 alıştırmalarındaki fonksiyonlar için aşağıda verilen adımları gerçekleştirmek için bir BCS kullanın.

a. $(x_0 - 1/2) \leq x \leq (x_0 + 3)$ aralığında $y = f(x)$ fonksiyonunu çizin.

b. x_0'sabit tutularak, x_0 daki

$$q(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

farklar oranı h adım büyüklüğünün bir fonksiyonu haline gelir. Bu fonksiyonu BCS'nizin çalışma alanına girin.

c. $h \to 0$ iken q limitini bulun.

d. h = 3, 2 ve 1 için $y = f(x_0) + q\cdot(x - x_0)$ kirişlerini tanımlayın. (a)'da verilen aralıkta f'yi ve teğeti ile birlikte çizin.

45. $f(x) = x^3 + 2x, \quad x_0 = 0$

46. $f(x) = x + \dfrac{5}{x}, \quad x_0 = 1$

47. $f(x) = x + \sin(2x), \quad x_0 = \pi/2$

48. $f(x) = \cos x + 4\sin(2x), \quad x_0 = \pi$

Bölüm 2 Tekrar Soruları

1. $g(t)$ fonksiyonunun $t = a$'dan $t = b$'ye kadar olan aralıktaki ortalama değişim oranı nedir?
2. $g(t)$ fonksiyonunun $t = t_0$'daki değişim oranını bulmak için hangi limit hesaplanmalıdır?
3. $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ limitinin gayri resmi veya sezgisel tanımı nedir? Tanım neden "gayri resmi" dir? Örnekler veriniz.
4. x x_0'a yaklaşırken bir $f(x)$ fonksiyonunun limitinin varlığı ve değeri $x = c$'de ne olduğuna bağlı mıdır? Açıklayın ve örnek verin.
5. Limit bulunmadığında ne gibi fonksiyon davranışları görülebilir? Örnekler veriniz.
6. Limit hesaplamak için hangi teoremler vardır? Teoremlerin nasıl kullanıldığına örnek verin.
7. Tek taraflı limitlerle limitlerin ilişkisi nedir? Bu ilişki bazen bir limiti hesaplamada veya bir limitin var olmadığını ispatlamada nasıl kullanılır? Örnek verin.

8. $\lim_{\theta \to 0} ((\sin\theta)/\theta)$ değeri nedir? θ'nın radyan veya derece olarak ölçülmesine bağlı mıdır? Açıklayınız.

9. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ tam olarak ne demektir? Limitin esas tanımında verilen bir f, L, x_0 ve $\epsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ değeri bulduğunuz bir örnek verin.

10. Aşağıdaki ifadelerin esas tanımlarını verin.

a. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$ **b.** $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$

c. $\lim_{x \to 2} f(x) = \infty$ **d.** $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$

11. $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ ve $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ tam olarak ne demektir? Örnekler veriniz.

12. $\lim_{x \to \pm\infty} k$ (k bir sabit) ve $\lim_{x \to \pm\infty} (1/x)$ nedir? Bu sonuçları diğer fonksiyonlara nasıl genişletirsiniz? Örnekler veriniz.

13. $x \to \pm\infty$ iken bir rasyonel fonksiyonun limitini nasıl bulursunuz? Örnekler veriniz.

14. Yatay, dikey ve eğik asimptotlar nelerdir? Örnekler veriniz.

15. Bir fonksiyonun, tanım aralığının bir iç noktasında sürekli olabilmesi için hangi koşullar sağlanmalıdır? Bir uç noktasında?

16. Bir fonksiyonun grafiğine bakmak fonksiyonun nerede sürekli olduğunu anlamanızda size nasıl yardımcı olur?

17. Bir fonksiyonun bir noktada sağdan veya soldan sürekli olması ne anlama gelir? Süreklilik ve tek taraflı süreklilik arasındaki ilişki nedir?

18. Polinomlar, rasyonel fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlar, fonksiyonların rasyonel kuvvetleri ve cebirsel kombinasyonları, bileşke fonksiyonlar ve fonksiyonların mutlak değerlerinin sürekliliği hakkında ne söylenebilir?

19. Hangi koşullar altında bir fonksiyonu $x = c$ noktasında sürekli olacak şekilde genişletebilirsiniz? Örnek verin.

20. Bir fonksiyonun bir aralıkta sürekli olması ne demektir?

21. Bir fonksiyonun sürekli olması ne anlama gelir? Tanım kümesinin tamamında sürekli olmayan bir fonksiyonun, tanım kümesi içindeki belirli aralıklarda sürekli olabileceğini gösteren örnekler verin.

22. Süreksizliğin başlıca tipleri nelerdir? Her birine bir örnek veriniz. Kaldırılabilir süreksizlik nedir? Bir örnek veriniz.

23. Bir fonksiyonun Ara Değer Özelliğini sağlaması ne anlama gelir? Bir fonksiyonun, bir aralık üzerinde bu özelliği sağlanmasını, hangi koşullar garanti eder?

24. Genellikle kaleminizi kağıttan kaldırmadan grafiğini çizebildiğiniz bir fonksiyonun sürekli olduğu söylenir. Bu neden doğrudur?

25. Bir doğrunun bir C eğrisine P noktasında teğet olması ne demektir?

26. Aşağıdaki formülün önemi nedir?

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

27. $y = f(x)$ eğrisinin, üzerindeki bir (x_0, y_0) noktasındaki teğetini nasıl bulursunuz?

28. $y = f(x)$ eğrisinin $x = x_0$'daki eğimi, fonksiyonun $x = x_0$'daki x'e göre değişim oranına nasıl bağlıdır? f'nin x_0'daki türevine?

Bölüm 2 Problemler

Limitler ve Süreklilik

1.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le -1 \\ -x, & -1 < x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ -x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğini çizin. $x = -1, 0, 1$ noktalarının her birindeki limitleri, tek taraflı limitleri, sürekliliği ve tek taraflı sürekliliği detaylı olarak tartışın. Süreksizliklerden herhangi biri kaldırılabilir mi? Açıklayın.

2. Alıştırma 1'dekileri aşağıdaki fonksiyon için tekrarlayın.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ 1/x, & 0 < |x| < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

3. $f(t)$ ve $g(t)$'nin her t için tanımlı olduklarını $\lim_{t \to t_0} f(t) = -7$ ve $\lim_{t \to t_0} g(t) = 0$ olduğunu varsayın. Aşağıdaki fonksiyonların $t \to t_0$ için limitlerini bulun.

a. $3f(t)$ **b.** $(f(t))^2$

c. $f(t) \cdot g(t)$ **d.** $\dfrac{f(t)}{g(t) - 7}$

e. $\cos(g(t))$ **f.** $|f(t)|$

g. $f(t) + g(t)$ **h.** $1/f(t)$

4. $f(x)$ ve $g(x)$'in tüm x değerleri için tanımlandığını $\lim_{x\to 0} f(x) = 1/2$ ve $\lim_{x\to 0} g(x) = \sqrt{2}$ olduğunu varsayın. Aşağıdaki fonksiyonların $x \to 0$ için limitlerini bulun.

a. $-g(x)$ **b.** $g(x)\cdot f(x)$

c. $f(x) + g(x)$ **d.** $1/f(x)$

e. $x + f(x)$ **f.** $\dfrac{f(x)\cdot \cos x}{x - 1}$

Problem 5 ve 6'da, verilen ifadeler doğruysa $\lim_{x\to 0} g(x)$'in alması gereken değerleri bulun.

5. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{4 - g(x)}{x}\right) = 1$ **6.** $\lim_{x\to -4}\left(x \lim_{x\to 0} g(x)\right) = 2$

7. Aşağıdaki fonksiyonlar hangi aralıklarda süreklidir?

a. $f(x) = x^{1/3}$ **b.** $g(x) = x^{3/4}$

c. $h(x) = x^{-2/3}$ **d.** $k(x) = x^{-1/6}$

8. Aşağıdaki fonksiyonlar hangi aralıklarda süreklidir?

a. $f(x) = \tan x$ **b.** $g(x) = \csc x$

c. $h(x) = \dfrac{\cos x}{x - \pi}$ **d.** $k(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Limit Bulmak

9–16 alıştırmalarında limitleri bulun veya niye olmadığını açıklayın.

9. $\lim \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^3 + 5x^2 - 14x}$

a. $x \to 0$ iken **b.** $x \to 2$ iken

10. $\lim \dfrac{x^2 + x}{x^5 + 2x^4 + x^3}$

a. $x \to 0$ iken **b.** $x \to -1$ iken

11. $\lim_{x\to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$ **12.** $\lim_{x\to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x^4 - a^4}$

13. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$ **14.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$

15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{2 + x} - \dfrac{1}{2}}{x}$ **16.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{(2 + x)^3 - 8}{x}$

17–20 alıştırmalarında x belirtilen değere yaklaşırken $g(x)$'in limitini bulun.

17. $\lim_{x\to 0^+} (4g(x))^{1/3} = 2$ **18.** $\lim_{x\to\sqrt{5}} \dfrac{1}{x + g(x)} = 2$

19. $\lim_{x\to 1} \dfrac{3x^2 + 1}{g(x)} = \infty$ **20.** $\lim_{x\to -2} \dfrac{5 - x^2}{\sqrt{g(x)}} = 0$

Sonsuzda Limitler

21–30 alıştırmalarında limitleri bulun.

21. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x + 3}{5x + 7}$ **22.** $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2 + 3}{5x^2 + 7}$

23. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 8}{3x^3}$ **24.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2 - 7x + 1}$

25. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2 - 7x}{x + 1}$ **26.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^4 + x^3}{12x^3 + 128}$

27. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{\lfloor x \rfloor}$ (Bir grafik çiziciniz varsa, grafiği $-5 \le x \le 5$ fonksiyonu için çizmeyi deneyin)

28. $\lim_{\theta\to\infty} \dfrac{\cos\theta - 1}{\theta}$ (Bir grafik çiziciniz varsa, sonsuzdaki limiti "görmek" için $f(x) = x(\cos 1/x) - 1)$'i orijin yakınında çizmeyi deneyin)

29. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x + \sin x + 2\sqrt{x}}{x + \sin x}$ **30.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^{2/3} + x^{-1}}{x^{2/3} + \cos^2 x}$

Sürekli Genişlemeler

31. $f(x) = x(x^2 - 1)/|x^2 - 1|$ $x = 1$ veya -1'de sürekli olacak şekilde genişletilebilir mi? Yanıtınızı açıklayın. (Fonksiyonu çizin - grafiğini ilginç bulacaksınız.)

32. $f(x) = \sin 1/x$ fonksiyonunun $x = 0$'a sürekli genişlemesinin neden bulunmadığını açıklayın.

T 33–36 problemlerinde, verilen a noktasına bir sürekli genişlemesi olup olmadığını görmek amacıyla fonksiyonu çizin. Varsa, genişletilmiş fonksiyonun a'daki değerini grafikten bulun. Fonksiyonun sürekli bir genişlemesi yok gibiyse, sağdan veya soldan sürekli olacak şekilde genişletilebilir mi? Genişletilebilirse, genişletilmiş fonksiyonun değeri ne olmalıdır?

33. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x - \sqrt[4]{x}}$, $a = 1$ **34.** $g(\theta) = \dfrac{5\cos\theta}{4\theta - 2\pi}$, $a = \pi/2$

35. $h(t) = (1 + |t|)^{1/t}$, $a = 0$ **36.** $k(x) = \dfrac{x}{1 - 2^{|x|}}$, $a = 0$

Kökler

T **37.** $f(x) = x^3 - x - 1$ olsun.

a. f'nin -1 ile 2 arasında bir sıfırı olduğunu gösterin.

b. $f(x) = 0$ denklemini grafik olarak en fazla 10^{-8} hatayla çözün.

c. (b)'deki çözümün tam değerinin

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18}\right)^{1/3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18}\right)^{1/3}$$

olduğu gösterilebilir. Bu tam sonucu çıkarın ve (b)'deki değerle karşılaştırın.

T **38.** $f(\theta) = \theta^3 - 2\theta + 2$

a. f'nin -2 ile 0 arasında bir sıfırı olduğunu gösterin.

b. $f(\theta) = 0$ denklemini grafik olarak en fazla 10^{-4} hatayla çözün.

c. (b)'deki çözümün tam değerinin

$$\left(\sqrt{\frac{19}{27}} - 1\right)^{1/3} - \left(\sqrt{\frac{19}{27}} + 1\right)^{1/3}$$

olduğu gösterilebilir. Bu tam sonucu çıkarın ve (b)'deki değerle karşılaştırın.

Bölüm 2 Ek - İleri Alıştırmalar

T **1. 0^0'a değer vermek** Üs kuralları, a sıfırdan farklı bir sayıysa, $a^0 = 1$ olacağını söyler. Ayrıca, n pozitif bir sayıysa, $0^n = 0$ olacağını da belirtirler.

Bu kuralları 0^0'ı da kapsayacak şekilde genişletirsek, akıl karıştırıcı bir sonuçla karşılaşırız. İlk kural $0^0 = 1$ verirken, ikincisi $0^0 = 0$ verecektir.

Burada doğru veya yanlış bir soruyla uğraşmıyoruz. Görüldüğü gibi iki kural da geçersizdir, dolayısıyla bir çelişki yoktur. Aslında, başkalarını ikna edebilirsek, 0^0'ı istediğimiz değere sahip olacak şekilde tanımlayabiliriz.

0^0'ın değerinin ne olmasını isterdiniz? Aşağıda karar vermenize yardımcı olabilecek iki örnek vardır. (Başka bir örnek için Alıştırma 4'e bakın.)

a. $x = 0.1, 0.01, 0.001$ ve hesap makinenize sığacak kadar değer için x^x'i hesaplayın. Her seferinde elde ettiğiniz değeri yazın. Ne gibi bir kalıp görüyorsunuz?

b. $0 \le x \le 1$ için, $y = x^x$ fonksiyonunu çizin. $x \le 0$ için fonksiyon tanımlı olmadığı halde, grafik sağdan y-eksenine yaklaşacaktır. Hangi y-değerine yaklaşmaktadır? Daha iyi görebilmek için yakından bakın. Ne düşünüyorsunuz?

T **2. 0^0'ın 0 veya 1'den farklı bir şey olmasını istemeniz için bir neden** x pozitif değerlere doğru artarken, $1/x$ ve $1/(\ln x)$ sayılarının ikisi de sıfıra yaklaşır. x artarken

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{1/(\ln x)}$$

sayısına ne olur? Bunu bulmanın iki yolu aşağıda gösterilmektedir.

a. $x = 10, 100, 1000$ ve hesap makinenizin izin vereceği değerlerde f'yi hesaplayın. Ne gibi bir kalıp görüyorsunuz?

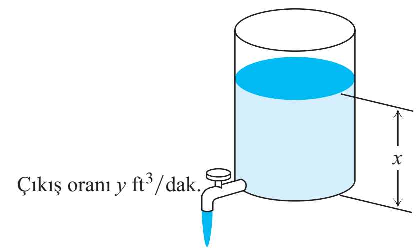
b. Orijini içeren çerçevelerde dahil olmak üzere, f'yi değişik çerçevelerde çizin. Ne görüyorsunuz? Grafik boyunca y değerlerini okuyun. Ne buluyorsunuz? Bölüm 6'da neler olup bittiği anlatılacaktır.

3. Lorentz kısalması Görelik teorisinde bir cismin, mesela bir roketin, boyu bir gözlemciye, roketin gözlemciye göre hızına bağlıymış gibi görünür. Gözlemci roketin boyunu hareketsizken L_0 olarak ölçmüşse, υ hızında iken roketin boyu

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}.$$

gibi görünecektir. Bu denklem Lorentz kısaltma formülüdür. Burada, 3×10^8 m/sn ışığın vakumdaki hızıdır. υ artarken L'ye ne olur? Neden soldan limite ihtiyaç vardır?

4. Bir su tankının akışını kontrol etme Toricelli kanunu aşağıdaki gibi bir tanktan su akıtırsanız, suyun y akış hızının bir sabit kere suyun x derinliğinin karekökü olduğunu söyler. Buradaki sabit çıkış musluğunun büyüklüğüne ve şekline bağlıdır.



Belirli bir tank için $y = \sqrt{x}/2$ olduğunu varsayın. Neredeyse sabit bir akış hızı elde etmek için arada bir tanka bir hortumla su ekliyorsunuz. Akış hızını

a. $y_0 = 1$ ft^3/dak hızının 0.2 ft^3/dak civarında,

b. $y_0 = 1$ ft^3/dak hızının 0.1 ft^3/dak civarında tutmak için, su yüksekliğini nasıl ayarlamalısınız?

5. Hassas bir alette ısıl genleşme Bildiğiniz gibi, çoğu metaller ısıtıldıklarında genleşir, soğutulduklarında ise büzülürler. Bir laboratuvar aletinin boyutları bazen o kadar önemlidir ki, yapıldığı yer ve kullanıldığı laboratuvardaki sıcaklığın değişmemesi gerekir. 70°F'ta 10 cm genişliğindeki bir alüminyum çubuk yakın bir t sıcaklığında

$$y = 10 + (t - 70) \times 10^{-4}$$

santimetre genişliğinde olacaktır. Genişliği 10 cm'den en fazla 0.0005 cm farklı olabilecek bir yerçekimi dalgası dedektörüyle çalıştığınızı varsayın. Bu hata payının aşılmaması için, sıcaklığı $t_0 = 70$°F'tan en fazla ne kadar farklı olabilir?

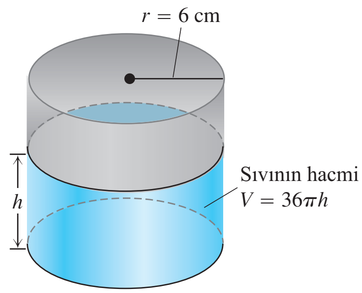
6. Bir ölçü kabındaki çizgiler Tipik bir 1 litrelik ölçüm kabının içi 6 cm yarıçaplı bir dik silindirdir (Şekle bakınız). Bu nedenle kaba konan suyun hacmi, dolu kısmın h yüksekliğinin bir fonksiyonu olacaktır:

$$V = \pi 6^2 h = 36\pi h$$

1 litre suyun (1000 cm^3) hacmini en fazla %1'lik bir hata yaparak (10 cm^3) ölçmek için h'yi ne kadar hassas ölçmeliyiz?



(a)



(b)

(a) 1 litrelik bir ölçü kabı, (b) 6 cm yarıçaplı bir dik silindir şeklinde modellenmesi

Limitin Kesin Tanımı

7–10 alıştırmalarında, fonksiyonun x_0 noktasında sürekli olduğunu göstermek için limitin esas tanımını kullanın.

7. $f(x) = x^2 - 7, \quad x_0 = 1$ **8.** $g(x) = 1/(2x), \quad x_0 = 1/4$

9. $h(x) = \sqrt{2x - 3}, \quad x_0 = 2$ **10.** $F(x) = \sqrt{9 - x}, \quad x_0 = 5$

11. Limitlerin tekliği Bir fonksiyonun bir noktada farklı limitleri olamayacağını gösterin. Yani, $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ ve $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_2$ ise, $L_1 = L_2$ olmalıdır.

12. Limitin Sabitle Çarpım Kuralını ispat edin:
$\lim_{x\to c} kf(x) = k \lim_{x\to c} f(x)$ herhangi bir k için.

13. Tek taraflı limitler $\lim_{x\to 0^+} f(x) = A$ ve $\lim_{x\to 0^-} f(x) = B$

ise, aşağıdakileri bulun.

a. $\lim_{x\to 0^+} f(x^3 - x)$ **b.** $\lim_{x\to 0^-} f(x^3 - x)$

c. $\lim_{x\to 0^+} f(x^2 - x^4)$ **d.** $\lim_{x\to 0^-} f(x^2 - x^4)$

14. Limitler ve süreklilik Aşağıdaki ifadelerden hangileri doğru, hangileri yanlıştır? Doğruysa, nedenini söyleyin; yanlışsa karşıt bir örnek (yani yanlışlığını ispatlayan bir örnek) verin.

a. $\lim_{x\to a} f(x)$ var, fakat $\lim_{x\to a} g(x)$ yoksa, $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$ yoktur.

b. $\lim_{x\to a} f(x)$ ve $\lim_{x\to a} g(x)$ limitlerinin ikisi de yoksa, $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$ yoktur.

c. f x'te sürekliyse, $|f|$'de süreklidir.

d. $|f|$ a'da sürekliyse, f'de süreklidir.

15 ve 16 alıştırmalarında, limitin esas tanımını kullanarak fonksiyonun verilen x noktasına sürekli bir genişlemesi olduğunu ispatlayın.

15. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}, \quad x = -1$ **16.** $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x - 6}, \quad x = 3$

17. Sadece tek noktada sürekli bir fonksiyon

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ rasyonel} \\ 0, & x \text{ irrasyonel} \end{cases} \quad \text{olsun.}$$

a. $x = 0$'da f'nin sürekli olduğunu gösterin.

b. Boş olmayan her reel sayı açık aralığının hem rasyonel hem de irrasyonel sayılar içerdiğini kullanarak x'in sıfırdan farklı bir değerinde f'nin sürekli olmadığını gösterin.

18. Dirichlet cetvel fonksiyonu x rasyonel bir sayıysa, x iki tamsayının bölümü, m/n, olarak tek bir şekilde yazılabilir. Burada $n > 0$ ve m ile n'nin tek ortak çarpanları birdir (Böyle bir kesire sadeleştirilemez deriz. Örneğin, $6/4$'ün sadeleştrilemez hali $3/2$'dir). $f(x)$ [0, 1] aralığında

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & x = m/n \text{ sadeleştirilemez bir kesir} \\ 0, & x \text{ irrasyonel} \end{cases}$$

ile tanımlansın. Örneğin $f(0) = f(1) = 1, \quad f(1/2) = 1/2,$ $f(1/3) = f(2/3) = 1/3, f(1/4) = f(3/4) = 1/4, \ldots.$

a. f'nin [0, 1] aralığındaki her rasyonel sayıda süreksiz olduğunu gösterin..

b. f'nin [0, 1] aralığındaki her irrasyonel sayıda sürekli olduğunu gösterin. (*İpucu*: ϵ verilmiş pozitif bir sayıysa, [0, 1]'de $f(r) \geq \epsilon$ olacak şekilde sonlu sayıda r rasyonel sayısı bulunacağını gösterin.)

c. f'nin grafiğini çizin. Sizce f'ye neden "cetvel fonksiyonu" denilmektedir?

19. Zıt noktalar Dünyanın ekvatorunda her zaman sıcaklıkları aynı olan bir çift zıt (bir çapın iki ucunda olan) nokta bulunduğuna inanmak için bir neden var mı? Açıklayın.

20. $\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = 3$ ve $\lim_{x\to c} (f(x) - g(x)) = -1$ ise, $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$ limitini bulun.

21. Neredeyse lineer olan ikinci derece bir denklemin kökleri a bir sabit olmak üzere, $ax^2 + 2x - 1 = 0$ denkleminin, $a > -1$ ve $a \neq 0$ ise, biri pozitif, diğeri negatif iki kökü vardır:

$$r_+(a) = \frac{-1 + \sqrt{1 + a}}{a}, \qquad r_-(a) = \frac{-1 - \sqrt{1 + a}}{a}.$$

a. $a \to 0$ ve $a \to -1^+$ iken $r_+(a)$'ya ne olur?

b. $a \to 0$ ve $a \to -1^+$ iken $r_-(a)$'ya ne olur?

c. $r_+(a)$ ve $r_-(a)$'yı a'nın bir fonksiyonu olarak çizip sonuçlarınızı doğrulayın. Gördüklerinizi açıklayın.

d. Daha fazla bilgi için, $f(x) = ax^2 + 2x - 1$'i $a = 1, 0.5, 0.2, 0.1$ ve 0.05 değerlerinde üst üste çizin.

22. Bir denklemin kökleri $x + 2 \cos x = 0$ denkleminin en az bir çözümünün olduğunu gösterin.

23. Sınırlı fonksiyonlar Bir D kümesindeki bütün x değerleri için $f(x) \leq N$ olacak şekilde bir N sayısı varsa, reel değerli f fonksiyonu D'de üstten sınırlıdır. Varsa, N sayısı f'nin D'deki üst sınırı adını alır ve f üstten N ile sınırlanmıştır denir. Benzer şekilde, D kümesindeki bütün x değerleri için $f(x) \geq M$ olacak şekilde bir M sayısı varsa, f fonksiyonu D'de alttan sınırlıdır deriz. Varsa, M sayısı f'nin D'deki alt sınırı adını alır ve f alttan M ile sınırlanmıştır denir. Hem alttan hem de üstten sınırlıysa, f fonksiyonu sınırlıdır.

a. Ancak ve yalnız D'deki bütün x değerleri için $|f(x)| \leq B$ olacak şekilde bir B sayısı varsa, f fonksiyonunun D'de sınırlı olacağını gösterin.

b. f'nin üstten N ile sınırlı olduğunu varsayın. $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ ise $L \leq N$ olduğunu gösterin.

c. f'nin alttan M ile sınırlı olduğunu varsayın. $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ ise, $L \geq M$ olduğunu gösterin.

24. ***Max*** $\{a, b\}$ ***ve min*** $\{a, b\}$

a. $\max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$

ifadesinin $a \geq b$ ise a'ya, $b \geq a$ ise b'ye eşit olacağını gösterin. Yani, başka bir deyişle, $\max\{a, b\}$ a ve b sayılarının büyük olanını verir.

b. İki sayının küçük olanını veren $\min\{a, b\}$ için de benzer bir ifade verin.

$\frac{\sin\theta}{\theta}$ İçeren Genelleştirilmiş Limitler

$\lim_{\theta\to 0} (\sin\theta)/\theta = 1$ formülü genelleştirilebilir. $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ ve $f(x)$ noktasını içeren bir açık aralıkta (c'nin kendisi hariç olabilir) $x = c$ daima sıfırdan farklı ise

$$\lim_{x\to c} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$$

dir.
Aşağıda bazı örnekler verilmiştir.

a. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1.$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 1 \cdot 0 = 0.$

c. $\lim_{x\to -1} \frac{\sin(x^2 - x - 2)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\sin(x^2 - x - 2)}{(x^2 - x - 2)}$

$\lim_{x\to -1} \frac{(x^2 - x - 2)}{x+1} = 1 \cdot \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = -3$

d. $\lim_{x\to 1} \frac{\sin\left(1-\sqrt{x}\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin\left(1-\sqrt{x}\right)}{1-\sqrt{x}} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1} =$

$1 \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{(x-1)\left(1+\sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{(x-1)\left(1+\sqrt{x}\right)} = -\frac{1}{2}$

25–30 alıştırmalarındaki limitleri bulun.

25. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(1-\cos x)}{x}$

26. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sin\sqrt{x}}$

27. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}$

28. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2 + x)}{x}$

29. $\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x-2}$

30. $\lim_{x\to 9} \frac{\sin\left(\sqrt{x} - 3\right)}{x-9}$

Bölüm 2 Teknoloji Uygulama Projeleri

Mathematica-Maple Modulü

Limite gelin

Bölüm I

Bölüm II (Sıfırın sıfırıncı kuvveti: Ne Anlama Gelir?)

Bölüm III (Tek Taraflı Limitler)

Grafik ve sayısal araştırmalarla limit kavramını gözünüzde canlandırın ve yorumlayın.

Bölüm IV (Bir Kuvvet Bir Farkı Ne Yapar)

x'in çeşitli kuvvetlerinde limitlerin ne kadar hassas olabileceklerini görün.

Mathematica-Maple Modulü

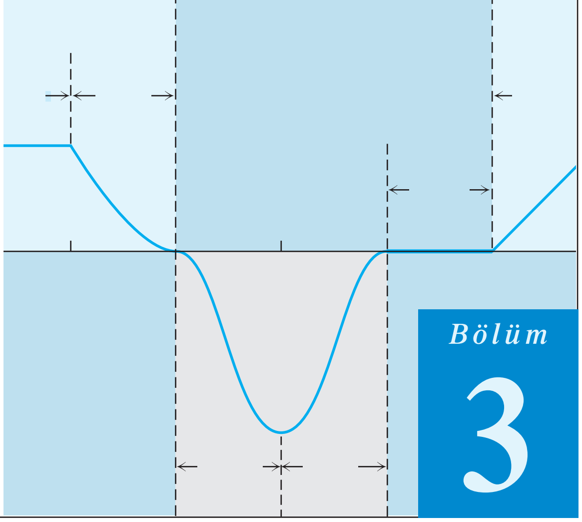
Sonsuza Gitmek

Bölüm I $x \to \infty$ **veya** $x \to -\infty$ **iken fonksiyonların davranışlarını keşfetmek)**

Bu modül, $x \to \infty$ veya $x \to -\infty$ iken bir fonksiyonun davranışını keşfetmek için dört örnek sunar.

Bölüm II (Büyüme Oranları)

Sürekli olmadığı halde sürekliymiş gibi *gözüken* grafikleri gözleyin. Sürpriz olarak görebileceğiniz bazı sonuçlar elde etmek için sürekliliğin birkaç çıkarımı keşfedilmiştir.



Bölüm

3

TÜREV

GİRİŞ Bölüm 2'de, bir eğrinin bir noktadaki eğimini kiriş eğimlerinin limiti olarak tanımladık. Türev adını alan bu limit bir fonksiyonun değişme hızını ölçer ve analizdeki en önemli fikirlerden biridir. Türevler hız ve ivme hesaplamada, bir hastalığın yayılma oranını tahmin etmede, verimliliği maksimize edecek şekilde üretim seviyesini belirlemede, silindirik bir kutunun ideal boyutlarını bulmada, tarih öncesi bir sanat eserinin yaşını belirlemede ve bir çok başka uygulamalar için kullanılır. Bu bölümde, türevleri hesaplamayı kolaylaştıracak yöntemler geliştireceğiz ve türevlerin karmaşık fonksiyonlara yaklaşımda nasıl kullanılacağını öğreneceğiz.

3.1 Fonksiyon Olarak Türev

TARIHSEL DENEME

Türev

Bölüm 2'in sonunda, bir $y = f(x)$ eğrisinin $x = x_0$ noktasındaki eğimini

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

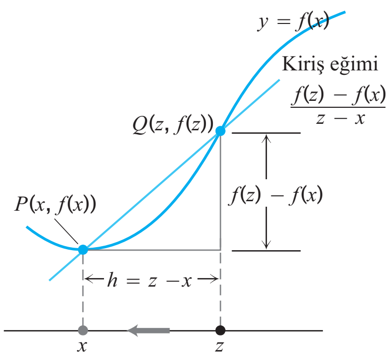
olarak tanımlamıştık. Eğer varsa, bu limite f'nin x_0'daki türevi demiştik. Bu bölümde türevi f'nin tanım aralığındaki her nokta göze alınarak f'den türetilmiş bir fonksiyon olarak inceleyeceğiz.

TANIM **Türev Fonksiyonu**

Bir $f(x)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevi, x'teki değeri

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

olan (limitin bulunması koşuluyla) f' fonksiyonudur .



f nin x'teki türevi

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

ŞEKİL 3.1 Bir f fonksiyonunun türevi için fark oranını yazma şekli ilgilendiğimiz noktaları nasıl işaretlediğimize bağlıdır.

Bağımsız değişken x'e göre türev aldığımızı belirtmek için, tanımda basitçe f yerine $f(x)$ notasyonunu kullanırız. f''nin tanım kümesi, f'nin tanım kümesinde limitin var olduğu noktaların kümesi, f'nin tanım kümesiyle aynı veya daha küçük olabilir. Belirli bir x için varsa, f'nin x'te bir türevi vardır (türevlenebilir) deriz. f'nin tanım kümesinin her noktası için f' varsa f'ye türevlenebilir deriz.

Eğer $z = x + h$ yazarsak $h = z - x$ olur ve ancak ve yalnız $z \to x$ ise $h \to 0$ dır. Bu nedenle, türevin bir eşdeğer tanımı aşağıdaki gibidir (bkz. Şekil 3.1).

Türev İçin Alternatif Bir Formül

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}.$$

Tanımı Kullanarak Türev Hesaplama

Bir türevi hesaplama işlemine **türev alma** denir. Türev almanın $y = f(x)$ fonksiyonuna uygulanan bir işlem olduğunu vurgulamak için $f'(x)$ türevini göstermenin bir başka yolu olan

$$\frac{d}{dx} f(x)$$

notasyonunu kullanırız. Bölüm 2.7 Örnek 2 ve 3 işlemin $y = mx + b$ ve $y = 1/x$'e uygulanmasını gösterir. Örnek 2

$$\frac{d}{dx}(mx + b) = m$$

olduğunu gösterir. Örneğin,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}x - 4\right) = \frac{3}{2}$$

Örnek 3'de ise,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

olduğunu gördük. Aşağıda iki örnek daha bulunmaktadır.

ÖRNEK 1 Tanımı Uygulamak

$f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$ fonksiyonun türevini alın.

Çözüm Elimizde $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$

ve

$$f(x+h) = \frac{(x+h)}{(x+h)-1}$$

bulunmaktadır, dolayısıyla

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \frac{\dfrac{x+h}{x+h-1} - \dfrac{x}{x-1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(x+h)(x-1) - x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(x+h-1)(x-1)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-cb}{bd}$

■

ÖRNEK 2 Karekök Fonksiyonunun Türevi

(a) $x > 0$ için $y = \sqrt{x}$'in türevini bulunuz.

(b) $y = \sqrt{x}$ eğrisinin $x = 4$'teki teğetini bulunuz.

$\sqrt{x}$'in $x > 0$ için türevine çok ihtiyaç duyacaksınız.

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Çözüm

(a) f''yü hesaplamak için eşdeğer formu kullanırız:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \\ &= \lim_{z\to x} \frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{z-x} \\ &= \lim_{z\to x} \frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{z}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)} \\ &= \lim_{z\to x} \frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(b) $x = 4$'te eğrinin eğimi

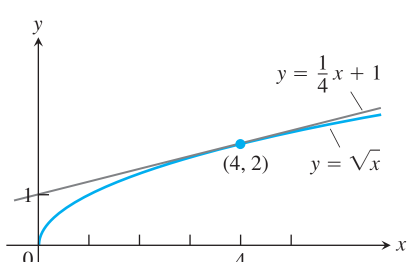
$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

tür. Teğet, $(4, 2)$ noktasından $1/4$ eğimiyle geçen doğrudur (Şekil 3.2):

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x-4)$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1$$

■



ŞEKİL 3.2 $y = \sqrt{x}$ eğrisi ve $(4, 2)$'deki teğeti. Teğetin eğimi, $x = 4$'teki türev hesaplanarak bulunur (Örnek 2).

$y = \sqrt{x}$'in $x = 0$'daki türevini örnek 6 da ele alacağız.

Gösterim

Bağımsız değişkenin x ve bağlı değişkenin y olduğu bir $y = f(x)$ fonksiyonunun türevini göstermenin bir çok yolu vardır. Bazı yaygın alternatif gösterimler şunlardır:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = D(f)(x) = D_x f(x)$$

d/dx ve D sembolleri türev almanın bir işlem olduğunu belirtirler ve **türev alma operatörleri** olarak adlandırılırlar. dy/dx'i "y'nin x'e göre türevi" olarak, df/dx ve $(d/dx)f(x)$'i de "f'nin x'e göre türevi olarak okuruz. "Üs" gösterimleri y' ve f' Newton'un türev için kullandığı gösterimlerden gelir. d/dx gösterimleri Leibniz'in kullandıklarıyla aynıdır. dy/dx sembolü bir oran olarak görülmemelidir (Bölüm 3.8 de "diferansiyel" kavramı tanıtılana kadar).

$D(f)$ notasyonunu, türev fonksiyonu f' yerine f fonksiyonunun tanım kümesi (domain) ile karıştırmama konusunda dikkatli olun. Farklılık içerikten anlaşılmalıdır.

Bir türevin belirli bir $x = a$ sayısındaki değerini belirtmek için şu notasyonları kullanırız:

$$f'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a}$$

Örneğin. Örnek 2b de şunları yazabilirdik

$$f'(4) = \left.\frac{d}{dx}\sqrt{x}\right|_{x=4} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Bazen bir ifadeyi hesaplamak için di çizgi | yerine köşeli parantez] kullanırız.

Türevin Grafiğini Çizmek

Eğimleri f'nin grafiğinden tahmin ederek, çoğunlukla $y = f(x)$'in türevinin makul bir çizimini yapabiliriz. Yani, xy-düzleminde $(x, f'(x))$ noktalarını işaretler ve düzgün bir eğri ile onları birleştiririz. Bu eğri $y = f'(x)$'i temsil eder.

ÖRNEK 3 Bir Türevin Grafiğini Çizmek

Şekil 3.3a'daki $y = f(x)$ fonksiyonunun türevini çizin.

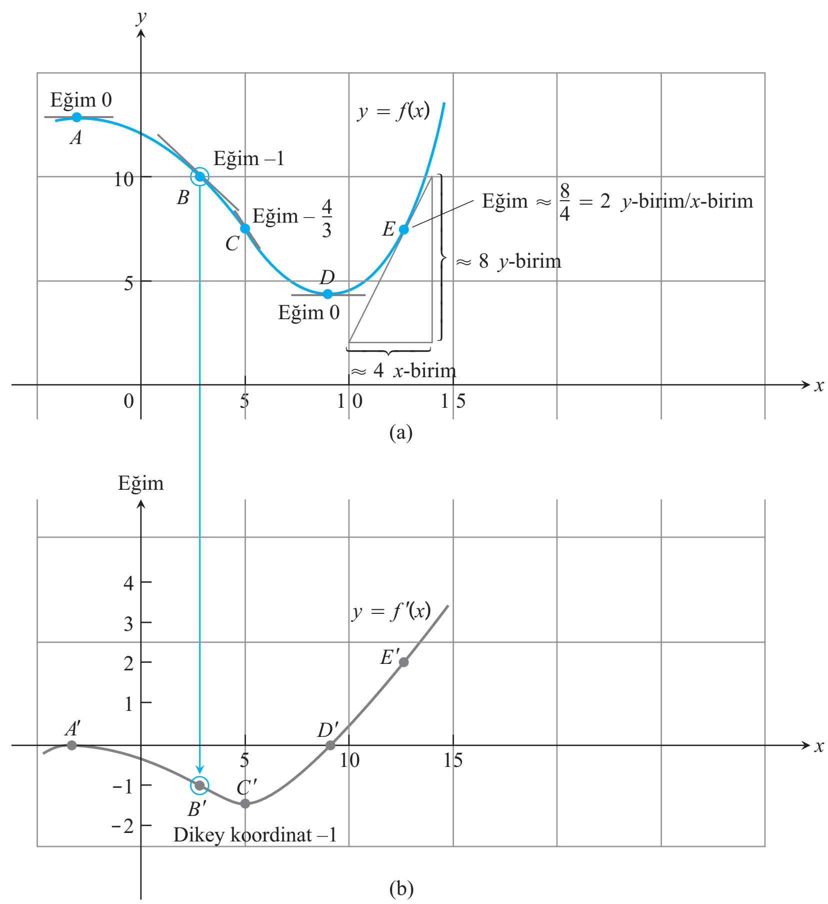
Çözüm Sık aralıklarla f grafiğine teğetler çizer ve teğetlerin eğimlerinden $f'(x)$'in bu noktalardaki değerlerini buluruz. Bunlara karşılık gelen $(x, f'(x))$ çiftlerini işaretler ve bunları Şekil 3.3b'de yapıldığı gibi düzgün bir eğriyle birleştiririz. ■

$y = f'(x)$ grafiğinden neler öğrenebiliriz? İlk bakışta şunlar görülebilir:

1. f'nin değişim oranının pozitif, negatif veya sıfır olduğu yerler;
2. Herhangi bir x değerindeki büyüme oranının kabaca büyüklüğü ve bu büyüklüğün $f(x)$'in büyüklüğüyle ilişkisi;
3. Değişim oranının kendisinin artıp artmadığı.

ÖRNEK 4 Kan Şekeri Konsantrasyonu

23 Nisan 1988'de, insan gücüyle çalışan *Daedalus* uçağı Yunanistan'ın güney doğusunda, Ege Denizi'ndeki Girit adasından Santorini adasına 119 km'lik rekor bir uçuş yaptı.



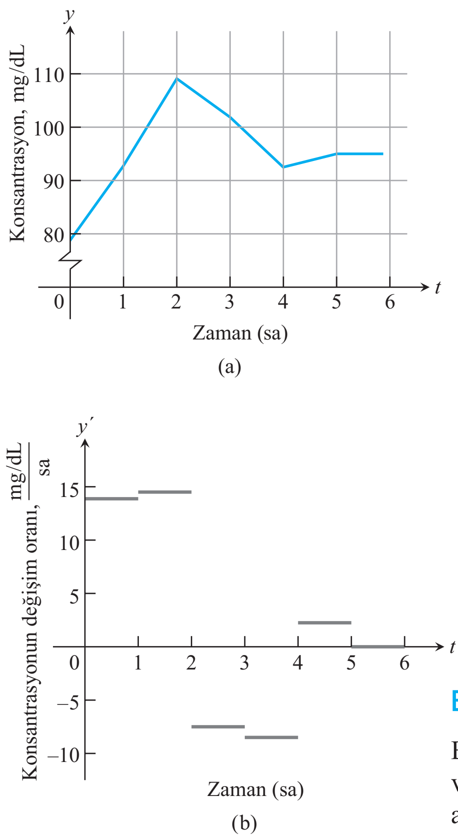
ŞEKİL 3.3 (a)'daki $y = f(x)$ grafiğinin eğimlerini işaretleyerek (b)'deki $y = f'(x)$'in grafiğini çizdik. Mesela, B''nin dikey koordinatı B'deki eğimdir. f''in grafiği f'nin eğiminin x ile nasıl değiştiğinin görsel bir kaydıdır.

Uçuştan önceki 6 saatlik dayanıklılık testlerinde, araştırmacılar pilot adaylarının kan şekeri konsantrasyonlarını ölçtü. Atlet pilotlardan birinin konsantrasyon grafiği, konsantrasyon miligram/desilitre ve zaman saat olmak üzere, Şekil 3.4a'da görülmektedir.

Grafik veri noktalarını birleştiren doğru parçalarından yapılmıştır. Her parçanın sabit eğimi ölçümler arasındaki konsantrasyonun türevini verir. Her parçanın eğimini hesapladık ve türevi Şekil 3.4b'de bir basamak fonksiyonu olarak çizdik. Örneğin, ilk saat için çizimi yaparken, konsantrasyonun 79 mg/dL'den 93 mg/dL'ye arttığını gözlemledik. Net artma $\Delta y = 93 - 79 = 14$ mg/dL'dir. Bunu $\Delta t = 1$ saat ile bölerek, ortalama değişim oranını buluruz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{14}{1} = 14 \text{ mg/dL/saatte}$$

Konsantrayonun bir köşesinin bulunduğu ve eğiminin olmadığı $t = 1, 2, \ldots, 5$ zamanlarında konsantrasyonun değişim oranı hakkında bir tahminde bulunamadığımıza dikkat edin. Türev basamak fonksiyonu bu zamanlarda tanımlı değildir. ■





23 Nisan 1988'de *Daedalus*'un uçuş rotası

ŞEKİL 3.4 (a) 6 saatlik uçuş öncesi dayanıklılık testi sırasında bir *Daedalus* pilotunun kanındaki şeker konsantrasyonu. (b) Pilotun kan şekeri konsantrasyonunun türevinin grafiği testin farklı aralıklarında konsantrasyonun ne kadar hızlı artıp düştüğünü göstermektedir.

Bir Aralıkta Türevlenebilirlik; Tek Taraflı Türevler

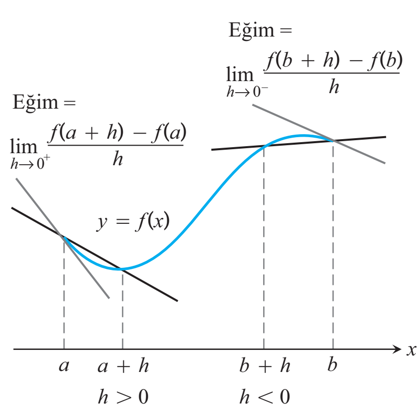
Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun (sonlu veya sonsuz) bir açık aralığın her noktasında bir türevi varsa, $f(x)$'e bu aralıkta **türevlenebilir** denir. Bir $[a, b]$ kapalı aralığının içi (a, b) açık aralığında türevlenebilirse ve uç noktalarında

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \textbf{a'da sağdan türev}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \qquad \textbf{b'de soldan türev}$$

limitleri varsa, $[a, b]$ kapalı aralığında türevlenebilirdir (Şekil 3.5).

Bir fonksiyonun tanım aralığının herhangi bir noktasında sağdan ve soldan türevler tanımlanabilir. Tek taraflı ve iki taraflı limitler arasındaki ilişki bu türevler için de geçerlidir. Bölüm 2.4'teki Teorem 6 dolayısıyla, bir fonksiyonun, ancak ve yalnız bir noktada sağdan ve soldan türevleri varsa ve bu tek traflı türevlerler eşitse o noktada türevi olabilir.



ŞEKİL 3.5 Uç noktalardaki türevler tek taraflı limitlerdir.

ÖRNEK 5 $y = |x|$ Fonksiyonu Orijinde Türevlenebilir Değildir

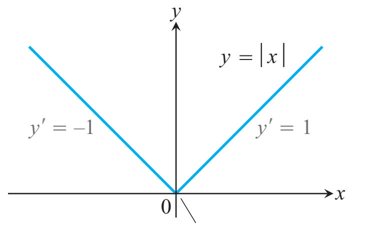
$y = |x|$ fonksiyonunun $(-\infty, 0)$ ve $(0, \infty)$ aralıklarında türevlenebilir olduğunu, fakat $x = 0$'da türevinin bulunmadığını gösterin.

Çözüm Orijinin sağında,

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(1 \cdot x) = 1 \qquad \frac{d}{dx}(mx + b) = m, |x| = x$$

ve solunda

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}(-1 \cdot x) = -1 \qquad |x| = -x$$



ŞEKİL 3.6 $y = |x|$ fonksiyonu, grafiğinde bir "köşenin" bulunduğu orijinde türevlenemez.

bulunur (Şekil 3.6). Orijinde türev olamaz, çünkü tek taraflı türevler bu noktada farklıdır:

$$\begin{aligned}
0\text{'da } |x|\text{'in sağdan türevi} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h} \qquad h>0 \text{ ise, } |h| = h \\
&= \lim_{h\to 0^+} 1 = 1 \\
0\text{'da } |x|\text{'in soldan türevi} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h} \qquad h<0 \text{ ise, } |h| = -h \\
&= \lim_{h\to 0^-} -1 = -1.
\end{aligned}$$

ÖRNEK 6 $y = \sqrt{x}$, $x = 0$'da Türevlenebilir Değildir

Örnek 2'de $x > 0$ için,

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

bulduk. $x = 0$'da türevin varlığını incelemek için tanımı uygularız:

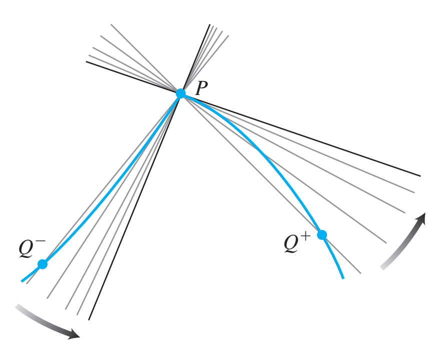
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}} = \infty$$

Sağdan limit sonlu olmadığından, $x = 0$'da türev yoktur. Orijini $y = \sqrt{x}$'in grafiği üzerindeki $(h, \sqrt{h})$ noktasına birleştiren kirişlerin eğimleri ∞'a yaklaşır. Grafiğin orijinde bir *dikey teğeti* vardır.

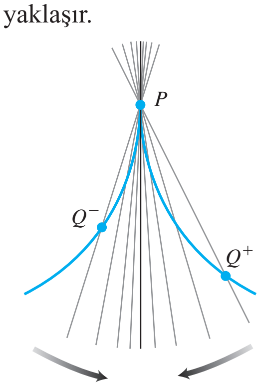
Ne Zaman Bir Fonksiyonun Bir Noktada Türevi *Yoktur*?

Bir fonksiyonun grafiğindeki $P(x_0, f(x_0))$'dan ve yakınındaki bir Q noktasından geçen kirişlerin eğimleri, Q P'ye yaklaşırken bir limite gidiyorsa, fonksiyonun x_0 noktasında türevi vardır. Q P'ye giderken, kirişler bir limit konuma ulaşmadıklarında veya dikey olduklarında, türev bulunmaz. Böylece, türevlenebilirlik bir f fonksiyonunun grafiği üzerinde "düzgünlük" koşulu dur. Grafiği düzgün olan bir fonksiyonun ise birkaç sebepten dolayı bir noktada türevi bulunmayabilir, grafiğinde aşağıdaki durumlar bulunuyorsa türevi yoktur:

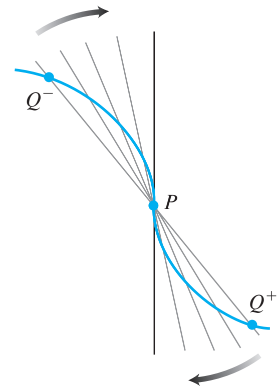
1. Bir *köşe*, tek taraflı türevler farklıdır.



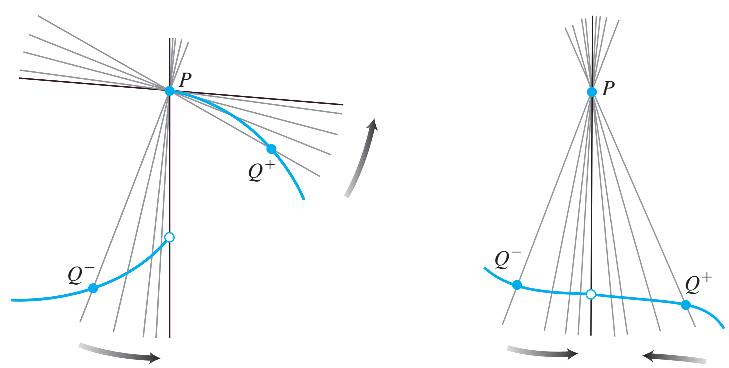
2. Bir *sivri uç*, PQ kirişinin eğimi bir taraftan ∞'a, diğer taraftan $-\infty$'a yaklaşır.



3. bir *dikey teğet, PQ* kirişinin eğimi iki taraftan da ∞'a veya iki taraftan da $-\infty$'a yaklaşır (Burada $-\infty$'a yaklaşmaktadır).



4. Bir *süreksizlik*.



Türevlenebilir Fonksiyonlar Süreklidir

Bir fonksiyon, türevinin bulunduğu her noktada süreklidir.

> **TEOREM 1 Türevlenebilirlik Sürekliliği Gerektirir**
> f'nin $x = c$'de bir türevi varsa, f fonksiyonu $x = c$'de süreklidir.

İspat $f'(c)$'nin var olduğu verilmiştir, $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ veya buna eşdeğer olarak $\lim_{h\to 0} f(c + h) = f(c)$ olduğunu göstermemiz gerekir. $h \neq 0$ ise,

$$\begin{aligned} f(c + h) &= f(c) + (f(c + h) - f(c)) \\ &= f(c) + \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \cdot h \end{aligned}$$

yazılabilir.

Şimdi, $h \to 0$ iken limit alalım. Bölüm 2.2'deki Teorem 1'den,

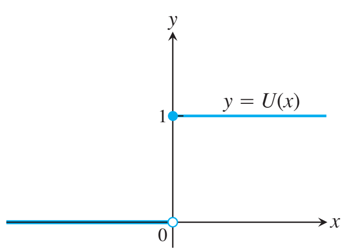
$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f(c+h) &= \lim_{h\to 0} f(c) + \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h \\
&= f(c) + f'(c)\cdot 0 \\
&= f(c) + 0 \\
&= f(c).
\end{aligned}$$ ■

bulunur.

Tek taraflı limitlerdeki ifadelerin benzerleri, f'nin $x = c$'de bir taraftan (sağdan veya soldan) türevi varsa, f'nin $x = c$'de o taraftan sürekli olduğunu gösterir.

Sayfa 154'teki Teorem 1 şunu söyler: bir fonksiyonun bir noktada süreksizliği varsa (örneğin sıçramalı bir süreksizlik) fonksiyon o noktada türevlenebilir olamaz. En büyük tam sayı fonksiyonu $y = \lfloor x \rfloor$ her tamsayısında $x = n$ türevsizdir (Bölüm 2.6, Örnek 4).

DİKKAT Teorem 1'in tersi yanlıştır. Örnek 5'te gördüğümüz gibi, bir fonksiyonun sürekli olduğu bir noktada türevinin olması gerekmez.



ŞEKİL 3.7 Birim basamak fonksiyonunun ara değer özelliği yoktur ve reel doğruda bir fonksiyonun türevi olamaz.

Türevlerin Ara Değer Özelliği

İlk olarak, Fransız matematikçi Jean Gaston Darboux (1842-1917) tarafından, 1875 yılında ispat edilen aşağıdaki teoremden görülebileceği gibi, her fonksiyon bir başka fonksiyonun türevi olamaz.

> **TEOREM 2**
> a ve b, f'nin türevli olduğu bir aralıkta iki noktaysa, f', $f'(a)$ ile $f'(b)$ arasındaki her değeri alır.

(İspatlamayacağımız) Teorem 2, bir aralıkta ara değer özelliğine sahip olmayan bir fonksiyonun, o aralıkta başka bir fonksiyonun türevi *olamayacağını* söyler. Örneğin Şekil 3.7 deki birim adım fonksiyonu, reel doğru üzerindeki hiçbir reel-değerli fonksiyonun türevi olamaz. Bölüm 5 te her sürekli fonksiyonun, başka bir fonksiyonun türevi olduğunu göreceğiz.

Bölüm 4.4'te, iki defa türevlenebilir bir fonksiyonun grafiğinde, "eğrilme" davranışının değiştiği bir noktada, neler olduğunu incelemek için Teorem 2'ye başvuracağız.

ALIŞTIRMALAR 3.1

Türev Fonksiyonlarını ve Değerlerini Bulma

Tanımı kullanarak, 1–6 alıştırmalarındaki fonksiyonların türevlerini bulun. Sonra istenilen türev değerlerini bulun.

1. $f(x) = 4 - x^2;\quad f'(-3), f'(0), f'(1)$
2. $F(x) = (x-1)^2 + 1;\quad F'(-1), F'(0), F'(2)$
3. $g(t) = \dfrac{1}{t^2};\quad g'(-1), g'(2), g'(\sqrt{3})$
4. $k(z) = \dfrac{1-z}{2z};\quad k'(-1), k'(1), k'(\sqrt{2})$
5. $p(\theta) = \sqrt{3\theta};\quad p'(1), p'(3), p'(2/3)$
6. $r(s) = \sqrt{2s+1};\quad r'(0), r'(1), r'(1/2)$

7–12 alıştırmalarında istenilen türevleri bulun.

7. $y = 2x^3$ ise $\dfrac{dy}{dx}$
8. $\dfrac{s^3}{2} + 1$ ise $\dfrac{dr}{ds}$

9. $s = \dfrac{t}{2t+1}$ ise $\dfrac{ds}{dt}$

10. $\upsilon = t - \dfrac{1}{t}$ ise $\dfrac{d\upsilon}{dt}$

11. $p = \dfrac{1}{\sqrt{q+1}}$ ise $\dfrac{dp}{dq}$

12. $z = \dfrac{1}{\sqrt{3w-2}}$ ise $\dfrac{dz}{dw}$

Eğimler ve Teğetler

13–16 alıştırmalarında, fonksiyonların türevini alın ve bağımsız değişkenin verilen değerinde teğetin eğimini bulun.

13. $f(x) = x + \dfrac{9}{x}, \quad x = -3$

14. $k(x) = \dfrac{1}{2+x}, \quad x = 2$

15. $s = t^3 - t^2, \quad t = -1$

16. $y = (x+1)^3, \quad x = -2$

17–18 alıştırmalarında, fonksiyonların türevlerini alın. Sonra fonksiyonun grafiği üzerinde belirtilen noktadaki teğetin denklemini bulun.

17. $y = f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{x-2}}, \quad (x, y) = (6, 4)$

18. $w = g(z) = 1 + \sqrt{4-z}, \quad (z, w) = (3, 2)$

19–22 alıştırmalarında, türevlerin değerini bulun.

19. $s = 1 - 3t^2$ ise $\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=-1}$

20. $y = 1 - \dfrac{1}{x}$ ise $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\sqrt{3}}$

21. $r = \dfrac{2}{\sqrt{4-\theta}}$ ise $\left.\dfrac{dr}{d\theta}\right|_{\theta=0}$

22. $w = z + \sqrt{z}$ ise $\left.\dfrac{dw}{dz}\right|_{z=4}$

Türevler İçin Alternatif Formülü Kullanmak

23–26 alıştırmalarındaki fonksiyonların türevlerini bulmak için

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

formülünü kullanın.

23. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

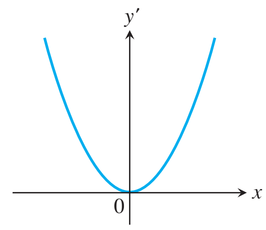
24. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

25. $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$

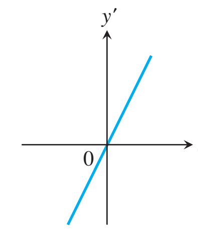
26. $g(x) = 1 + \sqrt{x}$

Grafikler

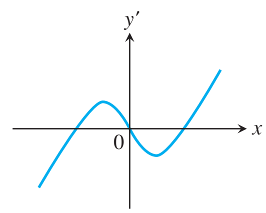
27–30 alıştırmalarında verilen grafikleri (a)–(d) şekillerinde çizilmiş olan türev grafikleriyle eşleştirin.



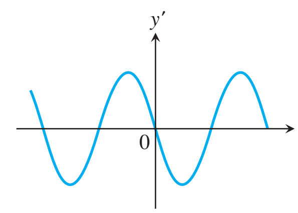
(a)



(b)

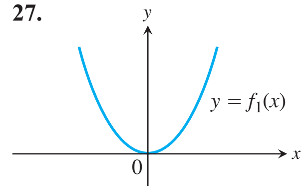


(c)

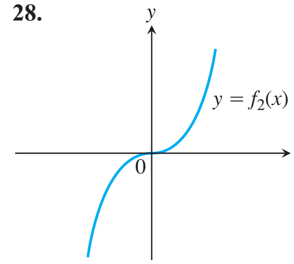


(d)

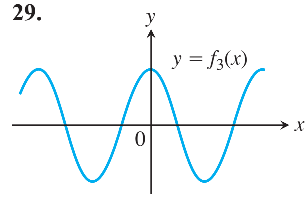
27.



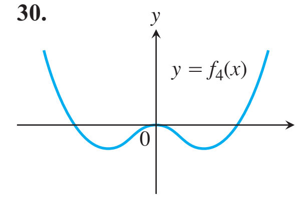
28.



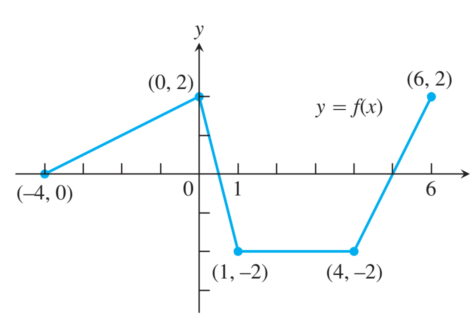
29.



30.



31. a. Şekildeki grafik uç uca eklenmiş doğru parçalarından oluşmaktadır. $[-4, 6]$ aralığının hangi noktalarında f' tanımlı değildir? Yanıtınızı açıklayın.



b. f'nin türevini çizin. Grafiğin bir basamak fonksiyonu göstermesi gerekir.

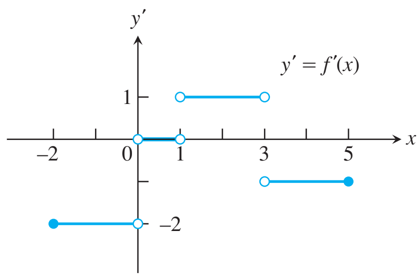
32. Bir fonksiyonu türevinden bulmak

a. $[-2, 5]$ kapalı aralığında f fonksiyonunu çizmek için aşağıdaki bilgileri kullanın.

i) f'nin grafiği uç uca eklenmiş doğru parçalarından oluşmaktadır.

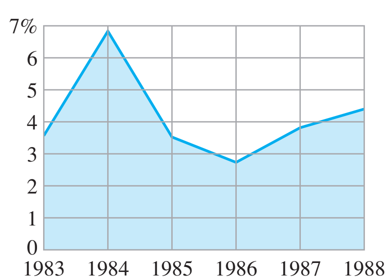
ii) Grafik $(-2, 3)$ noktasından başlamaktadır.

iii) f'nin türevi şekilde verilen basamak fonksiyonudur.



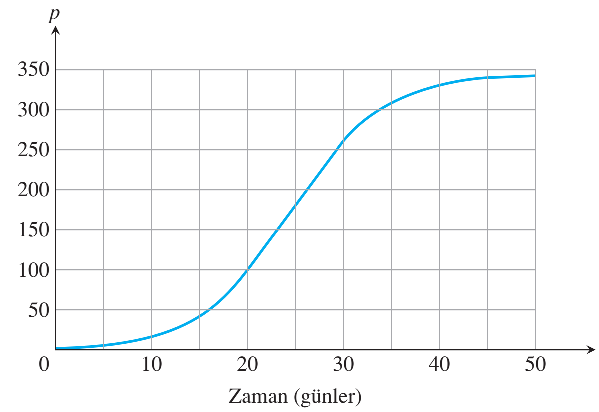
b. (a) şıkkını grafiğin $(-2, 3)$ yerine $(-2, 0)$'da başladığını varsayarak tekrarlayın.

33. Ekonomide büyüme Şekildeki grafikte 1983-1988 yılları arasındaki U.S. büyük ulusal üretimin (GNP) ortalama yıllık yüzde değişimi $y = f(t)$ verilmektedir. dy/dt'yi çizin (tanımlı olduğu yerlerde). (*Kaynak*: *Statistical Abstracts of the United States*, 110. baskı, U.S. Ticaret Odası, s.427)



34. Meyve Sinekleri (*Bölüm 2.1, Örnek 3'ün Devamı*) Kapalı ortamlarda üretilen topluluklar, başlangıçta az üyeleri varken yavaş bir şekilde, üreyen bireyler arttıkça ve kaynaklar yeterli olduğu sürece daha hızlı, en son olarak da çevrenin kaldırma kapasitesine ulaşınca yeniden yavaş bir şekilde büyürler.

a. Örnek 3'teki grafik yöntemi kullanarak, Bölüm 2.1'de verilen meyve sineği topluluğunun türevinin grafiğini çizin. Topluluğun grafiği burada yeniden verilmiştir.

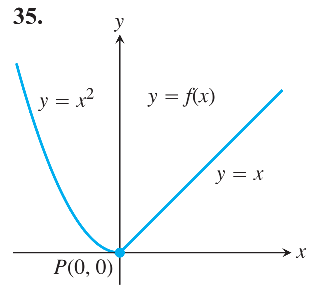


b. Topluluk hangi günlerde en hızlı, hangilerinde en yavaş artmaktadır?

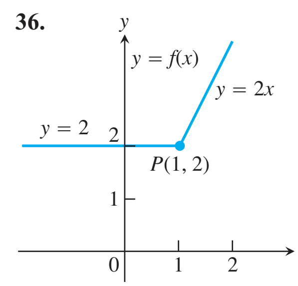
Tek Taraflı Türevler

35–38 alıştırmalarındaki fonksiyonların P noktasında türevi olmadığını göstermek için sağdan ve soldan türevleri karşılaştırın.

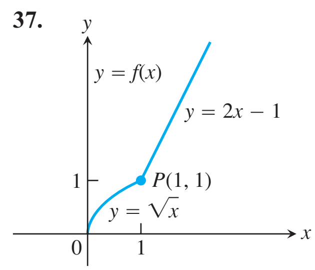
35.



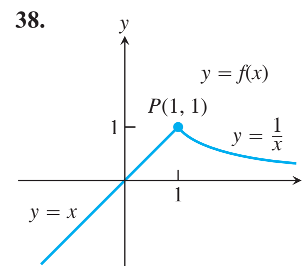
36.



37.



38.



Bir Aralık Üzerinde Türevlenebilirlik ve Süreklilik

39–44 alıştırmalarındaki her şekil, bir fonksiyonun bir D kapalı aralığındaki grafiğini göstermektedir. Tanım aralığının hangi noktalarında fonksiyon

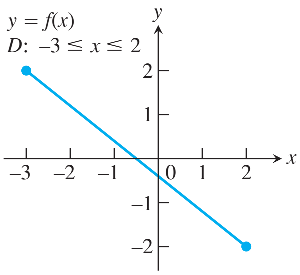
a. türevlenebilir?

b. süreklidir, fakat türevlenemez?

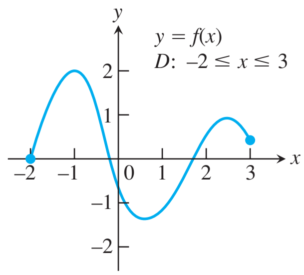
c. ne süreklidir, ne de türevlenebilir?

Yanıtlarınızı açıklayın.

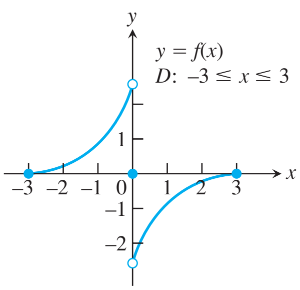
39.



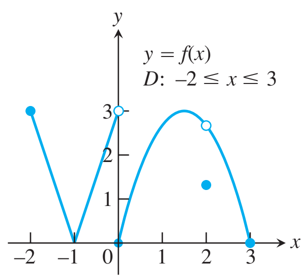
40.



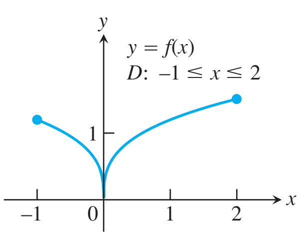
41.



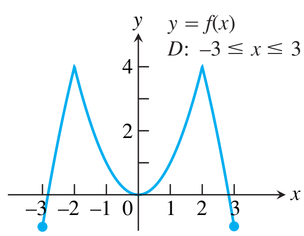
42.



43.



44.



Theori ve Örnekler

45–48 alıştırmalarında,

a. Verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun $f'(x)$ türevini bulun.

b. $y = f(x)$ ile $y = f'(x)$'i farklı koordinat eksenleri kullanarak yanyana çizin ve aşağıdaki soruları yanıtlayın.

c. Hangi x değerlerinde, varsa, f' pozitif? Sıfır? Negatiftir?

d. Hangi x değer aralıklarında, varsa, x-arttıkça $y = f(x)$ fonksiyonu da artar, veya x-azaldıkça azalır? Bunun (c) şıkkında bulduklarınızla ilişkisi nedir? (Bu ilişkiyi Bölüm 4'te daha yakından inceleyeceğiz.)

45. $y = -x^2$

46. $y = -1/x$

47. $y = x^3/3$

48. $y = x^4/4$

49. $y = x^3$ eğrisinin negatif bir eğimi var mıdır? Varsa, nerede bulunur? Yanıtınızı açıklayın.

50. $y = 2\sqrt{x}$ eğrisinin yatay bir teğeti var mıdır? Varsa, nerede bulunur? Yanıtınızı açıklayın.

51. Bir Parabole Teğet $y = 2x^2 - 13x + 5$ parabolünün eğimi –1 olan bir teğeti var mıdır? Varsa, teğet için bir denklem ve değme noktasını bulun. Yoksa, neden yoktur?

52. $y = \sqrt{x}$'e Teğet $y = \sqrt{x}$ eğrisinin herhangi bir teğeti x eksenini $x = -1$ noktasında keser mi? Kesiyorsa, teğet için bir denklem ve değme noktasını bulun. Kesmiyorsa, neden kesmez?

53. En büyük tam sayı $(-\infty, \infty)$ aralığında türevlenebilir herhangi bir fonksiyonun türevi $y = |x|$ (bkz. Şekil 2.55) olabilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

54. $y = |x|$'in Türevi $f(x) = |x|$ fonksiyonunun türevinin grafiğini çizin. Sonra $y = (|x| - 0)/(x - 0) = |x|/x$'i çizin. Ne görüyorsunuz?

55. $-f$'nin Türevi Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasında türevlenebilir olduğunu bilmek $-f$ fonksiyonunun $x = x_0$'da türevlenebilirliği hakkında bir şey söyler mi? Açıklayın.

56. Katların Türevi Bir $g(t)$ fonksiyonunun $t = 7$ noktasında türevlenebilir olduğunu bilmek $3g$ fonksiyonunun $t = 7$'de türevlenebilirliği hakkında bir şey söyler mi? Açıklayın.

57. Bir bölümün limiti $g(t)$ ve $h(t)$ fonksiyonlarının t'nin bütün değerlerinde tanımlı olduklarını ve $g(0) = h(0) = 0$ olduğunu varsayın. $\lim_{t\to 0}(g(t))/(h(t))$ var olabilir mi? Varsa, sıfıra eşit olmak zorunda mıdır? Açıklayın.

58. a. $f(x)$, $-1 \le x \le 1$ aralığında $|f(x)| \le x^2$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. f'nin $x = 0$'da türevlenebilir olduğunu gösterin ve $f'(0)$'ı bulun.

b. $x = 0$'da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun türevlenebileceğini gösterin ve $f'(0)$'ı bulun.

T **59.** $0 \le x \le 2$ olan bir çerçevede $y = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$ fonksiyonunu çizin. Yine aynı ekranda, $h = 1, 0.5, 0.1$ için

$$y = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

fonksiyonunu çizin. Sonra $h = -1, -0.5, -0.1$'i deneyin. Neler olduğunu açıklayın.

T **60.** $-2 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$ olan bir çerçevede $y = 3x^2$ fonksiyonunu çizin. Yine aynı ekranda, $h = 2, 1, 0.2$ için

$$y = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

fonksiyonunu çizin. Sonra $h = -2, -1, -0.2$'yi deneyin. Neler olduğunu açıklayın.

T **61. Weierstrass'ın hiçbir yerde türevlenemeyen sürekli fonksiyonu** $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2/3)^n \cos(9^n \pi x)$ Weierstrass fonksiyonunun ilk sekiz teriminin toplamı şöyledir:

$$g(x) = \cos(\pi x) + (2/3)^1 \cos(9\pi x) + (2/3)^2 \cos(9^2 \pi x) + (2/3)^3 \cos(9^3 \pi x) + \cdots + (2/3)^7 \cos(9^7 \pi x).$$

Bu toplamı çizin. İyice yakınlaştırın. Bu grafik ne kadar girintili çıkıntılıdır? Grafiğin baktığınız kısmının düzgün görüneceği bir çerçeve belirleyin.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

62–67 alıştırmalarındaki fonksiyonlara aşağıdaki adımları uygulamak için bir BCS kullanın.

a. Fonksiyonun genel davranışını görmek için $y = f(x)$'i çizin.

b. Herhangi bir h adım büyüklüğü için herhangi bir x noktasında q farklar oranını tanımlayın.

c. $h \to 0$ için limitini alın. Bu hangi formülü verir?

d. $x = x_0$ alın ve $y = f(x)$ fonksiyonu ile bu noktadaki teğetini birlikte çizin.

e. (c)'de elde edilen formüle x_0'dan büyük ve küçük değişik değerler verin. Ortaya çıkan sayılar grafiğinize bir anlam katıyor mu?

f. (c)'de bulduğunuz formülü çizin. Değerlerinin pozitif, negatif veya sıfır olmasının anlamı nedir? Bunlar (a) şıkkındaki grafiğinizle uyuşuyor mu? Yanıtınızı açıklayın.

62. $f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad x_0 = 1$

63. $f(x) = x^{1/3} + x^{2/3}, \quad x_0 = 1$

64. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}, \quad x_0 = 2$

65. $f(x) = \dfrac{x - 1}{3x^2 + 1}, \quad x_0 = -1$

66. $f(x) = \sin 2x, \quad x_0 = \pi/2$

67. $f(x) = x^2 \cos x, \quad x_0 = \pi/4$

3.2 Türev Kuralları

Bu bölüm, fonksiyon çeşitlerinden çok büyük bir bölümünün türevlerini almamızı sağlayan birkaç kural tanıtmaktadır. Bu kuralları burada ispat etmekle, her seferinde tanımı uygulamadan fonksiyonların türevlerini alabileceğiz.

Kuvvetler, Katlar, Toplamlar ve Farklar

Türev almanın birinci kuralı sabit her fonksiyonun türevinin sıfır olduğudur.

KURAL 1 Bir Sabit Fonksiyonun Türevi

f sabit fonksiyon $f(x) = c$ ise,

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

olur.

ÖRNEK 1

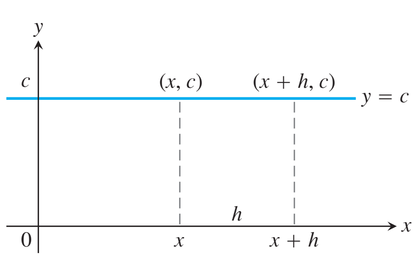
f'nin değeri sabit ve $f(x) = 8$ ise,

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(8) = 0$$

dır. Benzer şekilde,

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{ve} \qquad \frac{d}{dx}\left(\sqrt{3}\right) = 0$$

dır. ■



ŞEKİL 3.8 $(d/dx)(c) = 0$ kuralı sabit fonksiyonların değerlerinin asla değişmediğini ve yatay bir doğrunun eğiminin her noktada sıfır olduğunu söylemenin başka bir yoludur.

Kural 1'in İspatı Türev tanımını, sonuçları sabit c değeri olan $f(x) = c$ fonksiyonuna uygularız (Şekil 3.8). Her x değerinde

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$ ■

olduğunu buluruz.

İkinci kural n pozitif bir tamsayı ise, x^n'nin türevinin nasıl alacağını söyler.

KURAL 2 Pozitif Tamsayılar İçin Kuvvet Kuralı

n pozitif bir tamsayı ise,

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

olur.

Kuvvet kuralını uygulamak için, orijinal üs (n)'den 1 çıkarır ve sonucu n ile çarparız.

ÖRNEK 2 Kural 2'yi Yorumlama

f	x	x^2	x^3	x^4	$\cdots$
f'	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	$\cdots$

■

TARİHSEL BIYOGRAFİ

Richard Courant
(1888–1972)

Kural 2'nin Birinci İspatı

$$z^n - x^n = (z - x)(z^{n-1} + z^{n-2}x + \cdots + zx^{n-2} + x^{n-1})$$

formülü, sağ taraf çarpılarak sağlanabilir. Böylece, türev tanımının alternatif formundan

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z\to x}\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z\to x}\frac{z^n - x^n}{z - x} \\ &= \lim_{z\to x}(z^{n-1} + z^{n-2}x + \cdots + zx^{n-2} + x^{n-1}) \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

bulunur.

Kural 2'nin İkinci İspatı $f(x) = x^n$ ise, $f(x + h) = (x + h)^n$ olur. n pozitif bir tamsayı olduğundan, Binom Teoremine göre $(x + h)^n$ yi açarak

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x + h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right] \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

■

buluruz.

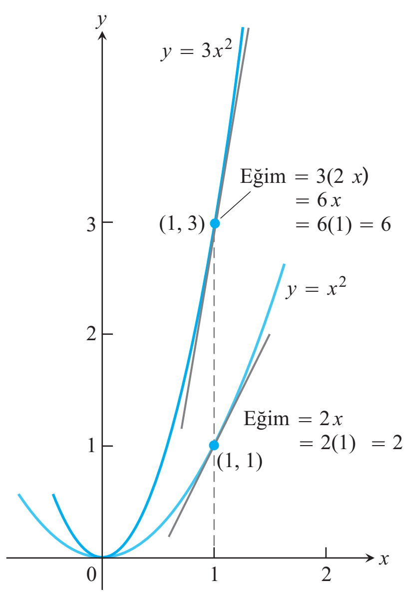
Üçüncü kural, türevlenebilir bir fonksiyon bir sabitle çarpıldığında türevinin de aynı sabitle çarpılacağını söyler.

KURAL 3 Sabitle Çarpım Kuralı

u x'in türevlenebilir bir fonksiyonu ve c bir sabit ise,

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

olur.



ŞEKİL 3.9 $y = x^2$ ve $y = 3x^2$ grafikleri. y-koordinatlarını üçle çarpmak eğimi üç katına çıkarır (Örnek 3).

Özel olarak, n pozitif bir tamsayı ise,

$$\frac{d}{dx}(cx^n) = cnx^{n-1}$$

olur.

ÖRNEK 3

(a)

$$\frac{d}{dx}(3x^2) = 3 \cdot 2x = 6x$$

türev formülü $y = x^2$ grafiğini her y koordinatını 3 ile çarparak yeniden ölçeklersek, her noktada eğimi 3 ile çarpacağımızı söyler (Şekil 3.9).

(b) Yararlı bir özel durum

Türevlenebilir bir fonksiyonun negatifinin türevi fonksiyonun türevinin negatifidir. Kural 3'te $c = -1$ alırsak

$$\frac{d}{dx}(-u) = \frac{d}{dx}(-1 \cdot u) = -1 \cdot \frac{d}{dx}(u) = -\frac{du}{dx}$$ ■

elde ederiz.

Kural 3'ün İspatı

$$\frac{d}{dx}cu = \lim_{h\to 0}\frac{cu(x+h) - cu(x)}{h} \quad f(x) = cu(x) \text{ ile türev tanımı}$$

$$= c\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad \text{Limit özelliği}$$

$$= c\frac{du}{dx} \quad u \text{ türevlenebilir}$$ ■

Bir sonraki kural, iki türevlenebilir fonksiyonun toplamının türevinin, türevlerinin toplamı olduğunu söyler.

Fonksiyonları u ve v ile gösterme

Bir türev alma formülüne ihtiyaç duyduğumuzda çalıştığımız fonksiyonlar büyük olasılıkla f ve g gibi harflerle temsil edileceklerdir. Formülü uygulamak istediğimizde, aynı harfleri farklı şekilde kullanmayı istemeyiz. Bundan kaçınmak için, türev alma kurallarındaki fonksiyonları muhtemelen kullanılmayan u ve v gibi harflerle gösteririz.

KURAL 4 Türev Toplama Kuralı

u ve v x'in türevlenebilir fonksiyonları ise, toplamları $u + v$ her ikisinin de türevlenebildiği her noktada türevlenebilirdir. Bu şekildeki noktalarda

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

olur.

ÖRNEK 4 Bir Toplamın Türevi

$$y = x^4 + 12x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(12x)$$
$$= 4x^3 + 12$$

Kural 4'ün İspatı Türev tanımını $f(x) = u(x) + v(x)$'e uygularız.

$$\frac{d}{dx}[u(x) + v(x)] = \lim_{h\to 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Toplam kuralını sabitle çarpım kuralıyla birleştirirsek, türevlenebilen fonksiyonların *farkının* türevinin, türevlerinin farkı olduğunu söyleyen **fark kuralını** elde ederiz:

$$\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{d}{dx}[u + (-1)v] = \frac{du}{dx} + (-1)\frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

Toplam kuralı ayrıca, toplamda sonlu sayıda fonksiyon bulunması şartıyla, iki fonksiyondan fazla fonksiyonun toplamı için de geçerlidir. $u_1, u_2, \ldots, u_n$ x'te türevlenebiliyorsa, $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ de türevlenebilirdir ve şu sonucu buluruz:

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_n}{dx}.$$

ÖRNEK 5 Bir Polinomun Türevi

$$y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^2\right) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(1)$$
$$= 3x^2 + \frac{4}{3} \cdot 2x - 5 + 0$$
$$= 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5$$

Örnek 5'deki polinomun türevini aldığımız gibi, herhangi bir polinomun türevini terim terim alabileceğimize dikkat edin.

İkiden Fazla Fonksiyonun Toplamı İçin Toplam Kuralının İspatı

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_n}{dx}$$

ifadesini matematiksel indüksiyonla ispatlayacağız (Bkz. Ek 1). İfade, demin ispatlandığı gibi, $n = 2$ için doğrudur. Bu indüksiyonla ispatın ilk adımıdır.

Adım 2, ifadenin herhangi bir pozitif $n = k,\ k \geq n_0 = 2$ sayısı için doğruysa, $n = k + 1$ için de doğru olacağını göstermektir. Bu yüzden,

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_k}{dx} \tag{1}$$

olduğunu varsayın. Bu durumda,

$$\frac{d}{dx}(\underbrace{u_1 + u_2 + \cdots + u_k}_{\text{Bu toplamla tanımlanan fonksiyona } u \text{ deyin.}} + \underbrace{u_{k+1}}_{\text{Bu fonksiyona } v \text{ deyin.}})$$

$$= \frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) + \frac{du_{k+1}}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(u + v) \text{ için Kural 4}$$

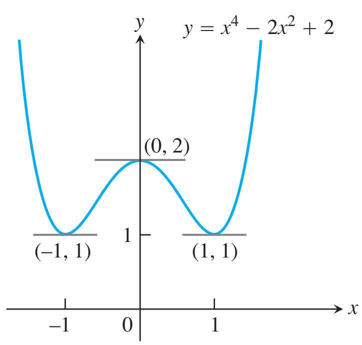
$$= \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_k}{dx} + \frac{du_{k+1}}{dx} \qquad \text{(1) denklemi}$$

olur.

Bu adımların tamamlanmasıyla, matematiksel indüksiyon prensibi toplam kuralını her $n \geq 2$ tamsayısı için doğrulamıştır. ■

ÖRNEK 6 Yatay Teğetleri Bulma

$y = x^4 - 2x^2 + 2$ eğrisinin yatay teğeti var mıdır? Varsa, nerededir?



ŞEKİL 3.10 $y = x^4 - 2x^2 + 2$ eğrisi ve yatay teğetleri (Örnek 6).

Çözüm Varsa, yatay teğetler dy/dx eğiminin sıfır olduğu noktalarda bulunur. Şu halde,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 - 2x^2 + 2) = 4x^3 - 4x$$

dir.

Şimdi, x'için $\dfrac{dy}{dx} = 0$ denklemini çözün.

$$\begin{aligned} 4x^3 - 4x &= 0 \\ 4x(x^2 - 1) &= 0 \\ x &= 0, 1, -1 \end{aligned}$$

$y = x^4 - 2x^2 + 2$ eğrisinin $x = 0.1$ ve –1'de yatay teğetleri vardır. Eğri üzerinde bunlara karşılık gelen noktalar (0, 2), (1, 1) ve (–1, 1) noktalarıdır. Şekil 3.10'a bakın. ■

Çarpma ve Bölmeler

İki fonksiyonun toplamının türevi türevlerinin toplamına eşitken, iki fonksiyonun çarpımlarının türevi türevlerinin çarpımına eşit değildir. Örneğin,

$$\frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(x) = 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{iken} \quad \frac{d}{dx}(x \cdot x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

bulunur. İki fonksiyonun çarpımının türevi şimdi açıklayacağımız gibi iki çarpımın toplamına eşittir.

KURAL 5 ÇARPIM KURALI

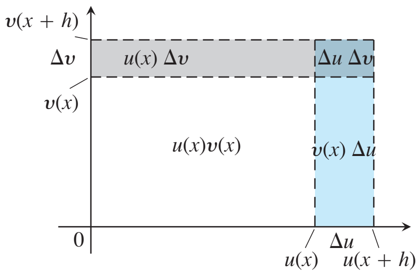
u ve v x'te türevlenebilirlerse, çarpımları uv de türevlenebilir ve

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

olur.

Çarpım Kuralının Gösterimi

$u(x)$ ve $v(x)$ pozitif ve x artarken artıyorlarsa ve $h > 0$ ise,



resimdeki toplam renkli alan

$$u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)$$
$$= u(x+h)\,\Delta v + v(x+h)\,\Delta u - \Delta u \Delta v$$

dir. Bu denklemin iki tarafını da h ile bölersek,

$$\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$
$$= u(x+h)\frac{\Delta v}{h} + v(x+h)\frac{\Delta u}{h} - \Delta u \frac{\Delta v}{h}$$

buluruz.

$h \to 0^+$, iken

$$\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{h} \to 0 \cdot \frac{dv}{dx} = 0$$

elde ederiz ve böylece geriye

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

kalır.

uv çarpımının türevi u kere v'nin türevi artı v kere u'nun türevidir. Üslü gösterimle, $(uv)' = uv' + vu'$ yazılır. Fonksiyon notasyonu ile

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

yazılabilir.

ÖRNEK 7 Çarpım Kuralını Kullanma

$$y = \frac{1}{x}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$$

fonksiyonunun türevini bulun.

Çözüm $u = 1/x$ ve $v = x^2 + (1/x)$ ile çarpım kuralını uygularız:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\right] = \frac{1}{x}\left(2x - \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= 2 - \frac{1}{x^3} - 1 - \frac{1}{x^3}$$
$$= 1 - \frac{2}{x^3}$$

$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ ve $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$ by Bölüm 2.7, Örnek 3

■

Kural 5'in İspatı

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

Bu kesri u ve v'nin türevlerinin farklar oranını içeren bir hale dönüştürmek için kesrin üst tarafına $u(x+h)v(x)$ ekler ve çıkarırız:

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[u(x+h)\frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x)\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} u(x+h) \cdot \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x) \cdot \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

h sıfıra yaklaşırken, $u(x+h)$ $u(x)$'e yaklaşır, çünkü u, x'te türevlenebildiği için, x'te süreklidir. İki kesir de dv/dx ve du/dx'in x'teki değerlerine yaklaşır. Kısacası,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

bulunur. ■

Aşağıdaki örnekte, elimizde sadece sayısal değerler vardır.

ÖRNEK 8 Sayısal Değerlerden Türev

$y = uv$, u ve v fonksiyonlarının çarpımı olsun.

$$u(2) = 3, \quad u'(2) = -4, \quad v(2) = 1 \quad \text{ve} \quad v'(2) = 2$$

ise, $y'(2)$'yi bulun.

Çözüm

$$y' = (uv)' = uv' + vu'$$

şeklinde yazılmış olan çarpım kuralından

$$y'(2) = u(2)v'(2) + v(2)u'(2)$$
$$= (3)(2) + (1)(-4) = 6 - 4 = 2$$

buluruz. ■

ÖRNEK 9 Bir Çarpımın Türevini İki Yolla Bulma

$y = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$ fonksiyonunun türevini bulun.

Çözüm

(a) Çarpım kuralında, $u = x^2 + 1$ ve $v = x^3 + 3$, alırsak,

$$\frac{d}{dx}\left[\left(x^2+1\right)\left(x^3+3\right)\right] = (x^2+1)(3x^2) + (x^3+3)(2x)$$
$$= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 6x$$
$$= 5x^4 + 3x^2 + 6x.$$

(b) Bu özel çarpımın türevi ayrıca, y'nin orijinal ifadesindeki çarpımları yapıp ortaya çıkan polinomun türevini almakla da bulunabilir (belki daha da iyi olur):

$$y = (x^2+1)(x^3+3) = x^5 + x^3 + 3x^2 + 3$$
$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 3x^2 + 6x.$$

Bu ilk sonucumuzla uyumludur. ■

İki türevlenebilir fonksiyonun çarpımının türevi türevlerinin çarpımları olmadığı gibi, iki fonksiyonun bölümünün türevi de türevlerinin bölümü değildir. Bunun yerine olan şey şudur:

KURAL 6 **Bölüm Kuralı**

u ve v x'te türevlenebilir ve $v(x) \neq 0$ ise, u/v bölümü x'te türevlenebilir ve sonuç

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

olur.

Fonksiyon notasyonu ile:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

ÖRNEK 10 Fark Kuralını Kullanma

$$y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

fonksiyonunun türevini bulun.

Çözüm

$u = t^2 - 1$ ve $\upsilon = t^2 + 1$ alarak bölüm kuralını uygularız:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(t^2+1)\cdot 2t - (t^2-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{4t}{(t^2+1)^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{\upsilon}\right) = \frac{\upsilon(du/dt) - u(d\upsilon/dt)}{\upsilon^2}$$

■

Kural 6'nın İspatı

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{\upsilon}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{u(x+h)}{\upsilon(x+h)} - \dfrac{u(x)}{\upsilon(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\upsilon(x)u(x+h) - u(x)\upsilon(x+h)}{h\upsilon(x+h)\upsilon(x)}$$

Son kesri u ve υ'nin türevlerinin farklar oranını içeren bir kesre çevirmek için, kesrin üst tarafına $\upsilon(x)u(x)$ ekler ve çıkartırız. Bu durumda

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{\upsilon}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\upsilon(x)u(x+h) - \upsilon(x)u(x) + \upsilon(x)u(x) - u(x)\upsilon(x+h)}{h\upsilon(x+h)\upsilon(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\upsilon(x)\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h} - u(x)\dfrac{\upsilon(x+h)-\upsilon(x)}{h}}{\upsilon(x+h)\upsilon(x)}$$

buluruz. Bölünen ve bölenin limitini alarak, bölüm kuralını elde ederiz. ■

x'in Negatif Tamsayılar Kuvvetleri

Negatif tamsayılar için kuvvet kuralı pozitif tamsayılarınkiyle aynıdır.

KURAL 7 Negatif Tamsayılar İçin Kuvvet Kuralı

n negatif tam bir tamsayı ise ve $x \neq 0$ ise

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

olur.

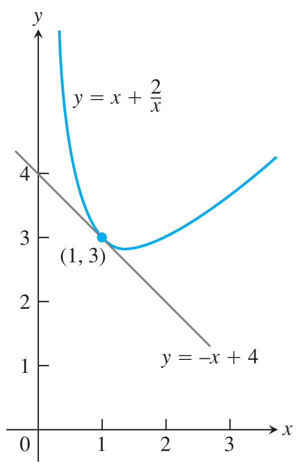
ÖRNEK 11

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$ Bölüm 2.7, Örnek 3 ile uyuşur

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{4}{x^3}\right) = 4\dfrac{d}{dx}(x^{-3}) = 4(-3)x^{-4} = -\dfrac{12}{x^4}$ ■

Kural 7'nin İspatı İspat bölüm kuralını kullanır. n negatif bir tamsayı ise, m pozitif bir tamsayı olmak üzere $n = -m$ olur. Yani, $x^n = x^{-m} = 1/x^m$ olur ve

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^n) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) \\
&= \frac{x^m \cdot \frac{d}{dx}(1) - 1 \cdot \frac{d}{dx}(x^m)}{(x^m)^2} && u = 1 \text{ ve } v = x^m \text{ ile bölüm kuralı} \\
&= \frac{0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} && m > 0 \text{ olduğundan, } \frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1} \\
&= -mx^{-m-1} \\
&= nx^{n-1}. && -m = n \text{ olduğu için}
\end{aligned}$$



ŞEKİL 3.11 Örnek 12 deki $y = x + (2/x)$ eğrisinin (1,3)'teki teğeti. Eğrinin üçüncü dörtte bir bölgede burada görülmeyen bir parçası vardır. Bunun gibi fonksiyonların grafiklerini çizmeyi Bölüm 4'te göreceğiz.

ÖRNEK 12 Bir Eğriye Teğet

$$y = x + \frac{2}{x}$$

eğrisinin (1, 3) noktasındaki teğetinin denklemini bulun (Şekil 3.11).

Çözüm Eğrinin eğimi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) + 2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{2}{x^2}.$$

olur. $x = 1$'deki eğim ise

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left[1 - \frac{2}{x^2}\right]_{x=1} = 1 - 2 = -1.$$

olarak bulunur. (1, 3) noktasından -1 eğimi ile geçen doğru

$$\begin{aligned}
y - 3 &= (-1)(x - 1) && \text{Nokta-eğim denklemi} \\
y &= -x + 1 + 3 \\
y &= -x + 4.
\end{aligned}$$

doğrusudur.

Bir türev alma problemini çözerken hangi kuralların seçileceği ne kadar iş yapmanız gerektiğine bağlıdır. Aşağıda bir örnek verilmektedir.

ÖRNEK 13 Hangi Kuralın Kullanılacağını Seçme

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4},$$

fonksiyonunun türevini almak için bölüm kuralını kullanmak yerine kesrin üst tarafını açın ve x^4 ile bölün:

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^4} = x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3}.$$

Şimdi de toplam ve kuvvet kurallarını kullanın:

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} - 3(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4}$$
$$= -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}.$$

■

İkinci ve Daha Yüksek Mertebe Türevler

$y = f(x)$ türevlenebilir bir fonksiyon ise $f'(x)$ türevi de bir fonksiyondur. f''de türevlenebilirse, x'in yeni bir fonksiyonunu, f'''yü elde etmek için f''nün türevini alabiliriz. Böylece $f'' = (f')'$ olur. f'' fonksiyonuna f'nin **ikinci türevi** denir. Notasyonla

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx} = y'' = D^2(f)(x) = D_x^{\,2} f(x).$$

D^2 sembolü, türev alma işleminin iki defa uygulandığı anlamındadır.

$y = x^6$ ise, $y' = 6x^5$'dir ve

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(6x^5\right) = 30x^4$$

olur. Böylece, $D^2\left(x^6\right) = 30x^4$ dir.

y'' türevlenebilirse, türevi $y''' = dy''/dx = d^3y/dx^3$, y'nin x'e göre **üçüncü türevi**dir. Verilen isimler, tahmin edebileceğiniz gibi, herhangi bir pozitif n sayısı için,

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}y^{(n-1)} = \frac{d^ny}{dx^n} = D^ny$$

y'nin x'e göre ***n*.inci türevi** olacak şekilde devam eder.

İkinci Türevi, $y = f(x)$'in grafiğinin her noktasındaki teğetinin eğiminin değişim oranı olarak yorumlayabiliriz. Bir sonraki bölümde ikinci türev bize şunu gösterecektir: değme noktası hareket ettirilirken, eğri teğetten yukarıya doğru mu yoksa aşağıya doğru mu eğrilmektedir. Bir sonraki alt bölümde ikinci ve üçüncü türevleri, bir doğru üzerinde hareket bakımından yorumlayacağız

Türev Sembolleri Nasıl Okunur

y'	"y üssü"
y''	"y iki üssü"
$\dfrac{d^2y}{dx^2}$	"d kare y bölü dx kare"
y'''	"y üç üssü"
$y^{(n)}$	"y üssü n"
$\dfrac{d^ny}{dx^n}$	"d üssü n y bölü dx üssü n"
D^n	"D üssü n"

ÖRNEK 14 Yüksek Mertebe Türevleri Bulma

$y = x^3 - 3x^2 + 2$'nin ilk dört türevi:

Birinci türev:	$y' = 3x^2 - 6x$
İkinci türev:	$y'' = 6x - 6$
Üçüncü türev:	$y''' = 6$
Dördüncü türev:	$y^{(4)} = 0$

Fonksiyonun, beşinci ve daha yüksek türevleri sıfır olmak üzere, her mertebeden türevi vardır.

■

ALIŞTIRMALAR 3.2

Türev Hesaplamaları

1–12 alıştırmalarında, birinci ve ikinci türevleri bulun.

1. $y = -x^2 + 3$

2. $y = x^2 + x + 8$

3. $s = 5t^3 - 3t^5$

4. $w = 3z^7 - 7z^3 + 21z^2$

5. $y = \frac{4x^3}{3} - x$

6. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}$

7. $w = 3z^{-2} - \frac{1}{z}$

8. $s = -2t^{-1} + \frac{4}{t^2}$

9. $y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$

10. $y = 4 - 2x - x^{-3}$

11. $r = \frac{1}{3s^2} - \frac{5}{2s}$

12. $r = \frac{12}{\theta} - \frac{4}{\theta^3} + \frac{1}{\theta^4}$

13–16 alıştırmalarında, y' türevini **(a)** çarpım kuralını uygulayarak, **(b)** türevinin alınması daha kolay terimler elde etmek için çarpanları açarak bulun.

13. $y = (3 - x^2)(x^3 - x + 1)$

14. $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

15. $y = (x^2 + 1)\left(x + 5 + \frac{1}{x}\right)$

16. $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x} + 1\right)$

17–28 alıştırmalarındaki fonksiyonların türevlerini bulun.

17. $y = \frac{2x + 5}{3x - 2}$

18. $z = \frac{2x + 1}{x^2 - 1}$

19. $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 0.5}$

20. $f(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + t - 2}$

21. $v = (1 - t)(1 + t^2)^{-1}$

22. $w = (2x - 7)^{-1}(x + 5)$

23. $f(s) = \frac{\sqrt{s} - 1}{\sqrt{s} + 1}$

24. $u = \frac{5x + 1}{2\sqrt{x}}$

25. $v = \frac{1 + x - 4\sqrt{x}}{x}$

26. $r = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)$

27. $y = \frac{1}{(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)}$

28. $y = \frac{(x + 1)(x + 2)}{(x - 1)(x - 2)}$

29 ve 30 alıştırmalarındaki fonksiyonların her mertebelerden türevlerini bulun.

29. $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 - x$

30. $y = \frac{x^5}{120}$

31–38 alıştırmalarındaki fonksiyonların birinci ve ikinci türevlerini bulun.

31. $y = \frac{x^3 + 7}{x}$

32. $s = \frac{t^2 + 5t - 1}{t^2}$

33. $r = \frac{(\theta - 1)(\theta^2 + \theta + 1)}{\theta^3}$

34. $u = \frac{(x^2 + x)(x^2 - x + 1)}{x^4}$

35. $w = \left(\frac{1 + 3z}{3z}\right)(3 - z)$

36. $w = (z + 1)(z - 1)(z^2 + 1)$

37. $p = \left(\frac{q^2 + 3}{12q}\right)\left(\frac{q^4 - 1}{q^3}\right)$

38. $p = \frac{q^2 + 3}{(q - 1)^3 + (q + 1)^3}$

Sayısal Değerleri Kullanma

39. u ve v'nin x'in $x = 0$'da türevlenebilir fonksiyonları olduğunu ve

$$u(0) = 5, \quad u'(0) = -3, \quad v(0) = -1, \quad v'(0) = 2$$

olduğunu varsayın. Aşağıdaki türevlerin $x = 0$'daki değerlerini bulun.

a. $\frac{d}{dx}(uv)$ **b.** $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)$ **c.** $\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right)$ **d.** $\frac{d}{dx}(7v - 2u)$

40. u ve v'nin x'in türevlenebilir fonksiyonları olduğunu ve

$$u(1) = 2, \quad u'(1) = 0, \quad v(1) = 5, \quad v'(1) = -1$$

olduğunu varsayın. Aşağıdaki türevlerin $x = 1$'deki değerlerini bulun.

a. $\frac{d}{dx}(uv)$ **b.** $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)$ **c.** $\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right)$ **d.** $\frac{d}{dx}(7v - 2u)$

Eğimler ve Teğetler

41. a. Bir eğriye normal $y = x^3 - 4x + 1$ eğrisinin (2, 1) noktasındaki teğetine dik doğrunun denklemini bulun.

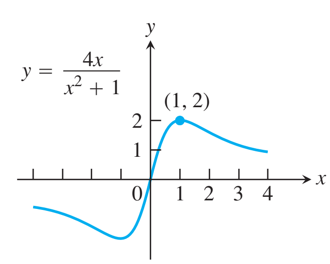
b. En küçük eğim Bu eğrinin en düşük eğimi nedir? Bu eğim hangi noktadadır?

c. İstenilen eğimde teğet Eğrinin eğiminin 8 olduğu noktalarda bulunan teğetlerin denklemlerini bulun.

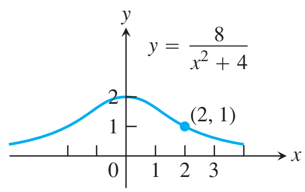
42. a. Yatay teğetler $y = x^3 - 3x - 2$ eğrisinin yatay teğetlerinin denklemini bulun. Bu teğetlere teğet noktasında dik olan doğruların denklemlerini de yazın.

b. En küçük eğim Bu eğri üzerindeki en düşük eğim nedir? Eğri üzerindeki hangi noktada bu eğim vardır? Bu noktadaki teğete dik olan doğrunun denklemini yazın.

43. (Aşağıda çizilmiş olan) *Newton'un Yılanı*'nın orijindeki ve (1, 2) noktasındaki teğetlerini bulun.



44. (Aşağıda çizilmiş olan) *Agnesi'nin Cadısı*'nın (2, 1) noktasındaki teğetini bulun.



45. Birim fonksiyona kuadratik bir teğet $y = ax^2 + bx + c$ eğrisi (1, 2) noktasından geçer ve $y = x$ doğrusuna orijinde teğettir. *a, b* ve *c*'yi bulun.

46. Ortak teğeti bulunan kuadratikler $y = x^2 + ax + b$ ve $y = cx - x^2$ eğrilerinin (1, 0) noktasında ortak bir teğetleri vardır. *a, b* ve *c*'yi bulun.

47. a. $y = x^3 - x$ eğrisine (–1, 0) noktasında teğet olan eğrinin denklemini bulun.

T **b.** Eğriyi ve teğetini birlikte çizin. Teğet eğriyi başka bir noktada da kesmektedir. Bu noktanın koordinatlarını bulun

T **c.** İkinci kesişim noktası için bulduğunuz koordinatları eğri ve teğet denklemlerini birlikte çözerek kontrol edin (SOLVER tuşu).

48. a. $y = x^3 - 6x^2 + 5x$ eğrisine orijinde teğet olan eğrinin denklemini bulun.

T **b.** Eğriyi ve teğetini birlikte çizin. Teğet eğriyi başka bir noktada da kesmektedir. Bu noktanın koordinatlarını bulun.

T **c.** İkinci kesişim noktası için bulduğunuz koordinatları eğri ve teğet denklemlerini birlikte çözerek kontrol edin (SOLVER tuşu).

Teori ve Örnekler

49. *n*. dereceden genel bir polinom $a_n \neq 0$ olmak üzere

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

şeklindedir. $P'(x)$'i bulun.

50. Vücudun ilaca tepkisi Vücudun bir ilaç dozuna tepkisi bazen

$$R = M^2\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right)$$

şeklinde bir denklemle tanımlanabilir. Burada *C* pozitif bir sabit ve *M* de kanda bulunan ilaç miktarıdır. Tepki kan basıncında bir değişimse, *R* milimetre civa olarak ölçülür. Tepki ateşte bir değişiklikse, *R* derece olarak ölçülür, …

dR/dM'yi bulun. *M*'nin bir fonksiyonu olan bu türeve vücudun ilaca duyarlılığı denilir. Bölüm 4.5'te vücudun en duyarlı olduğu ilaç miktarının nasıl bulunduğunu göreceğiz.

51. Çarpım kuralımdaki v fonksiyonunun sabit bir *c* değeri olduğunu varsayalım. Bu durumda çarpım kuralı ne verir? Bunun sabitle çarpım kuralıyla ilişkisi nedir?

52. Çarpmaya göre ters kuralı

a. Çarpmaya göre *ters kuralı* $v(x)$ fonksiyonunun türevlenebildiği ve sıfırdan farklı olduğu bir noktada

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

olduğunu söyler. Çarpmaya göre ters kuralının bölme kuralının özel bir hali olduğunu gösterin.

b. Çarpmaya göre ters kuralı ile çarpma kuralının birlikte bölme kuralını verdiğini gösterin.

53. Çarpım kuralının genelleştirilmesi Çarpım kuralı *x*'in iki türevlenebilir fonksiyonunun *uv* çarpımının türevinin

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

olduğunu söyler.

a. *x*'in türevlenebilir *üç* fonksiyonunun *uvw* çarpımının türevinin formülü nedir?

b. *x*'in türevlenebilir *dört* fonksiyonunun $u_1u_2u_3u_4$ çarpımının formülü nedir?

c. *x*'in türevlenebilir sonlu *n* tane fonksiyonunun $u_1u_2u_3\ldots u_n$ çarpımının formülü nedir?

54. Rasyonel kuvvetler

a. $x^{3/2}$'yi $x \cdot x^{1/2}$ şeklinde yazarak ve çarpım kuralını kullanarak $\frac{d}{dx}\left(x^{3/2}\right)$'yi hesaplayın.

Kural. Cevabınızı *x*'in bir rasyonel kuvvetinin bir rasyonel katı olarak ifade ediniz. (b) ve (c)'yi de benzer yöntemle çözün.

b. $\frac{d}{dx}(x^{5/2})$ 'yi bulun.

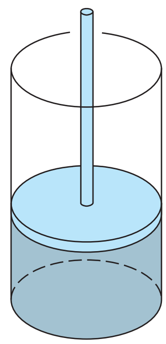
c. $\frac{d}{dx}(x^{7/2})$ 'yi bulun.

d. (a), (b) ve (c)'deki cevaplarınızda ne gibi bir yapı görüyorsunuz? Rasyonel kuvvetler Bölüm 3.6'nın konularından biridir.

55. Silindir Basıncı Bir silindir içindeki gaz sabit bir *T* sıcaklığında tutuluyorsa, *P* basıncı *V* hacmine

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

şeklinde bir formülle bağlıdır. Burada, *a, b, n* ve *R* birer sabittir. dP/dV'yi bulun. (Şekle bakınız)



56. Sipariş için en iyi miktar Envanter yönetiminin formüllerinden biri malların ortalama haftalık siparişinin, ödemesinin ve depolanmasının maliyetinin

$$A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2}$$

olduğunu söyler. Burada q elinizdekiler azaldığında ısmarladığınız şeylerin (ayakkabılar, radyolar, süpürgeler, veya her ne olursa) miktarı, k bir sipariş vermenin maliyeti (aynısı, her ne kadar sıklıkta sipariş verirseniz verin), c bir malın maliyeti (bir sabit), m her hafta satılan mal sayısı (bir sabit) ve h de mal başına haftalık depolama maliyetidir (yer, sigorta, imkanlar ve güvenlik gibi şeyleri de içeren bir sabit). dA/dq ve d^2A/dq^2'yi bulun.

3.3 Bir Değişim Oranı Olarak Türev

Bölüm 2.1 de ortalama ve anlık değişim oranlarının incelemesine başladık. Bu bölümde, türevlerin, çevremizdeki dünyada değişen bazı şeylerin oranlarını modellemede kullanıldığı uygulamaları araştırmaya devam ediyoruz. Bir doğru boyunca hareketin incelenmesini tekrar hatırlayıp başka uygulamalar inceleyeceğiz.

Değişimi, zamana göre değişim olarak düşünmek doğaldır, ancak başka değişkenler de aynı şekilde incelenebilir. Örneğin, bir doktor bir ilacın miktarındaki değişikliklerin vücudun ilaca tepkisini nasıl etkilediğini bilmek isteyebilir. Bir ekonomist, çelik üretim maliyetinin, üretilen miktar ton sayısına bağlı olarak nasıl değiştiğini araştırmak isteyebilir.

Anlık Değişim Oranları

$(f(x+h) - f(x))/h$ fark bölümünü, f'nin x'ten $x + h$'ye kadar olan aralık üzerindeki ortalama değişim oranı olarak yorumlarsak, bu bölümün $h \to 0$ iken limitini, f'nin x'teki değişim oranı olarak yorumlayabiliriz.

TANIM Anlık Değişim Oranı

f'nin x_0'da x'e göre anlık değişim oranı

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

türevidir (limitin var olması koşuluyla).

Böylece, anlık oranlar ortalama oranların limitleridir.

x zamanı temsil etmese bile anlık kelimesini kullanmak alışkanlık halini almıştır. Ancak bu kelime genellikle ihmal edilir. *Değişim oranı* derken, *anlık değişim oranını* kastedeceğiz.

ÖRNEK 1 Bir Çemberin Alanı Çapa Bağlı Olarak Nasıl Değişir

Bir çemberin alanı A, çapa şu formülle bağlıdır:

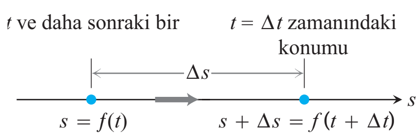
$$A = \frac{\pi}{4} D^2.$$

Çap 10 m olduğunda, alan çapa göre ne hızla değişir?

Çözüm Çapa bağlı olarak alanın (anlık) değişim oranı

$$\frac{dA}{dD} = \frac{\pi}{4} \cdot 2D = \frac{\pi D}{2}$$

dir. $D = 10$ m olduğunda, alan $(\pi/2)10 = 5\pi\ \text{m}^2/\text{m}$ hızıyla değişmektedir. ■



ŞEKİL 3.12 Bir koordinat doğrusunda hareket eden bir cismin bir t ve daha sonraki bir $t + \Delta t$ zamanındaki konumu.

Bir Doğru Üzerinde Hareket - Yer Değiştirme, Hız, Sürat, İvme ve Çekme

Bir cismin bir koordinat doğrusu (mesela bir s-ekseni) boyunca hareket ettiğini ve bu doğru üzerindeki konumunu, s, zamanın, t, bir fonksiyonu olarak bildiğimizi varsayalım:

$$s = f(t)$$

Cismin t ile $t + \Delta t$ arasındaki zaman aralığında **yer değiştirmesi** (Şekil 3.12)

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

ve cismin bu zaman aralığındaki **ortalama hızı**

$$v_{av} = \frac{\text{yer değiştirme}}{\text{gidiş zamanı}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

dir.

Cismin tam t anındaki hızını bulmak için, t'den $t + \Delta t$'ye olan aralık üzerindeki ortalama hızın, Δt sıfıra giderken limitini alırız. Bu limit f'nin t'ye göre türevidir.

TANIM **Hız**

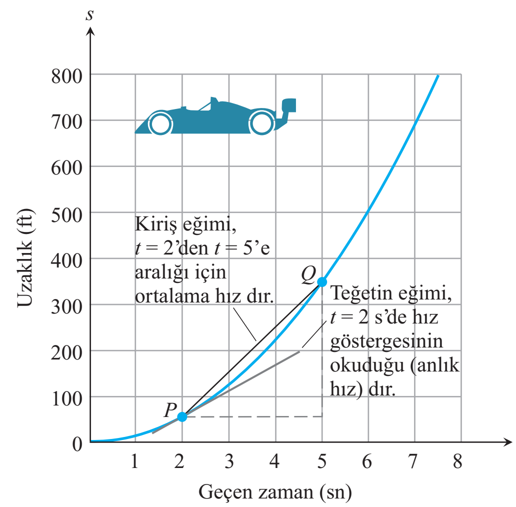
Hız (Anlık hız) konumun zamana göre türevidir. Bir cismin t anındaki konumu $s = f(t)$ ise, cismin t anındaki hızı

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

ÖRNEK 2 Bir Yarış Otomobilinin Hızını Bulmak

Şekil 3.13'te bir 1996 model Riley&Scott Mk III – Olds WSC yarış otomobilinin konum-zaman grafiği görülmektedir. PQ kirişinin eğimi $t = 2$ ile $t = 5$ sn arasındaki 3 sn'lik aralıktaki ortalama hızıdır, yani burada 100 ft/sn veya 68 mil/sa.

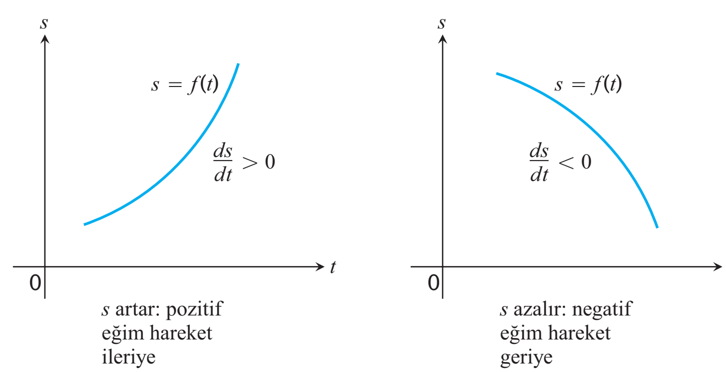
P 'deki teğetin eğimi ise $t = 2$ sn'de hız göstergesinin okuduğu değer, yanı 57 ft/sn veya 39 mil/sa'tir. Gösterilen periyotta, her saniye süresince ivme yaklaşık olarak sabit ve



ŞEKİL 3.13 Örnek 2 için zaman-konum grafiği. P 'deki teğetin eğimi $t = 2$ sn.'deki anlık hızdır.

28.5 ft/sn'dir, bu da, g yerçekimi ivmesi olmak üzere yaklaşık 0.89g dir. Yarış otomobilinin en yüksek hızı tahminen 190 mil/sa'tir. (*Kaynak: Road and Track*, Mart 1997). ■

Bir cismin hızı, cismin ne kadar hızlı hareket ettiğini göstermesinin yanı sıra hareketin yönünü de göstermektedir. Cisim ileriye doğru hareket ederken (s artar), hız pozitiftir; cisim geriye doğru hareket ederken (s azalır), hız negatiftir (Şekil 3.14)



ŞEKİL 3.14 Bir doğru boyunca $s = f(t)$ hareketi için $v = ds/dt$, s artarken pozitif, s azalırken negatiftir.

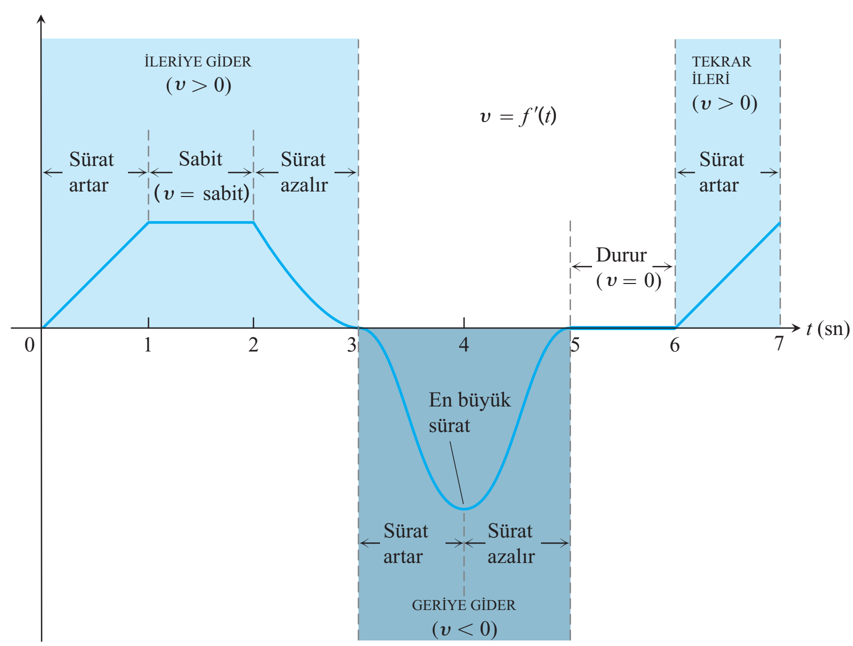
Bir arkadaşın evine gidip dönerken 30 mil/sa ile gidiyorsak, hız göstergesi giderken 30 mil/sa gösterirken, dönerken, evden uzaklığımız azaldığı halde, –30 mil/sa göstermeyecektir. Hız göstergesi her zaman hızın mutlak değeri olan sürati gösterir. Sürat yönden bağımsız olarak ileri gitme oranını ölçer.

TANIM Sürat
Sürat hızın mutlak değeridir.

$$\text{Sürat} = |v(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

ÖRNEK 3 Yatay Hareket

Şekil 3.15'te, bir koodinat doğrusu boyunca ilerleyen bir parçacığın hızı $v = f'(t)$ görülmektedir. Parçacık ilk 3 saniye boyunca ileri doğru, sonraki 2 saniye boyunca geri doğru hareket etmekte, bir saniye durmakta ve yine ileri doğru hareket etmektedir. Parçacık en yüksek sürate $t = 4$ anında, geriye doğru giderken ulaşır. ■



ŞEKİL 3.15 Örnek 3 için hız grafiği.

TARİHSEL BİYOGRAFİ
Bernard Bolzano
(1781–1848)

Bir cismin hızının değişim oranına *cismin ivmesi* denir. İvme, bir cismin ne kadar çabuk sürat kazandığını veya kaybettiğini ölçer.

İvmedeki ani bir değişime çekme denir. Bir otomobil veya bir otobüsteki yolculuk sarsıntılı olduğunda bu, ilgili ivmelerin mutlaka büyük olmasından değil ivmedeki değişimlerin ani olmasındadır.

TANIMLAR İvme, Silkinme

İvme hızın zamana göre türevidir. Bir cismin t anındaki konumu $s = f(t)$ ise, cismin t anındaki ivmesi şu şekildedir:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Silkinme ivmenin zamana göre türevidir:

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

Dünya yüzeyine yakın yerlerde bütün cisimler aynı sabit ivmeyle düşerler. Galileo'nun serbest düşme ile ilgili deneyi (Bölüm 2.1, Örnek 1), s mesafe ve g de dünyanın yerçekiminden doğan ivme olmak üzere, bizi

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

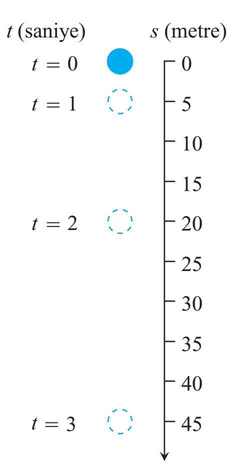
denklemine götürür. Bu denklem hava tepkisinin bulunmadığı vakumda geçerlidir, ancak kaya veya çelik aletler gibi yoğun, ağır cisimlerin, havanın tepkisinin onları yavaşlatmaya başlamadığı düşüşünün ilk birkaç saniyesini de çok iyi modeller.

$s = (1/2)gt^2$ denklemindeki g'nin değeri t ve s'yi ölçmekte kullanılan birimlere bağlıdır. t saniye (standart birim) iken, deniz seviyesindeki ölçümle tanımlanan g'nin değeri, İngiliz birimiyle yaklaşık olarak $32/\text{sn}^2$ (fit bölü saniye kare) ve metrik birimle $g = 9.8\ \text{m}/\text{sn}^2$ (metre bölü saniye kare) dir. (Bu yerçekimi sabitleri Dünyanın ağırlık merkezinden uzaklığa bağlıdır ve örneğin Everest tepesinde birazcık daha azdır.)

Sabit olan yerçekimi ivmesinin ($g = 32\ \text{m}/\text{sn}^2$) silkinmesi sıfırdır:

$$j = \frac{d}{dt}(g) = 0$$

Bir cisim serbest düşme sırasında sarsılmaz.



ŞEKİL 3.16 Serbest düşen bir bilge (Örnek 4)

ÖRNEK 4 Serbest Düşmenin Modellenmesi

Şekil 3.16'da $t = 0$ sn anında düşmeye başlayan ağır bir bilyenin serbest düşmesi görülmektedir.

(a) İlk 2 sn içinde bilye kaç metre düşer?

(b) Bu andaki hızı, sürati ve ivmesi nedir?

Çözüm

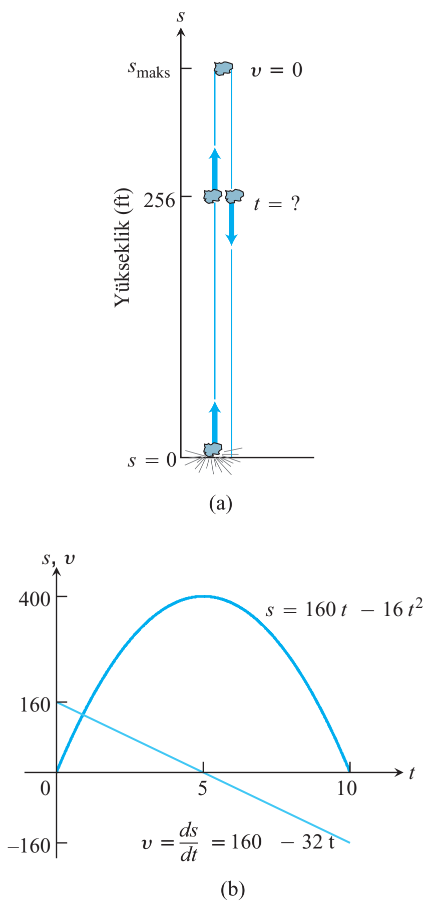
(a) Metrik serbest düşme denklemi $s = 4.9\ t^2$'dir. İlk 2 sn boyunca bilye

$$s(2) = 4.9(2)^2 = 19.6 \text{ m}$$

düşer.

(b) Herhangi bir t zamanında, hız yer değiştirmenin türevidir:

$$v(t) = s'(t) = \frac{d}{dt}(4.9t^2) = 9.8t$$



ŞEKİL 3.17 (a) Örnek 5'teki kaya. (b) s ve v'nin, zamanın fonksiyonu olarak grafikleri; $v = ds/dt = 0$ olduğunda s maksimumdur. s'nin grafiği kayanın izlediği yol değildir: yüksekliğin zamana karşı çizilmesidir. Burada bir doğru olarak çizilen eğim, kayanın hızını verir.

$t = 2$ sa anında, hız aşağı doğru (artan s yönünde)

$$v(2) = 19.6 \text{ m/sn}$$

dir. $t = 2$ sa anındaki *sürat* ise:

$$\text{Sürat} = |v(2)| = 19.6 \text{ m/sn}$$

dir. herhangi bir t anındaki *ivme*

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 9.8 \text{ m/sn}^2$$

dir. $t = 2$ sa'de, ivme 9.8 m/sn^2'dir. ■

ÖRNEK 5 Dikey Hareketin Modellenmesi

Bir dinamit patlaması ağır bir kayayı 160 ft/sn (yaklaşık 109 mil/sa) hızla yukarı doğru fırlatır (Şekil 3.17a). t saniye sonra kaya $160t$ - $16t^2$ yüksekliğe ulaşır.

(a) Kaya ne kadar yükseğe çıkar?

(b) Kaya yukarı çıkarken ve aşağı inerken yerden 256 ft yukarıda olduğunda kayanın hızı ve sürati nedir?

(c) Kayanın (patlamadan sonraki) herhangi bir t zamanındaki ivmesi nedir?

(d) Kaya yere ne zaman çarpar?

Çözüm

(a) Seçtiğimiz koordinat sisteminde, s yerden yukarı doğru yüksekliği ölçmektedir, bu yüzden hız yukarıya doğru pozitif, aşağıya doğru ise negatif olur. Taşın en yüksek noktaya ulaştığı an uçuş sırasında hızın 0 olduğu tek andır. Dolayısıyla, maksimum yüksekliği bulmak için bütün yapmamız gereken ne zaman $v = 0$ olduğunu bulmak ve bu zamanda s'yi hesaplamaktır:

Herhangi bir t anında hız

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(160t - 16t^2) = 160 - 32t \text{ ft/sn.}$$

olarak bulunur.

$$160 - 32t = 0 \quad \text{veya} \quad t = 5 \text{ san.}$$

olduğunda hız sıfırdır. $t = 5$ sn'de kayanın yüksekliği

$$s_{maks} = s(5) = 160(5) - 16(5)^2 = 800 - 400 = 400 \text{ ft}$$

olur. Şekil 3.17b'ye bakın.

(b) Kayanın yukarı çıkarken ve aşağı inerken yerden 256 ft yükseklikteyken hızını bulmak için

$$s(t) = 160t - 16t^2 = 256$$

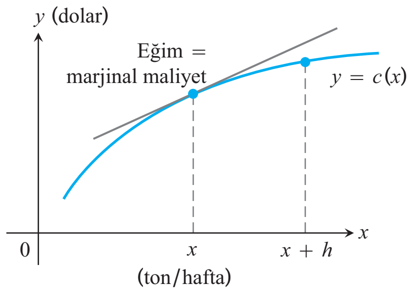
olmasını sağlayacak iki t değerini bulmamız gerekir. Bu denklemi çözmek için,

$$\begin{aligned} 16t^2 - 160t + 256 &= 0 \\ 16(t^2 - 10t + 16) &= 0 \\ (t - 2)(t - 8) &= 0 \end{aligned}$$

yazar ve

$$t = 2 \text{ sn}, \qquad t = 8 \text{ sn}$$

buluruz.



ŞEKİL 3.18 Haftalık çelik üretimi: $c(x)$, haftada x ton üretimin maliyetidir. İlave h ton üretimin maliyeti $c(x+h) - c(x)$ dir.

bulunmaktadır. Bu zamanlarda kayanın hızı

$$v(2) = 160 - 32(2) = 160 - 64 = 96 \text{ ft/sn}.$$
$$v(8) = 160 - 32(8) = 160 - 256 = -96 \text{ ft/sn}.$$

olur. Her iki zamanda da kayanın sürati 96 ft/sn'dir. $v(2) > 0$ olduğundan $t = 2$ sn de kaya yukarıya doğru hareket eder (s artar); $v(8) < 0$ olduğu için de $t = 8$ sn de kaya aşağıya doğru hareket eder (s azalır)

(c) Patlamadan sonraki uçuşunun herhangi bir anında, kayanın ivmesi sabit ve

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(160 - 32t) = -32 \text{ ft/sn}^2$$

dir. İvme her zaman aşağıya doğrudur. Taş yukarı çıkarken yavaşlamakta, aşağı inerken ise hızlanmaktadır.

(d) Kaya yere s'nin 0 olduğu pozitif bir t zamanında çarpar. $160t - 16t^2 = 0$ denklemi çarpanlarına ayrılırsa $16t(10 - t) = 0$ elde edilir, dolayısıyla çözümleri $t = 0$ ve $t = 10$ olur. $t = 0$'da patlama olmuş ve kaya yukarı fırlamıştır. Yere ise 10 sn. sonra varmıştır. ■

Ekonomide Türevler

Mühendisler *hız* ve *ivme* gibi terimleri hareketi tanımlayan fonksiyonların türevlerini belirtmek için kullanırlar. Ekonomistlerin de değişim oranları ve türevler için özel kelimeleri vardır. Bunlara *marjinaller* derler.

Bir üretim işleminde, *üretim maliyeti* $c(x)$ üretilen birim miktarı x'in bir fonksiyonudur. **Marjinal üretim maliyeti** ise maliyetin (c) üretim seviyesine (x) göre değişim oranı, dolayısıyla dc/dx'tir.

Örneğin, $c(x)$ bir haftada x ton çelik üretmek için gereken dolar miktarı olsun. $x + h$ birim üretmek daha pahalı olacaktır ve h ile bölünmüş maliyet farkı bir haftada ton başına maliyetteki ortalama artıştır:

$$\frac{c(x+h) - c(x)}{h} = \text{üretilen her } h \text{ ton fazla çeliğin ortalama maliyeti}$$

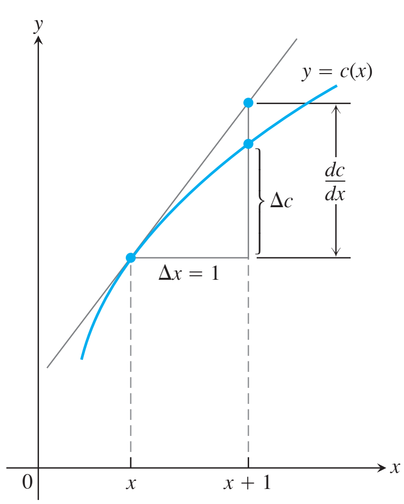
Bu oranın $h \to 0$ iken limiti, haftalık üretim x ton iken bir haftada daha fazla çelik üretmenin *marjinal maliyeti*dir (Şekil 3.18):

$$\frac{dc}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{c(x+h) - c(x)}{h} = \text{marjinal üretim maliyeti}$$

Bazen, marjinal üretim maliyeti fazladan bir birim üretmenin maliyeti olarak da tanımlanır:

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x+1) - c(x)}{1}$$

Bu da yaklaşık olarak dc/dx'in x'teki değeridir. Bu yaklaşım, c'nin grafiği x yakınlarında çok hızlı değişmiyorsa, kabul edilebilirdir. Bu durumda fark bölümü, limitine yani dc/dx'e yakın olacaktır, bu da $\Delta x = 1$ ise teğetteki yükselmedir (Şekil 3.19). Yaklaşım, büyük x değerlerinde daha iyi sonuç verir.



ŞEKİL 3.19 Marjinal maliyet dc/dx üretimin $\Delta x = 1$ birim artmasıyla oluşacak Δc maliyetidir.

Ekonomistler, toplam maliyet fonksiyonunu genellikle

$$c(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

şeklinde bir kübik polinomla temsil ederler. Burada δ kira, ısınma, ekipman ve yönetim giderleri gibi *sabit maliyetleri* temsil eder. Diğer terimler hammadde, vergiler ve işçilik gibi *değişken maliyetleri* temsil ederler. Sabit maliyetler üretilen birim sayısından bağımsızdırlar oysa değişken maliyetler üretim miktarına bağlıdırlar. Bir kübik polinom, ilgili nicelik aralığında maliyet davranışını yakalamaya yetecek kadar karmaşıktır.

ÖRNEK 6 Marjinal Maliyet ve Marjinal Kar

8 ile 30 arasında radyatör üretilirken x radyatör üretmenin maliyetinin

$$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

dolar olduğunu ve x radyatör satılmasından elde edilen gelirin

$$r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$$

dolar olduğunu varsayın. Dükkanınız normal olarak günde 10 radyatör üretmektedir. Günde bir radyatör daha üretmek maliyette ne kadar fark edecektir ve günde 11 radyatör satmakla gelirdeki tahmini artış ne olacaktır?

Çözüm Normalde günde 10 radyatör üretilirken, bir radyatör daha fazla üretmenin maliyeti $c'(10)$ civarındadır:

$$c'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 6x^2 + 15x\right) = 3x^2 - 12x + 15$$

$$c'(10) = 3(100) - 12(10) + 15 = 195.$$

Ek masraf 195$ civarında olacaktır. Marjinal gelir

$$r'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 3x^2 + 12x\right) = 3x^2 - 6x + 12$$

dir. Marjinal gelir fonksiyonu da fazladan bir birim satıldığında elde edilecek geliri belirtmektedir. Günde 10 radyatör satarken satışınızı 11 radyatöre çıkarırsanız, gelirinizin

$$r'(10) = 3(100) - 6(10) + 12 = \$252$$

kadar artmasını bekleyebilirsiniz. ■

ÖRNEK 7 Marjinal Vergi Oranı

Marjinal oranların diline biraz alışmak için, marjinal vergi oranlarını ele alalım. Marjinal gelir vergisi oranınız %28 ise ve geliriniz 1000$ artarsa, gelir vergisi olarak fazladan bir 280$ vergi vermek zorunda kalacağınızı düşünebilirsiniz. Bu toplam gelirinizin %28'ini vergi olarak vereceğiniz anlamına gelmez. Sadece şu andaki I gelir düzeyinizde, gelire göre T vergisindeki artış oranının $dT/dI = 0.28$ olacağını söyler. Kazandığınız fazladan her dolar için 0.28$ vergi vereceksinizdir. Elbette, kazancınız daha fazla artarsa, vergi diliminiz değişebilir ve marjinal oranınız artabilir. ■

Değişikliğe duyarlılık

x'teki küçük bir değişim bir fonksiyonun değerinde büyük bir değişime yol açtığında, fonksiyonun x'teki değişime karşı duyarlı olduğunu söyleriz. $f'(x)$ türevi bu duyarlılığın ölçüsüdür.

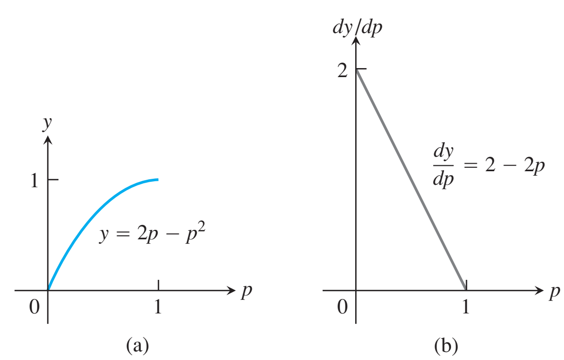
ÖRNEK 8 Genetik Data ve Değişikliğe Duyarlılık

Bezelyeler ve başka bitkilerle uğraşan Avusturyalı keşiş Gregor Johann Mendel (1822-1884) melezlemenin ilk bilimsel açıklamalarını ortaya koymuştur.

Dikkatlice yapılmış kayıtları, p (0 ile 1 arasında bir sayı) bezelyelerdeki düzgün kabuk geninin (baskın gen) sıklığı ve $(1-p)$ de bezelyelerdeki kıvrık kabuk geninin (çekinik gen) sıklığıysa, düzgün kabuklu bezelyelerin topluluktaki oranının

$$y = 2p(1-p) + p^2 = 2p - p^2$$

olduğunu göstermiştir. Şekil 3.20a'daki $y - p$ grafiği y'nin değerinin, p'deki bir değişikliğe, p'nin küçük değerleri için, p'nin büyük değerleri için olduğundan daha fazla duyarlı olduğunu göstermektedir. Gerçekten de, bu, p 0 civarındayken dy/dp'nin 2'ye, p 1 civarındayken de 0'a yakın olduğunu gösteren Şekil 3.20b'deki türev grafiğiyle daha iyi vurgulanmaktadır.



ŞEKİL 3.20 (a) Düzgün bezelyelerin oranını belirleyen $y = 2p - p^2$ grafiği (b) dy/dp grafiği (Örnek 8).

Genetik için anlamı şudur: Oldukça çekinik bir topluluk içine biraz daha baskın gen eklemek (kıvrık kabuklu bezelye sıklığının az olduğu yerde), oldukça baskın bir topluluktaki benzer artışa göre, sonraki jenerasyonlarda dramatik etkilere neden olacaktır ■

ALIŞTIRMALAR 3.3

Bir Koordinat Doğrusu Üzerinde Hareket

1–6 alıştırmalarında, $a \le t \le b$ aralığında, s metre ve t saniye olmak üzere bir koordinat doğrusunda ilerleyen bir cismin $s = f(t)$ konumu verilmektedir.

a. Verilen zaman aralığında, cismin yer değiştirmesini ve ortalama hızını bulun.

b. Zaman aralığının uç noktalarında cismin süratini ve ivmesini bulun.

c. Aralık boyunca hangi zamanlarda cisim yön değiştirir (eğer değiştirirse)?

1. $s = t^2 - 3t + 2, \quad 0 \le t \le 2$

2. $s = 6t - t^2, \quad 0 \le t \le 6$
3. $s = -t^3 + 3t^2 - 3t, \quad 0 \le t \le 3$
4. $s = (t^4/4) - t^3 + t^2, \quad 0 \le t \le 3$
5. $s = \frac{25}{t^2} - \frac{5}{t}, \quad 1 \le t \le 5$
6. $s = \frac{25}{t+5}, \quad -4 \le t \le 0$
7. **Partikül hareketi** t anında, s ekseninde ilerleyen bir cismin konumu $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ m olarak verilmektedir.
   a. Hız her sıfır olduğunda cismin ivmesini bulun.
   b. İvmenin her sıfır oluşunda cismin süratini bulun.
   c. Cismin $t = 0$ ile $t = 2$ arasında aldığı toplam yolu bulun.
8. **Partikül hareketi** $t \ge 0$, anında, s ekseni boyunca ilerleyen bir cismin hızı $v = t^2 - 4t + 3$.
   a. Hız her sıfır olduğunda cismin ivmesini bulun.
   b. Cisim ne zaman ileriye, ne zaman geriye doğru gitmektedir?
   c. Cismin ivmesi ne zaman artmakta, ne zaman azalmaktadır?

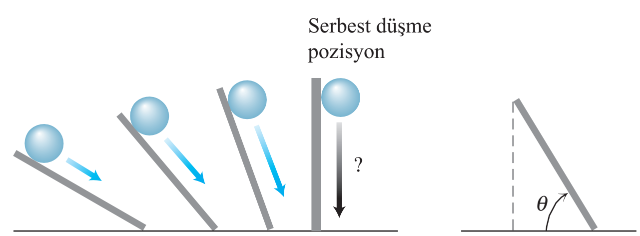
Serbest Düşme Uygulamaları

9. **Mars ve Jüpiter'de serbest düşme** Mars ve Jüpiter'in yüzeylerinde serbest düşme denklemleri (s metre ve t saniye olmak üzere) Mars'ta $s = 1.86t^2$ ve Jupiter'de $s = 11.44t^2$'dir. Her iki gezegende, serbest düşmeye bırakılan bir cismin 27.8 m/sn (yaklaşık 100 km/sa) hıza ulaşması için ne kadar zaman geçecektir?
10. **Ayın yüzeyinde dikey hareket** Ayın yüzeyinde dikey olarak yukarı doğru 24 m/sn (yaklaşık 86 km/sa) ilk hızıyla atılan bir taş t saniyede $s = 24t - 0.8t^2$ yüksekliğine ulaşmaktadır.
    a. Taşın t anındaki hızını ve ivmesini bulun. (Buradaki ivme ayın yerçekimi ivmesidir.)
    b. Taşın en yüksek noktaya çıkması ne kadar sürer?
    c. Taş ne kadar yükseğe çıkar?
    d. Taşın maksimum yüksekliğinin yarısına çıkması ne kadar sürer?
    e. Taş havada ne kadar kalır?
11. **Ufak havasız bir gezegendeki g'yi bulmak** Ufak havasız bir gezegendeki araştırmacılar 15 m/sn ilk hızıyla yerden dikey olarak yukarı doğru bir çelik bilye atmak için bir yaylı tabanca kullanmışlardır. Gezegenin yüzeyindeki yerçekimi ivmesi g_s m/sn^2 olduğu için, araştırmacılar bilyenin t saniye sonra $s = 15t - (1/2)g_s t^2$ yüksekliğe çıkmasını beklemektedirler. Çelik bilye fırlatıldıktan 20 sn sonra maksimum yüksekliğine ulaşmıştır. g_s'nin değeri nedir?
12. **Hızlı giden mermi** Ayın yüzeyinden dik yukarı doğru fırlatılan 45 kalibrelik bir mermi t saniye sonra $s = 832t - 2.6t^2$ ft yüksekliğe ulaşacaktır. Dünyada ise, hava yokken, t saniye sonra yüksekliği $s = 832t - 16t^2$ ft olacaktır. İki durumda da, mermi ne kadar havada kalacaktır? Mermi ne kadar yükseğe çıkacaktır?
13. **Pisa Kulesi'nden serbest düşme** Galileo, Pisa Kulesi'nin tepesinden, yerden 179 ft yükseklikten bir top güllesini bıraksaydı düşüşten saniye sonra güllenin yerden yüksekliği $s = 179 - 16t^2$ olacaktı.
    a. t anında güllenin hızı, sürati ve ivmesi ne olurdu?
    b. Topun yere çarpması ne kadar sürerdi?
    c. Yere çarpma anında topun hızı ne olurdu?
14. **Galileo'nun serbest düşme formülü** Galileo serbest düşme sırasında bir cismin hızını veren bir formülü, gittikçe dikleşen kalaslardan aşağı toplar yuvarlayarak, kalas dik olduğunda ve top serbest düştüğünde topun davranışını öngörecek bir limit formül arayarak geliştirmiştir; şekildeki (a) kısmına bakın. Kalastaki herhangi açıda, hareketin t anındaki topun hızının t'nin sabit bir katı olduğunu görmüştür. Yani hız, $v = kt$ şeklinde bir formülle verilmektedir. k sabitinin değeri kalasın eğim açısına bağlıdır.

    Modern gösterimle - şeklin (b) kısmı -, mesafe metre ve zaman saniye olmak üzere, Galileo'nun deneyerek bulduğu, herhangi bir açıda yuvarlanmanın t anında topun hızının

    $$v = 9.8(\sin\theta)t \text{ m/sn}$$

    olduğudur.

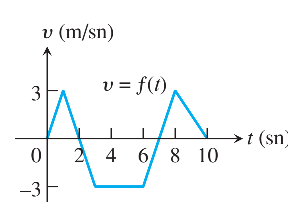


(a) (b)

    a. Serbest düşme sırasında topun hız denklemi nedir?
    b. (a) şıkkında bulduklarınızı kullanarak, dünyanın yüzeyi yakınında serbest düşen bir cisme etkiyen sabit ivmeyi ne olarak bulursunuz?

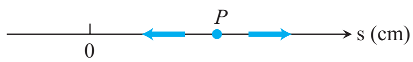
Grafiklerden Hareket Hakkında Sonuca Varma

15. Aşağıdaki şekil, bir koordinat doğrusu boyunca ilerleyen bir cismin $v = ds/dt = f(t)$ m/sn hızını göstermektedir.

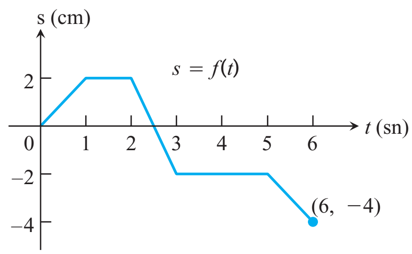


    a. Cisim ne zaman yön değiştirir?
    b. Cisim (yaklaşık olarak) ne zaman sabit bir süratle ilerlemektedir?
    c. $0 \le t \le 10$ aralığında cismin sürat grafiğini çizin.
    d. Tanımlı olduğunda, ivmeyi çizin.

16. Bir P parçacığı, aşağıda verilen şeklin (a) kısmında gösterilen sayı doğrusu üzerinde hareket etmektedir. Kısım (b) P'nin konumunu t zamanının bir fonksiyonu olarak göstermektedir.



(a)



(b)

a. P ne zaman sağa doğru, sola doğru ilerlemekte veya durmaktadır?

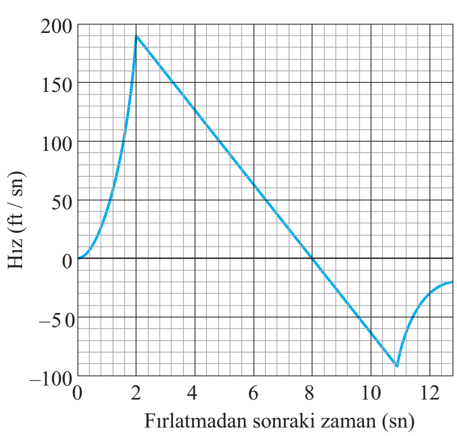
b. Parçacığın hızını ve süratini (tanımlıysalar) çizin.

17. Bir roket fırlatmak Bir roket modeli fırlatıldığında, itici motor roketi yukarı doğru ivmelendirecek şekile birkaç saniye yanar. Yanmadan sonra, roket bir süre yukarı doğru gider ve düşmeye başlar. Ufak bir patlayıcı yük sayesinde, roket düşmeye başladıktan sonra bir paraşüt açılır. Paraşüt, yere düştüğünde roketin parçalanmasını engeller.

Aşağıdaki şekilde bir roket modelinin uçuşunun hız verileri görülmektedir.

a. Motor durduğunda roketin hızı nedir?

b. Motor kaç saniye yanmıştır?



c. Roket en yüksek noktasına ne zaman ulaşır? O zamanki hızı nedir?

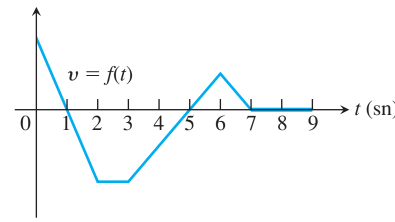
d. Paraşüt ne zaman açılmıştır? O anda roketin düşüş hızı nedir?

e. Paraşüt açılmadan önce roket ne kadar süre düşmüştür?

f. Roketin en yüksek ivmesi nedir?

g. İvme ne zaman sabittir? Bu anda değeri nedir (en yakın tamsayı olarak)?

18. Aşağıdaki şekilde bir koordinat doğrusu boyunca ilerleyen bir parçacığın $v = f(t)$ hız grafiği görülmektedir.



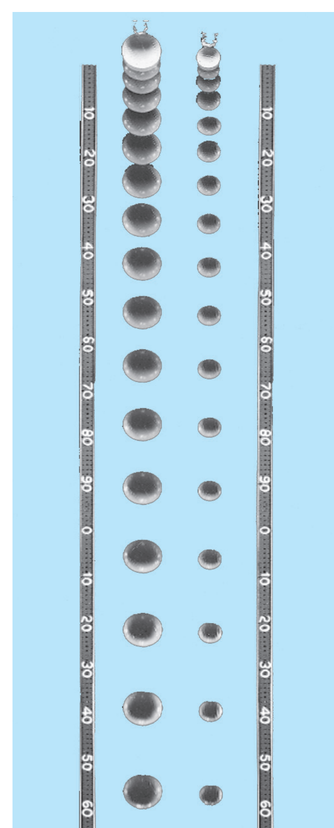
a. Parçacık ne zaman ileriye veya geriye doğru gider? Ne zaman hızlanır veya yavaşlar?

b. Parçacığın ivmesi nerede pozitif, negatif veya sıfırdır?

c. Parçacık ne zaman en yüksek sürate ulaşır?

d. Parçacık ne zaman bir andan fazla hareketsiz kalır?

19. Düşen iki top Aşağıdaki şekilde çok parlamalı fotoğraf serbest düşen iki topu göstermektedir. Dikey cetveller santimetre olarak işaretlenmiştir. $s = 490t^2$ (s santimetre ve t saniye olarak serbest düşme denklemi) eşitliğini kullanarak aşağıdaki soruları yanıtlayın.



a. Topların ilk 160 cm'yi düşmeleri ne kadar sürmüştür? Bu süre içinde ortalama hızları nedir?

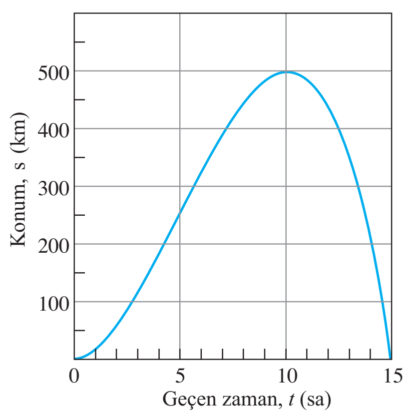
b. 160 cm sınırına geldiklerinde toplar hangi hızla düşer? O andaki ivmeleri nedir?

c. Işığın parlama hızı (saniyede parlama) nedir?

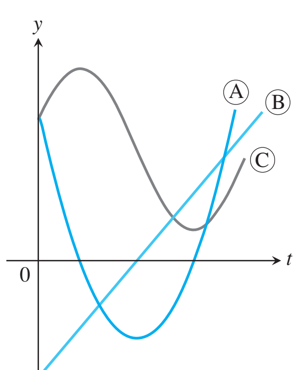
20. Hareket haline bir kamyon Aşağıdaki şekil bir otoyolda giden bir kamyonun s konumunu göstermektedir. Kamyon $t = 0$'da yola çıkar ve 15 saat sonra $t = 15$'te geri döner.

a. Bölüm 3.1, Örnek 3'te tanımlanan yöntemi kullanarak $0 \leq t \leq 15$ için kamyonun $v = ds/dt$ hızını çizin. Aynı işlemi hız eğrisine uygulayarak, dv/dt ivme grafiğini çizin.

b. (a). $s = 15t^2 - t^3$ olduğunu varsayın. ds/dt ve d^2s/dt^2 grafiklerini çizerek (a) şıkkındakilerle karşılaştırın.

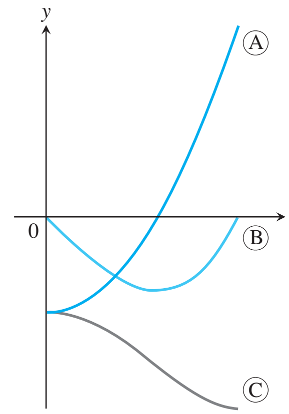


21. Şekil 3.21'deki grafikler bir koordinat doğrusu üzerinde hareket eden bir cismin s konumunu, $v = ds/dt$ hızını ve $a = d^2s/dt^2$ ivmesini t zamanının fonksiyonları olarak göstermektedir. Hangi grafik hangisidir? Yanıtınızı açıklayın.



ŞEKİL 3.21 Alıştırma 21 için grafikler.

22. Şekil 3.22'deki grafikler bir koordinat doğrusu üzerinde ilerleyen bir cismin s konumunu, $v = ds/dt$, hızını ve $a = d^2s/dt^2$ ivmesini t zamanının fonksiyonları olarak göstermektedir. Hangi grafik hangisidir? Yanıtınızı açıklayın.



ŞEKİL 3.22 Alıştırma 22 için grafikler.

Ekonomi

23. Marjinal maliyet x çamaşır makinesi üretmenin maliyetinin dolar olarak $c(x) = 2000 + 100x - 0.1x^2$ olduğunu varsayın.

a. İlk 100 çamaşır makinesini üretmenin ortalama makine başına maliyetini bulun.

b. 100 çamaşır makinesi üretildiğindeki marjinal maliyeti bulun.

c. 100 çamaşır makinesi üretildiğindeki marjinal maliyetin, yaklaşık olarak, 100 makine üretildikten sonra üretilecek olan bir makinenin üretilmesinin maliyetine eşit olduğunu, ikinci maliyeti doğrudan hesaplayarak bulun.

24. Marjinal gelir x tane çamaşır makinesinin satılmasından elde edilen gelirin

$$r(x) = 20,000\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

dolar olduğunu varsayın.

a. 100 çamaşır makinesi üretildiğindeki marjinal geliri bulun.

b. Üretimin haftada 100 çamaşır makinesinden 101 çamaşır makinesine çıkartılmasıyla oluşacak gelirdeki artmayı tahmin etmek için $r'(x)$ fonksiyonunu kullanın.

c. $x \to \infty$ iken $r'(x)$'in limitini bulun. Bu sayıyı nasıl yorumlarsınız?

Ek Uygulamalar

25. Bakteri nüfusu Bakterilerin yetiştiği besleyici bir sıvıya bir bakteri eklendiğinde, bakteri topluluğu bir süre büyümeye devam etmiş, sonra da durmuş ve azalmaya başlamıştır. Topluluğun t (saat) anındaki büyüklüğü $b = 10^6 + 10^4t - 10^3t^2$ dir.

a. $t = 0$ saat

b. $t = 5$ saat

c. $t = 10$ saat

lerindeki büyüme oranlarını bulun.

26. Bir tankı boşaltmak Boşaltılmaya başlandıktan t dakika sonra bir tanktaki su miktarı (galon olarak) $Q(t) = 200(30 - t)^2$ dakikanın sonunda su hangi hızla dışarı akmaktadır? İlk 10 dakika boyunca suyun ortalama akış oranı nedir?

T **27. Bir tankı boşaltmak** Altındaki musluğu açarak bir depoyu boşaltmak 12 saat sürmektedir. Musluk açıldıktan t saat sonra depodaki sıvının y yüksekliği şu formülle verilir:

$$y = 6\left(1 - \frac{t}{12}\right)^2 \text{ m}.$$

a. t zamanında deponun boşalma oranı dy/dt (m/h)'yi (m/sa) bulun.

b. Depodaki sıvı seviyesi ne zaman en hızlı, ne zaman en yavaş düşmektedir? Bu zamanlardaki dy/dt değerleri nelerdir?

c. y ve dy/dt grafiklerini beraber çizin ve y'nin dy/dt'nin değer ve işaretlerine bağlı olarak davranışını açıklayın.

28. Bir balonu şişirmek Küresel bir balonun hacmi, $V = (4/3)\pi r^3$, yarıçapla değişir.

a. $r = 2$ ft olduğunda hacmin yarıçapa göre değişim oranı (ft^3/ft) nedir?

b. Yarıçap 2ft'ten 2.2 ft'e değiştiğinde hacim yaklaşık olarak ne kadar değişir?

29. Bir uçağın kalkışı Bir uçağın kalkıştan önce pistte aldığı mesafe $D = (10/9)t^2$ ile verilir. Burada D başlangıçtan itibaren metre olarak ölçülen mesafe ve t saniye olarak frenlerin boşalmasından itibaren geçen zamandır. Uçak hızı 200 km/sa olduğunda havalanacaksa, havalanması ne kadar sürer ve bu sürede ne kadar yol alır?

30. Volkanik lav akıntıları Hawaii adasındaki Kasım 1959 Kilauea Iki patlaması krater duvarı üzerinde akıntılar halinde başlamışsa da, hareket daha sonra kraterin tabanında tek bir kanalda toplanmış ve buradaki tek bir noktadan havaya 1900 ft yükseklikte lav fırlatmıştır (bir dünya rekoru). Lavın çıkış hızı ft/sn ve mil/sa olarak nedir? (*İpucu*: v_0 bir lav parçacığının çıkış hızı ise, t saniye sonra yüksekliği $s = v_0 t - 16t^2$ ft olacaktır. $ds/dt = 0$ olduğu zamanı bularak işe başlayın. Hava tepkisini ihmal edin).

T 31–34 alıştırmalarında s-ekseninde ilerleyen bir cismin $s = f(t)$ konumu t zamanının bir fonksiyonu olarak verilmektedir. f'yi, hız fonksiyonu $v(t) = ds/dt = f'(t)$ ve $a(t) = d^2s/dt^2 = f''(t)$ ile birlikte çizin. v ile a'nın değer ve işaretlerine bağlı olarak cismin davranışını açıklayın. Açıklamanızda aşağıdaki bilgilere de yer verin.

a. Cisim ne zaman durmaktadır?

b. Ne zaman sola (aşağı) veya sağa (yukarı) gitmektedir?

c. Ne zaman yön değiştirir?

d. Ne zaman hızlanır ve yavaşlar?

e. Ne zaman en hızlı hareket eder (en yüksek)? En yavaş?

f. Ne zaman eksen orijininden en uzaktadır?

31. $s = 200t - 16t^2, \quad 0 \le t \le 12.5$ (Dünya yüzeyinden dik yukarı doğru 200 ft/sn ilk hızla atılan ağır bir cisim)

32. $s = t^2 - 3t + 2, \quad 0 \le t \le 5$

33. $s = t^3 - 6t^2 + 7t, \quad 0 \le t \le 4$

34. $s = 4 - 7t + 6t^2 - t^3, \quad 0 \le t \le 4$

35. Safkan Yarışı Bir yarış atı 10-furlong'luk bir yarış koşmaktadır. (1 furlong 220 yarda ≈ 201 metredir, bu alıştırmada birimler olarak furlong ve saniye kullanılacaktır). Yarışın başından itibaren, yarış atı her furlong (F) işaretini geçtiğinde bir kahya, tabloda gösterildiği gibi geçen zamanı (t) kaydetmektedir.

F	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	0	20	33	46	59	73	86	100	112	124	135

a. Yarış atı yarışı ne kadar zamanda bitirir?

b. İlk 5 furlong'ta atın ortalama sürati nedir?

c. 3. furlong işaretini geçerken atın yaklaşık sürati nedir?

d. At, yarışın hangi bölümünde en hızlı koşar?

e. At, yarışın hangi bölümünde en çabuk hızlanır?

3.4 Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri

Hakkında bilgi edinmek istediğimiz bir çok olay yaklaşık olarak periyodiktir (elektromanyetik alanlar, kalp atışları, gel-gitler, hava). Sinüslerin ve kosinüslerin türevleri periyodik değişiklikleri tanımlamada anahtar rolü oynarlar. Bu bölüm altı temel trigonometrik fonksiyonun türevlerinin nasıl alınacağını göstermektedir.

Sinüs Fonksiyonunun Türevi

x, radyan olarak ölçülmek üzere $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun türevini almak için, Bölüm 2.4'te Örnek 5a ve Teorem 7'deki limitleri, sinüs için açı toplama özdeşliği ile birleştiririz:

$$\sin(x + h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

$f(x) = \sin x$, ise

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} && \text{Türev tanımı} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h} && \text{Sinüs açı toplama özdeşliği} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h}\right) + \lim_{h \to 0} \left(\cos x \cdot \frac{\sin h}{h}\right) \\
&= \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 && \text{Bölüm 2.4, Örnek 5(a) ve Teorem 7} \\
&= \cos x
\end{aligned}
$$

Sinüs foksiyonunun türevi kosinüs fonksiyonudur:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

ÖRNEK 1 Sinüs İçeren Türevler

(a) $y = x^2 - \sin x$:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 2x - \frac{d}{dx}(\sin x) && \text{Farklı kuralı} \\
&= 2x - \cos x.
\end{aligned}
$$

(b) $y = x^2 \sin x$:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= x^2 \frac{d}{dx}(\sin x) + 2x \sin x && \text{Çarpma kuralı} \\
&= x^2 \cos x + 2x \sin x.
\end{aligned}
$$

(c) $y = \dfrac{\sin x}{x}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \cdot 1}{x^2} && \text{Bölme kuralı} \\
&= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}
\end{aligned}
$$

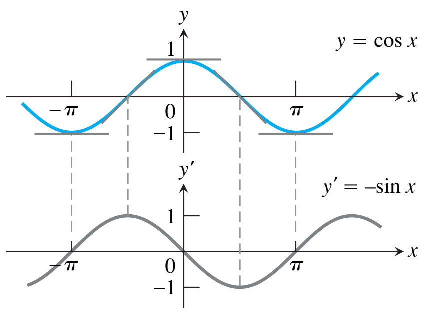
■

Kosinüs Fonksiyonunun Türevi

Kosinüs için

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

açı toplama formülünün yardımıyla,



ŞEKİL 3.23 $y = \cos x$ eğrisinin teğetlerinin eğimleri olarak $y' = -\sin x$ eğrisi.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cos x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} && \text{Türev tanımı}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(\cos x\cos h - \sin x\sin h)-\cos x}{h} && \text{Kosinüs açı toplama özdeşliği}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h - 1)-\sin x\sin h}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\cos x\cdot\frac{\cos h-1}{h} - \lim_{h\to 0}\sin x\cdot\frac{\sin h}{h}\\ &= \cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} - \sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\ &= \cos x\cdot 0 - \sin x\cdot 1\\ &= -\sin x && \text{Bölüm 2.4, Örnek 5(a) ve Teorem 7}\end{aligned}$$

Kosinüs foksiyonunun türevi sinüs fonksiyonunun negatifidir:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

Şekil 3.23'te bu sonucu görmenin başka bir yolu gösterilmektir.

ÖRNEK 2 Cosinüs İçeren Türevler

(a) $y = 5x + \cos x$:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(\cos x) && \text{Toplama kuralı}\\ &= 5 - \sin x.\end{aligned}$$

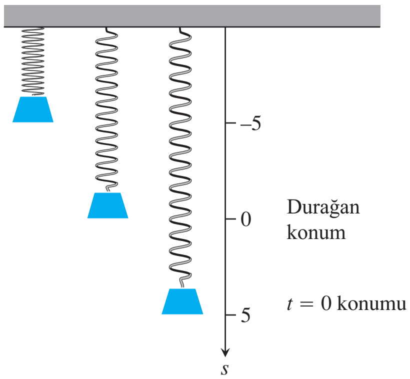
(b) $y = \sin x\cos x$:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \sin x\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x\frac{d}{dx}(\sin x) && \text{Çarpım kuralı}\\ &= \sin x(-\sin x) + \cos x(\cos x)\\ &= \cos^2 x - \sin^2 x\end{aligned}$$

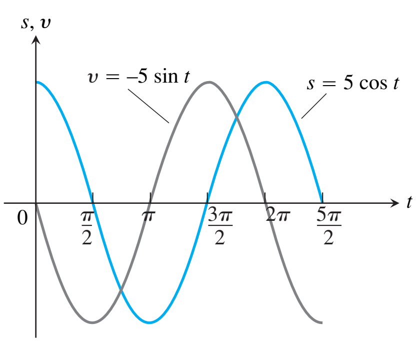
(c) $y = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(1-\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x\frac{d}{dx}(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2} && \text{Bölme kuralı}\\ &= \frac{(1-\sin x)(-\sin x) - \cos x(0-\cos x)}{(1-\sin x)^2}\\ &= \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2} && \sin^2 x + \cos^2 x = 1\\ &= \frac{1}{1-\sin x}\end{aligned}$$

■



ŞEKİL 3.24 Dikey bir yay'a asılı bir cisim durağan konumundan yukarı-aşağı salınıyor. Bu hareket trigonometrik fonksiyonlarla tanımlanır (Örnek 3).



ŞEKİL 3.25 Örnek 3'teki cismin konum ve hız grafikleri.

Basit Harmonik Hareket

Bir yayın ucunda serbestçe aşağı ve yukarı doğru salınan bir cismin hareketi *basit harmonik harekete* bir örnektir. Aşağıdaki örnekte sürtünme veya esneklik gibi hareketi yavaşlatacak kuvvetlerin bulunmadığı bir durum tanımlanmaktadır.

ÖRNEK 3 Yayın Hareketi

Bir yaya asılı bir cisim (Şekil 3.24) başlangıç konumundan 5 birim uzatılır ve $t = 0$ zamanında salınmaya bırakılır. t zaman sonraki konumu

$$s = 5 \cos t$$

ile verilir. t anındaki hızı ve ivmesi nedir?

Çözüm

Konum: $s = 5 \cos t$

Hız: $\upsilon = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(5 \cos t) = -5 \sin t$

İvme: $a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(-5 \sin t) = -5 \cos t$

Bu denklemlerden şunları öğreniriz:

1. Zaman içinde, cisim s-ekseninde $s = 5$ ile $s = –5$ arasında gidip gelir. Hareketin genliği 5'tir. Hareketin periyodu ise, cos t'nin periyodu olan 2π'dir.
2. $\upsilon = -5 \sin t$ hız fonksiyonu en büyük değerini, 5, Şekil 3.25'teki grafiklerde görüldüğü gibi, $\cos t = 0$ olduğunda alır. Dolayısıyla cismin sürati, $|\upsilon| = 5|\sin t|$, her $\cos t = 0$ olduğunda, yani $s = 0$ iken (başlangıç konumunda), en büyüktür. $\sin t = 0$ olduğunda, cismin sürati sıfırdır. Bu durum, $s = 5 \cos t = \pm 5$ iken, yani hareket aralığının uç noktalarında gerçekleşir.
3. İvmenin değeri, daima konumun değerinin tam zıddı dır. Cisim başlangıç konumundan yukarıda ise yerçekimi cismi aşağıya çeker; Cisim başlangıç konumundan aşağıda ise yay cismi aşağıya çeker.
4. İvme, $a = –5 \cos t$, sadece $\cos t = 0$ olduğu ve yerçekimi kuvveti ile yay kuvvetinin birbirini dengelediği başlangıç konumunda sıfırdır. Cisim başka bir yerdeyse, iki kuvvet eşit değildir dolayısıyla ivme sıfırdan farklı dır. İvmenin büyüklüğü, orijinden en uzak noktalarda, yani $\cos t = \pm 1$ olduğunda en büyüktür. ■

ÖRNEK 4 Silkinme

Örnek 3'teki basit harmonik hareketin silkinmesi

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}(-5 \cos t) = 5 \sin t.$$

dir. En büyük değerini, yer değiştirmenin extremlerinde değil, ivmenin yön ve işaret değiştirdiği başlangıç konumunda, $\sin t = \pm 1$ olduğunda alır. ■

Diğer Temel Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri

sin$x$ ve cos$x$ x'in türevlenebilir fonksiyonları oldukları için, bunlarla ilişkili

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \text{ve} \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

fonksiyonları da tanımlı oldukları bütün x değerlerinde türevlenebilirdirler. Bölüm kuralıyla bulunan türevleri aşağıdaki formüllerle verilir. Kotanjant ve kosekant fonksiyonlarının türev formüllerindeki eksi işaretine dikkat edin.

Diğer Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

Bunların nasıl hesaplandığını görmek için, tanjat fonksiyonunun türevini çıkartacağız. Diğerlerinin çıkartılması Alıştırma 50'ye bırakılmıştır.

ÖRNEK 5

$d(\tan x)/dx$'i bulun.

Çözüm

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \qquad \text{Bölme kuralı}$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

■

ÖRNEK 6

$y = \sec x$ ise y'''nü bulun.

Çözüm

$$y = \sec x$$

$$y' = \sec x \tan x$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(\sec x \tan x)$$

$$= \sec x \frac{d}{dx}(\tan x) + \tan x \frac{d}{dx}(\sec x) \qquad \text{Çarpım kuralı}$$

$$= \sec x(\sec^2 x) + \tan x(\sec x \tan x)$$

$$= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x$$

■

Trigonometrik fonksiyonların, tanım kümelerinin tamamında türevlenebilir olmaları, tanım kümelerinin her noktasında sürekliliklerinin bir başka ispatıdır (Bölüm 3.1, Teorem 1). Dolayısıyla, trigonometrik fonksiyonların cebirsel kombinasyonlarının ve bileşkelerinin limitlerini doğrudan yerine yazma ile hesaplayabiliriz.

ÖRNEK 7 Bir trigonometrik limit bulma

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+\sec x}}{\cos(\pi-\tan x)}=\frac{\sqrt{2+\sec 0}}{\cos(\pi-\tan 0)}=\frac{\sqrt{2+1}}{\cos(\pi-0)}=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$$ ■

ALIŞTIRMALAR 3.4

Türevler

1–12 alıştırmalarında dy/dx'i bulun.

1. $y=-10x+3\cos x$ **2.** $y=\frac{3}{x}+5\sin x$

3. $y=\csc x-4\sqrt{x}+7$ **4.** $y=x^2\cot x-\frac{1}{x^2}$

5. $y=(\sec x+\tan x)(\sec x-\tan x)$

6. $y=(\sin x+\cos x)\sec x$

7. $y=\frac{\cot x}{1+\cot x}$ **8.** $y=\frac{\cos x}{1+\sin x}$

9. $y=\frac{4}{\cos x}+\frac{1}{\tan x}$ **10.** $y=\frac{\cos x}{x}+\frac{x}{\cos x}$

11. $y=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$

12. $y=x^2\cos x-2x\sin x-2\cos x$

13–16 alıştırmalarında, ds/dt'yi bulun.

13. $s=\tan t-t$ **14.** $s=t^2-\sec t+1$

15. $s=\frac{1+\csc t}{1-\csc t}$ **16.** $s=\frac{\sin t}{1-\cos t}$

17–20 alıştırmalarında $dr/d\theta$'yı bulun.

17. $r=4-\theta^2\sin\theta$ **18.** $r=\theta\sin\theta+\cos\theta$

19. $r=\sec\theta\csc\theta$ **20.** $r=(1+\sec\theta)\sin\theta$

21–24 alıştırmalarında dp/dq'yu bulun.

21. $p=5+\frac{1}{\cot q}$ **22.** $p=(1+\csc q)\cos q$

23. $p=\frac{\sin q+\cos q}{\cos q}$ **24.** $p=\frac{\tan q}{1+\tan q}$

25. **a.** $y=\csc x$ **b.** $y=\sec x$
ise y'''nü bulun.

26. **a.** $y=-2\sin x$ **b.** $y=9\cos x$
ise $y^{(4)}=d^4y/dx^4$'ü bulun.

Teğetler

27–30 alıştırmalarında, verilen aralıklarda eğrileri, verilen x değerlerindeki teğetleriyle birlikte çizin. Her eğriyi ve teğetini denklemiyle isimlendirin.

27. $y=\sin x,\quad -3\pi/2\le x\le 2\pi$
$x=-\pi, 0, 3\pi/2$

28. $y=\tan x,\quad -\pi/2<x<\pi/2$
$x=-\pi/3, 0, \pi/3$

29. $y=\sec x,\quad -\pi/2<x<\pi/2$
$x=-\pi/3, \pi/4$

30. $y=1+\cos x,\quad -3\pi/2\le x\le 2\pi$
$x=-\pi/3, 3\pi/2$

T 31–34 alıştırmalarındaki fonksiyonların grafiklerinin $0\le x\le 2\pi$ aralığında yatay teğetleri var mıdır? Varsa, nerede bulunur? Yoksa, neden yoktur? Bulduklarınızı bir grafik programında çizerek kontrol edebilirsiniz.

31. $y=x+\sin x$

32. $y=2x+\sin x$

33. $y=x-\cot x$

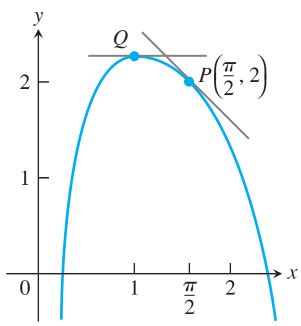
34. $y=x+2\cos x$

35. $y=\tan x$, $-\pi/2<x<\pi/2$ eğrisinde, teğetin $y=2x$ doğrusuna paralel olduğu bütün noktaları bulun. Eğriyi ve teğet(ler)ini denklemleriyle isimlendirerek birlikte çizin.

36. $y=\cot x$, $0<x<\pi$ eğrisinde, teğetin $y=-x$ doğrusuna paralel olduğu bütün noktaları bulun. Eğriyi ve teğet(ler)ini denklemleriyle isimlendirerek birlikte çizin.

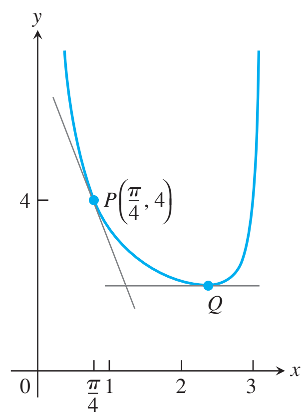
37 ve 38 alıştırmalarında, eğrinin **(a)** P noktasındaki teğetinin, **(b)** Q noktasındaki yatay teğetinin denklemlerini bulun.

37.



$y = 4 + \cot x - 2\csc x$

38.



$y = 1 + \sqrt{2}\csc x + \cot x$

Trigonometrik Limitler

39–44 alıştırmalarındaki limitleri bulun.

39. $\lim_{x\to 2} \sin\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)$

40. $\lim_{x\to -\pi/6} \sqrt{1 + \cos(\pi \csc x)}$

41. $\lim_{x\to 0} \sec\left[\cos x + \pi \tan\left(\frac{\pi}{4\sec x}\right) - 1\right]$

42. $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{\pi + \tan x}{\tan x - 2\sec x}\right)$

43. $\lim_{t\to 0} \tan\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)$

44. $\lim_{\theta\to 0} \cos\left(\frac{\pi\theta}{\sin\theta}\right)$

Basit Harmonik Hareket

45 ve 46 alıştırmalarındaki denklemler bir koordinat doğrusu üzerinde hareket eden bir cismin $s = f(t)$ konum fonksiyonlarıdır (s metre, t saniye). Cismin $t = \pi/4$ sn'deki hızını, süratini, ivmesini ve silkinmesini bulun.

45. $s = 2 - 2\sin t$

46. $s = \sin t + \cos t$

Teori ve Örnekler

47.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 3x}{x^2}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu $x = 0$'da sürekli yapacak bir c değeri var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

48.

$$g(x) = \begin{cases} x + b, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu $x = 0$'da sürekli yapacak bir b değeri var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

49. $d^{999}/dx^{999}(\cos x)$'i bulun.

50. Aşağıdakilerin x'e göre türevlerinin formüllerini çıkarın.

a. $\sec x$. **b.** $\csc x$. **c.** $\cot x$.

T **51.** $y = (\cos x)$'i $-\pi \leq x \leq 2\pi$ aralığında çizin. Aynı ekranda, $h = 1, 0.5, 0.3$ ve 0.1 için

$$y = \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h}$$

fonksiyonunu çizin. Başka bir çerçeve açarak, $h = -1, -0.5, -0.3$'ü deneyin. $h \to 0^+$ ve $h \to 0^-$ iken ne olur? Burada gösterilmek istenen olay nedir?

T **52.** $y = -\sin x$'i $-\pi \leq x \leq 2\pi$ aralığında çizin. Aynı ekranda, $h = 1, 0.5, 0.3$ ve 0.1 için

$$y = \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h}$$

fonksiyonunu çizin. Başka bir çerçeve açarak, $h = -1, -0.5, -0.3$'ü deneyin. $h \to 0^+$ ve $h \to 0^-$ iken ne olur? Burada gösterilmek istenen olay nedir?

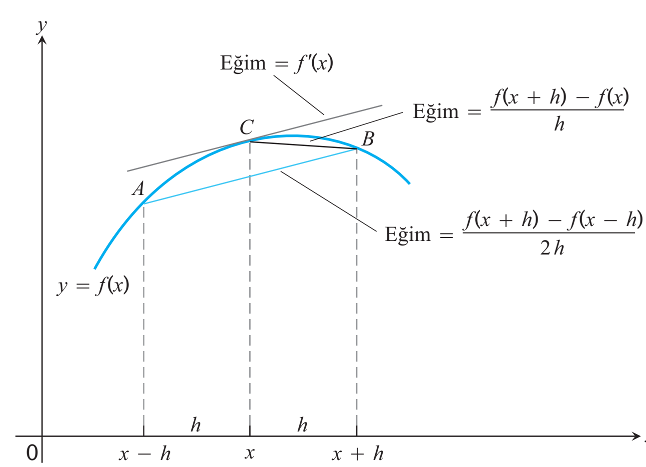
T **53. Ortalanmış farklar oranı** *Ortalanmış farklar oranı*

$$\frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$$

sayısal hesaplamalarda $f'(x)$'e yaklaşım için kullanılır, çünkü (1) $h \to 0$ iken, limiti, $f'(x)$ varsa, $f'(x)$'i verir, (2) verilen bir h değeri için, Fermat'nın

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

farklar oranından daha iyi bir yaklaşıklık sağlar. Aşağıdaki şekle bakın.



a. $f(x) = \sin x$'in ortalanmış farklar oranının $f'(x) = \cos x$'e ne hızla yakınsadığını görmek için, $y = \cos x$ ve

$$y = \frac{\sin(x + h) - \sin(x - h)}{2h}$$

fonksiyonlarını, $h = 1$, 0.5 ve 0.3 değerleri için $[-\pi, 2\pi]$ aralığında beraber çizin. Sonuçlarınızı Alıştırma 51'de bulduklarınızla karşılaştırın.

b. $f(x) = \cos x$'in ortalanmış farklar oranının $f'(x) = -\sin x$'e ne hızla yakınsadığını görmek için, $y = -\sin x$ ve

$$y = \frac{\cos(x + h) - \cos(x - h)}{2h}$$

fonksiyonlarını, $h = 1$, 0.5 ve 0.3 değerleri için $[-\pi, 2\pi]$ aralığında beraber çizin. Sonuçlarınızı Alıştırma 52'de bulduklarınızla karşılaştırın.

54. Ortalanmış farklar oranları hakkında bir uyarı (*Alıştırma 53'ün devamı*)

$$\frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$$

farklar oranının, f'nin x'te türevi olmadığında, $h \to 0$ iken bir limiti bulunabilir. Bir deneme olarak, $f(x) = |x|$ alın ve

$$\lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - |0 - h|}{2h}.$$

limitini hesaplayın. Göreceğiniz gibi, $f(x) = |x|$ fonksiyonunun $x = 0$'da türevi olmamasına rağmen, limit vardır. *Moral*: Bir ortalanmış farklar oranı kullanmadan önce türevin varlığından emin olun.

T **55. Tanjant fonksiyonunun grafiği üzerinde eğimler** $y = \tan x$ ve türevini $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığında birlikte çizin. Tanjant fonksiyonunun grafiğinin en büyük veya en küçük bir eğimi var mıdır? Eğim hiç negatif olur mu? Yanıtlarınızı açıklayın.

T **56. Kotanjant fonksiyonunun grafiği üzerinde eğimler** $y = \cot x$ ve türevini $0 < x < \pi$ aralığında birlikte çizin. Kotanjant fonksiyonunun grafiğinin en büyük veya en küçük bir eğimi var mıdır? Eğim hiç pozitif olur mu? Yanıtlarınızı açıklayın.

T **57. $(\sin kx)/x$'i araştırmak** $y = (\sin x)/x$, $y = (\sin 2x)/x$, ve $y = (\sin 4x)/x$ grafiklerini $-2 \le x \le 2$ aralığında birlikte çizin. Her bir grafik y eksenini nerede keser gibi görünmektedir? Grafikler eksenle gerçekten de kesişirler mi? $y = (\sin 5x)/x$ ve $y = (\sin(-3x))/x$ grafiklerinin $x \to 0$ iken nasıl davranmalarını beklersiniz? Neden? Peki ya farklı k değerleri için $y = (\sin kx)/x$ grafiği nasıl davranır? Yanıtınızı açıklayın.

T **58. Radyan ve derece: derece modunda türevler** x radyan yerine derece olarak ölçülürse, $\sin x$ ve $\cos x$'in türevlerine ne olur? Aşağıdaki adımları izleyerek bulun.

a. Grafik programınızı *derece moduna* ayarlayarak,

$$f(h) = \frac{\sin h}{h}$$

fonksiyonunu çizin ve $\lim_{h\to 0} f(h)$'yi tahmin edin. Tahmininizi $\pi/180$ ile karşılaştırın. Limitin $\pi/180$ olması için bir neden var mıdır?

b. Grafik programınız yine derece modunda olmak üzere,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$$

limitini hesaplayın.

c. $\sin x$'in türevinin çıkartılışına geri dönün ve buradaki adımları derece modunda limitler alarak tekrarlayın. Türev için nasıl bir formül bulursunuz?

d. $\cos x$'in türevini derece modunda limitler alarak bulun. Türev için nasıl bir formül bulursunuz?

e. Derece modundaki formüllerin dezavantajı daha yüksek mertebe türevler alırken iyice belirginleşir. $\sin x$ ve $\cos x$'in ikinci ve üçüncü mertebe derece modundaki türevleri nedir?

3.5 Zincir Kuralı ve Parametrik Denklemler

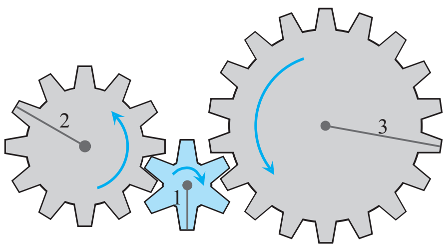
$y = f(u) = \sin u$ ve $u = g(x) = x^2 - 4$ fonksiyonlarının türevlerini nasıl alacağımızı biliyoruz, fakat $F(x) = f(g(x)) = \sin(x^2 - 4)$ gibi bir bileşkenin türevini nasıl alırız? Yani, $F(x) = f \circ g$'nin türevini nasıl buluruz? Cevap, iki türevlenebilir fonksiyonun bileşkesinin türevinin, iki fonksiyonun da uygun noktalarda alınmış türevlerinin çarpımı olduğunu söyleyen zincir kuralıdır. Zincir kuralı büyük olasılıkla matematikte en sık kullanılan türev alma yöntemidir. Bu bölüm, kuralı ve nasıl kullanılacağnı tanımlamaktadır. Daha sonra kuralı, düzlemde eğrileri ve teğetlerini başka yolla tanımlamak için kullanacağız.

Bir Bileşke Fonksiyonun Türevi

Örneklerle başlıyoruz.

ÖRNEK 1 Türevleri İlişkilendirmek

$y = \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}(3x)$ fonksiyonu $y = \frac{1}{2}u$ ve $u = 3x$ fonksiyonlarının bileşkesidir. Bu üç fonksiyonun türevlerinin arasındaki ilişki nedir?



ŞEKİL 3.26 A dişlisi x kere dönerken, B dişlisi u kere, C dişlisi ise y kere döner. Çevrelerini karşılaştırarak veya dişlerini sayarak, $y = u/2$ (B'nin her bir dönüşü için, C yarım dönüş yapar), $u = 3x$ (A'nın her bir dönüşü için, B üç defa döner), yani $y = 3x/2$ olduğunu görürüz. Dolayısıyla $dy/dx = 3/2 = (1/2)(3) = (dy/du)(du/dx)$ olur.

Çözüm

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{dy}{du} = \frac{1}{2}, \qquad \text{ve} \qquad \frac{du}{dx} = 3$$

olduğunu biliyoruz. $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3$ olduğundan,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

buluruz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

olması bir tesadüf müdür? Türevi bir değişim oranı olarak düşünürsek, şimdiye kadar öğrendiklerimiz bu ilişkinin mantıklı olduğunu gösterir. $y = f(u)$ ve $u = g(x)$ için, y u'nun yarısı kadar hızlı değişiyor ve u da x'in üç katı kadar hızlı değişiyorsa, y'nin x'in $3/2$ katı hızlı değişmesini bekleriz. Bu çoklu bir dişli sisteminin etkisiyle aynıdır (Şekil 3.26). ■

ÖRNEK 2

$$y = 9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2 + 1)^2$$

$y = u^2$ ve $u = 3x^2 + 1$ fonksiyonlarının bileşkesidir. Türevleri hesaplarsak,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} &= 2u \cdot 6x \\ &= 2(3x^2 + 1) \cdot 6x \\ &= 36x^3 + 12x \end{aligned}$$

olduğunu görürüz. Türevleri açık formülden hesaplarsak

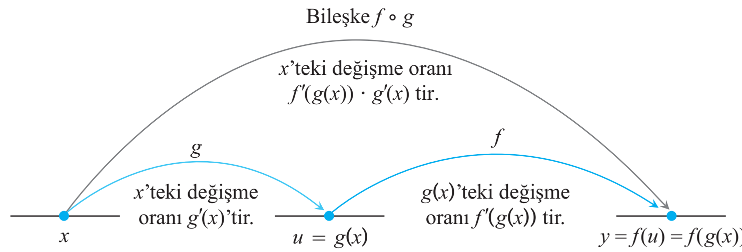
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(9x^4 + 6x^2 + 1\right) \\ &= 36x^3 + 12x \end{aligned}$$

elde ederiz. Bir kere daha

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$$ ■

ile karşılaşırız.

$f(g(x))$ bileşke fonksiyonunun x'teki türevi f'nin $g(x)$'teki türevi çarpı g'nin x'teki türevidir. Buna zincir kuralı denir (Şekil 3.27).



ŞEKİL 3.27 Değişim oranları çarpılır: $f \circ g$ ' nin x'teki türevi f'nin $g(x)$ noktasındaki türevi çarpı g'nin x'teki türevidir.

TEOREM 3 Zincir Kuralı
$f(u)$ $u = g(x)$ noktasında türevlenebiliyorsa ve $g(x)$ de x'te türevlene biliyorsa, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ bileşke fonksiyonu da x'de türevlenebilir ve bu türev

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

olur. Leibnitz gösterimiyle, $y = f(u)$ ve $u = g(x)$ ise, bu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

olarak yazılır. Burada dy/du $u = g(x)$'te hesaplanmaktadır.

Zincir Kuralının Sezgisel "İspatı":
x'teki Δx değişimine karşılık u'daki değişme Δu olsun, yani

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

olsun. Buna karşılık y'deki değişme

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

olur.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{1}$$

yazmak ve $\Delta x \to 0$ iken limit almak ilginç olabilir:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}
\end{aligned}$$

(g sürekli olduğundan $\Delta x \to 0$ için $\Delta u \to 0$ olduğuna dikkat edin)

Bu akıl yürütmedeki tek pürüz şu olabilir: (1) denkleminde $\Delta u = 0$ olabilir ($\Delta u \neq 0$ olduğu halde) ve şüphesiz ki 0 ile bölemeyiz. İspat, bu pürüzün üstesinden gelmek için farklı bir yaklaşım gerektirmektedir ve Bölüm 3.8 de tam ispatı vereceğiz. ■

ÖRNEK 3 Zincir Kuralını Uygulamak

x-ekseni üzerinde hareket eden bir cismin her $t \geq 0$ zamanındaki konumu $x(t) = \cos(t^2 + 1)$ ile veriliyor. Cismin hızını, t'nin bir fonksiyonu olarak bulun.

Çözüm Hızın dx/dt olduğunu biliyoruz. Bu arada, x bir bileşke fonksiyondur: $x = \cos(u)$ ve $u = t^2 + 1$.

$$\frac{dx}{du} = -\sin(u) \qquad x = \cos(u)$$

$$\frac{du}{dt} = 2t \qquad u = t^2 + 1$$

buluruz. Zincir kuralına göre,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} \\ &= -\sin(u) \cdot 2t \qquad \frac{dx}{du}\ u\text{'da hesaplanır.} \\ &= -\sin(t^2 + 1) \cdot 2t \\ &= -2t \sin(t^2 + 1)\end{aligned}$$ ■

bulunur. Örnek 3'te gördüğümüz gibi, Leibniz notasyonundaki zorluk, türevlerin tam olarak nerede hesaplandığını belirtmemesindedir.

"İç-Dış" Kuralı

Bazen zincir kuralını şu şekilde düşünmek yararlı olabilir: $y = f(g(x))$ ise

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

dir. Yani, "dış" fonksiyon f'nin türevini alın ve "iç" fonksiyon $g(x)$'e dokunmayın; sonra da iç fonksiyon $g(x)$'in türeviyle çarpın.

ÖRNEK 4 Dıştan İçe Türev Almak

$\sin(x^2 + x)$'in x'e göre türevini alın.

Çözüm

$$\frac{d}{dx}\sin\underbrace{(x^2 + x)}_{\text{iç}} = \cos\underbrace{(x^2 + x)}_{\text{iç aynı bırakılmış}} \cdot \underbrace{(2x + 1)}_{\text{için türevi}}$$ ■

Zincir Kuralının Üst Üste Kullanılması

Bazen bir türevi bulabilmek için zincir kuralını iki veya daha fazla defa kullanmamız gerekebilir. Aşağıda buna bir örnek verilmektedir.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Johann Bernoulli
(1667–1748)

ÖRNEK 5 Üç Halkalı Bir "Zincir"

$g(t) = \tan(5 - \sin 2t)$ fonksiyonunun türevini bulun.

Çözüm Burada şuna dikkat edin, teğet $5 - \sin 2t$'nin fonksiyonudur. Oysa sinüs fonksiyonu, kendisi de t'nin bir fonksiyonu olan $2t$'nin fonksiyonudur. Bu nedenle Zincir Kuralı'ndan

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{d}{dt}\left(\tan\left(5 - \sin 2t\right)\right) \\
&= \sec^2(5 - \sin 2t)\cdot\frac{d}{dt}\left(5 - \sin 2t\right) && u = 5 - \sin 2t \text{ olmak üzere } \tan u\text{'nun türevi} \\
&= \sec^2(5 - \sin 2t)\cdot\left(0 - \cos 2t\cdot\frac{d}{dt}\left(2t\right)\right) && u = 2t \text{ olmak üzere } 5 - \sin u\text{'nun türevi} \\
&= \sec^2(5 - \sin 2t)\cdot(-\cos 2t)\cdot 2 \\
&= -2(\cos 2t)\sec^2(5 - \sin 2t)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Zincir Kuralı ve Bir Fonksiyonun Kuvveti

f, u'nun türevlenebilir bir fonksiyonu ve u da x'in türevlenebilir bir fonksiyonu ise,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

zincir kuralında $y = f(u)$ yazmak

$$\frac{d}{dx}f(u) = f'(u)\frac{du}{dx}$$

formülüne götürür.

Nasıl çalıştığına dair bir örnek aşağıdadır: n bir tamsayıysa, pozitif veya negatif, ve $f(u) = u^n$ ise, Kuvvet Kuralı (2 ve 7 Kuralları) $f'(u) = nu^{n-1}$ olduğunu söyler. u , x'in türevlenebilir bir fonksiyonu ise bunu, Zincir Kuralını **Kuvvet Zincir Kuralı**'na genişletmek için kullanabiliriz:

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}. \qquad \frac{d}{du}\left(u^n\right) = nu^{n-1}$$

ÖRNEK 6 Kuvvet Zincir Kuralını Uygulamak

(a)
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(5x^3 - x^4)^7 &= 7(5x^3 - x^4)^6\frac{d}{dx}\left(5x^3 - x^4\right) && u = 5x^3 - x^4,\ n = 7 \text{ ile Kuvvet Zincir Kuralı} \\
&= 7(5x^3 - x^4)^6(5\cdot 3x^2 - 4x^3) \\
&= 7(5x^3 - x^4)^6(15x^2 - 4x^3)
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3x - 2}\right) &= \frac{d}{dx}(3x - 2)^{-1} \\
&= -1(3x - 2)^{-2}\frac{d}{dx}(3x - 2) && u = 3x - 2,\ n = -1 \text{ ile Kuvvet Zincir Kuralı} \\
&= -1(3x - 2)^{-2}(3) \\
&= -\frac{3}{(3x - 2)^2}
\end{aligned}$$

(b) şıkkında türevi bölme kuralıyla da bulabilirdik. ■

$\sin^n x$'in anlamı $(\sin x)^n$, $n \neq -1$.

ÖRNEK 7 Teğet Eğimlerini Bulmak

(a) $y = \sin^5 x$ eğrisine $x = \pi/3$ noktasında teğet olan doğrunun eğimini bulunuz.

(b) $y = 1/(1-2x)^3$ eğrisine teğet olan her doğrunun eğiminin pozitif olduğunu gösterin.

Çözüm

(a)
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 5\sin^4 x \cdot \frac{d}{dx}\sin x && u = \sin x,\ n = 5 \text{ ile Kuvvet Zincir Kuralı}\\ &= 5\sin^4 x \cos x\end{aligned}$$

Teğet doğrusunun eğimi

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\pi/3} = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{45}{32}.$$

(b)
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(1-2x)^{-3}\\ &= -3(1-2x)^{-4}\cdot\frac{d}{dx}(1-2x) && u = (1-2x),\ n = -3 \text{ Kuvvet Zincir Kuralı}\\ &= -3(1-2x)^{-4}\cdot(-2)\\ &= \frac{6}{(1-2x)^4}\end{aligned}$$

Eğri üzerindeki her (x, y) noktasında, $x \neq 1/2$ dir ve teğet doğrunun eğimi, pozitif iki sayının oranı olan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{(1-2x)^4}$$

tür. ■

ÖRNEK 8 Radyan ve derece

sin x ve cos x'in türev formüllerinin x'in derece *değil*, radyan olarak ölçüldüğü varsayımı altında çıkarıldığını unutmamak çok önemlidir. Zincir kuralı bu ikisi arasındaki farkı anlamaya daha iyi yardımcı olur. $180° = \pi$ radyan olduğu için, $x° = \pi x/180$ radyan olur.

Zincir kuralını kullanarak,

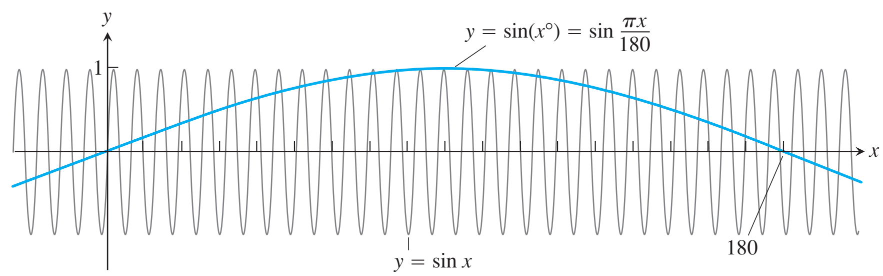
$$\frac{d}{dx}\sin(x°) = \frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos(x°)$$

buluruz. Şekil 3.28'e bakın. Aynı şekilde, $\cos(x°)$'nin türevi $-(\pi/180)\sin(x°)$ olur.

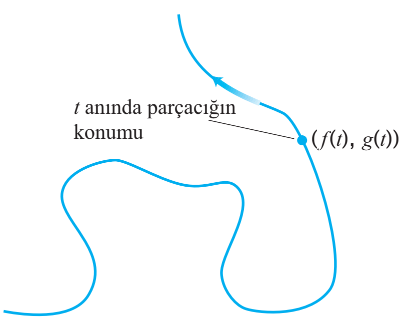
Daha ilk türevde rahatsız edici görünen $\pi/180$ faktörü üst üste türev almayla daha da belirginleşecekir. Bir bakışta radyan ölçü kullanmanın neden daha çekici olduğu anlaşılmaktadır. ■

Parametrik Denklemler

Bir eğriyi, eğri üzerindeki bir $P(x, y)$ noktasının y-koordinatını x'in bir fonksiyonu olarak ifade etmekle tanımlamak yerine, bazen *her iki* koordinatı da bir üçüncü değişken t cinsinden ifade etmek daha uygundur. Şekil 3.29 da bir cismin, bir çift denklem $x = f(t)$, $y = g(t)$, ile tanımlı yolu görülmektedir. Hareket incelemesinde t genellikle zamanı gös-



ŞEKİL 3.28 sin x'in salınmasına karşın sin (x°) sadece $\pi/180$ defa fazla salınır. Maksimum eğimi, $x = 0$ da $\pi/180$'dir (Örnek 8).



ŞEKİL 3.29 xy-düzleminde ilerleyen bir parçacığın izlediği yol her zaman x'in veya y'nin bir fonksiyonun grafiği değildir.

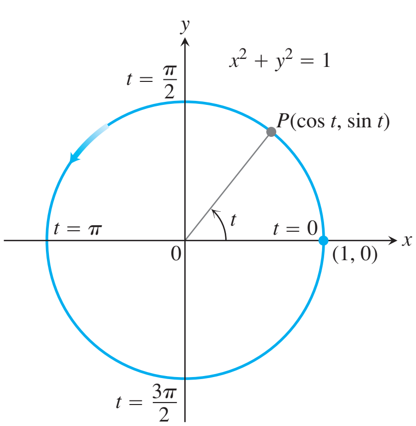
terir. Bu gibi denklemler, herhangi bir t anında parçacığın $(x, y) = f(t), g(t))$ konumunu verdikleri için bir kartezyen formülden daha iyidirler.

TANIM Parametrik Eğri

x ve y, bir t değerleri aralığında

$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

fonksiyonları olarak verilmişse, bu denklemlerle tanımlanan $(x, y) = (f(t), g(t))$ noktalarının kümesi **bir parametrik eğridir**. Denklemler, eğrinin **parametrik denklemleridir**.



ŞEKİL 3.30 $x = \cos t$, $y = \sin t$ denklemleri $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerindeki hareketi tanımlarlar. Ok artan t yönünü göstermektedir (Örnek 9).

t değişkeni eğrinin bir parametresi ve tanım kümesi I, **parametre aralığıdır**. I kapalı bir aralıksa, $a \le t \le b$, $(f(a), g(a))$ noktası eğrinin başlangıç noktası ve $(f(b), g(b))$ noktası eğrinin **bitiş noktasıdır**. Düzlemdeki bir eğri için parametrik denklemleri ve parametre aralığını verirsek, eğriyi **parametrize ettiğimizi** söyleriz. Denklemler ve aralık eğrinin **parametrizasyonunu** verir.

ÖRNEK 9 Bir Çember Üzerinde Saat Yönünün Tersine Hareket

Aşağıdaki parametrik eğrilerin grafiklerini çizin

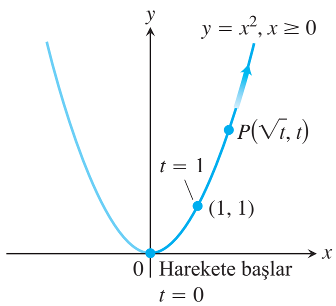
(a) $x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$

(b) $x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$

Çözüm

(a) $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ olduğundan, parametrik eğri $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerinde dir. t 0'dan 2π'ye artarken $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ noktası (1, 0)'dan başlar ve saat yönünün tersine olarak bütün çemberi çizer (Şekil 3.30).

(b) $x = a\cos t, y = a\sin t, 0 \le t \le 2\pi$ için $x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t = a^2$dir. Parametrizasyon, $(a, 0)$ başlayıp $x^2 + y^2 = a^2$ çemberini saat yönünün tersine bir defa kat eden ve $t = 2\pi$'de $(a, 0)$ noktasına dönen hareketi tanımlar. ■



ŞEKİL 3.31 $x = \sqrt{t}$ ve $y = t$ denklemleri ve $t \geq 0$ aralığı, $y = x^2$ parabolünün sağ kolunda ilerleyen bir parçacığın hareketini tanımlar (Örnek 10).

ÖRNEK 10 Bir Parabol Boyunca Hareket

xy-düzleminde ilerleyen bir parçacığın $P(x, y)$ konumu

$$x = \sqrt{t}, \qquad y = t, \qquad t \geq 0$$

denklemleri ve parametre aralığıyla verilmektedir. Parçacığın izlediği yolu belirleyin ve hareketi tanımlayın.

Çözüm İzlenen yolu $x = \sqrt{t}$ ve $y = t$ denklemleri arasında t'yi yok ederek bulmaya çalışırız. Şansımız varsa, bu x ile y arasında tanımlanabilir bir cebirsel bağıntı verecektir. Bu şekilde

$$y = t = \left(\sqrt{t}\right)^2 = x^2$$

buluruz. Bu, parçacığın konum koordinatlarının $y = x^2$ denklemini sağladığını gösterir, dolayısıyla parçacık $y = x^2$ parabolü boyunca hareket eder.

Ancak parçacığın izlediği yolun tüm $y = x^2$ parabolü olduğunu düşünmek bir hatadır—bu yol parabolün sadece yarısıdır. Parçacığın x koordinatı hiçbir zaman negatif değildir. Parçacık $t = 0$ iken (0, 0)'dan harekete başlar ve t arttıkça birinci dörtte bir bölgede yükselir (Şekil 3.31). Parametre aralığı $[0, \infty)$ dur ve bir bitiş noktası yoktur. ■

ÖRNEK 11 Bir Doğru Parçasını Parametrelemek

Uç noktaları (–2, 1) ve (3, 5) olan doğru parçasının bir parametrizasyonunu bulun.

Çözüm (–2, 1) noktasını kullanarak

$$x = -2 + at, \qquad y = 1 + bt$$

parametrik denklemlerini oluştururuz. Her iki denklemi t'ye göre çözer ve eşitlersek

$$\frac{x + 2}{a} = \frac{y - 1}{b}$$

elde ederiz. Bu eşitlikten, denklemlerin bir doğruyu temsil ettiklerini görürüz. Bu doğru, $t = 0$ iken (–2, 1) den geçer. $t = 1$ iken doğru (3, 5) noktasından geçecek şekilde a ve b değerlerini belirleriz.

$$3 = -2 + a \quad \Rightarrow \quad a = 5 \qquad t = 1 \text{ için } x = 3$$
$$5 = 1 + b \quad \Rightarrow \quad b = 4 \qquad t = 1 \text{ için } y = 5$$

Bu nedenle,

$$x = -2 + 5t, \qquad y = 1 + 4t, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

denklemleri, başlangıç noktası (–2, 1) ve bitiş noktası (3, 5) olan doğru parçasının bir parametrizasyonudur. ■

Parametrize Eğrilerin Eğimleri

f ve g fonksiyonları t'de türevlenebiliyorsa, parametrize $x = f(t)$, $y = g(t)$ eğrisi de t'de **türevlenebilirdir**. y'nin de x'in sürekli bir fonksiyonu olduğu türevlenebilir parametrize bir eğrinin üzerindeki bir noktada dy/dt, dx/dt ve dy/dx türevleri Zincir Kuralı'na göre bağlıdırlar:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$dx/dt \neq 0$ ise, denklemin iki tarafını da dx/dt ile bölerek, dy/dx'i çözebiliriz.

dy/dx İçin Parametrik Formül
Her üç türev varsa ve $dx/dt \neq 0$ ise

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \tag{2}$$

dir.

ÖRNEK 12 Parametre ile Türetmek

$x = 2t + 3$ ve $y = t^2 - 1$ ise dy/dx'in $t = 6$'daki değerini bulun.

Çözüm (2) denklemi dy/dx'i t'nin bir fonksiyonu olarak verir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t}{2} = t = \frac{x-3}{2}$$

$t = 6$ için $dy/dx = 6$ olur. Şuna dikkat edin, dy/dx türevini x'in bir fonksiyonu olarak da bulabiliriz.

ÖRNEK 13 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ Elipsi Boyunca Hareket

t anındaki konumu $P(x, y)$

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

ile verilen bir parçacığın hareketini tanımlayın. $t = \pi/4$ olduğu $\left(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2}\right)$, noktasında eğriye teğet olan doğruyu bulun (a ve b sabitlerinin her ikisi de pozitiftir).

Çözüm

$$\cos t = \frac{x}{a}, \qquad \sin t = \frac{y}{b}$$

denklemlerinden t'yi yok ederek, parçacığın konumu için bir Kartezyen denklem buluruz. Bunu $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ bağıntısını kullanarak yaparız. Bu bağıntı

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad \text{veya} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

verir. Parçacığın (x, y) koordinatları $(x^2/a^2) = (y^2/b^2) = 1$ denklemini sağlar, dolayısıyla parçacık bu elips üzerinde hareket eder. $t = 0$ iken parçacığın koordinatları

$$x = a\cos(0) = a, \qquad y = b\sin(0) = 0$$

olur, dolayısıyla hareket $(a, 0)$'da başlar. t artarken, parçacık yükselir ve saat yönünün tersine sola doğru hareket eder. Elipsi bir kere dolaşarak $t = 2\pi$ iken başlangıç noktası $(a, 0)$'a döner.

$t = \pi/4$ için elipse teğet olan doğrunun eğimi

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/4} = \left.\frac{dy/dt}{dx/dt}\right|_{t=\pi/4} \qquad \text{Denklem (2)}$$

$$= \left.\frac{b\cos t}{-a\sin t}\right|_{t=\pi/4}$$

$$= \frac{b/\sqrt{2}}{-a/\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}$$

dir.

Teğet doğru

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$
$$y = \frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

veya

$$y = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}b$$ ■

Parametrik denklemler y'yi x'in iki kere türevlenebilir bir fonksiyonu olarak tanımlıyorsa, d^2y/dx^2'yi t'nin bir fonksiyonu olarak hesaplamak için Denklem (2) yi $dy/dx = y'$'ye uygulayabiliriz:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'/dt}{dx/dt}.$$ (2) denkleminde y yerine y' yazılmış.

d^2y/dx^2 İçin Parametrik Formül

$x = f(t)$, $y = g(t)$ denklemleri y'yi x'in iki kere türevlenebilir bir fonksiyonu olarak tanımlıyorsa, $dx/dt \neq 0$ olan her noktada

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} \tag{3}$$

ÖRNEK 14 Parametrize Bir Eğri İçin d^2y/dx^2'yi Bulmak

$x = t - t^2$ ve $y = t - t^3$ ise d^2y/dx^2'yi bulun.

d^2y/dx^2'yi t cinsinden bulmak
1. $y' = dy/dx$'i t cinsinden ifade edin.
2. dy'/dt'yi bulun.
3. dy'/dt'yi dx/dt ile bölün.

Çözüm

1. $y' = dy/dx$'i t cinsinden ifade edin:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}$$

2. y''nün t'ye göre türevini alın:

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}\right) = \frac{2 - 6t + 6t^2}{(1 - 2t)^2}$$ Bölüm Kuralı

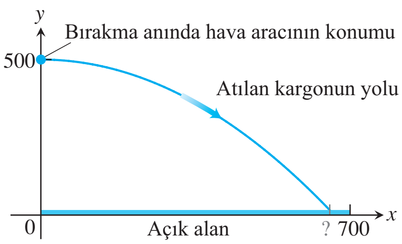
3. dy'/dt'yi dx/dt ile bölün.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{(2 - 6t + 6t^2)/(1 - 2t)^2}{1 - 2t} = \frac{2 - 6t + 6t^2}{(1 - 2t)^3}$$ Denklem (3) ■

ÖRNEK 15 Acil Yardım İçin Erzak Atmak

Bir Kızılhaç hava aracı, bir felaket bölgesine acil yardım için yiyecek ve ilaç atmaktadır. Hava aracı, erzağı 700 ft uzunluğundaki açık bir alanın hemen kenarının üzerinde bırakırsa ve kargo

$$x = 120\,t \quad \text{ve} \quad y = -16t^2 + 500, \quad t \geq 0$$



ŞEKİL 3.32 Örnek 15'teki atılan erzak kargosunun izlediği yol

yolunu izlerse kargo alan içine düşer mi? x ve y koordinatları feet olarak ve t parametresi (bırakma dan itibaren) saniye olarak ölçülmektedir. Düşen kargonun yolu için bir Kartezyen denklem bulun (Şekil 3.32) ve yere çarptığı anda alçalmasının ilerlemesine oranını bulun.

Çözüm Kargo, $y = 0$ iken yere çarpar ve bu da t'nin

$$-16t^2 + 500 = 0 \qquad y = 0 \text{ koyun}$$

$$t = \sqrt{\frac{500}{16}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}\text{sn} \qquad t \geq 0$$

anında görülür. Bırakılma anında x-koordinatı $x = 0$ dır. Kargonun yere çarpması anında x-koordinatı

$$x = 120t = 120\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right) = 300\sqrt{5}\text{ ft}.$$

dir. $300\sqrt{5} \approx 670.8 < 700$ olduğundan kargo alan içine düşer.

Parametrik denklemler arasında t parametresini yok ederek kargo'nun yolu için bir kartezyen denklem buluruz:

$$\begin{aligned} y &= -16t^2 + 500 && y\text{'nin parametrik denklemi} \\ &= -16\left(\frac{x}{120}\right)^2 + 500 && x = 120\,t \text{ eşitliğinden } t\text{'yi yerine yazın.} \\ &= -\frac{1}{900}x^2 + 500 && \text{Bir parabol} \end{aligned}$$

Kargo yere çarptığında alçalmasının ilerlemesine oranı

$$\begin{aligned} \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=5\sqrt{5}/2} &= \left.\frac{dy/dt}{dx/dt}\right|_{t=5\sqrt{5}/2} && \text{Denklem (2)} \\ &= \left.\frac{-32t}{120}\right|_{t=5\sqrt{5}/2} \\ &= -\frac{2\sqrt{5}}{3} \approx -1.49 \end{aligned}$$

dir. Böylece, kargo yere çarptığı anda 1 foot (ayak = 30.4 cm) ilerlemesine karşılık 1.5 feet alçalıyordu. ■

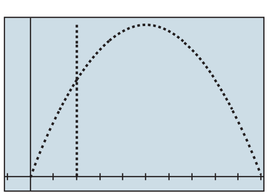
TEKNOLOJİ KULLANMAK Dikey Bir Doğru Üzerindeki Hareketin Simülasyonu

$$x(t) = c, \qquad y(t) = f(t)$$

Parametrik denklemleri $x = c$ doğrusu üzerindeki noktaları aydınlatacaktır. $f(t)$, hareket etmekte olan bir cismin t anındaki yüksekliğini gösteriyorsa, $x(t)$, $y(t)) = (c, f(t))$'yi çizmek asıl hareketi simüle edecektir. Bunu, Bölüm 3.3, Örnek 5'teki kaya için, $x(t) = 2$ ve örneğin, $y(t) = 160t - 16t^2$ ile nokta modunda t adımı için deneyin. Noktalar arasındaki boşluk değişiyor? Tepeye ulaşıldığında, grafik çizici neden stop etmiş gibi gözüküyor? ($0 \leq t \leq 5$ ve $5 \leq t \leq 10$ için ayrı çizimler deneyin.)

İkinci bir deney için,

$$x(t) = t \text{ ve } y(t) = 160t - 16t^2$$



$\begin{cases} x(t) = 2 \\ y(t) = 160\,t - 16\,t^2 \end{cases}$

ve

$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 160\,t - 16\,t^2 \end{cases}$

nokta modunda

parametrik denklemlerini, hareketin dikey simülasyonu ile birlikte yine nokta modunda çizin. Bütün ilginç davranışı gösterecek bir çerçeve ölçüsü seçmek için, Örnek 5'teki hesaplamalardan, kayanın davranışı hakkındaki bildiklerinizi kullanın.

Standart Parametrizasyonlar ve Türev Kuralları

ÇEMBER $x^2 + y^2 = a^2$:

$$x = a\cos t \qquad y = a\sin t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

ELİPS $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$:

$$x = a\cos t \qquad y = b\sin t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

FONKSİYON $y = f(x)$:

$$x = t \qquad y = f(t)$$

TÜREVLER

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$$

ALIŞTIRMALAR 3.5

Türev Hesaplamaları

1–8 alıştırmalarında, $y = f(u)$ ve $u = g(x)$ verilmiştir. $dy/dx = f'(g(x))g'(x)$'i bulun.

1. $y = 6u - 9, \quad u = (1/2)x^4$

2. $y = 2u^3, \quad u = 8x - 1$

3. $y = \sin u, \quad u = 3x + 1$

4. $y = \cos u, \quad u = -x/3$

5. $y = \cos u, \quad u = \sin x$

6. $y = \sin u, \quad u = x - \cos x$

7. $y = \tan u, \quad u = 10x - 5$

8. $y = -\sec u, \quad u = x^2 + 7x$

9–18 alıştırmalarında, fonksiyonu $y = f(u)$ ve $u = g(x)$ şeklinde yazın. dy/dx'i x'in bir fonksiyonu olarak bulun.

9. $y = (2x + 1)^5$

10. $y = (4 - 3x)^9$

11. $y = \left(1 - \dfrac{x}{7}\right)^{-7}$

12. $y = \left(\dfrac{x}{2} - 1\right)^{-10}$

13. $y = \left(\dfrac{x^2}{8} + x - \dfrac{1}{x}\right)^4$

14. $y = \left(\dfrac{x}{5} + \dfrac{1}{5x}\right)^5$

15. $y = \sec(\tan x)$

16. $y = \cot\left(\pi - \dfrac{1}{x}\right)$

17. $y = \sin^3 x$

18. $y = 5\cos^{-4} x$

19–38 alıştırmalarındaki fonksiyonların türevlerini bulun.

19. $p = \sqrt{3 - t}$

20. $q = \sqrt{2r - r^2}$

21. $s = \dfrac{4}{3\pi}\sin 3t + \dfrac{4}{5\pi}\cos 5t$

22. $s = \sin\left(\dfrac{3\pi t}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{3\pi t}{2}\right)$

23. $r = (\csc\theta + \cot\theta)^{-1}$

24. $r = -(\sec\theta + \tan\theta)^{-1}$

25. $y = x^2\sin^4 x + x\cos^{-2} x$

26. $y = \dfrac{1}{x}\sin^{-5} x - \dfrac{x}{3}\cos^3 x$

27. $y = \dfrac{1}{21}(3x - 2)^7 + \left(4 - \dfrac{1}{2x^2}\right)^{-1}$

28. $y = (5 - 2x)^{-3} + \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{2}{x} + 1\right)^4$

29. $y = (4x + 3)^4(x + 1)^{-3}$

30. $y = (2x - 5)^{-1}(x^2 - 5x)^6$

31. $h(x) = x\tan\left(2\sqrt{x}\right) + 7$

32. $k(x) = x^2\sec\left(\dfrac{1}{x}\right)$

33. $f(\theta) = \left(\dfrac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}\right)^2$

34. $g(t) = \left(\dfrac{1 + \cos t}{\sin t}\right)^{-1}$

35. $r = \sin(\theta^2)\cos(2\theta)$

36. $r = \sec\sqrt{\theta}\tan\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$

37. $q = \sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{t + 1}}\right)$

38. $q = \cot\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)$

39–48 alıştırmalarında dy/dt'yi bulun.

39. $y = \sin^2(\pi t - 2)$

40. $y = \sec^2 \pi t$

41. $y = (1 + \cos 2t)^{-4}$

42. $y = (1 + \cot(t/2))^{-2}$

43. $y = \sin(\cos(2t - 5))$

44. $y = \cos\left(5\sin\left(\frac{t}{3}\right)\right)$

45. $y = \left(1 + \tan^4\left(\frac{t}{12}\right)\right)^3$

46. $y = \frac{1}{6}\left(1 + \cos^2(7t)\right)^3$

47. $y = \sqrt{1 + \cos(t^2)}$

48. $y = 4\sin\left(\sqrt{1 + \sqrt{t}}\right)$

İkinci Türevler

49–52 alıştırmalarında y'''nü bulun.

49. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$

50. $y = \left(1 - \sqrt{x}\right)^{-1}$

51. $y = \frac{1}{9}\cot(3x - 1)$

52. $y = 9\tan\left(\frac{x}{3}\right)$

Türevlerin Sayısal Değerlerini Bulma

53–58 alıştırmalarında, verilen x değerinde $(f \circ g)'$'nün değerini bulun.

53. $f(u) = u^5 + 1, \quad u = g(x) = \sqrt{x}, \quad x = 1$

54. $f(u) = 1 - \frac{1}{u}, \quad u = g(x) = \frac{1}{1 - x}, \quad x = -1$

55. $f(u) = \cot\frac{\pi u}{10}, \quad u = g(x) = 5\sqrt{x}, \quad x = 1$

56. $f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u}, \quad u = g(x) = \pi x, \quad x = 1/4$

57. $f(u) = \frac{2u}{u^2 + 1}, \quad u = g(x) = 10x^2 + x + 1, \quad x = 0$

58. $f(u) = \left(\frac{u - 1}{u + 1}\right)^2, \quad u = g(x) = \frac{1}{x^2} - 1, \quad x = -1$

59. f ile g fonksiyonları ve türevlerinin $x = 2$ ve $x = 3$'teki değerleri aşağıda verilmiştir.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	1/3	−3
3	3	−4	2π	5

Aşağıdaki kombinasyonların verilen x değerlerinde x'e göre türevlerini bulun.

a. $2f(x), \quad x = 2$

b. $f(x) + g(x), \quad x = 3$

c. $f(x) \cdot g(x), \quad x = 3$

d. $f(x)/g(x), \quad x = 2$

e. $f(g(x)), \quad x = 2$

f. $\sqrt{f(x)}, \quad x = 2$

g. $1/g^2(x), \quad x = 3$

h. $\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}, \quad x = 2$

60. f ile g fonksiyonları ve türevlerinin $x = 0$ ve $x = 1$'deki değerleri aşağıda verilmiştir.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	5	1/3
1	3	−4	−1/3	−8/3

Aşağıdaki kombinasyonların verilen x değerlerinde x'e göre türevlerini bulun.

a. $5f(x) - g(x), \quad x = 1$

b. $f(x)g^3(x), \quad x = 0$

c. $\frac{f(x)}{g(x) + 1}, \quad x = 1$

d. $f(g(x)), \quad x = 0$

e. $g(f(x)), \quad x = 0$

f. $(x^{11} + f(x))^{-2}, \quad x = 1$

g. $f(x + g(x)), \quad x = 0$

61. $s = \cos\theta$ ve $d\theta/dt = 5$ ise, $\theta = 3\pi/2$ iken ds/dt'yi bulun.

62. $y = x^2 + 7x - 5$ ve $dx/dt = 1/3$ ise, $x = 1$ iken dy/dt'yi bulun.

Bileşke Seçimi

Bir fonksiyonu bir bileşke olarak farklı şekillerde yazabiliyorsanız, ne olur? Her seferinde aynı türevi bulabilir misiniz? Zincir kuralı böyle olduğunu söyler. Bunu 63 ve 64 alıştırmalarındaki fonksiyonlarla deneyin.

63. $y = x$ ise y'yi aşağıdaki bileşkeler olarak kabul edip, zincir kuralını kullanarak dy/dx'i bulun.

a. $y = (u/5) + 7$ ve $u = 5x - 35$

b. $y = 1 + (1/u)$ ve $u = 1/(x - 1)$

64. $y = x^{3/2}$ ise y'yi aşağıdaki bileşkeler olarak kabul edip, zincir kuralını kullanarak dy/dx'i bulun.

a. $y = u^3$ ve $u = \sqrt{x}$

b. $y = \sqrt{u}$ ve $u = x^3$.

Teğet ve Eğimler

65. **a.** $y = 2\tan(\pi x/4)$ eğrisinin $x = 1$'deki teğetini bulun.

b. **Bir tanjant eğrisi üzerinde eğimler** Bu eğrinin $-2 < x < 2$ aralığında alabileceği en küçük eğim değeri nedir? Yanıtınızı açıklayın.

66. Sinüs eğrisi üzerinde eğimler

a. $y = \sin 2x$ ve $y = -\sin(x/2)$ eğrilerinin orijindeki teğetlerinin denklemlerini bulun. Teğetlerin birbiriyle ilişkisinde bir özellik var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

b. $y = \sin mx$ ve $y = -\sin(x/m)$ ($m \neq 0$ bir sabit) eğrilerinin orijindeki teğetleri hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

c. Verilen bir m için, $y = \sin mx$ ve $y = -\sin(x/m)$ eğrilerinin teğetlerinin eğimlerinin alabileceği en büyük değerler nedir? Yanıtınızı açıklayın.

d. $y = \sin x$ fonksiyonu $[0, 2\pi]$, aralığında bir periyot, $y = \sin 2x$ fonksiyonu iki periyot, $y = \sin(x/2)$ fonksiyonu ise yarım periyot tamamlar. $y = \sin mx$ fonksiyonunun $[0, 2\pi]$ aralığında tamamladığı periyot sayısıyla, bu eğrinin orijindeki teğetinin eğimi arasında bir ilişki var mıdır? Yantınızı açıklayın.

Parametrik Denklemlerden Kartezyen Denklemleri Bulmak

67–78 alıştırmaları, xy düzleminde ilerleyen bir parçacığın parametrik denklemlerini ve parametre aralıklarını vermektedir. Parçacığın izlediği yolu bir Kartezyen denklem bularak belirleyin.

Kartezyen denklemin grafiğini çizin. (Grafikler kullanılan denkleme göre değişecektir). Grafiğin, parçacığın kat ettiği parçasını ve hareket yönünü belirtin.

67. $x = \cos 2t, \quad y = \sin 2t, \quad 0 \le t \le \pi$

68. $x = \cos(\pi - t), \quad y = \sin(\pi - t), \quad 0 \le t \le \pi$

69. $x = 4\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

70. $x = 4\sin t, \quad y = 5\cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

71. $x = 3t, \quad y = 9t^2, \quad -\infty < t < \infty$

72. $x = -\sqrt{t}, \quad y = t, \quad t \ge 0$

73. $x = 2t - 5, \quad y = 4t - 7, \quad -\infty < t < \infty$

74. $x = 3 - 3t, \quad y = 2t, \quad 0 \le t \le 1$

75. $x = t, \quad y = \sqrt{1 - t^2}, \quad -1 \le t \le 0$

76. $x = \sqrt{t + 1}, \quad y = \sqrt{t}, \quad t \ge 0$

77. $x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$

78. $x = -\sec t, \quad y = \tan t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$

Parametrik Denklemleri Belirlemek

79. $(a, 0)$ noktasından başlayan ve $x^2 + y^2 = a^2$ çemberini çizen bir parçacığın hareketinin parametrik denklemlerini ve parametre aralığını bulun.

a. saat yönünde bir kere **b.** saat yönünün tersine bir kere

c. saat yönünde iki kere **d.** saat yönünün tersine iki kere

(Bunu yapmanın bir çok yolu vardır, dolayısıyla yanıtlarınız kitabın arkasındakilerle aynı olmayabilir.)

80. $(a, 0)$ noktasından başlayan ve $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ elipsini çizen bir parçacığın hareketinin parametrik denklemlerini ve parametre aralığını bulun.

a. saat yönünde bir kere **b.** saat yönünün tersine bir kere

c. saat yönünde iki kere **d.** saat yönünün tersine iki kere

Alıştırma 79'da olduğu gibi, bir çok doğru yanıt vardır.)

81–86 alıştırmalarında, eğri için bir parametrizasyon bulun.

81. Uç noktaları (–1, –3) ve (4, 1) olan doğru parçası

82. Uç noktaları (–1, 3) ve (3, –2) olan doğru parçası

83. $x - 1 = y^2$ parabolünün alt yarısı

84. $y = x^2 + 2x$ parabolünün sol yarısı

85. Başlangıç noktası $(2, 3)$ olan ve $(-1, -1)$ noktasından geçen ışın (yarım doğru)

86. Başlangıç noktası $(-1, 2)$ olan ve $(0, 0)$ noktasından geçen ışın (yarım doğru)

Parametrize Eğrilerin Teğetleri

87–94 alıştırmalarında verilen t değerinin tanımladığı noktada eğriye teğet doğrunun denklemini bulun. Ayrıca, bu noktada d^2y/dx^2 'nin değerini de bulun.

87. $x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad t = \pi/4$

88. $x = \cos t, \quad y = \sqrt{3}\cos t, \quad t = 2\pi/3$

89. $x = t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t = 1/4$

90. $x = -\sqrt{t + 1}, \quad y = \sqrt{3t}, \quad t = 3$

91. $x = 2t^2 + 3, \quad y = t^4, \quad t = -1$

92. $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t = \pi/3$

93. $x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad t = \pi/2$

94. $x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t, \quad t = -\pi/4$

Teori, Örnekler ve Uygulamalar

95. Bir aleti çok hızlı çalıştırmak Bir pistonun aşağı yukarı hareket ettiğini ve t anındaki konumunun, A ve b pozitif olmak üzere

$$s = A\cos(2\pi bt)$$

ile verildiğini varsayın. A'nın değeri hareketin genliği ve b de frekanstır (saniyede pistonun aşağı yukarı hareket etme sayısı). Frekansın iki katına çıkarılmasının hız, ivme ve silkinme üzerindeki etkisi ne olur? (Sonucu bulduğunuzda, bir aleti çok hızlı çalıştırdığınızda aletin neden bozulduğunu anlayacaksınız.)

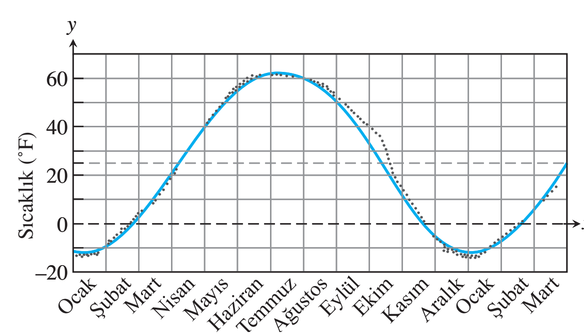
96. Fairbanks, Alaska'da sıcaklıklar Şekil 3.33'teki grafik tipik bir 365 günlük yıl boyunca Fairbanks, Alaska'daki ortalama Fahrenheit sıcaklığı göstermektedir. x günündeki sıcaklığa

$$y = 37\sin\left[\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right] + 25$$

denklemiyle bir yaklaşım yapılabilir.

a. Sıcaklık hangi günde en hızlı artmaktadır?

b. En hızlı artışı sırasında, sıcaklık günde ortalama kaç derece artmaktadır?



ŞEKİL 3.33 Fairbanks, Alaska da hava sıcaklıkları normal ortalaması, veri noktaları olarak çizilmiş ve sinüs yaklaşım fonksiyonu (Alıştırma 96).

97. Parçacık hareketi Bir koordinat doğrusu üzerinde ilerleyen bir cismin konumu, s metre ve t saniye olmak üzere, $s = \sqrt{1 + 4t}$, ile verilmektedir. $t = 6$ sn'de hız ve ivmeyi bulun.

98. Sabit ivme Düşen bir cismin hızının, başlangıç konumundan s metre düştükten sonra $\upsilon = k\sqrt{s}$ (k bir sabit) m/sn olduğunu varsayın. Cismin ivmesinin sabit olduğunu gösterin.

99. Düşen meteor Dünyanın atmosferine giren ağır bir meteorun hızı, dünyanın merkezinden s km uzaktayken $\sqrt{s}$ ile ters orantılıdır. Meteorun ivmesinin s^2 ile ters orantılı olduğunu gösterin.

100. Parçacık ivmesi Bir parçacık x ekseninde $dx/dt = f(x)$ hızıyla ilerlemektedir. Parçacığın ivmesinin $f(x)f'(x)$ olduğunu gösterin.

101. Sıcaklık ve bir sarkacın periyodu Küçük genlikli salınımlar (kısa sallanmalar) için, basit bir sarkacın periyodu T ile boyu L arasındaki ilişkinin

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

ile verildiğini söyleyebiliriz. Burada g salınımın bulunduğu yerdeki sabit yerçekimi ivmesidir. g'yi santimetre bölü saniye kare olarak ölçersek, L'yi santimetre ve T'yi saniye olarak ölçmemiz gerekir. Sarkaç metalden yapılmışsa, uzunluğu, L'ye orantılı olarak, artacak veya azalacak şekilde sıcaklıkla değişir. Formülü, u sıcaklık ve k oran sabiti olmak üzere

$$\frac{dL}{du} = kL$$

ile verilir. Bunu doğru varsayarak, periyodun sıcaklığa göre değişim oranının $kT/2$ olduğunu gösterin.

102. Zincir Kuralı $f(x) = x^2$ ve $g(x) = |x|$ olduğunu varsayın. Bu durumda $(g \circ g)(x) = |x|^2 = x^2$ ve $(g \circ f)(x) = |x^2| = x^2$ bileşke fonksiyonlarının ikisi de (g'nin $x = 0$'da türevlenememesine rağmen) $x = 0$'da türevlenebilir. Bu zincir kuralıyla çelişir mi? Açıklayın.

103. Teğetler $u = g(x)$'in $x = 1$'de ve $y = f(u)$'nun $u = g(1)$'de türevlenebildiğini varsayın. $y = f(g(x))$ grafiğinin $x = 1$'de yatay bir teğeti varsa, g'nin grafiğinin $x = 1$'deki teğeti veya f'nin grafiğinin $u = g(1)$'deki teğeti hakkında bir şey söyleyebilir miyiz? Yanıtınızı açıklayın.

104. $u = g(x)$'in $x = -5$'te, $y = f(u)$'nun $u = g(-5)$'te türevlenebildiklerini ve $(f \circ g)'(-5)$'in negatif olduğunu varsayın. $g'(-5)$ ve $f'(g(-5))$ hakkında bir şey söylenebilir mi?

T **105. sin 2x'in türevi** $y = 2\cos 2x$ fonksiyonunu $-2 \le x \le 3.5$ aralığında çizin. Aynı ekranda, $h = 1.0$, 0.5 ve 0.2 için

$$y = \frac{\sin 2(x+h) - \sin 2x}{h}$$

fonksiyonunu çizin. Negatif değerler de alarak başka h değerlerini de deneyin. $h \to 0$ iken ne olduğunu görüyorsunuz? Bu davranışı açıklayın.

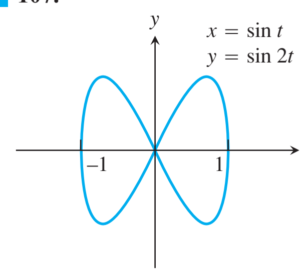
T **106. cos (x^2)'nin türevi** $y = -2x\sin(x^2)$ fonksiyonunu $-2 \le x \le 3$ aralığında çizin. Aynı ekranda, $h = 1.0$, 0.7 ve 0.3 için

$$y = \frac{\cos((x+h)^2) - \cos(x^2)}{h}$$

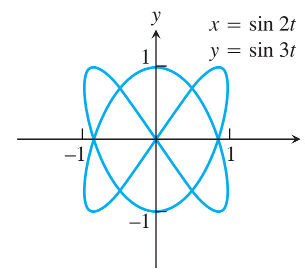
fonksiyonunu çizin. Negatif değerler de alarak başka h değerlerini de deneyin. $h \to 0$ iken ne olduğunu görüyorsunuz? Bu davranışı açıklayın.

107 ve 108 alıştırmalarındaki eğrilere *Papyon* eğrileri denmektedir. Her bir durumda, birinci dörtte bir bölge içinde, eğrinin yatay teğetinin bulunduğu noktayı ve orijindeki iki teğetin denklemlerini bulun.

T **107.**



108.



Zincir Kuralını kullanarak, 109 ve 110 alıştırmalarındaki x^n fonksiyonları için $(d/dx)x^n = nx^{n-1}$ kuvvet kuralının geçerli olduğunu gösterin.

109. $x^{1/4} = \sqrt{\sqrt{x}}$

110. $x^{3/4} = \sqrt{x\sqrt{x}}$

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Trigonometrik Polinomlar

111. Şekil 3.34'te görüldüğü gibi,

$$s = f(t) = 0.78540 - 0.63662\cos 2t - 0.07074\cos 6t$$
$$-0.02546\cos 10t - 0.01299\cos 14t$$

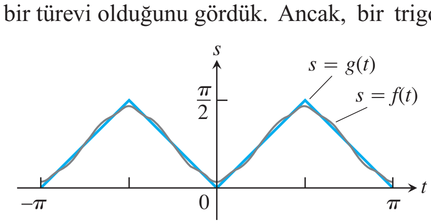
trigonometrik "polinomu" $[-\pi, \pi]$ aralığında $s = g(t)$ testere dişi fonksiyonuna çok iyi bir yaklaşımdır. f'nin türevinin, dg/dt'nin tanımlı olduğu noktalarda g'nin türevine yaklaşımı ne kadar iyidir? Yanıt için, aşağıdaki adımları izleyin.

a. $[-\pi, \pi]$ aralığında dg/dt'yi (tanımlı olduğunda) çizin.

b. df/dt'yi bulun.

c. df/dt'yi çizin. df/dt'nin dg/dt'ye en iyi ve en kötü yaklaşımlar nerededir? Trigonometrik polinomlarla yapılan yaklaşımlar ısı ve salınım teorilerinde önemlidirler, fakat bir sonraki alıştırmada göreceğimiz gibi, bunlara fazla güvenemeyiz.

112. (*Alıştırma 111'in devamı*) Alıştırma 111'de, bir $g(t)$ testere dişi fonksiyonuna $[-\pi, \pi]$ aralığında yaklaşımda kullanılan bir $f(t)$ trigonometrik polinomunun, testere dişi fonksiyonunun türevine benzeyen bir türevi olduğunu gördük. Ancak, bir trigonometrik



ŞEKİL 3.34 Bir testere dişi fonksiyonunun bir trigonometrik "polinom" yaklaşımı (Alıştırma 111).

fonksiyon bir fonksiyonu, türevi o fonksiyonun türevine yaklaşıklık göstermeyecek bir şekilde temsil edebilir. Örnek olarak, Şekil 3.35'teki $s = k(t)$ basamak fonksiyonunu temsil etmek üzere

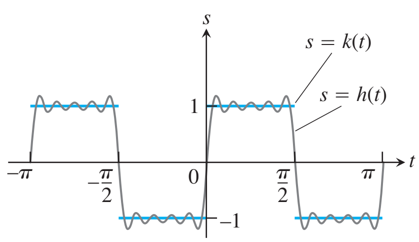
$$s = h(t) = 1.2732 \sin 2t + 0.4244 \sin 6t + 0.25465 \sin 10t + 0.18189 \sin 14t + 0.14147 \sin 18t$$

"polinomu" kullanılmıştır. Ancak h'nin türevinin k'nin türeviyle ilişkisi yoktur.

a. $[-\pi, \pi]$. aralığında dk/dt'yi (tanımlı olduğunda) çizin.

b. dh/dt'yi bulun.

c. dh/dt'yi çizip dk/dt'ye yaklaşımının ne kadar kötü olduğuna bakın. Gördüklerinizi açıklayın.



ŞEKİL 3.35 Bir basamak fonksiyonunun bir trigonometrik "polinom" yaklaşımı (Alıştırma 112).

Parametrize Eğriler

113–116 alıştırmalarında aşağıdaki adımları gerçekleştirmek için bir BCS kullanın.

a. Verilen t değerleri aralığında eğriyi çizin

b. t_0 noktasında dy/dx ve d^2y/dx^2'yi bulun.

c. Eğrinin, verilen t_0 değerinin belirttiği noktasındaki teğeti için bir denklem bulun. Eğriyi ve teğeti birlikte bir grafikte çizin

113. $x = \frac{1}{3}t^3, \quad y = \frac{1}{2}t^2, \quad 0 \le t \le 1, \quad t_0 = 1/2$

114. $x = 2t^3 - 16t^2 + 25t + 5, \quad y = t^2 + t - 3, \quad 0 \le t \le 6, \quad t_0 = 3/2$

115. $x = t - \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad -\pi \le t \le \pi, \quad t_0 = \pi/4$

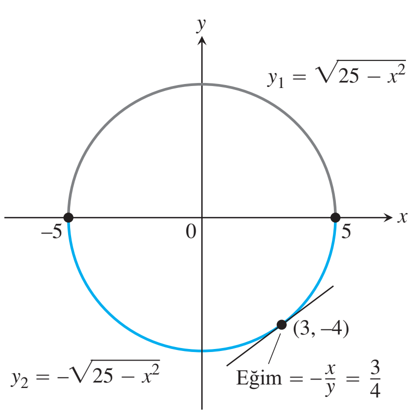
116. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad 0 \le t \le \pi, \quad t_0 = \pi/2$

3.6 Kapalı Türev Alma

Şimdiye kadar ilgilendiğimiz fonksiyonların bir çoğu, y'yi x değişkeni cinsinden açıkça ifade eden $y = f(x)$ şeklindeki bir denklemle tanımlanmıştı. Bu şekilde tanımlanan fonksiyonların türevlerini almak için kurallar öğrendik. Bölüm 3.5'te ayrıca, bir eğri $x = x(t)$ ve $y = y(x)$ denklemleriyle parametrik olarak tanımlandığında dy/dx türevinin nasıl bulunacağını örendik. Üçüncü bir durum

$$x^2 + y^2 - 25 = 0\,, \quad y^2 - x = 0 \quad \text{veya} \quad x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

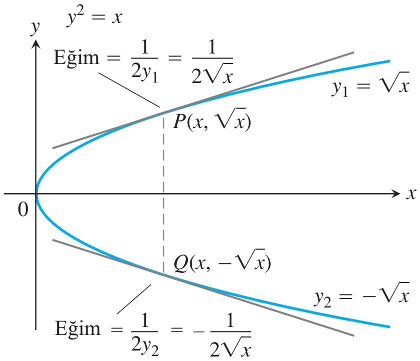
şeklinde denklemlerle karşılaştığımızda ortaya çıkar (bkz. Şekil 3.37 ve 3.38). bu denklemler x ve y değişkenleri arasında kapalı bir bağıntı tanımlarlar. Bazı durumlarda böyle bir denklemden y'yi x'in açık bir fonksiyonu olarak (veya belki birkaç fonksiyon) çözebiliriz. Bir $F(x, y) = 0$ denklemini bildiğimiz şekilde türevini alabilmek için $y = f(x)$ haline sokamadığımızda, kapalı türev alma yöntemiyle dy/dx'i yine de bulabiliriz. Bu, denklemin her iki tarafının da x'e göre türevini almaktan ve sonra sonuç denklemi y''ye göre çözmekten ibarettir. Bu bölümde bu yöntem anlatılmakta ve bu yöntem kullanılarak kuvvet kuralı, tüm rasyonel üsleri kapsayacak şekilde genişletilmektedir. Bu bölümdeki örneklerde ve alıştırmalarda verilen denklemlerin, daima y'yi x'in türevlenebilir bir fonksiyonu olarak tanımladıkları kabul edilmektedir.



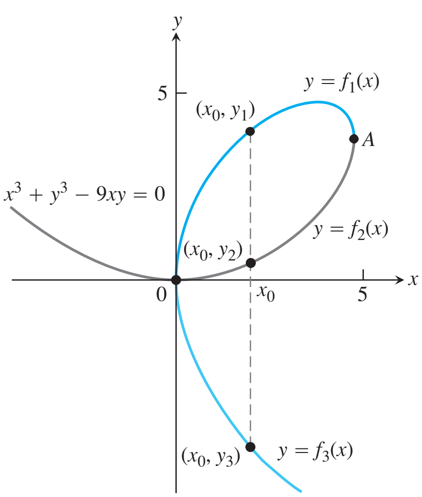
ŞEKİL 3.36 Çember iki fonksiyonun grafiklerini birleştirir. y_2 grafiği alt yarı çemberdir ve (3, –4) noktasından geçer.

Kapalı Olarak Tanımlı Fonksiyonlar

Bir örnekle başlıyoruz



ŞEKİL 3.37 $y^2 - x = 0$, veya genelde yazıldığı şekliyle $y^2 = x$ denklemi $x \geq 0$ aralığında x'in türevlenebilir iki fonksiyonunu tanımlar. Örnek 1'de, $y^2 = x$ denklemini y'ye göre çözmeden bu fonksiyonların türevlerinin nasıl alınacağını göstermektedir.



ŞEKİL 3.38 $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ eğrisi x'in tek bir fonksiyonunun grafiği değildir. Ancak, eğri x'in fonksiyonlarının grafikleri olan ayrı yaylara bölünebilir. *Folyum* olarak adlandırılan bu özel eğrinin geçmişi 1638'de Descartes'e kadar uzanır.

ÖRNEK 1 Kapalı Olarak Türev Alma

$y^2 = x$ ise dy/dx'i bulun.

Çözüm $y^2 = x$ denklemi x'in türevlenebilir ve aslında bulabileceğimiz iki fonksiyonunu tanımlar, yani $y_1 = \sqrt{x}$ ve $y_2 = -\sqrt{x}$ (Şekil 3.37). İkisinin de $x > 0$ için türevlerinin nasıl alınacağını biliyoruz:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{ve} \qquad \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ama sadece $y^2 = x$ denkleminin y'yi $x > 0$ için x'in bir veya daha fazla türevlenebilir fonksiyonu olarak tanımladığını bildiğimizi varsayalım (açık olarak bilmesek de). Hala dy/dx'i bulabilir miyiz?

Yanıt evettir. dy/dx'i bulmak için, $y = f(x)$'e x'in türevlenebilir bir fonksiyonuymuş gibi davranarak, $y^2 = x$ denkleminin iki tarafının da x'e göre türevini alırız:

$$\begin{aligned} y^2 &= x \\ 2y\frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2y}. \end{aligned}$$

Zincir kuralı $\frac{d}{dx}\left(y^2\right) = \frac{d}{dx}\left[f(x)\right]^2 = 2f(x)f'(x) = 2y\frac{dy}{dx}$ verir.

Bu tek formül, $y_1 = \sqrt{x}$ ve $y_2 = -\sqrt{x}$ açık çözümlerinin *ikisi* için de bulmuş olduğumuz türevleri vermektedir:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{ve} \qquad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = \frac{1}{2\left(-\sqrt{x}\right)} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

■

ÖRNEK 2 Bir Çemberin Bir Noktadaki Eğimi

$x^2 + y^2 = 25$ çemberinin (3, –4) noktasındaki eğimini bulun.

Çözüm Çember x'in tek bir fonksiyonunun grafiği değildir. İki türevlenebilir fonksiyonun, $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ ve $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$ fonksiyonlarının grafiklerinin birleşimidir (Şekil 3.36). (3, –4) noktası y_2'nin grafiğinde bulunmaktadır, dolayısıyla eğimi açıkça hesaplayarak bulabiliriz:

$$\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=3} = -\left.\frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}}\right|_{x=3} = -\frac{-6}{2\sqrt{25 - 9}} = \frac{3}{4}$$

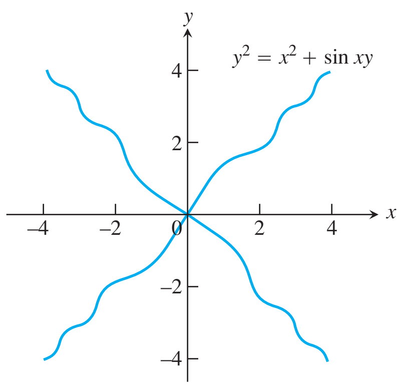
Ancak, verilen çember denkleminin x'e göre kapalı olarak türevini alırsak, problemi daha kolay çözebiliriz:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(y^2\right) &= \frac{d}{dx}(25) \\ 2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

$(3, -4)$ noktasındaki eğim $\left.-\frac{x}{y}\right|_{(3,\,-4)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$ 'tür.

Sadece x ekseninin altındaki noktalarda geçerli olan dy_2/dx formülünün aksine, $dy/dx = -x/y$ formülünün çemberin eğiminin bulunduğu her yerde geçerli olduğuna dikkat edin. Ayrıca, türevin sadece bağımsız değişken x'i değil, x ve y değişkenlerinin *ikisini* de içerdiğine dikkat edin.

Kapalı olarak tanımlanmış başka fonksiyonların türevlerini hesaplamak için, Örnek 1 ve 2'deki gibi ilerleriz: y'ye x'in türevlenebilir kapalı bir fonksiyonu gibi davranır ve bilinen kuralları uygulayarak tanımlayıcı denklemin iki tarafının da türevini alırız. ■



ŞEKİL 3.39 Örnek 3'teki $y^2 + x^2 + \sin xy$'nin denklemi. Örnek, kapalı olarak tanımlanmış bu eğri üzerinde eğimlerin nasıl bulunacağını göstermektedir.

ÖRNEK 3 Kapalı Olarak Türev Alma

$y^2 = x^2 + \sin xy$ ise dy/dx'i bulun (Şekil 3.39).

Çözüm

$$y^2 = x^2 + \sin xy$$

$$\frac{d}{dx}\left(y^2\right) = \frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(\sin xy\right)$$ İki tarafında x'e göre türevini alın…

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\frac{d}{dx}(xy)$$ …y'ye x'in bir fonksiyonu gibi davranın ve zincir kuralını kullanın.

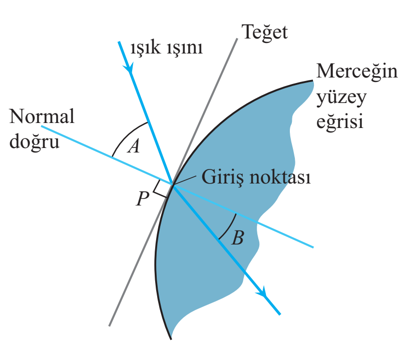
$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)$$ xy'ye bir çarpı gibi davranın

$$2y\frac{dy}{dx} - (\cos xy)\left(x\frac{dy}{dx}\right) = 2x + (\cos xy)y$$ dy/dx li terimleri bir araya toplayın...

$$(2y - x\cos xy)\frac{dy}{dx} = 2x + y\cos xy$$ … ve dy/dx'i ortak paranteze alın.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\cos xy}{2y - x\cos xy}$$ Bölerek dy/dx'i bulun..

dy/dx formülünün, kapalı olarak tanımlanmış eğrinin eğiminin tanımlı olduğu her yere geçerli olduğuna dikkat edin. Ayrıca, türevin sadece bağımsız değişken x'i değil, x ve y değişkenlerinin *ikisini* de içerdiğine tekrar dikkat edin. ■



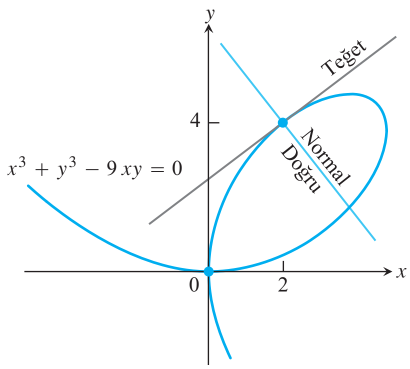
ŞEKİL 3.40 Bir ışık ışınının, merceğin yüzeyinden geçerken kırılmasını gösteren mercek profili.

Kapalı Türev Alma

1. y'ye x'in türevlenebilir bir fonksiyonu gibi davranarak, denklemin iki tarafının da x'e göre türevini alın.
2. dy/dx'li terimleri eşitliğin bir tarafında toplayın.
3. dy/dx'i çözün

Mercekler, Teğetler ve Normal Doğrular

Bir merceğe girerken ışığın nasıl yön değiştirdiğini tanımlayan yasada, önemli açılar ışığın merceğe giriş noktasında merceğin yüzeyine dik olan doğruyla yaptığı açılardır (Şekil 3.40'taki A ve B açıları). Bu doğruya giriş noktasında yüzeyin *normali* adı verilir. Şekil 3.40'taki gibi bir merceğin yandan görünüşünde, **normal**, eğrinin ışığın giriş noktasındaki teğetine dik olan doğrudur.



ŞEKİL 3.41 Örnek 4, Descartes folyumunun (2, 4)'teki teğetinin ve normalinin denklemlerinin nasıl bulunacağını göstermektedir.

ÖRNEK 4 Descartes Folyumunun Teğeti ve Normali

(2, 4) noktasının $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ eğrisi üzerinde olduğunu gösterin. Sonra, eğrinin buradaki teğetini ve normalini bulun (Şekil 3.41).

Çözüm (2, 4) noktası eğrinin üzerindedir çünkü koordinatları eğrinin denklemini sağlar: $2^3 + 4^3 - 9(2)(4) = 8 + 64 - 72 = 0$.

Eğrinin (2, 4)'teki eğimini bulmak için, önce kapalı türev kullanarak dy/dx'in formülünü buluruz:

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right) + \frac{d}{dx}\left(y^3\right) - \frac{d}{dx}\left(9xy\right) = \frac{d}{dx}\left(0\right)$$

İki tarafında x'e göre türevini alın…

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 9\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right) = 0$$

…xy'yi bir çarpım ve y'ye x'in bir fonksiyonu gibi davranın.

$$(3y^2 - 9x)\frac{dy}{dx} + 3x^2 - 9y = 0$$

$$3(y^2 - 3x)\frac{dy}{dx} = 9y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}$$

dy/dx'i çözün.

Sonra $(x, y) = (2,4)$ noktasında türevi hesaplarız:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,4)} = \left.\frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}\right|_{(2,4)} = \frac{3(4) - 2^2}{4^2 - 3(2)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

(2, 4) noktasındaki teğet, (2, 4) noktasından $4/5$ eğimiyle geçen doğrudur:

$$y = 4 + \frac{4}{5}\left(x - 2\right)$$

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$$

Eğrinin (2, 4) noktasındaki normali ise burada teğete dik olan doğru, (2, 4) noktasından $-5/4$ eğimiyle geçen doğrudur:

$$y = 4 - \frac{5}{4}(x - 2)$$

$$y = -\frac{5}{4}x + \frac{13}{2}$$

■

Kuadratik formül, $y^2 - 2xy + 3x^2 = 0$ şeklindeki ikinci derece bir denklemden y'yi x cinsinden çözmemizi sağlar. Üçüncü dereceden bir denklemin üç kökünü veren, kuadratik formül gibi bir formül vardır fakat çok daha karmaşıktır. Eğer bu formül $x^3 + y^3 = 9xy$ denkleminden y'yi x cinsinden çözmek için kullanılsaydı, denklem tarafından tanımlanan üç fonksiyon

$$y = f(x) = \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}} + \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}}$$

ve

$$y = \frac{1}{2}\left[-f(x) \pm \sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}} - \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}}\right)\right]$$

olurdu. Örnek 4'te kapalı türev almak, dy/dx'i yukarıdaki formüllerden herhangi birinden doğrudan doğruya hesaplamaktan çok daha kolaydır. Daha yüksek dereceden denklemlerin tanımladığı eğriler üzerinde eğim bulmak genellikle kapalı türev alma gerektirir.

Yüksek Mertebe Türevler

Kapalı türev alma daha yüksek mertebeden türevler almak için de kullanılabilir. Aşağıda bir örnek verilmiştir.

ÖRNEK 5 Bir İkinci Mertebe Türevi Kapalı Olarak Bulmak

$2x^3 - 3y^2 = 8$ ise d^2y/dx^2'yi bulun.

Çözüm Başlangıç olarak, denklemin iki tarafının da x'e göre türevini alarak, $y' = dy/dx$'i buluruz:

$$\frac{d}{dx}\left(2x^3 - 3y^2\right) = \frac{d}{dx}(8)$$

$$6x^2 - 6yy' = 0 \qquad \text{y'ye x'in bir fonksiyonu gibi davranın.}$$

$$x^2 - yy' = 0$$

$$y' = \frac{x^2}{y}, \qquad y \neq 0 \qquad \text{y''yü çözün}$$

Şimdi y'''nü bulmak için Bölüm Kuralını uygularız.

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2xy - x^2y'}{y^2} = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2}\cdot y'$$

Son olarak y'''nü x ve y cinsinden yazabilmek için $y' = x^2/y$'yi yerine yazarız.

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3} \qquad y \neq 0$$ ■

Türevlenebilir Fonksiyonların Rasyonel Kuvvetleri

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

kuvvet kuralının n bir tamsayı olduğunda geçerli olduğunu biliyoruz. Şimdi bunun her rasyonel n sayısı için de doğru olduğunu göstereceğiz.

TEOREM 4 Rasyonel Üsler İçin Kuvvet Kuralı

p/q bir rasyonel sayıysa, $x^{p/q}$, $x^{(p/q)-1}$'in tanım kümesinin her iç noktasında türevlenebilir.

$$\frac{d}{dx}x^{p/q} = \frac{p}{q}x^{(p/q)-1}$$

ÖRNEK 6 Rasyonel Üs Kuralını Kullanmak

(a) $\frac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad x > 0$ için

(b) $\frac{d}{dx}\left(x^{2/3}\right) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ $\quad x \neq 0$ için

(c) $\frac{d}{dx}\left(x^{-4/3}\right) = -\frac{4}{3}x^{-7/3}$ $\quad x \neq 0$ için ■

Teorem 4'ün İspatı p ve q, $q > 0$ olmak üzere iki tamsayı olsun ve $y = \sqrt[q]{x^p} = x^{p/q}$ olduğunu varsayın. Bu durumda

$$y^q = x^p$$

olur. p ve q'nun ikisi de tamsayı olduğu için (ki tamsayılar için kuvvet kuralını ispatlamıştık), denklemin iki tarafının da x'e göre kapalı türevini alabiliriz:

$$qy^{q-1}\frac{dy}{dx} = px^{p-1}$$

$y \neq 0$ ise, denklemin iki tarafını da qy^{q-1} ile bölüp, dy/dx'i bulabiliriz:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} \\
&= \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}} && y = x^{p/q} \\
&= \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}} && \frac{p}{q}(q-1) = p - \frac{p}{q} \\
&= \frac{p}{q}\cdot x^{(p-1)-(p-p/q)} && \text{Bir üs kuralı} \\
&= \frac{p}{q}\cdot x^{(p/q)-1}
\end{aligned}$$

böylece kural ispatlanır. ■

Kuvvet Kuralı'nın sıfırdan farklı herhangi bir reel üs için ispatlandığı Bölüm 7 de, Teorem 4'ün ispatında kullanılan türevlenebilirlik varsayımını kaldırabileceğiz (Bkz. Bölüm 7.3).

Teorem 4'ün sonucunu Zincir Kuralı ile birleştirince Kuvvet Zincir Kuralının u'nun rasyonel kuvvetlerine bir genişlemesini elde ederiz: p/q bir rasyonel sayıysa ve u x'in türevlenebilen bir fonksiyonu ise $u^{p/q}$ x'in türevlenebilen bir fonksiyonudur ve

$$\frac{d}{dx}u^{p/q} = \frac{p}{q}u^{(p/q)-1}\frac{du}{dx}$$

dir. ($(p/q) < 1$ için $u \neq 0$ olması koşuluyla). Bu kısıtlama zorunludur, zira takip eden örnekte de görüleceği gibi, 0 $u^{p/q}$'nun tanım kümesinde olabilir fakat $u^{(p/q)-1}$'in tanım kümesinde bulunmayabilir.

ÖRNEK 7 Rasyonel Kuvvet ve Zincir Kurallarını Kullanmak

(a) $\frac{d}{dx}\underbrace{\left(1-x^2\right)^{1/4}}_{[-1,\,1]\text{'de tanımlı fonksiyon}} = \frac{1}{4}\left(1-x^2\right)^{-3/4}(-2x)$ $u = 1 - x^2$ ile Kuvvet Zinciri Kuralı

$$= \underbrace{\frac{-x}{2\left(1-x^2\right)^{3/4}}}_{\text{yalnız } (-1,\,1) \text{ de tanımlı türev}}$$

(b) $\frac{d}{dx}(\cos x)^{-1/5} = -\frac{1}{5}(\cos x)^{-6/5}\frac{d}{dx}(\cos x)$

$$= -\frac{1}{5}(\cos x)^{-6/5}(-\sin x)$$

$$= \frac{1}{5}(\sin x)(\cos x)^{-6/5}$$

ALIŞTIRMALAR 3.6

Rasyonel Kuvvetlerin Türevleri

1–10 alıştırmalarında dy/dx'i bulun.

1. $y = x^{9/4}$
2. $y = x^{-3/5}$
3. $y = \sqrt[3]{2x}$
4. $y = \sqrt[4]{5x}$
5. $y = 7\sqrt{x+6}$
6. $y = -2\sqrt{x-1}$
7. $y = (2x+5)^{-1/2}$
8. $y = (1-6x)^{2/3}$
9. $y = x(x^2+1)^{1/2}$
10. $y = x(x^2+1)^{-1/2}$

11–18 alıştırmalarındaki fonksiyonların ilk türevlerini bulun.

11. $s = \sqrt[7]{t^2}$
12. $r = \sqrt[4]{\theta^{-3}}$
13. $y = \sin[(2t+5)^{-2/3}]$
14. $z = \cos[(1-6t)^{2/3}]$
15. $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$
16. $g(x) = 2(2x^{-1/2}+1)^{-1/3}$
17. $h(\theta) = \sqrt[3]{1+\cos(2\theta)}$
18. $k(\theta) = (\sin(\theta+5))^{5/4}$

Kapalı Türev Alma

19–32 alıştırmalarında dy/dx'i bulmak için kapalı türev alın.

19. $x^2y + xy^2 = 6$
20. $x^3 + y^3 = 18xy$
21. $2xy + y^2 = x + y$
22. $x^3 - xy + y^3 = 1$
23. $x^2(x-y)^2 = x^2 - y^2$
24. $(3xy+7)^2 = 6y$
25. $y^2 = \dfrac{x-1}{x+1}$
26. $x^2 = \dfrac{x-y}{x+y}$
27. $x = \tan y$
28. $xy = \cot(xy)$
29. $x + \tan(xy) = 0$
30. $x + \sin y = xy$
31. $y\sin\left(\dfrac{1}{y}\right) = 1 - xy$
32. $y^2\cos\left(\dfrac{1}{y}\right) = 2x + 2y$

33–36 alıştırmalarında $dr/d\theta$'yı bulun.

33. $\theta^{1/2} + r^{1/2} = 1$
34. $r - 2\sqrt{\theta} = \dfrac{3}{2}\theta^{2/3} + \dfrac{4}{3}\theta^{3/4}$
35. $\sin(r\theta) = \dfrac{1}{2}$
36. $\cos r + \cot\theta = r\theta$

İkinci Mertebe Türevler

37–42 alıştırmalarında, önce dy/dx'i, sonra da d^2y/dx^2'yi bulmak için kapalı türev alın.

37. $x^2 + y^2 = 1$
38. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$
39. $y^2 = x^2 + 2x$
40. $y^2 - 2x = 1 - 2y$
41. $2\sqrt{y} = x - y$
42. $xy + y^2 = 1$
43. $x^3 + y^3 = 16$ ise, (2, 2) noktasında d^2y/dx^2'nin değerini bulun.
44. $xy + y^2 = 1$ ise, (0, –1) noktasında d^2y/dx^2'nin değerini bulun.

Eğimler, Teğetler ve Normaller

45 ve 46 alıştırmalarında verilen noktalarda eğimi bulun.

45. $y^2 + x^2 = y^4 - 2x$ (–2, 1) ve (–2, –1) de
46. $(x^2 + y^2)^2 = (x - y)^2$ (1, 0) ve (1, –1) de

47–56 alıştırmalarında verilen noktanın eğrinin üzerinde olduğunu doğrulayın ve verilen noktada eğrinin **(a)** teğetini ve **(b)** normalini bulun.

47. $x^2 + xy - y^2 = 1$, $(2, 3)$
48. $x^2 + y^2 = 25$, $(3, -4)$
49. $x^2y^2 = 9$, $(-1, 3)$

50. $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0, \quad (-2, 1)$

51. $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0, \quad (-1, 0)$

52. $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 5, \quad (\sqrt{3}, 2)$

53. $2xy + \pi \sin y = 2\pi, \quad (1, \pi/2)$

54. $x \sin 2y = y \cos 2x, \quad (\pi/4, \pi/2)$

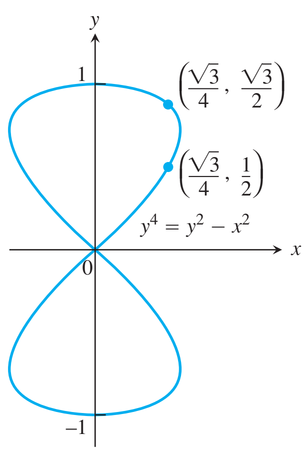
55. $y = 2 \sin(\pi x - y), \quad (1, 0)$

56. $x^2 \cos^2 y - \sin y = 0, \quad (0, \pi)$

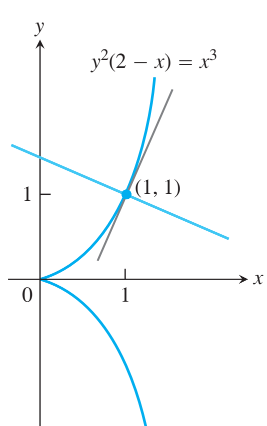
57. **Paralel teğetler** Paralel teğetler $x^2 + xy + y^2 = 7$ eğrisinin x-eksenini kestiği iki noktayı bulun ve bu noktalardaki teğetlerin paralel olduklarını gösterin. Teğetlerin ortak eğimi nedir?

58. **Koordinat eksenlerine paralel teğetler** $x^2 + xy + y^2 = 7$ eğrisinin teğetinin **(a)** x-eksenine paralel olduğu ve **(b)** y-eksenine paralel olduğu noktaları bulun. İkinci durumda dy/dx tanımlı değildir, fakat dx/dy tanımlıdır. Bu noktalarda dx/dy'nin değeri nedir?

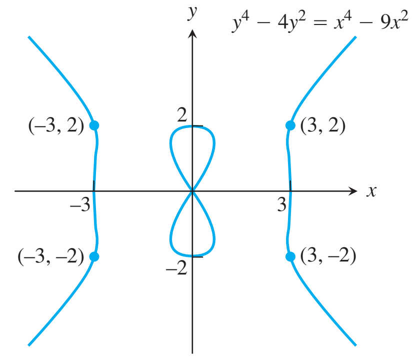
59. **Sekiz eğrisi** Aşağıda gösterilen iki noktada $y^4 = y^2 - x^2$ eğrisinin eğimini bulun.



60. **Diocles'in sarmaşık eğrisi (M.Ö. 200 civarında)** Diocles'in sarmaşık eğrisi olarak adlandırılan $y^2(2 - x) = x^3$ eğrisinin (1, 1)'deki teğet ve normalinin denklemlerini bulun.



61. **Şeytan eğrisi (Gabriel Cramer [Cramer Kuralının Crameri], 1750)** $y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$ denklemiyle verilen şeytan eğrisinin belirtilen dört noktadaki eğimlerini bulun.



62. **Descartes'in folyumu** (Bkz. Şekil 3.38)

a. $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ denklemiyle verilen Descartes'in folyumunun (4, 2) ve (2, 4) noktalarındaki eğimini bulun.

b. Folyumun orijinden başka hangi noktada yatay bir teğeti vardır?

c. Şekil 3.38'de gösterilen ve folyumun dikey bir teğetinin bulunduğu A noktasının koordinatlarını bulun.

Kapalı Olarak Tanımlanan Parametrizasyonlar

63–66 alıştırmalarındaki denklemlerin x ve y'yi kapalı olarak, $x = f(t)$, $y = g(t)$ türevlenebilir fonksiyonları olarak tanımladıklarını varsayarak, $x = f(t)$, $y = g(t)$ eğrisinin verilen t değerindeki eğimini bulun.

63. $x^2 - 2tx + 2t^2 = 4, \quad 2y^3 - 3t^2 = 4, \quad t = 2$

64. $x = \sqrt{5 - \sqrt{t}}, \quad y(t - 1) = \sqrt{t}, \quad t = 4$

65. $x + 2x^{3/2} = t^2 + t, \quad y\sqrt{t + 1} + 2t\sqrt{y} = 4, \quad t = 0$

66. $x \sin t + 2x = t, \quad t \sin t - 2t = y, \quad t = \pi$

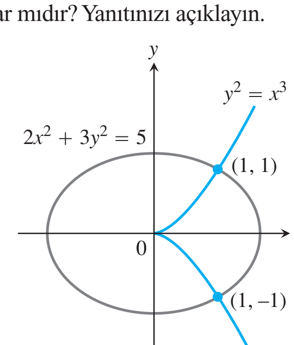
Teori ve Örnekler

67. $f''(x) = x^{-1/3}$ ise, aşağıdakilerden hangisi doğru olabilir?

a. $f(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} - 3$ **b.** $f(x) = \frac{9}{10}x^{5/3} - 7$

c. $f'''(x) = -\frac{1}{3}x^{-4/3}$ **d.** $f'(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} + 6$

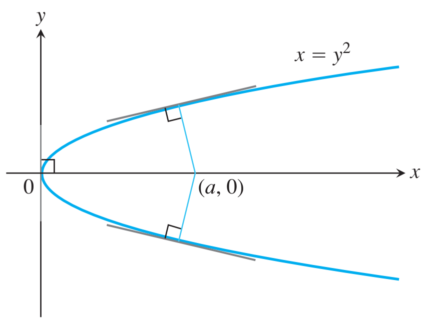
68. $y^2 = x^3$ ve $2x^2 + 3y^2 = 5$ eğrilerinin $(1, \pm 1)$ noktalarının teğetlerinin bir özellikleri var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.



69. Normalini kesme $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ eğrisinin $(1, 1)$ noktasındaki normali eğriyi başka hangi noktada keser?

70. Bir doğruya paralel normal $xy + 2x - y = 0$ eğrisinin $2x + y = 0$ doğrusuna paralel olan normallerini bulun.

71. Bir parabole normal $x = y^2$ parabolündeki $(a, 0)$ noktasından aşağıda verilen üç normali çizmek mümkünse, a'nın $1/2$'den büyük olması gerektiğini gösterin. Normallerden biri x-eksenidir. Diğer iki normalin dik olması için a ne olmalıdır?



72. Örnek 6(b) ve Örnek 7(a)'daki türevlerin tanım kümeleri üzerindeki kısıtlamaların altında yatan geometri nedir?

T 73 ve 74 alıştırmalarında hem (y'ye x'in bir fonksiyonuymuş gibi davranarak) dy/dx'i hem de (x'e y'nin bir fonksiyonuymuş gibi davranarak) dx/dy'yi bulun. dy/dx ve dx/dy arasında ne gibi bir ilişki var gibidir? Bu iklişkiyi grafikler cinsinden geometrik olarak açıklayınız.

73. $xy^3 + x^2y = 6$

74. $x^3 + y^2 = \sin^2 y$

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

75. a. $x^4 + 4y^2 = 1$ ise, dy/dx 'i iki yoldan bulun: (1) y'yi çözüp, çıkan fonksiyonların türevlerini her zamanki gibi alarak ve (2) kapalı türev alarak. İki durumda da aynı sonucu buluyor musunuz?

b. $x^4 + 4y^2 = 1$ denkleminden y'yi çözün ve çıkan fonksiyonları birlikte çizerek $x^4 + 4y^2 = 1$ denkleminin tam bir grafiğini oluşturun. Şeklinize bu fonksiyonların birinci türevlerinin grafiklerini de ekleyin. $x^4 + 4y^2 = 1$ grafiğine bakarak türev grafiklerinin genel davranışını tahmin edebilir miydiniz? Türev grafiklerine bakarak $x^4 + 4y^2 = 1$ grafiğinin genel davranışını tahmin edebilir miydiniz? Yanıtınızı açıklayın.

76. a. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ ise, dy/dx'i iki yoldan bulun: (1) y'yi çözüp, çıkan fonksiyonların x'e göre türevlerini alarak ve (2) kapalı türev alarak. İki durumda da aynı sonucu buluyor musunuz?

b. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ denkleminden y'yi çözün ve çıkan fonksiyonları birlikte çizerek $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ denkleminin tam bir grafiğini oluşturun. Şeklinize bu fonksiyonların birinci türevlerinin grafiklerini de ekleyin. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ grafiğine bakarak türev grafiklerinin genel davranışını tahmin edebilir miydiniz? Türev grafiklerine bakarak $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ grafiğinin genel davranışını tahmin edebilir miydiniz? Yanıtınızı açıklayın.

77–84 alıştırmalarındaki adımlar için bir BCS kullanın.

a. Denklemi BCS'nin kapalı çizim programıyla çizin. Verilen P noktasının denklemi doğruladığını kontrol edin.

b. Kapalı türev almayı kullanarak dy/dx türevi için bir formül bulun ve bunu verilen P noktasında hesaplayın.

c. (b) şıkkında bulduğunuz eğimi kullanarak, eğrinin P'deki teğetinin denklemini bulun. Kapalı eğriyi ve teğeti tek bir grafikte çizin.

77. $x^3 - xy + y^3 = 7, \quad P(2, 1)$

78. $x^5 + y^3x + yx^2 + y^4 = 4, \quad P(1, 1)$

79. $y^2 + y = \dfrac{2 + x}{1 - x}, \quad P(0, 1)$

80. $y^3 + \cos xy = x^2, \quad P(1, 0)$

81. $x + \tan\left(\dfrac{y}{x}\right) = 2, \quad P\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$

82. $xy^3 + \tan(x + y) = 1, \quad P\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$

83. $2y^2 + (xy)^{1/3} = x^2 + 2, \quad P(1, 1)$

84. $x\sqrt{1 + 2y} + y = x^2, \quad P(1, 0)$

3.7 İlişkili Oranları

Bu bölümde, bazı değişkenlerin değişim oranlarının sorulduğu problemlere bakacağız. Her durumda oran, değiştiği bilinen başka bir değişkenin (belki birkaç değişkenin) değişim oranından hesaplanması gereken bir türevdir. Bunu bulmak için, ilgili değişkenleri birbirine bağlayan bir denklem yazar ve aradığımız oranı bildiğimiz oranlara bağlayan bir denklem elde etmek için türevini alırız. Değişimini ölçebildiğiniz bazı oranlardan kolayca elde edemediğiniz bir oran bulma problemine *ilişkili oranlar problemi* denir.

İlişkili Oranlar Denklemleri

Küresel bir balon içine hava pompaladığımızı varsayın. Balonun hem hacmi ve hem de yarıçapı zamanla artar. Belirli bir anda balonun hacmi V ve yarıçapı r ise

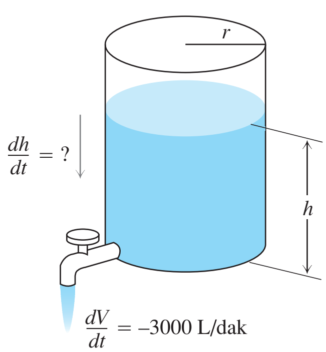
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

olur. Zincir Kuralını kullanarak, İlişkili oranlar denklemi bulmak için türev alırız:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Dolayısıyla, verilen belirli bir zaman anında balonun yarıçapını ve hacmin dV/dt artış oranını biliyorsak, son denklemden dr/dt'yi çözebilir ve verilen anda yarıçapın ne kadar hızlı arttığını bulabiliriz. Hacmin artış oranının doğrudan ölçümünün, yarıçapın artış oranının doğrudan ölçümünden daha kolay olduğuna dikkat edin. İlişkili oranlar denklemi dr/dt'yi dV/dt'den hesaplamamızı sağlar.

Aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi, çoğu zaman, bir ilişkili oranlar problemindeki değişkenleri ilişkilendirmenin anahtarı, değişkenler arasındaki geometrik ilişkileri gösteren bir şekil çizmektir.



ŞEKİL 3.42 Bir silindirik tank içindeki sıvı hacminin değişim oranı, tank içindeki sıvı seviyesinin değişim oranına bağlıdır (Örnek 1).

ÖRNEK 1 Bir Tanktan Dışarı Sıvı Pompalamak

Dikey bir depolama tankının içindeki sıvı seviyesi, sıvıyı 3000 L/dak hızla pompalarsak ne hızla düşecektir?

Çözüm Bir kısmı dolu dik bir silindir tank çizer ve yarıçapını r, sıvının yüksekliğini ise h ile belirtiriz (Şekil 3.42). Sıvının hacmini ise V ile gösteririz.

Zaman geçtikçe, yarıçap sabit kalır, fakat V ve h değişir. V ve h'yı zamanın türevlenebilir fonksiyonları olarak kabul eder ve zamanı t ile gösteririz. Bize

$$\frac{dV}{dt} = -3000$$ Sıvıyı dışarı 3000 L/dak hızla pompalarız. Oran negatiftir, çünkü hacim azalmaktadır.

olduğu verilmiştir ve bulmamız istenen

$$\frac{dh}{dt}$$ Sıvı seviyesi ne hızla düşecektir?

dir. dh/dt'yi bulmak için önce h'yi V'ye bağlayan bir denklem yazarız. Denklem V, r ve h için seçilen birimlere bağlıdır. V litre ve r ile h metre ise, silindirin hacmi için uygun denklem

$$V = 1000\pi r^2 h$$

olacaktır, çünkü bir metreküpte 1000 litre bulunur.

V ve h t'nin türevlenebilir fonksiyonları oldukları için, $V = 1000\pi r^2 h$ denkleminin iki tarafının da t'ye göre türevini alarak, dh/dt'yi dV/dt ile ilişkilendiren bir denklem bulabiliriz:

$$\frac{dV}{dt} = 1000\pi r^2 \frac{dh}{dt}$$ r bir sabittir.

Bilinen $dV/dt = -3000$ değerini yerine koyar ve dh/dt'yi çözeriz:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-3000}{1000\pi r^2} = -\frac{3}{\pi r^2}$$

Sıvı seviyesi $3/(\pi r^2)$ m/dak. hızla düşecektir.

$dh/dt = -3/\pi r^2$ denklemi sıvı seviyesinin düşüş oranının tankın yarıçapına nasıl bağlı olduğunu göstermektedir. r küçükse, dh/dt büyük olacaktır; r büyükse, dh/dt küçük olur.

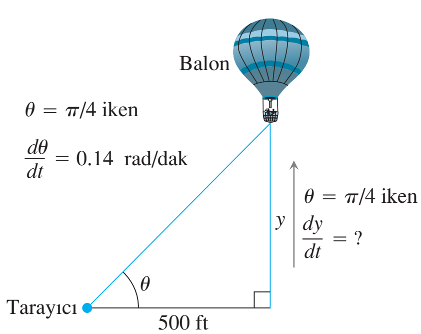
$$r = 1 \text{ m:} \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{3}{\pi} \approx -0.95 \text{ m/dak} = -95 \text{ m/dak}$$

$$r = 10 \text{ m:} \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{3}{100\pi} \approx -0.0095 \text{ m/dak} = -0.95 \text{ m/dak}$$

■

İlişkili Oranlar Problemlerini Çözme Stratejisi

1. *Bir resim çizin ve değişkenlerle sabitleri isimlendirin. t*'yi zaman için kullanın. Bütün değişkenlerin zamanın fonksiyonu olduklarını varsayın.
2. *Sayısal bilgileri yazın* (seçtiğiniz sembolleri kullanarak).
3. *Neyi bulmak istediğinizi yazın* (genellikle bir türev olarak ifade edilen bir orandır).
4. *Değişkenleri birbirine bağlayan bir denklem yazın.* Bilmek istediğiniz oranı bildiğiniz oranlarla birleştirecek tek bir denklem yazmak için iki veya daha fazla denklemi birleştirmeniz gerekebilir.
5. *t'ye göre türev alın.* Bilmek istediğiniz oranı değerini bildiğiniz oran ve değişkenler cinsinden ifade edin.
6. *Hesaplayın.* Bilinen değerleri kullanarak bilinmeyen oranı bulun.



ŞEKİL 3.43 Balon yüksekliğinin değişim oranı telemetrenin yer ile yaptığı açının değişim oranına bağlıdır (Örnek 2).

ÖRNEK 2 Yükselen Bir Balon

Yerden yukarı doğru yükselen bir sıcak hava balonu kalkış noktasından 500 ft uzaktaki bir tarayıcı ile izlenmektedir. Tarayıcının balonla yaptığı açı $\pi/4$ olduğu anda, açı 0.14 rad/dak. hızıyla artmaktadır. Balon o anda ne hızla yükselmektedir?

Çözüm Soruyu altı adımda yanıtlarız.

1. *Bir resim çizin ve sabitlerle değişkenleri isimlendirin* (Şekil 3.43). Resimdeki değişkenler

   θ = tarayıcının yer ile yaptığı açı (radyan),

   y = balonun feet olarak yüksekliği

dir. t zamanı temsil eder ve θ ile y'nin t'nin türevlenebilir fonksiyonları olduğunu varsayarız.

Resimdeki tek sabit tarayıcının kalkış noktasına olan uzaklığıdır (500 ft). Buna özel bir sembol atamanın gereği yoktur.

2. *Diğer sayısal bilgileri yazın.*

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{iken} \quad \frac{d\theta}{dt} = 0.14 \text{ rad/dak.}$$

3. *Neyi bulmamız gerektiğini yazın.* $\theta = \pi/4$ iken dy/dt'yi istiyoruz.

4. *y ve θ değişkenlerini ilişkilendiren bir denklem yazın..*

$$\frac{y}{500} = \tan\theta \qquad \text{veya} \qquad y = 500\tan\theta$$

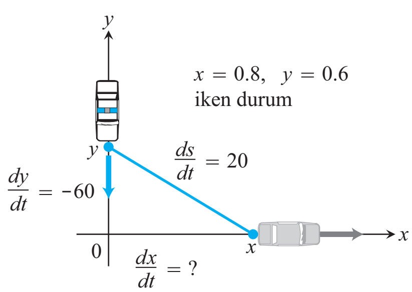
5. *Zincir kuralını kullanarak t'ye göre türev alın.* Sonuç (aradığımız) dy/dt'nin (bildiğimiz) $d\theta/dt$ ile ilişkisinin nasıl olduğunu gösterir.

$$\frac{dy}{dt} = 500\,(\text{sn}^2\theta)\,\frac{d\theta}{dt}$$

6. *$\theta = \pi/4$ ve $d\theta/dt = 0.14$ değerlerini yerine koyup dy/dt'yi bulun.*

$$\frac{dy}{dt} = 500\left(\sqrt{2}\right)^2(0.14) = 140 \qquad \text{sn}\,\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

Söz konusu anda, balon 140 ft/dak hızıyla yükselmektedir. ■



ŞEKİL 3.44 Arabanın hızı, polis ekibinin hızına ve aralarındaki uzaklığın değişim oranına bağlıdır (Örnek 3).

ÖRNEK 3 Otoyolda Takip

Kuzeyden dik açılı bir kesişime yaklaşan bir polis ekibi fazla hız yaparak köşeyi dönen ve doğuya doğru giden bir arabayı izlemektedir. Ekip kesişimin 0.6 mil kuzeyinde ve araba 0.8 mil doğusundayken, polis radarla kendileri ile araba arasındaki mesafenin 20 mil/saat ile artmakta olduğunu tespit eder. Ekip ölçüm anında 60 mil/saat ile ilerliyorsa, arabanın hızı nedir?

Çözüm Pozitif x-eksenini doğuya giden otoyol ve pozitif y eksenini de güneye giden otoyol olarak seçip, koordinat düzleminde arabayı ve ekibi çizeriz (Şekil 3.44). t'yi zamanı belirtmesi için seçer ve

$x = t$ zamanında arabanın konumu,
$y = t$ zamanında ekibin konumu,
$s = t$ zamanında ekip ile araba arasındaki mesafe

olarak tanımlarız. x, y ve s'nin t'nin türevlenebilir fonksiyonları olduklarını varsayarız.

$$x = 0.8 \text{ mil}, \qquad y = 0.6 \text{ mil}, \qquad \frac{dy}{dt} = -60 \text{ mil/saat} \quad \frac{ds}{dt} = 20 \text{ mil/saat}$$

iken dx/dt'yi bulmak istiyoruz (dy/dt negatiftir, çünkü y azalmaktadır).

$$s^2 = x^2 + y^2$$

Uzaklık denkleminin türevini alırız ($s = \sqrt{x^2 + y^2}$ denklemi de kullanılabilirdi).

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{s}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

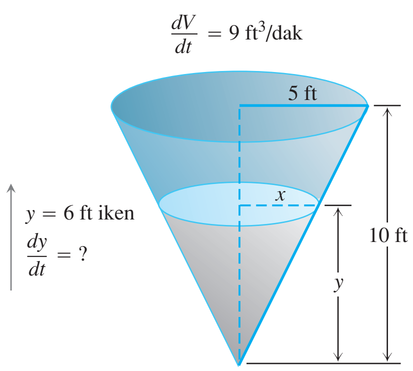
elde ederiz.

Son olarak, $x = 0.8$, $y = 0.6$, $dy/dt = -60$, $ds/dt = 20$ değerlerini kullanın ve dx/dt'yi bulun.

$$20 = \frac{1}{\sqrt{(0.8)^2 + (0.6)^2}}\left(0.8\frac{dx}{dt} + (0.6)(-60)\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{20\sqrt{(0.8)^2 + (0.6)^2} + (0.6)(60)}{0.8} = 70$$

Söz konusu anda, arabanın hızı 70 mil/saat'tir. ■



ŞEKİL 3.45 Konik tankın geometrisi ve suyun tankı doldurma oranı, su seviyesinin ne hızda yükseldiğini belirler (Örnek 4).

ÖRNEK 4 Konik Bir Tankı Doldurmak

Konik bir tanka 9 ft^3/dak hızla su akmaktadır. Tankın ucu yere doğru bakmaktadır ve yüksekliği 10 ft ve taban yarıçapı 5 ft'tir. Su derinliği 6 ft olduğunda, su seviyesi ne hızla artmaktadır?

Çözüm Şekil 3.45 te kısmen dolu bir konik tank görülmektedir. Problemdeki değişkenler

$V = t$ (dakika) zamanında tanktaki suyun hacmi (ft^3)

$x = t$ zamanında suyun yüzeyinin yarıçapı (ft)

$y = t$ zamanında tanktaki suyun yüksekliği (ft)

olarak verilmiştir. V, x ve y'nin t'nin türevlenebilir fonksiyonları olduklarını varsayarız. Sabitler tankın boyutlarıdır.

$$y = 6 \text{ ft} \qquad \text{ve} \qquad \frac{dV}{dt} = 9 \text{ ft}^3/\text{dak}.$$

iken dy/dt sorulmaktadır.
Su, hacmi

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y.$$

olan bir koni şeklindedir.
Bu denklemde V ve y'nin yanısıra x de bulunmaktadır. Söz konusu anda x ve dx/dt hakkında bir bilgi verilmediği için, x'i ortadan kaldırmamız gerekir. Benzer üçgenleri kullanarak (Şekil 3.45) x'i y cinsinden yazabiliriz:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \qquad \text{veya} \qquad x = \frac{y}{2}.$$

Dolayısıyla,

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 y = \frac{\pi}{12}y^3$$

ve

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12}\cdot 3y^2\frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}y^2\frac{dy}{dt}$$

türevini buluruz.
Son olarak, dy/dt'yi bulmak için $y = 6$ ve $dV/dt = 9$ değerlerini kullanın.

$$9 = \frac{\pi}{4}(6)^2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\pi} \approx 0.32$$

Söz konusu anda, su seviyesi yaklaşık olarak 0.32 ft/dak. gibi bir hızla artmaktadır. ■

ALIŞTIRMALAR 3.7

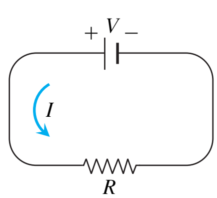
1. **Alan** Bir dairenin yarıçapı r ve alanı $A = \pi r^2$'nin t'nin türevlenebilir fonksiyonları olduğunu varsayın. dA/dt'yi dr/dt'ye bağlayan bir denklem yazın.

2. **Yüzey Alanı** Bir kürenin yarıçapı r ve yüzey alanı $S = 4\pi r^2$'nin t'nin türevlenebilir fonksiyonları olduğunu varsayın. dS/dt'yi dr/dt'ye bağlayan bir denklem yazın.

3. **Hacim** Dik bir silindirin yarıçapı r ve yüksekliği h silindirin hacmi V'ye $V = \pi r^2 h$.formülüyle bağlıdır.
   a. r sabitse, dV/dt dh/dt'ye nasıl bağlıdır?
   b. h sabitse, dV/dt dr/dt'ye nasıl bağlıdır?
   c. Ne h ne de r sabit değilse, dV/dt dr/dt ve dh/dt'ye nasıl bağlıdır?

4. **Hacim** Dik bir koninin yarıçapı r ve yüksekliği h koninin hacmi V'ye $V = (1/3)\pi r^2 h$ formülüyle bağlıdır.
   a. r sabitse, dV/dt dh/dt'ye nasıl bağlıdır?
   b. h sabitse, dV/dt dr/dt'ye nasıl bağlıdır?
   c. Ne h ne de r sabit değilse, dV/dt dr/dt ve dh/dt'ye nasıl bağlıdır?

5. **Gerilim değiştirme** Şekildeki gibi bir eletrik devresinin V gerilimi (volt), I akımı (amper) ve R direnci (ohm) arasındaki ilişki $V = IR$ denklemi ile verilmektedir. I 1/3 Amper/sn hızıyla azalırken, V'nin 1 V/sn hızıyla arttığını varsayın. t saniye olarak zamanı göstersin.



   a. dV/dt'nin değeri nedir?
   b. dI/dt'nin değeri nedir?
   c. dR/dt'nin dV/dt ve dI/dt ile ilişkisi nedir?
   d. $V = 12$ V ve $I = 2$ Amper iken R'nin değişim oranını bulun. R artar mı, azalır mı?

6. **Elektrik gücü** Bir elektrik devresinin gücü P (watt) devrenin direnci R'ye (ohm) ve akımı I'ya (amper) $P = RI^2$ denklemi ile bağlıdır.
   a. Ne P R ve I'nın hiçbiri sabit değlise, dP/dt ne de I sabit değilse, dP/dt, dR/dt ve dI/dt arasındaki ilişki nedir?
   b. P sabitse, dR/dt dI/dt'ye nasıl bağlıdır?

7. **Uzaklık** x ve y t'nin türevlenebilir fonksiyonları ve $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ de xy düzleminde $(x, 0)$ ve $(0, y)$ noktaları arasındaki uzaklık olsun.
   a. y sabitse, ds/dt dx/dt'ye nasıl bağlıdır?
   b. Ne x ne de y sabit değilse, ds/dt, dx/dt ve dy/dt'ye nasıl bağlıdır?
   c. s sabitse, dx/dt, dy/dt'ye nasıl bağlıdır?

8. **Köşegenler** x, y ve z dikdörtgen bir kutunun kenar uzunluklarıysa, kutunun köşegenlerinin uzunlukları $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$'dir.
   a. x, y ve z'nin t'nin türevlenebilir fonksiyonları olduklarını varsayarak, ds/dt, dx/dt, dy/dt ve dz/dt'ye nasıl bağlıdır?
   b. x sabitse, ds/dt, dy/dt ve dz/dt'ye nasıl bağlıdır?
   c. s sabitse, dx/dt, dy/dt ve dz/dt arasındaki ilişki nedir??

9. **Alan** Kenar uzunlukları, aralarındaki θ açısı ile a ve b olan bir üçgenin alanı şu şekilde verilir:

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \theta$$

   a. a ve b sabitse, dA/dt $d\theta/dt$'ye nasıl bağlıdır?
   b. Sadece b sabitse, dA/dt $d\theta/dt$ ve da/dt 'ye nasıl bağlıdır?
   c. e, a, b, ve θ'nın hiçbiri sabit değilse θ sabit değilse, dA/dt $d\theta/dt$, da/dt ve db/dt'ye nasıl bağlıdır?

10. **Bir tabağı ısıtmak** Dairesel bir metal tabak bir fırında ısıtıldığında, yarıçapı 0.01 cm/dak. hızıyla artmaktadır. Yarıçap 50 cm olduğunda, tabağın alanı hangi oranda artar?

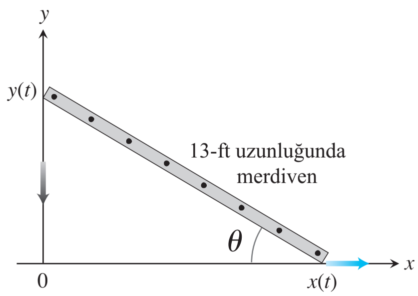
11. **Bir dikdörtgenin boyutlarını değiştirmek** Bir dikdörtgenin uzunluğu l 2 cm/sn hızla azalırken, genişliği w 2 cm/sn hızla artmaktadır. $l = 12$ cm ve $w = 5$ cm iken, dikdörtgenin **(a)** alanının, **(b)**çevresinin ve **(c)** köşegenlerinin uzunluklarının değişim oranlarını bulun. Hangi büyüklükler artmakta, hangileri azalmaktadır?

12. **Dikdörtgen bir kutunun boyutlarını değiştirme** Kapalı bir dikdörtgen kutunun kenar uzunlukları x, y ve z'nin aşağıdaki şekilde değiştiklerini varsayın.

$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ m/sn} \qquad \frac{dy}{dt} = -2 \text{ m/sn} \qquad \frac{dz}{dt} = 1 \text{ m/sn}$$

$x = 4$, $y = 3$ ve $z = 2$ iken, kutunun **(a)** hacminin, **(b)** yüzey alanının ve **(c)** $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ köşegen uzunluklarının hangi oranda değiştiklerini bulun.

13. **Kayan bir merdiven** 13-ft uzunluğunda bir merdiven, tabanı kaymaya başladığında bir eve dayanmaktadır. Taban evden 12 ft uzaklığa geldiğinde, taban 5 ft/sn hızla kaymaktadır.
   a. O anda merdivenin üst tarafı ne hızla kaymaktadır?
   b. Yer, duvar ve merdivenin oluşturduğu üçgenin alanı aynı anda ne oranda değişir?
   c. Merdivenle yer arasındaki θ açısı aynı anda ne oranda değişir?



14. Ticari hava trafiği İki ticari uçak yerden 40.000 ft yukarıda dik bir açıyla kesişen düz rotalar izlemektedirler. A uçağı kesişim noktasına 442 notluk (bir saatte deniz mili, bir deniz mili 2000 yarddır) bir hızla yaklaşmaktadır. B uçağı ise kesişim noktasına doğru 481 notla uçmaktadır. A kesişim noktasına 5 hava mili, B ise 12 deniz mili uzaktayken iki uçak arasındaki uzaklık hangi hızla değişir?

15. Uçurtma uçurmak Bir kız 300 ft yükseklikte bir uçurtma uçurmakta ve rüzgar uçurtmayı kızdan yatay olarak 25 ft/sn hızla uzaklaştırmaktadır. Uçurtma kızdan 500 ft uzaktayken, kız uçurtmanın ipini hangi hızla bırakmalıdır?

16. Bir silindirin çapını değiştirmek Lincoln Otomotiv'deki tamirciler yeni bir pistona uyması için 6 inç derinliğinde bir silindirin çapını değiştirmek istiyorlar. Kullandıkları makine her 3 dakikada bir silindirin yarıçapını bir inçin binde biri kadar arttırmaktadır. Silndirin çapı 3.800 inç olduğunda hacmi ne oranda artar?

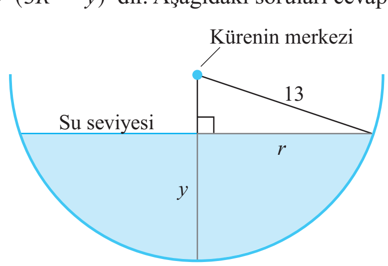
17. Büyüyen bir kum torbası Konik bir tepenin üzerine kayan bir kemerden 10 $m^3/$dak. hızla kum düşmektedir. Tepenin yüksekliği her zaman taban yarıçapının sekizde üçüdür. Tepe 4 metreye ulaştığında **(a)** yükseklik, **(b)** yarıçap hangi hızla değişmektedir?

18. Konik bir depoyu boşaltmak Taban yarıçapı 45 m ve yüksekliği 6 m olan, ucu aşağı bakan bir konik depodan su 50 $m^3/$dak hızla dışarı akmaktadır.

a. Su 5 m derinliğindeyken, su seviyesi hangi hızla (dakikada santimetre) düşmektedir?

b. Suyun yüzeyinin yarıçapı ne hızla değişmektedir? Cevabınızı cm/dak. olarak verin.

19. Yarım küre şeklinde bir depoyu boşaltmak Yan kesidi aşağıda gösterilen, 13 m yarıçapında yarım küre şeklinde bir depodan 6$m^3/$dak hızla su akmaktadır. Yarıçapı R olan yarım küre şeklindeki bir depoda bulunan suyun derinliği y iken hacmi $V = (\pi/3)y^2(3R - y)$ dir. Aşağıdaki soruları cevaplayın.



a. Suyun derinliği 8 m iken, su seviyesi hangi oranda değişmektedir?

b. Suyun derinliği y m ise, su yüzeyinin yarıçapı r nedir?

c. Suyun derinliği 8 m iken, r yarıçapı ne oranda değişir?

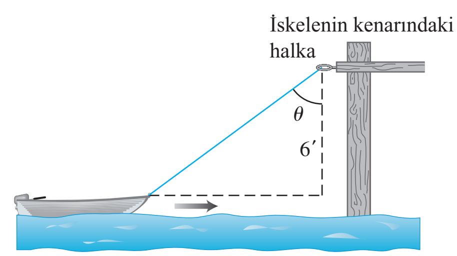
20. Büyüyen bir yağmur damlası Bir sis damlasının mükemmel bir küre olduğunu ve sıkışmayla damlanın yüzeyiyle orantılı bir hızla nem topladığını varsayın. Bu koşullar altında damlanın yarıçapının sabit bir oranla arttığını gösterin.

21. Şişen bir balonun yarıçapı Küresel bir balon 100π $ft^3/$dak. hızla helyumla doldurulmaktadır. Yarıçap 5 ft olduğunda, balonun yarıçapı ne hızla artmaktadır? Yüzey alanı ne hızla artmaktadır?

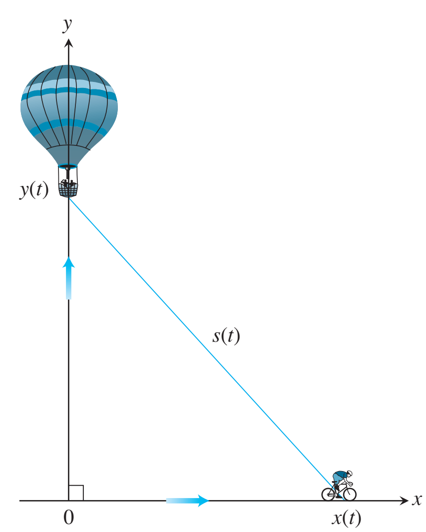
22. Bir sandalı çekmek Bir sandal, iskelede bulunan ve sandaldan 6 ft yukarıdaki bir makaraya bağlı bir iple çekilmektedir. İp 2 ft/sn hızla çekilmektedir.

a. İpin uzunluğu 10 ft iken kayık hangi hızla iskeleye yaklaşmaktadır?

b. θ açısı ne oranda değişmektedir (şekle bakın)?



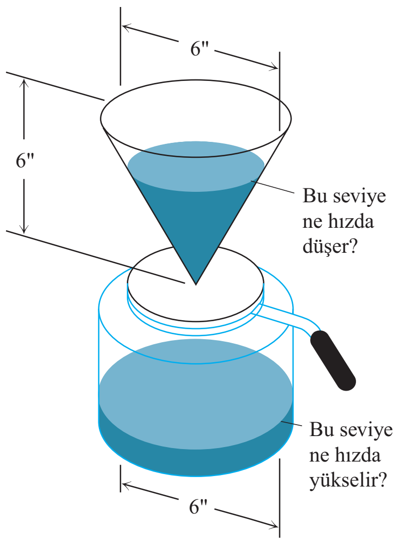
23. Bir balon ve bir bisiklet Bir balon düz bir yolun üzerinde dik olarak 1 ft/sn sabit hızla yükselmektedir. Balon yerden tam 65 ft yüksekteyken, altından 17 ft/sn sabit hızla bir bisiklet geçmektedir. Bisikletle balon arasındaki mesafesi 3 sn sonra ne hızla artar?



24. Kahve yapmak Koni şeklinde bir filitreden silindirik bir çaydanlığa 10 inç^3/dak. hızla kahve damlamaktadır.

a. Konideki kahve 5 inç yüksekliğindeyken çaydanlıktaki kahve seviyesi ne hızla yükselir?

b. Konideki kahve seviyesi ne hızda azalır?



25. Kan pompalanması 1860'ların sonunda, Würtzberg, Almanya'daki Tıp Fakültesinde bir fizyoloji profesörü olan Adolf Fick, günümüzde de kalbin dakikada ne kadar kan pompaladığını ölçmek için kullanılan bir yöntem geliştirmiştir. Bu cümleyi okurken kalbiniz ortalama dakikada 7 litre kan pompalamaktadır. Dinlenirken ise kan pompalanması ortalama 6 L/dak. dir. Eğitimli bir maraton koşucusuysanız, koşarken kalbinizin kan pompalaması dakikada 30 litreye kadar çıkacaktır.

Kalbinizin kan pompalayış oranı

$$y = \frac{Q}{D}$$

gibi bir formülle verilir. Burada Q dakikada soluduğunuz CO_2 miktarının mililitre sayısı, D ise kalbin ciğerlere pompaladığı kandaki CO_2 konsantrasyonu ile ciğerlerden geri dönen kandaki CO_2 konsantrasyonu (ml/l) arasındaki farktır. $Q = 233$ ml/dak. ve $D = 97 - 56 = 41$ ml/L iken,

$$y = \frac{233 \text{ ml/dak.}}{41 \text{ ml/L}} \approx 5.68 \text{ L/dak.}$$

çoğu kişinin sahip olduğu taban (dinlenme sırasındaki) oranı 6 L/dak'ya çok yakındır. (Veriler: J. Kenneth Herd, M.D., Quillan Tıp Fakültesi, East Tennessee State University.)

$Q = 233$ ve $D = 41$ iken, D'nin dakikada 2 birim hızla azaldığını, fakat Q'nun sabit kaldığını bildiğimizi varsayalım. Kan pompalama oranına ne olur?

26. Maliyet, kazanç ve kâr Bir şirket x adet malı $c(x)$ dolar maliyet, $r(x)$ dolar satış kazancı ve $p(x) = r(x) - c(x)$ dolar kâr marjıyla üretebilmektedir (her şey binle çarpılacak). Aşağıdaki x ve dx/dt değerleri için, dc/dt, dr/dt ve dp/dt'yi bulun.

a. $x = 2$ ise $r(x) = 9x$, $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ ve $dx/dt = 0.1$

b. $x = 1.5$ ise, $r(x) = 70x$, $c(x) = x^3 - 6x^2 + 45/x$ ve $dx/dt = 0.05$

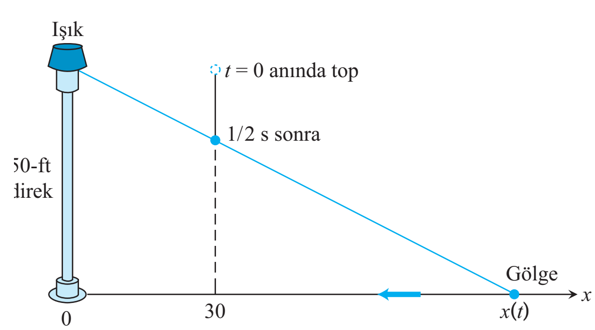
27. Bir parabol üzerinde ilerlemek Bir parçacık, birinci dörtte bir bölgede $y = x^2$ parabolü üzerinde, x-koordinatı (metre) 10 m/sn sabit hızla artacak şekilde ilerlemektedir. $x = 3$ m iken, parçacığı orijine bağlayan doğrunun eğim açısı θ ne hızla değişir?

28. Başka bir parabol üzerine ilerlemek Bir parçacık $y = \sqrt{-x}$ parabolü üzerinde x koordinatı (metre) 8 m/sn hızla azalacak şekilde sağdan sola doğru ilerlemektedir. $x = -4$ ise, parçacığı orijine bağlayan eğim açısı θ nasıl değişir?

29. Düzlemde hareket Metrik xy düzlemindeki bir parçacığın koordinatları, $dx/dt = -1$ m/sn ve $dy/dt = -5$ m/sn ile, zamanın türevlenebilir fonksiyonlarıdır. Parçacık (5, 12) noktasından geçerken orijinden uzaklığı nasıl değişir?

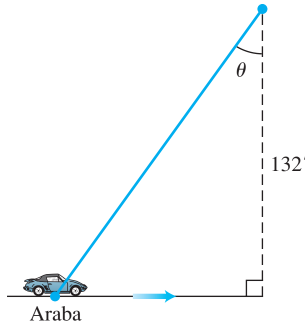
30. Hareket eden bir gölge 6 ft boyunda bir adam yerden 16 ft yüksekte olan bir sokak lambasına doğru 5 ft/sn hızla yürümektedir. Gölgesinin ucu hangi hızda ilerler? Adam ışıktan 10 ft uzaktayken gölgesinin boyu ne hızla değişir?

31. Başka bir hareket eden gölge 50 ft yüksekliğinde bir direğin tepesinden bir ışık parlamaktadır. 30 ft uzaklıktaki bir noktadan, ışıkla aynı yüksekten aşağı bir top bırakılır (şekle bakınız). 1/2 sn sonra topun yerdeki gölgesi ne hızla ilerler? (Topun t saniyede $s = 16t^2$ gibi bir mesafe düştüğünü varsayın.)



ÖLÇEKLİ DEĞİL

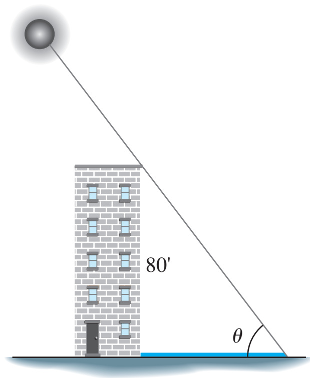
32. Videoya kaydetmek Pistten 132 ft uzaktaki bir tribünden, 180 mil/sa (264 ft/sn) hızla ilerleyen bir arabayı izleyerek yarışı videoya aldığınızı varsayın. Araba tam önünüzden geçerken kamera açınız θ hangi hızla değişir? Ya yarım saniye sonra?



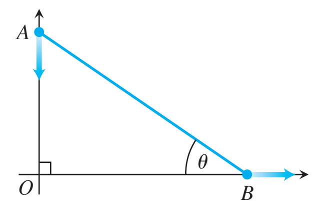
33. Bir buz tabakasını eritmek 8 inç çaplı küresel bir demir top her yerinde aynı kalınlıkta bir buz tabakasıyla kaplıdır. Buz 10 inç^3/dak hızla eriyorsa, buzun kalınlığı 2 inç iken kalınlık ne hızla azalır? Buzun dış yüzey alanı hangi hızla azalır?

34. Otoyol devriyesi Bir otoyol devriye uçağı düz bir yolun 3 mil yukarısında 120 mil/sa hızla uçmaktadır. Pilot gelen bir araba görür ve radarla arabayla uçak arasındaki mesafe 5 mil iken, bu mesafenin 160 mil/saat hızla azaldığını belirler. Arabanın otoyoldaki hızını bulun.

35. Bir binanın gölgesi Güneşin doğrudan binanın üzerinden geçeceği bir günün sabahında, 80 ft yüksekliğinde bir binanın gölgesi 60 ft uzunluğundadır. Söz konusu anda, güneşin yerle yaptığı θ açısı 0.27°/dak hızla artmaktadır. Gölgenin kısalma hızı nedir? (Radyan kullanmayı unutmayın. Cevabınızı inç bölü dakika olarak verin.)



36. Yürüyüşçüler A ve B dik açıyla birleşen düz sokaklarda yürümektedir. A köşeye 2 m/sn hızla yaklaşırkan, B köşeden 1 m/sn hızla uzaklaşmaktadır. A köşeden 10, B ise 20 m uzaktayken θ açısı hangi hızla değişir? Cevabınızı derece bölü saniye olarak ifade edin.

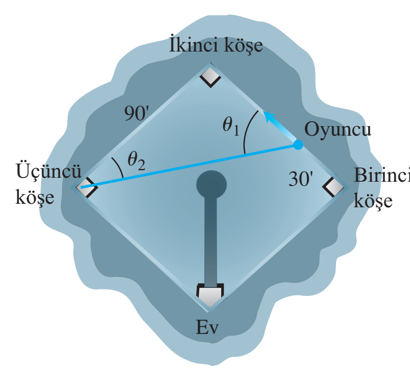


37. Beyzbol oyuncuları Bir Beyzbol alanı bir kenarı 90 ft olan bir karedir. Bir oyuncu birinci köşeden ikinci köşeye 16 ft/sn hızla koşmaktadır.

a. Oyuncu birinci köşeden 30 ft uzaktayken, oyuncunun üçüncü köşeye olan uzaklığı ne hızla değişmektedir?

b. Aynı anda θ_1 ve θ_2 açıları (şekle bakın) hangi hızla değişir?

c. Oyuncu ikinci köşeden 15 ft/sn hızla geçer. Oyuncu köşeye ayak bastığında, θ_1 ve θ_2 açıları nasıl değişir?



38. Gemiler İki gemi birbirleriyle 120° açı yapacak şekilde bir O noktasından uzaklaşmaktadırlar. A gemisi 14 not (deniz mili bölü saat, bir deniz mili 2000 yarddır) hızla, B gemisi ise 21 not hızla ilerlemektedir. $OA = 5$ ve $OB = 3$ deniz mili iken gemiler birbirlerinden ne hızla uzaklaşmaktadır?

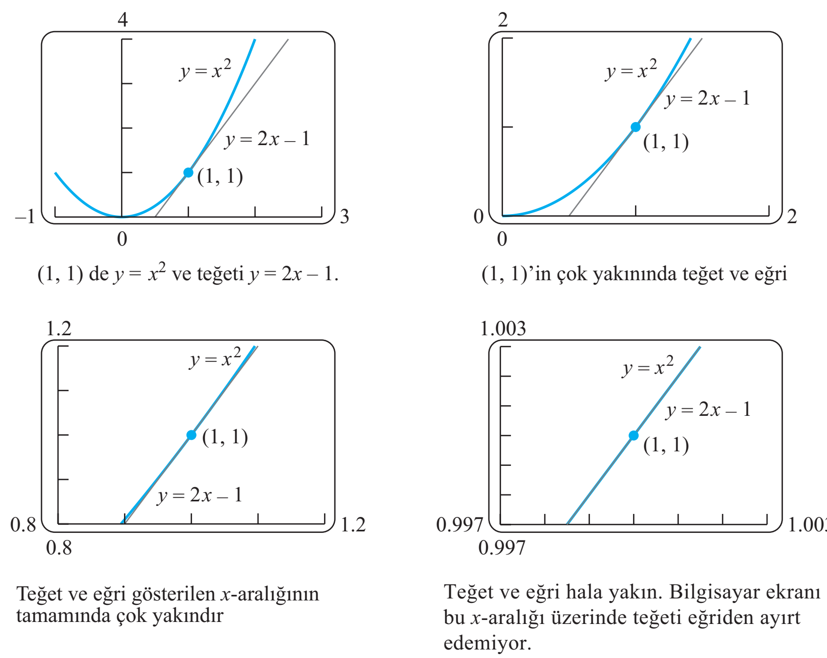
3.8 Lineerizasyon ve Diferansiyeller

Bazen karmaşık fonksiyonlara, özel uygulamalar için istediğimiz hassaslığı veren ve çalışılması daha kolay olan fonksiyonlarla yaklaşımda bulunuruz. Bu bölümde tartışılan yaklaşım fonksiyonlarına *lineerizasyonlar* denir ve teğet doğrularını temel alırlar. Polinomlar gibi, başka yaklaşım fonksiyonları Bölüm 11 de tartışılacaktır.

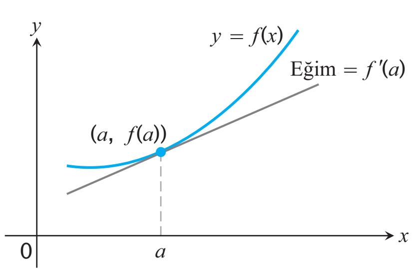
Diferansiyeller adı verilen yeni dx ve dy değişkenlerini tanıtacak ve bunları, türevin dy/dx Leibniz gösterimine gerçek bir oran anlamı verecek şekilde tanımlayacağız. dy'yi ölçümlerdeki hatayı ve bir fonksiyonun değişikliklere karşı duyarlılığı ölçmekte kullanacağız. Bu fikirlerin uygulamaları Zincir Kuralını tam ispatını sağlayacaktır (Bölüm 3.5).

Lineerizasyon

Şekil 3.46'da göreceğiniz gibi, $y = x^2$ eğrisinin teğeti değme noktası civarında eğriye yakın bulunur. İki tarafta da kısa bir aralıkta, teğet doğrusu üzerindeki y değerleri eğri üzerindeki y değerlerinin oldukça iyi bir yaklaşımını verir. Bu olayı, her iki grafik üzerinde değme noktasına yakından bakarak veya değme noktasının x-koordinatı yakınlarında $f(x)$ ile teğeti arasındaki değer farkları tablosuna bakarak görebiliriz. Yerel olarak her türevlenebilir eğri bir doğru gibi davranır.



ŞEKİL 3.46 Bir fonksiyonun türevlenebilir olduğu bir noktadaki grafiğini büyüttükçe grafik düzleşir ve teğetine benzerliği artar.



ŞEKİL 3.47 $y = f(x)$ eğrisinin $x = a$ daki teğet doğrusunun denklemi $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$'dır.

Genel olarak, $y = f(x)$'in türevlenebilir olduğu bir $x = a$ noktasındaki teğeti (Şekil 3.47) $(a, f(a))$ noktasından geçer, dolayısıyla nokta-eğim denklemi şu şekildedir:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Yani, teğet

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

lineer fonksiyonunun grafiğidir. Doğru f'nin grafiğine yakın kaldığı sürece, $L(x)$ $f(x)$'e iyi bir yaklaşım verecektir.

TANIMLAR Lineerizasyon, Standart Lineer Yaklaşım

f fonksiyonu $x = a$'da türevlenebilirse,

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

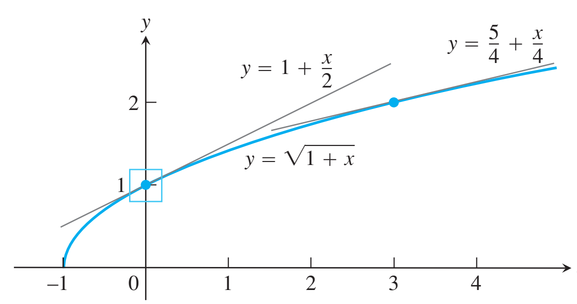
yaklaştırma fonksiyonu, f'nin a'daki **lineerizasyonudur**. f'ye L tarafından yapılan

$$f(x) \approx L(x)$$

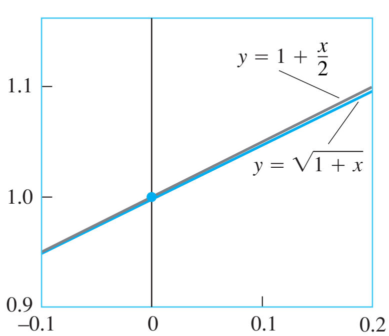
yaklaşımı f'nin a'daki **standart lineer yaklaşımıdır**. $x = a$ noktası yaklaşımın **merkezidir**.

ÖRNEK 1 Bir Lineerizasyon Bulmak

$f(x) = \sqrt{1 + x}$'in $x = 0$'daki lineerizasyonunu bulun (Şekil 3.48).



ŞEKİL 3.48 $y = \sqrt{1 + x}$'in grafiği ve $x = 0$ ve $x = 3$'teki lineerizasyoları. Şekil 3.49 da y-eksenindeki 1 civarında küçük bir çerçevenin büyütülmüş görüntüsü verilmiştir



ŞEKİL 3.49 Şekil 3.48'deki çerçevenin büyütülmüş görüntüsü.

Çözüm

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + x\right)^{-1/2}$$

olduğu için, $f(0) = 1$ ve $f'(0) = 1/2$'dir. Buradan

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + \frac{1}{2}\left(x - 0\right) = 1 + \frac{x}{2}$$

bulunur. Şekil 3.49'a bakın ■

Örnek 1'deki $\sqrt{1 + x} \approx 1 + (x/2)$ yaklaşımının 0'a yakın x'ler için ne kadar doğru olduğuna bakın.

Sıfırdan uzaklaştıkça doğruluğu kaybederiz. Örneğin, $x = 2$ için, lineerizasyon $\sqrt{3}$ için yaklaşım olarak 2'yi verir ki, bir ondalık basamağa kadar bile doğru değildir.

Bu hesaplamalarla lineerizasyonla bütün yapacaklarımızın bir hesap makinesiyle yapılmasının daha iyi olacağı fikrine kapılmayın. Pratikte, asla belirli bir karekökü bulmak için bir lineerizasyon kullanmayız. Bir lineerizasyonun yararı karmaşık bir fonksiyonu bütün bir değer aralığında daha basitiyle değiştirme becerisidir. 0'a yakın x değerlerinde $\sqrt{1 + x}$ ile çalışmak zorundaysak ve ortaya çıkacak küçük bir hataya göz yumabilecek

Yaklaşım	Gerçek değer	| Gerçek değer-Yaklaşım |
$\sqrt{1.2} \approx 1 + \frac{0.2}{2} = 1.10$	1.095445	$<10^{-2}$
$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{0.05}{2} = 1.025$	1.024695	$<10^{-3}$
$\sqrt{1.005} \approx 1 + \frac{0.005}{2} = 1.00250$	1.002497	$<10^{-5}$

durumdaysak, $1 + (x/2)$ ile çalışabiliriz. Elbette, bu durumda da hatanın ne kadar olduğunu bilmemiz gerekir. Bölüm 11'de hata tahmini üzerine daha söyleyeceklerimiz var.

Normalde bir lineer yaklaşım merkezinden uzakta hassaslığını yitirir. Şekil 3.48'in gösterdiği gibi, $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ yaklaşımı büyük olasılıkla $x = 3$ civarında yararlı olamayacak kadar kaba olacaktır. O noktada, $x = 3$'teki lineerizasyona ihtiyacımız vardır.

ÖRNEK 2 Başka Bir Noktada Bir Lineerizasyon Bulmak

$f(x) = \sqrt{1+x}$'in $x = 3$'teki lineerizasyonunu bulun.

Çözüm $L(x)$'i tanımlayan denklemi $a = 3$'te hesaplarız.

$$f(3) = 2, \qquad f'(3) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}\Big|_{x=3} = \frac{1}{4}.$$

olduğu için,

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}$$

■

$x = 3.2$'de, Örnek 2'deki lineerizasyon

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3.2} \approx \frac{5}{4} + \frac{3.2}{4} = 1.250 + 0.800 = 2.050$$

verir, ki bu da gerçek değer $\sqrt{4.2} \approx 2.04939$ 'dan binde birden daha az bir oranda değişir. Örnek 1'deki lineerizasyon

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3.2} \approx 1 + \frac{3.2}{2} = 1 + 1.6 = 2.6,$$

ise gerçek değerden %25'ten daha fazla fark gösteren bir sonuçtur.

ÖRNEK 3 Kosinüs Fonksiyonu İçin Bir Lineerizasyon Bulmak

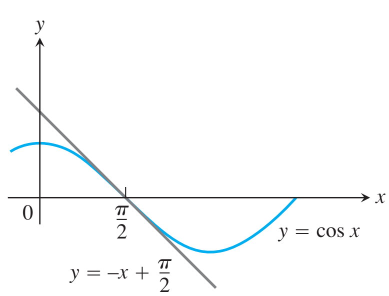
$f(x) = \cos x$'in $x = \pi/2$'deki lineerizasyonunu bulun (Şekil 3.50).

Çözüm $f(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$, $f'(x) = -\sin x$,ve $f'(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1$, olduğundan,

$$\begin{aligned} L(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) \\ &= 0 + (-1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -x + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

■

buluruz.



ŞEKİL 3.50 $f(x) = \cos x$'in grafiği ve $x = \pi/2$'deki lineerizasyonu. $x = \pi/2$ yakınında $\cos x \approx -x + (\pi/2)$ (Örnek 3).

Kökler ve kuvvetler için önemli bir lineer yaklaşım şudur:

$$(1+x)^k \approx 1 + kx \quad (x \text{ 0'a yakın, } k \text{ herhangi bir sayı})$$

(Alıştırma 15). Sıfıra yeterince yakın x değerlerinde iyi sonuç veren bu yaklaşımın geniş uygulamaları vardır. Örneğin, x küçük ise,

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \qquad k = 1/2$$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \approx 1 + (-1)(-x) = 1 + x \qquad k = -1;\ x \text{ yerine } -x$$

$$\sqrt[3]{1+5x^4} = (1+5x^4)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}\left(5x^4\right) = 1 + \frac{5}{3}x^4 \qquad k = 1/3;\ x \text{ yerine } 5x^4$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2 \qquad k = -1/2;\ x \text{ yerine } -x^2$$

Diferansiyeller

Bazen y'nin x'e göre türevini göstermek için dy/dx Liebniz notasyonunu kullanırız. Görünüşünün tersine, bu bir oran değildir. Şimdi, oranları tanımlı olduğunda türeve eşit olacak olan iki yeni değişken, dx ve dy tanıtacağız.

TANIM Diferansiyeller

$y = f(x)$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. ***dx* diferansiyeli** bağımsız bir değişkendir. ***dy* diferansiyeli**

$$dy = f'(x)\,dx$$

olarak tanımlanır.

Bağımsız değişken dx'in aksine, dy değişkeni her zaman bağımlı bir değişkendir. Hem x'e hem de dx'e bağlıdır. dx belirli bir değerse ve x, f fonksiyonunu tanım kümesinde özel bir sayı ise dy'nin sayısal değeri tanımlıdır.

ÖRNEK 4 *dy* Diferansiyelini Bulmak

(a) $y = x^5 + 37x$ ise dy'yi bulun.

(b) $x = 1$ ve $dx = 0.2$ ise, dy'nin değerini bulun.

Çözüm

(a) $dy = (5x^4 + 37)\,dx$

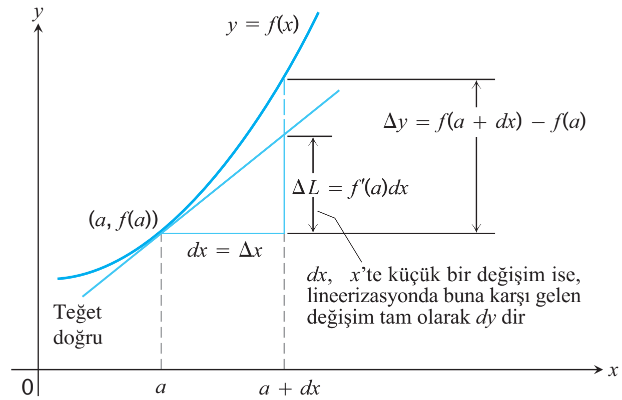
(b) dy'nin ifadesinde $x = 1$ ve $dx = 0.2$ yazarsak;

$$dy = (5 \cdot 1^4 + 37)0.2 = 8.4.$$

■

buluruz.

Diferansiyellerin geometrik anlamları Şekil 3.51 de gösterilmiştir. $x = a$ olsun ve $dx = \Delta x$ koyun. Buna karşılık $y = f(x)$'teki değişme



ŞEKİL 3.51 Geometrik olarak, dy diferansiyeli f'nin $x = a$'daki lineerizasyonunun $dx = \Delta x$ değişimine karşı gelen ΔL değişimidir.

$$\Delta y = f(a + dx) - f(a).$$

Buna karşılık L teğet doğrusundaki değişim

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(a + dx) - L(a) \\ &= \underbrace{f(a) + f'(a)[(a + dx) - a]}_{L(a+dx)} - \underbrace{f(a)}_{L(a)} \\ &= f'(a)\,dx\end{aligned}$$

dir. Yani, $x = a$ ve $dx = \Delta x$ olduğunda f'nin lineerizasyonundaki değişim tam olarak dy diferansiyelinin değeridir. Bu nedenle dy, x'te $dx = \Delta x$ kadar bir değişim meydana geldiğinde, teğet doğrunun buna karşı gelen yükselmesini veya alçalmasını gösterir.

$dx \neq 0$ ise, dy diferansiyelinin dx diferansiyeline oranı $f'(x)$ türevine eşittir çünkü:

$$dy \div dx = \frac{f'(x)\,dx}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

olur. Bazen $dy = f'(x)\,dx$ yerine df'e **f'nin diferansiyeli** diyerek

$$df = f'(x)\,dx$$

yazarız. Örneğin, $f(x) = 3x^2 - 6$ ise

$$df = d(3x^2 - 6) = 6x\,dx.$$

gibi

$$\frac{d(u + v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \text{veya} \quad \frac{d(\sin u)}{dx} = \cos u\,\frac{du}{dx}$$

gibi her türev formülüne karşılık,

$$d(u + v) = du + dv \quad \text{veya} \quad d(\sin u) = \cos u\,du$$

şeklinde bir diferansiyel form karşılık gelir.

ÖRNEK 5 Fonksiyonların Diferansiyellerini Bulmak

(a) $d(\tan 2x) = \sec^2(2x)\, d(2x) = 2\sec^2 2x\, dx$

(b) $d\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \dfrac{(x+1)\,dx - x\,d(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x\,dx + dx - x\,dx}{(x+1)^2} = \dfrac{dx}{(x+1)^2}$ ■

Diferansiyellerle Tahmin Etme

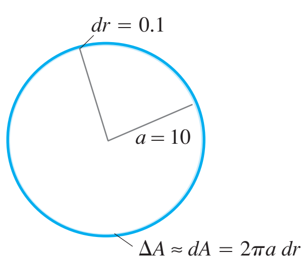
Türevlenebilir $f(x)$ fonksiyonunun bir a noktasındaki değerini bildiğimizi ve bu değerin çok yakındaki bir $a + dx$ noktasına gittiğimizde nasıl değiştiğini tahmin etmek istediğimizi varsayalım. dx küçükse, Şekil 3.51den Δy'nin yaklaşık olarak dy diferansiyeline eşit olduğunu görebiliriz, çünkü

$$f(a + dx) = f(a) + \Delta y,$$

olduğundan diferansiyel yaklaşımı $dx = \Delta x$ olmak üzere

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

verir. Böylece, $\Delta y \approx dy$ yaklaşımı, $f(a)$ biliniyorsa ve dx küçükse $f(a + dx)$'i hesaplamak için kullanılabilir.



ŞEKİL 3.52 $dr = 0.1$ ve $a = 10$ iken olduğu gibi, dr a ile karşılaştırıldığında küçükse, $dA = 2\pi a\, dr$ diferansiyeli $r = a + dr$ yarıçaplı çemberin alanını tahmin için bir yol verir (Örnek 6).

ÖRNEK 6 Diferansiyellerle Tahmin Etme

Bir çemberin yarıçapı r, $a = 10$ m'den 10.1 m'ye artıyor (Şekil 3.52). Çemberin alanı A 'daki artışı tahmin etmek için dA'yı kullanın. Genişletilmiş çemberin alanını tahmin edin ve bunu gerçek alanla karşılaştırın.

Çözüm $A = \pi r^2$ olduğu için, tahmin edilen artış

$$dA = A'(a)\, dr = 2\pi a\, dr = 2\pi(10)(0.1) = 2\pi \text{ m}^2.$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} A(10 + 0.1) &\approx A(10) + 2\pi \\ &= \pi(10)^2 + 2\pi = 102\pi. \end{aligned}$$

dir. Yarıçapı 10.1 m olan çemberin alanı yaklaşık olarak 102π m^2 dir.

Gerçek alan

$$\begin{aligned} A(10.1) &= \pi(10.1)^2 \\ &= 102.01\pi \text{ m}^2 \end{aligned}$$

dir. Tahminimizdeki hata $\Delta A - dA$ farkı olan 0.01π m^2 dir. ■

Diferansiyel Yaklaşımdaki Hata

$f(x)$ fonksiyonu $x = a$ da türevlenebilir olsun ve x'teki bir artma $dx = \Delta x$ olsun. x a'dan $a + \Delta x$'e değişirken f'deki değişimi tanımlamanın iki yolu vardır:

Gerçek değişim:	$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$
Diferansiyel tahmin:	$df = f'(a)\,\Delta x$

df'nin Δf'e yaklaşımı ne kadar iyidir?

Yaklaşımdaki hatayı Δf'ten df'i çıkararak buluruz:

$$\begin{aligned}\text{Yaklaşım hatası} &= \Delta f - df \\ &= \Delta f - f'(a)\Delta x \\ &= \underbrace{f(a + \Delta x) - f(a)}_{\Delta f} - f'(a)\Delta x \\ &= \underbrace{\left(\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a)\right)}_{\text{buna } \epsilon \text{ deyin}} \cdot \Delta x \\ &= \epsilon \cdot \Delta x.\end{aligned}$$

$\Delta x \to 0$ iken

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

fark oranı $f'(a)$'ya yaklaşır ($f'(a)$'nın tanımını hatırlayın), dolayısıyla parantez içindeki değer çok küçük bir sayı haline gelir (bu yüzden ona ϵ dedik). Aslında, $\Delta x \to 0$ iken $\epsilon \to 0$'dır. Δx küçük ise $\epsilon\,\Delta x$ yaklaşım hatası daha küçüktür.

$$\underbrace{\Delta f}_{\substack{\text{gerçek}\\ \text{değişim}}} = \underbrace{f'(a)\Delta x}_{\substack{\text{tahmini}\\ \text{değişim}}} + \underbrace{\epsilon\,\Delta x}_{\text{hata}}$$

Hatanın tam olarak ne kadar küçük olduğunu bilmememize ve Bölüm 11'den önce bunun üzerine fazla ilerleme yapmayacak olmamıza rağmen, burada bahsedilmeye değer bir şey vardır, yani denklemin aldığı *form.*

$x = a$ yakınında $y = f(x)$'teki değişim

$y = f(x)$ $x = a$'da türevlenebiliyor ve x a'dan $a + \Delta x$'e değişiyorsa, f'deki Δy değişimi

$$\Delta y = f'(a)\,\Delta x + \epsilon\,\Delta x \qquad (1)$$

formunda bir denklemle verilir. Burada $\Delta x \to 0$ iken $\epsilon \to 0$ olur.

Örnek 6'da

$$\Delta A = \pi(10.1)^2 - \pi(10)^2 = (102.01 - 100)\pi = (\underbrace{2\pi}_{dA} + \underbrace{0.01\pi}_{\text{hata}})\ \text{m}^2$$

bulduk, dolayısıyla yaklaşım hatası $\Delta A - dA = \epsilon\,\Delta r = 0.01\pi$ ve $\epsilon = 0.01\pi/\Delta r = 0.01\pi/0.1 = 0.1\pi$ m'dir.

(1) denklemi Zincir Kuralının ispatını başarılı bir şekilde sonlandırmamızı sağlar.

Zincir Kuralının İspatı

Amacımız $f(u)$ u'nun türevlenebilir bir fonksiyonu ve $u = g(x)$ de x'in türevlenebilir bir fonksiyonu ise, $y = f(g(x))$ bileşkesi x'in türevlenebilir bir fonksiyonudur.

Daha açık olarak, g x_0'da türevlenebiliyorsa ve f de $g(x_0)$'da türevlenebiliyorsa, bileşke x_0'da türevlenebilir:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Δx x'in bir artımı ve Δu ve Δy de u ve y'de buna karşılık gelen artımlar olsun. Denklem (1) i uygulamakla

$$\Delta u = g'(x_0)\Delta x + \epsilon_1 \Delta x = (g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

elde ederiz. Burada $\Delta x \to 0$ iken $\epsilon_1 \to 0$ olur. Aynı şekilde,

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \epsilon_2 \Delta u = (f'(u_0) + \epsilon_2)\Delta u$$

olur ve yine $\Delta u \to 0$ iken $\epsilon_2 \to 0$'dır. Ayrıca $\Delta x \to 0$ iken $\Delta u \to 0$ olduğuna dikkat edin. Δu ve Δy denklemlerini birleştirmek

$$\Delta y = (f'(u_0) + \epsilon_2)(g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

verir, dolayısıyla

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) + \epsilon_2 g'(x_0) + f'(u_0)\epsilon_1 + \epsilon_2\epsilon_1$$

olur. Δx sıfıra giderken ϵ_1 ve ϵ_2 de sıfıra gittiği için, denklemin sağ tarafındaki dört terimin üçü limitte sıfır olur ve

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

kalır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Değişime Karşı Duyarlılık

$df = f'(x)\,dx$ denklemi f'nin çıktısının farklı x değerleri için girdilerdeki değişikliklere ne kadar duyarlı olduğunu göstermektedir. f''nün x'teki değeri ne kadar büyükse, dx'e verilen bir değişikliğin etkisi de o kadar büyüktür. Bir a noktasından yakınındaki bir $a + dx$ noktasına giderken f'deki değişimi üç şekilde tanımlayabiliriz.

	Gerçek	**Tahmin edilen**
Mutlak değişim	$\Delta f = f(a + dx) - f(a)$	$df = f'(a)\,dx$
Bağıl değişim	$\dfrac{\Delta f}{f(a)}$	$\dfrac{df}{f(a)}$
Yüzde değişim	$\dfrac{\Delta f}{f(a)} \times 100$	$\dfrac{df}{f(a)} \times 100$

ÖRNEK 7 Bir Kuyunun Derinliğini Hesaplamak

$s = 16t^2$ denkleminden, attığınız ağır bir taşın suya ne kadar zamanda düştüğünü ölçerek bir kuyunun derinliğini hesaplamak istiyorsunuz. Hesabınız zamanı ölçerken yapacağınız 0.1 sn'lik bir hataya ne kadar duyarlıdır?

Çözüm

$$ds = 32t\,dt$$

denkleminde ds'nin boyutu t'nin ne kadar büyük olduğuna bağlıdır.

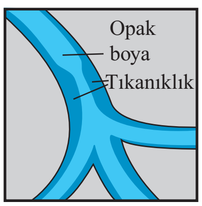
Eğer $t = 2$ sn ise, $dt = 0.1$'in yol açacağı hata sadece

$$ds = 32(2)(0.1) = 6.4 \text{ ft}.$$

olacaktır. Üç saniye sonra, $t = 5$ sn iken, aynı dt'nin yol açtığı hata

$$ds = 32(5)(0.1) = 16 \text{ ft}.$$

olacaktır. Kuyunun tahmin edilen derinliğinin gerçek derinliğinden farkı, zaman ölçümündeki verilen bir hata için, atılan taşın aşağıdaki suya çarpmasına kadar geçen süre arttıkça büyür. ■



Anjiografi

Opak bir boya, içerisinin x-ışınları altında görülebilmesi amacıyla kısmen tıkalı bir atardamara enjekte edilir. Bu tıkanıklığın yerini ve ciddiliğini ortaya çıkarır.



Anjioplasti

Üzerine balon takılmış bir kateter tıkanık noktada damarı genişletmek için atardamar içinde şişirilir.

ÖRNEK 8 Tıkanmış Damarları Açmak

1830'ların sonunda, Fransız fizyolog Jean Poiseuille ("puasoy") günümüzde normal akışına geri dönebilmesi için kısmen tıkalı bir atardamarın yarıçapının ne kadar genişletilmesi gerektiğini tahmin etmek için kullandığımız formülü keşfetmiştir. Formülü,

$$V = kr^4$$

sabit basınçta birim zamanda küçük bir boru veya tüpten akan akışkanın hacmi V'nin, bir sabit kere tübün yarıçapı r'nin dördüncü kuvveti olduğunu söyler. r'deki %10'luk bir artış V'yi nasıl etkileyecekir?

Çözüm r ve V'nin diferansiyelleri arasındaki ilişki şu formülle verilir:

$$dV = \frac{dV}{dr}dr = 4kr^3\,dr.$$

Dolayısıyla, V'deki bağıl değişim

$$\frac{dV}{V} = \frac{4kr^3\,dr}{kr^4} = 4\frac{dr}{r}$$

bulunur. V'deki bağıl değişim r'deki bağıl değişimin 4 katıdır, dolayısıyla r'deki %10'luk bir artış, akışta %40'lık bir artış yaratacaktır. ■

ÖRNEK 9 Kütlenin Enerjiye Dönüşümü

Newton'un ikinci yasası,

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt} = ma$$

kütlenin sabit olduğu varsayımına dayanarak kurulmuştur, ancak bunun tamamen doğru olmadığını biliyoruz, çünkü bir cismin kütlesi hızla birlikte artar. Einstein'ın düzeltilmiş formülünde, kütlenin değeri

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

olarak verilir. Burada "durgun kütle" m_0 hareket etmeyen bir cismin kütlesini temsil eder ve c 300.000 km/sn civarında olan ışık hızıdır. Eklenen v hızından kaynaklanan, kütledeki Δm artışını tahmin etmek için

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 \qquad (2)$$

yaklaşımını kullanın.

Çözüm v, c ile karşılaştırıldığında çok küçükse, c, v^2/c^2 sıfıra yakın olur ve

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \qquad x = \frac{v}{c} \text{ ile Denklem (2)}$$

yaklaşımını kullanmak güvenlidir. Buradan,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx m_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = m_0 + \frac{1}{2}m_0 v^2\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

veya

$$m \approx m_0 + \frac{1}{2}m_0 v^2\left(\frac{1}{c^2}\right) \tag{3}$$

(3) denklemi kütlede, eklenen v hızından kaynaklanan artışı ifade eder.

Enerji Yorumu

Newton fiziğinde $(1/2)m_0v^2$ cismin kinetik enerjisidir (KE), ve (3) denklemini

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0 v^2$$

şeklinde yeniden yazarsak,

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0 v^2 = \frac{1}{2}m_0 v^2 - \frac{1}{2}m_0(0)^2 = \Delta(\text{KE})$$

veya

$$(\Delta m)c^2 \approx \Delta(\text{KE})$$

olduğunu görürüz. Başka bir deyişle, 0 hızından v hızına giderken kinetik enerjideki değişim Δ(KE) yaklaşık olarak $(\Delta m)c^2$'ye eşittir, kütledeki değişim kere ışık hızının karesi. $c \approx 3 \times 10^8$ m/sn'yi kullanarak, kütledeki küçük bir değişikliğin enerjide büyük bir değişiklik yarattığını görürüz. ■

ALIŞTIRMALAR 3.8

Lineerizasyonları Bulmak

1–4 alıştırmalarında $f(x)$'in $x = a$'daki $L(x)$ lineerizasyonunu bulun.

1. $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad a = 2$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}, \quad a = -4$
3. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad a = 1$
4. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = -8$

Yaklaşım İçin Lineerizasyon

Verilen x_0 noktalarını içeren aralıklarda, 5–10 alıştırmalarındaki fonksiyonların yerine geçecek lineerizasyonlar istiyorsunuz. İşinizi mümkün olduğunca basitleştirmek için de, her lineerizasyonun merkezini x_0'da değil de, verilen fonksiyon ve birinci türevinin kolayca hesaplanabileceği yakındaki bir $x = a$ tamsayısında almak istiyorsunuz. Her durumda hangi lineerizasyonu kullanırsınız?

5. $f(x) = x^2 + 2x, \quad x_0 = 0.1$
6. $f(x) = x^{-1}, \quad x_0 = 0.9$
7. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3, \quad x_0 = -0.9$
8. $f(x) = 1 + x, \quad x_0 = 8.1$
9. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 8.5$
10. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}, \quad x_0 = 1.3$

Trigonometrik Fonksiyonların Lineerleştirilmesi

11–14 alıştırmalarında, f'nin $x = a$'daki lineerizasyonunu bulun. Lineerizasyonu ve f'yi birlikte çizin.

11. $f(x) = \sin x$ (a) $x = 0$, (b) $x = \pi$

12. $f(x) = \cos x$ (a) $x = 0$, (b) $x = -\pi/2$

13. $f(x) = \sec x$ (a) $x = 0$, (b) $x = -\pi/3$

14. $f(x) = \tan x$ (a) $x = 0$, (b) $x = \pi/4$

$(1 + x)^k \approx 1 + kx$ Yaklaşımı

15. $f(x) = (1 + x)^k$'nin $x = 0$'daki lineerizasyonunun $L(x) = 1 + kx$ olduğunu gösterin.

16. 0'a yakın x değerlerinde $f(x)$ fonksiyonuna bir yaklaşım bulmak için $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ formülünü kullanın.

a. $f(x) = (1 - x)^6$ **b.** $f(x) = \dfrac{2}{1 - x}$

c. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x}}$ **d.** $f(x) = \sqrt{2 + x^2}$

e. $f(x) = (4 + 3x)^{1/3}$ **f.** $f(x) = \sqrt[3]{\left(1 - \dfrac{1}{2 + x}\right)^2}$

17. Hesap makinesinden daha hızlı $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ formülünü kullanarak aşağıdakileri tahmin edin.

a. $(1.0002)^{50}$ **b.** $\sqrt[3]{1.009}$

18. $x = 0$'da $f(x) = \sqrt{x + 1} + \sin x$'in lineerizasyonunu bulun. $\sqrt{x + 1}$ ve $\sin x$'in tek tek lineerizasyonlarına nasıl bağlıdır?

Diferansiyel Formda Türevler

19–30 alıştırmalarında, dy'yi bulun.

19. $y = x^3 - 3\sqrt{x}$ **20.** $y = x\sqrt{1 - x^2}$

21. $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$ **22.** $y = \dfrac{2\sqrt{x}}{3(1 + \sqrt{x})}$

23. $2y^{3/2} + xy - x = 0$ **24.** $xy^2 - 4x^{3/2} - y = 0$

25. $y = \sin(5\sqrt{x})$ **26.** $y = \cos(x^2)$

27. $y = 4\tan(x^3/3)$ **28.** $y = \sec(x^2 - 1)$

29. $y = 3\csc(1 - 2\sqrt{x})$ **30.** $y = 2\cot\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Yaklaşım Hatası

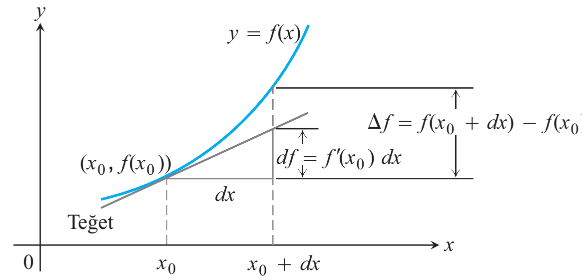
31–36 alıştırmalarında, x x_0'dan $x_0 + dx$'e değişirken her $f(x)$ fonksiyonu değer değiştirir.

a. $\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$ değişimini;

b. $df = f'(x_0)\,dx$ tahmininin değerini; ve

c. $|\Delta f - df|$ yaklaştırma atasını

bulun.



31. $f(x) = x^2 + 2x$, $x_0 = 1$, $dx = 0.1$

32. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$, $x_0 = -1$, $dx = 0.1$

33. $f(x) = x^3 - x$, $x_0 = 1$, $dx = 0.1$

34. $f(x) = x^4$, $x_0 = 1$, $dx = 0.1$

35. $f(x) = x^{-1}$, $x_0 = 0.5$, $dx = 0.1$

36. $f(x) = x^3 - 2x + 3$, $x_0 = 2$, $dx = 0.1$

Değişimlerin Diferansiyel Tahminleri

37–42 alıştırmalarında, hacim veya yüzey alanında verilen değişimi tahmin eden bir diferansiyel formül yazın.

37. Yarıçap r_0'dan $r_0 + dr$'ye değişirken bir kürenin hacmi $V = (4/3)\pi r^3$'teki değişim.

38. Kenar uzunlukları x_0'dan $x_0 + dx$'e değişirken bir kübün hacmi $V = x^3$'teki değişim.

39. Kenar uzunlukları x_0'dan $x_0 + dx$'e değişirken bir kübün yüzey alanı $S = 6x^2$'deki değişim.

40. Yarıçap r_0'dan $r_0 + dr$'ye değişir ve yükseklik aynı kalırken dik bir koninin yan yüzey alanı $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$'deki değişiklik

41. Yarıçap r_0'dan $r_0 + dr$'ye değişir ve yükseklik aynı kalırken dik bir silindirin hacmi $V = \pi r^2 h$'deki değişiklik.

42. Yükseklik h_0'dan $h_0 + dh$'ye değişir ve yarıçap aynı kalırken dik bir silindirin yan yüzey alanı $S = 2\pi rh$'deki değişiklik.

Uygulamalar

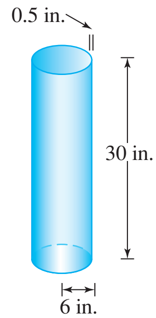
43. Bir çemberin yarıçapı 2.00'den 2.02 m'ye çıkarılmaktadır.

a. Alanda meydana gelen değişikliği tahmin edin.

b. (a)'daki tahmini çemberin esas alanının yüzdesi olarak ifade edin.

44. Bir ağacın çapı 10 inçtir. Bir yıl içinde, çevresi 2 inç büyür. Ağacın çapı ve kesit alanı yaklaşık olarak ne kadar büyümüştür?

45. Hacim tahmin etmek Yüksekliği 30 inç, yarıçapı 6 inç ve kalınlığı 0.5 inç olan silindir şeklindeki bir malzemenin hacmini tahmin edin.



46. Bir binanın yüksekliğini tahmin etmek Bir binanın tabanından 30 ft uzakta duran bir ölçümcü, binanın tepesine olan yükselme açısını 75° olarak ölçüyor. Binanın tahmin edilen yüksekliğindeki hatanın %4'ten az olması için açı ne kadar hassasiyetle ölçülmelidir?

47. Tolerans Dik bir silindirin yüksekliği ve yarıçapı aynıdır, dolayısıyla silindirin hacmi $V = \pi h^3$ olur. Hacim, gerçek değerinden en fazla %1 hata ile hesaplanacaktır. h'de izin verilebilecek en büyük hatayı yaklaşık olarak bulun ve h'nin bir yüzdesi olarak ifade edin.

48. Tolerans

a. 10 m yüksekliğinde silindirik bir tankın iç çapı tankın hacminin %1 hatayla hesaplanabilmesi için hangi hatayla ölçülmelidir?

b. Tankın dış çapı tankı boyamak için gereken boya miktarının %5 hatayla hesaplanabilmesi için hangi hatayla ölçülmelidir?

49. Bozuk para üretmek Bir üretici federal hükümet için bozuk para yapmak üzere anlaşmıştır. Paraların ideal ağırlıklarından en fazla $1/1000$ kadar farklı olmaları gerekiyorsa, paraların yarıçapı r'de ne kadar bir hataya göz yumulabilir? Kalınlığın değişmediğini varsayın.

50. Bir kübün hacmindeki değişikliği çizmek. Kenarlarının uzunluğu x olan bir kübün hacmi $V = x^3$, x'teki Δx kadar artışla ΔV kadar değişiyor. Bir resim çizerek ΔV'yi geometrik açıdan, aşağıda verilen hacimlerin toplamı olarak nasıl ifade edilebileceğini gösterin.

a. Boyutları $x \times x \times \Delta x$ olan üç dilim.

b. Boyutları $x \times \Delta x \times \Delta x$ olan üç çubuk.

c. Boyutları $\Delta x \times \Delta x \times \Delta x$ olan bir küp.

$dV = 3x^2\, dx$ diferansiyel formülü V'deki değişimi üç dilimi kullanarak hesaplar.

51. Uçuş manevralarının kalbe etkisi. Kalbin ana pompalama odacığı, sol karıncık, tarafından birim zamanda yapılan iş

$$W = PV + \frac{V\delta v^2}{2g}$$

denklemiyle verilir. Burada W iş, P ortalama kan basıncı, V birim zamanda pompalanan kanın hacmi, δ kanın yoğunluğu, v çıkan kanın ortalama hızı ve g de yerçekimi ivmesidir.

P, V, δ ve v sabitseler, W sadece g'nin bir fonksiyonu olur ve denklem

$$W = a + \frac{b}{g} \quad (a, b \text{ sabit})$$

haline gelir. NASA'nın tıp ekibinin bir üyesi olarak, g'de uçuş manevraları dolayısıyla oluşacak belirgin değişikliklere W'nun ne kadar duyarlı olduğunu bilmek istiyorsunuz ve bu da g'nin başlangıç değerine bağlıdır. Araştırmanızın bir parçası olarak, verilen bir dg değişiminin $g = 5.2$ ft/sn^2 olan aydaki etkisini aynı değişimin $g = 32$ ft/sn^2 olan dünyadaki etkisiyle karşılaştırmaya karar veriyorsunuz. dW_{ay}'ın $dW_{\text{dünya}}$'ya oranını bulmak için yukarıdaki basitleştirilmiş denklemi kullanın.

52. Yerçekimi ivmesini ölçmek Bir saat sarkacının uzunluğu L sıcaklığı kontrol edilerek sabit tutulduğunda, sarkacın periyodu T yerçekimi ivmesi g'ye bağlıdır. Dolayısıyla periyot, saat dünya üzerinde bir yerden diğerine götürülürken g'deki değişime bağlı olarak biraz değişecektir. ΔT'yi izleyerek, T, g ve L'yi birbirine bağlayan $T = 2\pi(L/g)^{1/2}$ denkleminden g'deki değişimi tahmin edebiliriz.

a. L sabit ve g serbest değişken olmak üzere, dT'yi hesaplayın ve bunu (b) ile (c)'de soruları yanıtlamakta kullanın.

b. g artıyorsa, T artar mı, azalır mı? Sarkaçlı bir saat ileri mi geri mi gider? Açıklayın.

c. 100 cm uzunluğunda sarkacı olan bir saat $g = 980$ cm/sn^2 olan bir yerden başka bir yere götürülüyor. Bu periyodu $dT = 0.001$ sn kadar arttırıyor. dg'yi bulun ve yeni yerde g'nin değerini belirleyin.

53. Bir kübün kenarı %1'lik bir hatayla 10 cm olarak ölçülmektedir. Kübün hacmi bu ölçümle hesaplanacaktır. Hacim hesabındaki yüzde hatayı bulun.

54. Alanı, gerçek değerinin %2'si kadar bir hatayla bulduğunuzdan emin olmak için, bir karenin kenarını ne hassaslıkta ölçmelisiniz?

55. Bir kürenin çapı 100 ± 1 cm olarak ölçülüyor ve hacmi de bu ölçümle hesaplanıyor. Hacim hesabındaki yüzde hatayı bulun.

56. Hacim hesaplanırken en fazla %3 hata yapılabilecekse, bir kürenin çapı D'yi ölçerken izin verilebilecek yüzde hatayı bulun.

57. (*Örnek 7'nin devamı*) t'yi ölçerken yapılacak %5'lik bir hatanın $s = 16t^2$ denkleminden s bulunurken %10'luk bir hataya neden olacağını gösterin.

58. (*Örnek 8'in devamı*) V 'yi %50 arttırmak için r hangi yüzdeyle arttırılmalıdır?

Teori ve Örnekler

59. Orijindeki lineerizasyonu ile $\sqrt{1 + x}$ 'e yapılan yaklaşımın $x \to 0$ iken iyileşmesi gerektiğini

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x}}{1 + (x/2)} = 1$$

limitini hesaplayarak gösterin.

60. Orijindeki lineerizasyonu ile tan x'e yapılan yaklaşımın $x \to 0$ iken iyileşmesi gerektiğini

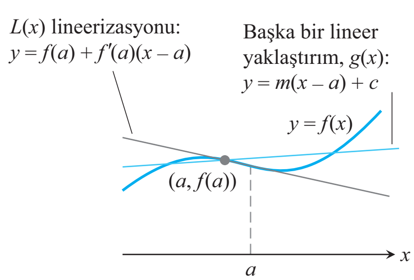
$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

limitini hesaplayarak gösterin.

61. Lineerizasyon en iyi lineer yaklaştırımdır. (Lineerizasyonu kullanmamızın nedeni budur.) $y = f(x)$'in $x = a$'da türevlenebildiğini ve $g(x) = m(x - a) + c$'nin de, m ve c sabit olmak üzere, lineer bir fonksiyon olduğunu varsayın. Eğer $E(x) = f(x) - g(x)$ hatası $x = a$ civarında yeterince küçükse, $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ lineerizasyonu yerine f'ye lineer yaklaşım olarak g'yi kullanabiliriz. g üzerine aşağıdaki koşulları koyarsak,

1. $E(a) = 0$ — $x = a$'da yaklaşım hatası sıfırdır.
2. $\lim_{x \to a} \dfrac{E(x)}{x - a} = 0$ — $x - a$ ile karşılaştırıldığında hata ihmal edilebilir.

$g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ olduğunu gösterin. Yani, $L(x)$ lineerizasyonu hatası hem $x = a$'da sıfır olan hem de $x - a$'ya göre ihmal edilebilir tek lineer yaklaştırımı verir.



62. Kuadratik Yaklaşımlar

a. $Q(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2$ $f(x)$'in $x = a$ da aşağıdaki özellikleri sağlayan bir kuadratik yaklaşımı olsun:

i. $Q(a) = f(a)$

ii. $Q'(a) = f'(a)$

iii. $Q''(a) = f''(a)$

b_0, b_1 ve b_2 katsayılarını belirleyin.

b. $f(x) = 1/(1 - x)$'in $x = 0$'daki yaklaşımını bulun.

c. $f(x) = 1/(1 - x)$'i ve $x = 0$'daki yaklaşımını çizin. Sonra her iki grafikte (0, 1) noktasını yaklaştırın. Gördüğünüzü açıklayın.

d. $g(x) = 1/x$'in $x = 1$'deki yaklaşımını bulun. g'yi ve yaklaşmını birlikte çizin. Gördüğünüzü açıklayın.

e. $h(x) = \sqrt{1 + x}$'in $x = 0$'daki yaklaşımını bulun. h'yi ve yaklaşmını birlikte çizin. Gördüğünüzü açıklayın.

f. (b), (d) ve (e) şıklarında, karşı gelen noktalarda f, g ve h'nin lineerizasyonları nelerdir?

63. Grafiklerden türevleri okumak Türevlenebilir eğrilerin büyütüldüklerinde düzleştikleri düşüncesi belirli noktalarda fonksiyonların türevlerinin değerlerini tahmin etmede kullanılabilir. Eğriyi gördüğümüz kısmının istenilen noktada düz bir doğru gibi görüneceği kadar büyütür ve ekranın koordinat dilimlerini kullanarak eğrinin eğimini benzediği doğrunun eğimiymiş gibi okuruz.

a. İşlemin nasıl yürüdüğünü görmek için, önce $x = 1$'de $y = x^2$ fonksiyonu ile deneyin. Okuyacağınız eğimin 2 olması gerekir.

b. $x = 1$, $x = 0$ ve $x = -1$'de $y = e^x$ eğrisini deneyin. Her durumda, tahmin ettiğiniz türevin değerini e^x 'in o noktadaki değeriyle karşılaştırın. Ne gibi bir ilişki görüyorsunuz? Başka x değerlerini de deneyin. Bölüm 7'de neler olduğu açıklanacaktır.

64. Türevlenebilir bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$'da yatay bir teğeti olduğunu varsayın. f'nin $x = a$'daki lineerizasyonu hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

65. Durmakta olan bir cismin kütlesini %1 arttırabilmek için hangi bağıl hıza ivmelemek gerekir?

66. Arka arkaya kök almak

a. Hesap makinenize 2 yazın ve kare-kök tuşuna sürekli basarak (veya arka arkaya 0.5 kuvvetini alarak) art arda karekök alın. Ne gibi bir kalıp görüyorsunuz? Neler olduğunu açıklayın. Arka arkaya onuncu kökleri alırsanız ne olur?

b. İşlemi, girdi olarak 2 yerine 0.5 alarak tekrarlayın. Şimdi ne oluyor? 2 yerine herhangi bir pozitif x sayısı kullanabilir misiniz? Neler olduğunu açıklayın.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Fonksiyonları Lineerizasyonları ile Karşılaştırmak

67–70 alıştırmalarında belirli bir I aralığında fonksiyonun yerine lineerizasyonu kullanmaktan doğacak hatayı bulmak için bir BCS kullanacaksınız. Aşağıdaki adımları gerçekleştirin:

a. f fonksiyonunu I aralığında çizin.

b. a noktasında fonksiyonun L lineerizasyonunu bulun.

c. f ve L'yi tek bir grafikte birlikte çizin.

d. I aralığındaki mutlak hata $|f(x) - L(x)|$'i birlikte çizin ve maksimum değerini bulun.

e. (d) şıkkındaki grafiğinizden, $\epsilon = 0.5$, 0.1 ve 0.01 için

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L(x)| < \epsilon$$

koşulunu sağlayacak bulabildiğiniz en büyük $\delta > 0$ değerini bulun. Sonra grafik olarak δ tahmininizin doğru olup olmadığını kontrol edin.

67. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x, \quad [-1, 2], \quad a = 1$

68. $f(x) = \dfrac{x - 1}{4x^2 + 1}, \quad \left[-\dfrac{3}{4}, 1\right], \quad a = \dfrac{1}{2}$

69. $f(x) = x^{2/3}(x - 2), \quad [-2, 3], \quad a = 2$

70. $f(x) = \sqrt{x} - \sin x, \quad [0, 2\pi], \quad a = 2$

Bölüm 3 Tekrar Soruları

1. Bir f fonksiyonunun türevi nedir? Türevin tanım aralığı ile f' nin tanım aralığı arasındaki ilişki nedir? Örnekler verin.

2. Eğim, teğet ve değişim oranlarını tanımlamada türevin oynadığı rol nedir?

3. Elinizde sadece bir fonksiyonun değerlerinin tablosu varsa, o fonksiyonun türevinin grafiğini nasıl çizersiniz?

4. Bir fonksiyonun açık bir aralıkta ve kapalı bir aralıkta türevlenebilir olması ne anlama gelir?

5. Türevler ve tek taraflı türevler arasındaki ilişki nedir?

6. Bir fonksiyonun bir noktada türevinin *olmamasını* geometrik olarak açıklayın.

7. Bir fonksiyonun bir noktadaki türevlenebilirliği ile o noktadaki sürekliliği arasında nasıl bir ilişki vardır, eğer varsa?

8. Birim basamak fonksiyonu

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

[–1, 1] aralığındaki başka bir fonksiyonun türevi olabilir mi? Açıklayın.

9. Türev hesaplamak için hangi kuralları biliyorsunuz? Bir kaç örnek verin.

10. **a.** $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

b. $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$

c. $\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_n}{dx}$

formüllerinin bir polinomun türevini almamızı nasıl sağladığını açıklayın.

11. Onuncu sorudaki üç formüle ek olarak, rasyonel fonksiyonların türevini almak için hangi formüle gerek vardır?

12. İkinci ve üçüncü mertebeden bir türev nedir? Bildiğiniz fonksiyonların kaç türevi verdır? Örnekler verin.

13. Bir fonksiyonun anlık ve ortalama değişim oranları arasındaki ilişki nedir? Bir örnek verin.

14. Hareketin incelenmesinde türevin rolü nedir? Bir cismin bir doğru üzerindeki hareketi hakkında konum fonksiyonunu inceleyerek ne öğrenebilirsiniz? Örnekler verin.

15. Türevler ekonomide nasıl bir rol oynar?

16. Türevlerin diğer uygulamalarına örnek verin.

17. $\lim_{h\to 0}((\sin h)/h)$ ve $\lim_{h\to 0}((\cos h - 1)/h)$ limitlerinin sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının türevleriyle ilişkisi var mıdır? Bu fonksiyonların türevleri nedir?

18. $\sin x$ ve $\cos x$'in türevlerini biliyorsanız, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ ve $\csc x$ fonksiyonlarının türevlerini nasıl bulabilirsiniz? Bu fonksiyonların türevleri nedir?

19. Altı temel trigonometrik fonksiyon hangi noktalarda süreklidir? Nereden biliyorsunuz?

20. İki türevlenebilir fonksiyonun bileşkesinin türevini hesap-lamanın kuralı nedir? Böyle bir türev nasıl hesaplanır? Örnekler verin.

21. $x = f(t)$, $y = g(t)$ parametrik eğrisinin dy/dx eğimi için formül nedir? Formül ne zaman uygulanır? Ne zaman d^2y/dx^2'yi bulabilmeyi beklersiniz? Örnekler verin.

22. u x'in türevlenebilir bir fonksiyonu ve n bir tamsayıysa, $(d/dx)(u^n)$'yi nasıl hesaplarsınız? Peki ya, n rasyonel bir sayıysa? Örnek verin.

23. Kapalı türev alma nedir? Buna ne zaman ihtiyaç duyarsınız? Örnek verin.

24. İlişkili oranlar problemleri neden ortaya çıkar? Örnek verin.

25. İlişkili oranlar problemlerini çözmek için bir strateji tanımlayın. Bir örneğe uygulayın.

26. Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki lineerizasyonu $L(x)$ nedir? Lineerizasyonun bulunabilmesi için f'nin a'da nasıl davranması gerekmektedir? Lineerizasyonlar nasıl kullanılır? Örnek verin.

27. x, a'dan yakındaki bir $a + dx$ değerine giderse, türevlenebilir bir $f(x)$ fonksiyonunun değerinde buna karşılık gelen değişimi nasıl bulursunuz? Bağıl ve yüzde değişimlerini nasıl tahmin edersiniz? Örnek verin.

Bölüm 3 Problemler

Fonksiyonların Türevleri

1–40 problemlerindeki fonksiyonların türevlerini bulun.

1. $y = x^5 - 0.125x^2 + 0.25x$

2. $y = 3 - 0.7x^3 + 0.3x^7$

3. $y = x^3 - 3(x^2 + \pi^2)$

4. $y = x^7 + \sqrt{7}x - \frac{1}{\pi + 1}$

5. $y = (x + 1)^2(x^2 + 2x)$

6. $y = (2x - 5)(4 - x)^{-1}$

7. $y = (\theta^2 + \sec\theta + 1)^3$

8. $y = \left(-1 - \frac{\csc\theta}{2} - \frac{\theta^2}{4}\right)^2$

9. $s = \frac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}}$

10. $s = \frac{1}{\sqrt{t} - 1}$

11. $y = 2\tan^2 x - \sec^2 x$

12. $y = \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{2}{\sin x}$

13. $s = \cos^4(1 - 2t)$

14. $s = \cot^3\left(\dfrac{2}{t}\right)$

15. $s = (\sec t + \tan t)^5$

16. $s = \csc^5(1 - t + 3t^2)$

17. $r = \sqrt{2\theta \sin\theta}$

18. $r = 2\theta\sqrt{\cos\theta}$

19. $r = \sin\sqrt{2\theta}$

20. $r = \sin\left(\theta + \sqrt{\theta + 1}\right)$

21. $y = \dfrac{1}{2}x^2 \csc\dfrac{2}{x}$

22. $y = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$

23. $y = x^{-1/2}\sec(2x)^2$

24. $y = \sqrt{x}\csc(x + 1)^3$

25. $y = 5\cot x^2$

26. $y = x^2\cot 5x$

27. $y = x^2\sin^2(2x^2)$

28. $y = x^{-2}\sin^2(x^3)$

29. $s = \left(\dfrac{4t}{t + 1}\right)^{-2}$

30. $s = \dfrac{-1}{15(15t - 1)^3}$

31. $y = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{1 + x}\right)^2$

32. $y = \left(\dfrac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1}\right)^2$

33. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + x}{x^2}}$

34. $y = 4x\sqrt{x + \sqrt{x}}$

35. $r = \left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta - 1}\right)^2$

36. $r = \left(\dfrac{1 + \sin\theta}{1 - \cos\theta}\right)^2$

37. $y = (2x + 1)\sqrt{2x + 1}$

38. $y = 20(3x - 4)^{1/4}(3x - 4)^{-1/5}$

39. $y = \dfrac{3}{(5x^2 + \sin 2x)^{3/2}}$

40. $y = (3 + \cos^3 3x)^{-1/3}$

Kapalı Türev Alma

41–48 problemlerinde, dy/dx'i bulun.

41. $xy + 2x + 3y = 1$

42. $x^2 + xy + y^2 - 5x = 2$

43. $x^3 + 4xy - 3y^{4/3} = 2x$

44. $5x^{4/5} + 10y^{6/5} = 15$

45. $\sqrt{xy} = 1$

46. $x^2y^2 = 1$

47. $y^2 = \dfrac{x}{x + 1}$

48. $y^2 = \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$

49 ve 50 problemlerinde dp/dq'yu bulun.

49. $p^3 + 4pq - 3q^2 = 2$

50. $q = (5p^2 + 2p)^{-3/2}$

51 ve 52 problemlerinde dr/ds bulun.

51. $r\cos 2s + \sin^2 s = \pi$

52. $2rs - r - s + s^2 = -3$

53. d^2y/dx^2'yi kapalı türev alarak bulun.

a. $x^3 + y^3 = 1$ **b.** $y^2 = 1 - \dfrac{2}{x}$

54. a. $x^2 - y^2 = 1$ denkleminin türevini kapalı olarak alarak, $dy/dx = x/y$ olduğunu gösterin.

b. $d^2y/dx^2 = -1/y^3$ olduğunu gösterin.

Türevlerin Sayısal Değerleri

55. $f(x)$, $g(x)$ fonksiyonlarının ve ilk türevlerinin $x = 0$ ve $x = 1$'deki değerlerinin aşağıdaki gibi olduğunu varsayın.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	-3	$1/2$
1	3	5	$1/2$	-4

Aşağıdaki kombinasyonların verilen x değerlerinde birinci türevlerini bulun.

a. $6f(x) - g(x), \quad x = 1$

b. $f(x)g^2(x), \quad x = 0$

c. $\dfrac{f(x)}{g(x) + 1}, \quad x = 1$

d. $f(g(x)), \quad x = 0$

e. $g(f(x)), \quad x = 0$

f. $(x + f(x))^{3/2}, \quad x = 1$

g. $f(x + g(x)), \quad x = 0$

56. $f(x)$ fonksiyonu ve birinci türevinin $x = 0$ ve $x = 1$'deki değerlerinin aşağıdaki gibi olduğunu varsayın.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	9	-2
1	-3	$1/5$

Aşağıdaki kombinasyonların verilen x değerlerinde birinci türevlerini bulun.

a. $\sqrt{x}\,f(x), \quad x = 1$

b. $\sqrt{f(x)}, \quad x = 0$

c. $f(\sqrt{x}), \quad x = 1$

d. $f(1 - 5\tan x), \quad x = 0$

e. $\dfrac{f(x)}{2 + \cos x}, \quad x = 0$

f. $10\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)f^2(x), \quad x = 1$

57. $y = 3\sin 2x$ ve $x = t^2 + \pi$ ise, $t = 0$'da dy/dt'nin değerini bulun.

58. $s = t^2 + 5t$ ve $t = (u^2 + 2u)^{1/3}$ ise, $u = 2$'de ds/du'nin değerini bulun.

59. $w = \sin\left(\sqrt{r} - 2\right)$ ve $r = 8\sin(s + \pi/6)$ ise, $s = 0$'da dw/ds'yi bulun.

60. $r = (\theta^2 + 7)^{1/3}$ ve $\theta^2 t + \theta = 1$ ise $t = 0$'da dr/dt'nin değerini bulun.

61. $y^3 + y = 2\cos x$ ise, $(0, 1)$ noktasında d^2y/dx^2'nin değerini bulun.

62. $x^{1/3} + y^{1/3} = 4$ ise, $(8, 8)$ noktasında d^2y/dx^2'nin değerini bulun.

Türev Tanımı

63 ve 64 problemlerinde, tanımı kullanarak türevleri bulun.

63. $f(t) = \dfrac{1}{2t + 1}$

64. $g(x) = 2x^2 + 1$

65. a. Aşağıdaki fonksiyonu çizin.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x < 0 \\ -x^2, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

b. f, $x = 0$'da sürekli midir?

c. f, $x = 0$'da türevlenebilir mi?

Yanıtınızı açıklayın.

66. **a.** Aşağıdaki fonksiyonu çizin.

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \le x < 0 \\ \tan x, & 0 \le x \le \pi/4. \end{cases}$$

b. f, $x = 0$'da sürekli midir?

c. f, $x = 0$'da türevlenebilir mi?

Yanıtınızı açıklayın.

67. **a.** Aşağıdaki fonksiyonu çizin.

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

b. f, $x = 1$'de sürekli midir?

c. f, $x = 1$'de türevlenebilir mi?

Yanıtınızı açıklayın.

68. m sabitinin hangi değer veya değerleri için,

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \le 0 \\ mx, & x > 0 \end{cases}$$

a. $x = 0$'da süreklidir?

b. $x = 0$'da türevlenebilir?

Cevaplarınızı açıklayın.

Eğim, Teğet ve Normaller

69. **Belirli eğimde teğetler** $y = (x/2) + 1/(2x - 4)$ eğrisinin, eğimi $-3/2$ olan bir noktası var mıdır? Varsa, bulun.

70. **Belirli eğimde teğetler** $y = x - 1/(2x)$ eğrisinin, eğimi 3 olan bir noktası var mıdır? Varsa bulun.

71. **Yatay teğetler** $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ eğrisinin üzerinde teğetin x-eksenine paralel olduğu noktaları bulun.

72. **Teğet Kesimleri** $y = x^3$ eğrisine $(-2, -8)$ noktasında teğet olan doğrunun x- ve y-eksenlerini kesim noktalarını bulun.

73. **Verilen Doğrulara dik veya paralel teğetler** $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ eğrisinin üzerinde teğetin

a. $y = 1 - (x/24)$ doğrusuna dik;

b. $y = \sqrt{2} - 12x$ doğrusuna paralel olduğu noktaları bulun.

74. **Teğetlerin Kesişimi** $y = (\pi \sin x)/x$ eğrisinin $x = \pi$ ve $x = -\pi$ noktalarındaki teğetlerinin dik kesiştiklerini gösterin.

75. **Bir doğruya paralel normaller** $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$ eğrisinin normalinin $y = -x/2$ doğrusuna paralel olduğu noktaları bulun. Eğriyi ve normalleri denklemleriyle isimlendirerek birlikte çizin.

76. **Teğet ve normal doğrular** $y = 1 + \cos x$ eğrisinin $(\pi/2, 1)$ noktasındaki normal ve teğetinin denklemlerini bulun. Eğriyi, normali ve teğeti denklemleriyle isimlendirerek birlikte çizin.

77. **Teğet parabol** $y = x^2 + C$ parabolünün $y = x$ doğrusuna teğet olması için C ne olmalıdır?

78. **Teğetin eğimi** $y = x^3$ eğrisinin herhangi bir (a, a^3) noktasındaki teğetinin, eğriyi, eğimi (a, a^3) 'teki eğimin dört katı olan başka bir noktada kestiğini gösterin.

79. **Teğet eğri** c'nin hangi değerinde $y = c/(x + 1)$ eğrisi $(0, 3)$ ve $(5, -2)$ noktalarından geçen doğruya teğet olur?

80. **Çembere normal** $x^2 + y^2 = a^2$ çemberinin herhangi bir noktasındaki normalinin orijinden geçtiğini gösterin.

Kapalı Olarak Tanımlanmış Eğrilerin Teğetleri ve Normalleri

81–86 problemlerinde, eğrilerin verilen noktalardaki teğet ve normal denklemlerini bulun.

81. $x^2 + 2y^2 = 9$, $(1, 2)$

82. $x^3 + y^2 = 2$, $(1, 1)$

83. $xy + 2x - 5y = 2$, $(3, 2)$

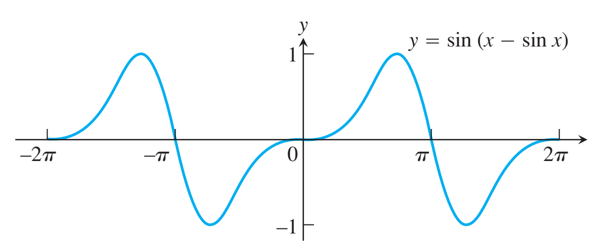
84. $(y - x)^2 = 2x + 4$, $(6, 2)$

85. $x + \sqrt{xy} = 6$, $(4, 1)$

86. $x^{3/2} + 2y^{3/2} = 17$, $(1, 4)$

87. $x^3y^3 + y^2 = x + y$ eğrisinin $(1, 1)$ ve $(1, -1)$ noktalarındaki eğimini bulun.

88. Aşağıdaki grafik $y = \sin(x - \sin x)$ eğrisinin x-ekseninde yatay teğetleri olabileceğini belirtmektedir. Gerçekten var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.



Parametrik Eğrilerin Teğetleri

89 ve 90 problemlerinde, verilen t değerine karşılık gelen noktada eğriye teğet olan xy-düzlemindeki doğrunun denklemini bulun. Ayrıca d^2y/dx^2'nin bu noktadaki değerini bulun.

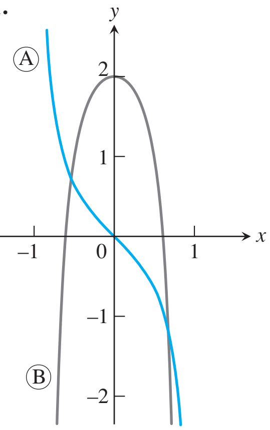
89. $x = (1/2) \tan t$, $y = (1/2) \sec t$, $t = \pi/3$

90. $x = 1 + 1/t^2$, $y = 1 - 3/t$, $t = 2$

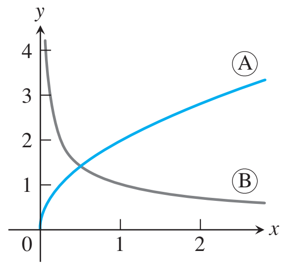
Grafikleri İnceleme

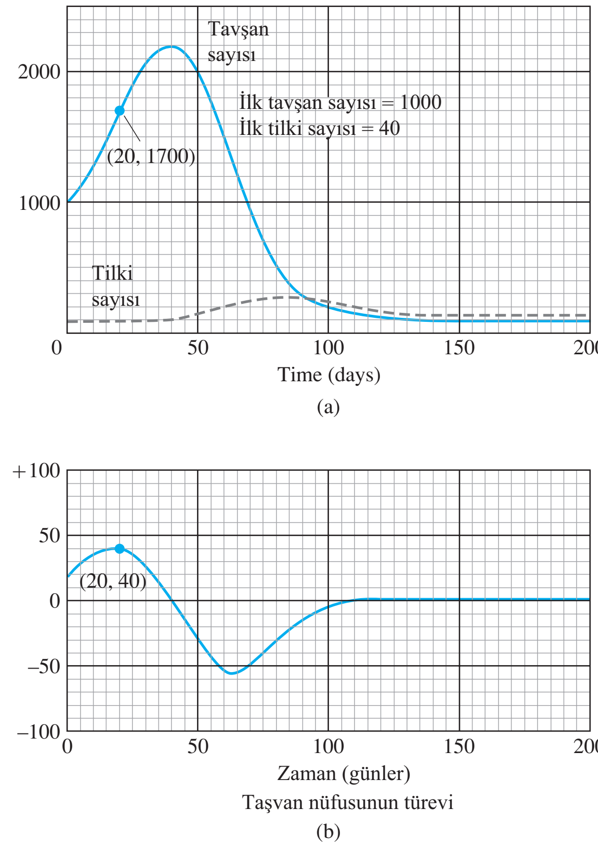
91 ve 92 problemlerindeki şekillerin her biri, biri $y = f(x)$ fonksiyonu, diğeri onun türevi $f'(x)$ olan iki grafiği göstermektedir. Hangi grafik hangisidir? Nasıl anlarsınız?

91.



92.





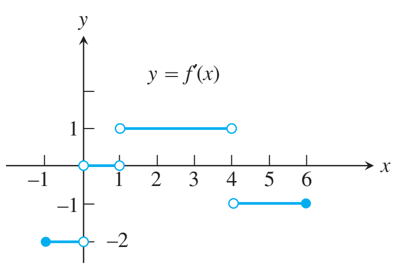
ŞEKİL 3.53 Bir av-avcı topluluğundaki tavşan ve tilkiler

93. Aşağıdaki bilgileri kullanarak $-1 \leq x \leq 6$ aralığında $y = f(x)$ grafiğini çizin.

i. Grafik uc uca eklenmiş doğru parçalarından oluşur.

ii. Grafik (–1, 2) noktasından başlar.

iii. Tanımlı olduğunda, f'nin türevi aşağıda gösterilen basamak fonksiyonuyla uyuşur.



94. Grafiğin (–1, 2) yerine (–1, 0) noktasından başladığını düşünerek Problem 93'ü tekrar edin.

95 ve 96 problemleri Şekil 3.53'teki grafiklerle ilgilidir. (a) kısmındaki grafikler küçük bir topluluktaki tavşan ve tilki sayısını göstermektedir. 200 günlük bir zaman içinde zamanın fonksiyonu olarak işaretlenmiştir. Başlangıçta, tavşanlar ürerken, sayıları artmaktadır. Fakat tilkiler tavşanlarla beslenmektedir ve tilkilerin sayısı arttıkça, tavşan sayısı düşmeye başlamaktadır. Şekil 3.53b tavşan nüfusunun türev grafiğini göstermektedir. Eğimleri işaretleyerek çizdik.

95. a. Tavşan sayısı en yüksek ve en düşük olduğunda, Şekil 3.53'teki tavşan nüfusunun türevinin değeri nedir?

b. Türevi en yüksek ve en düşük olduğunda, Şekil 3.53' teki tavşan topluluğunun büyüklüğü nedir?

96. Tavşan ve tilki topluluklarının eğrilerinin eğimi hangi birimle belirtilmelidir?

Trigonometrik Limitler

97. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x^2 - x}$

98. $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x - \tan 7x}{2x}$

99. $\lim_{r\to 0} \dfrac{\sin r}{\tan 2r}$

100. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin(\sin\theta)}{\theta}$

101. $\lim_{\theta\to(\pi/2)^-} \dfrac{4\tan^2\theta + \tan\theta + 1}{\tan^2\theta + 5}$

102. $\lim_{\theta\to 0^+} \dfrac{1 - 2\cot^2\theta}{5\cot^2\theta - 7\cot\theta - 8}$

103. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{2 - 2\cos x}$

104. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{1 - \cos\theta}{\theta^2}$

Problem 105 ve 106'da, fonksiyonların orijinde sürekli olacak şekilde nasıl genişletileceğini gösterin.

105. $g(x) = \dfrac{\tan(\tan x)}{\tan x}$

106. $f(x) = \dfrac{\tan(\tan x)}{\sin(\sin x)}$

İlişkili Oranlar

107. Dik dairesel silindir Bir dik dairesel silindirin toplam yüzey alanı S, taban yarıçapı r ile yükseklik h'ye $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ denklemiyle bağlıdır.

a. h sabitse, dS/dt dr/dt'ye nasıl bağlıdır?

b. r sabitse, dS/dt dh/dt'ye nasıl bağlıdır?

c. Ne r ne de h sabit değilse, dS/dt dr/dt ile dh/dt'ye nasıl bağlıdır?

d. S sabitse, dr/dt dh/dt'ye nasıl bağlıdır?

108. Dik dairesel koni Bir dik dairesel koninin toplam yüzey alanı S, taban yarıçapı r ile yükseklik h'ye $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ denklemiyle bağlıdır.

a. h sabitse dS/dt, dr/dt'ye nasıl bağlıdır?

b. r sabitse dS/dt, dh/dt'ye nasıl bağlıdır?

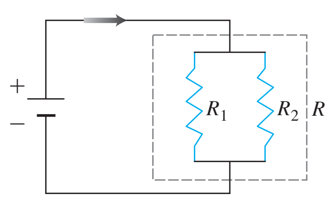
c. Ne r ne de h sabit değilse dS/dt, dr/dt ile dh/dt'ye nasıl bağlıdır?

109. Dairenin alan değişimi Bir dairenin yarıçapı $-2/\pi$ m/s hızla değişmektedir. $r = 10$ m iken, dairenin alanı ne hızla değişir?

110. Küpün kenarlarının değişimi Bir küpün hacmi, kenarları 20 cm iken 1200 cm^3/dak. hızla artmaktadır. Aynı anda kenarlarının değişim oranı nedir?

111. Paralel bağlı dirençler Bir elektrik devresinde bulunan R_1 ve R_2 ohmluk iki direnç R-ohmluk direnç oluşturacak şekilde paralel bağlanmıştır. R'nin değeri

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



denklemiyle bulunur. R_1 1 ohm/sn ve R_2 0.5 ohm/sn hızla azalıyorsa, $R_1 = 75$ ohm ve $R_2 = 50$ ohm iken R hangi hızla değişir?

112. Bir seri devrede empedans Bir seri devrede empedans Z (ohm), direnç R (ohm) ve reaktans X'e (ohm) $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$. denklemiyle bağlıdır. R 3 ohm/sn hızla artıyor ve X 2 ohm/s hızla azalıyorsa, $R = 10$ ohm ve $X = 20$ ohm iken Z ne hızla değişir?

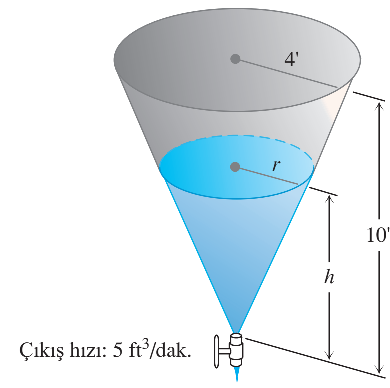
113. Bir parçacığın sürati Metrik xy düzleminde ilerleyen bir parçacığın koordinatları $dx/dt = 10$ m/sn, $dy/dt = 5$ m/sn olmak üzere zamanın türevlenebilir fonksiyonlarıdır. Parçacık (3, –4) noktasından geçerken orijinden ne kadar hızlı uzaklaşmaktadır?

114. Bir parçacığın hareketi Bir parçacık, orijinden uzaklığı saniyede 11 birim artacak şekilde, $y = x^{3/2}$ eğrisinin, birinci dörtte bir bölgedeki parçası üzerinde ilerlemektedir. $x = 3$ iken, dx/dt'yi bulun.

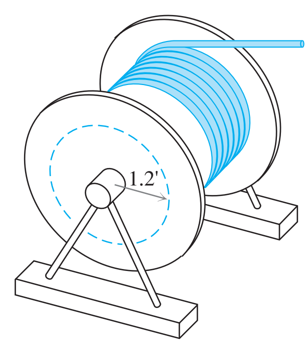
115. Bir su tankını boşaltmak Aşağıdaki şekilde görülen konik tanktan 5 ft^3/dak. hızla su akmaktadır.

a. Şekildeki h ve r değişkenleri arasındaki ilişki nedir?

b. $h = 6$ ft iken su seviyesi hangi hızla düşer?



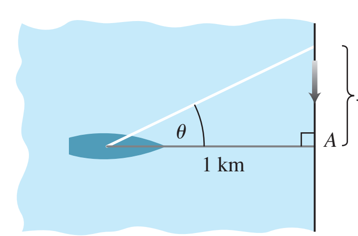
116. Bir makarayı çevirmek Bir caddedeki telefon direklerinden geçirilmek üzere büyük bir makaradan televizyon kablosu çekilirken, kablo makaranın üzerindeki sabit yarıçaplı katlardan çözülmektedir (Şekle bakınız). Kabloyu çeken kamyon 6 ft/s (4 mil/saat'den biraz fazla) hareket ediyorsa, $s = r\theta$ denklemini kullanarak, 1.2 ft yarıçaplı kat çözülürken, makaranın hangi hızla döndüğünü bulun.



117. Işıldak ışınının hareketi Aşağıdaki şekil sahilden 1 km uzakta, kıyıyı bir fenerle tarayan bir sandalı göstermektedir. Işık $d\theta/dt = -0.6$ rad/sn hızla dönmektedir.

a. A noktasına ulaştığında ışık hangi hızla ilerlemektedir?

b. 0.6 rad/sn dakikada kaç dönüş demektir?



118. Koordinat eksenlerinde kayan noktalar A ve B noktaları sırasıyla x ve y eksenlerinde, orijinden AB doğrusuna olan dik uzaklık (metre) sabit kalacak şekilde hareket etmektedirler. $OB = 2r$ olduğunda ve B O'ya doğru $0.3r$ m/sn hızla ilerlerken, OA ne hızla değişmektedir? Bu mesafe artar mı, azalır mı?

Lineerizasyon

119. Aşağıdaki fonksiyonların lineerizasyonunu bulun.

a. $\tan x, \quad x = -\pi/4$ **b.** $\sec x, \quad x = -\pi/4$

Eğrileri ve lineerizasyonları birlikte çizin.

120. $f(x) = 1/(1 + \tan x)$ fonksiyounun $x = 0$'da yararlı bir lineerizasyonunu

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x \qquad \text{ve} \qquad \tan x \approx x$$

yaklaşımlarını

$$\frac{1}{1+\tan x} \approx 1 - x.$$

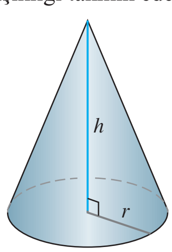
olacak şekilde birleştirerek elde edebiliriz. Bu sonucun $1/(1 + \tan x)$'in $x = 0$'daki standart lineer yaklaşımı olduğunu gösterin.

121. $f(x) = \sqrt{1+x} + \sin x - 0.5$'in $x = 0$'da lineerizasyonunu bulun.

122. $f(x) = 2/(1 - x) + \sqrt{1+x} - 3.1$'in $x = 0$'da lineerizasyonunu bulun.

Değişimin Diferansiyel Tahminleri

123. Bir koninin yüzey alanı Yükseklik h_0'dan $h_0 + dh$'ye değişir ve yarıçap aynı kalırsa, dik bir dairesel koninin yüzey alanında meydana gelecek değişikliği tahmin eden bir formül yazın.



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

(Yüzey alanı)

124. Hatayı kontrol etmek

a. Bir kübün yüzey alanını en fazla %2'lik bir hatayla hesapladığınızdan emin olmak için kübün kenarını ne hassaslıkta ölçmelisiniz?

b. Kenarın (a) şıkkında istenen hassaslıkta ölçüldüğünü varsayın. Kübün hacmi bu kenar ölçümüyle hangi hassaslıkta hesaplanabilir? Bunu bulmak için hacim hesaplanmasında kenar ölçümünü kullanmaktan kaynaklanacak yüzde hatayı tahmin edin.

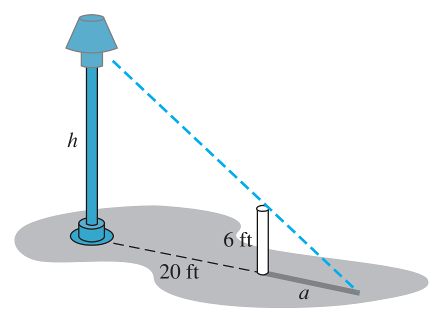
125. Hata Birleştirme Bir kürenin bir büyük çemberinin çevresi olası bir 0.4 cm' lik hatayla 10 cm olarak ölçülüyor. Ölçüm daha sonra yarıçapı kesaplamada kullanılıyor. Yarıçap da kürenin yüzey alanını ve hacmini hesaplamak için kullanılıyor.

a. Yarıçapın

b. yüzey alanının

c. hacmin

126. Yükseklik bulmak Bir ışık direğinin (şekle bakın) yüksekliğini bulmak için direkten 20 ft uzaklığa 6 ft uzunluğunda bir çubuk yerleştiriyorsunuz ve gölgesinin uzunluğu a'yı ölçüyorsunuz. A için bulduğunuz değer 15 ft, artı eksi bir inçtir. Lamba direğinin uzunluğunu $a = 15$ ft değerinden hesaplayın ve sonuçtaki olası hatayı bulun.



Bölüm 3 Ek – İleri Alıştırmalar

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ gibi bir denkleme **özdeşlik** denir, çünkü her θ değeri için geçerlidir. $\sin\theta = 0.5$ gibi bir denklem ise özdeşlik değildir, çünkü hepsinde değil, sadece belirli θ değerlerinde geçerlidir. Bir trigonometrik özdeşliğin iki tarafının da θ'ya göre türevini alırsanız, ortaya çıkan denklem yine bir özdeşlik olacaktır.

a. $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

b. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

2. $\sin(x + a) = \sin x\cos a + \cos x\sin a$ özdeşlignin x'e göre türevi alınırsa, ortaya çıkacak denklem yine bir özdeşlik olur mu? Aynı prensip $x^2 - 2x - 8 = 0$ denklemine de uygulanabilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

3. a. $f(x) = \cos x$ ve $g(x) = a + bx + cx^2$ denklemlerinin

$$f(0) = g(0), \qquad f'(0) = g'(0) \qquad \text{ve} \qquad f''(0) = g''(0)$$

koşullarına uymasını sağlayacak a, b ve c değerlerini bulunuz.

b. $f(x) = \sin(x + a)$ ve $g(x) = b \sin x + c \cos x$ denklemlerinin

$$f(0) = g(0) \quad \text{ve} \quad f'(0) = g'(0)$$

koşullarına uymasını sağlayacak *a, b* ve *c* değerlerini bulunuz.

c. *a, b* ve *c*'nin bulduğunuz değerleri için, (a) ve (b) şıklarındaki *f* ve *g*'nin üçüncü ve dördüncü türevlerine ne olur?

4. Diferansiyel denklemlerin çözümleri

a. $y = \sin x$, $y = \cos x$ ve $y = a \cos x + b \sin x$ (*a* ve *b* sabit) denklemlerinin hepsinin

$$y'' + y = 0$$

denklemini sağladığını gösterin.

b. (a) şıkkındaki fonksiyonları

$$y'' + 4y = 0$$

olmasını sağlayacak şekilde nasıl değiştirirsiniz? Bu sonucu genelleştirin.

5. Dokunan bir çember $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$ çemberini $y = x^2 + 1$ parabolüne (1, 2) noktasında teğet olmasını ve her iki eğri üzerinde d^2y/dx^2 ikinci türevlerinin o noktada aynı değerde olmasını sağlayacak *h, k* ve *a* değerlerini bulun. Bunun gibi, bir eğriye teğet olan ve teğet noktasındaki ikinci türevi eğrininkiyle aynı olan çemberlere *dokunan çemberler* denir. Bu gibi çemberlerle Bölüm 13'te yine karşılaşacağız.

6. Marjinal kazanç Bir otobüs 60 kişi almaktadır. Yolculuk başına otobüsü kullanan kişi sayısı *x* toplanan ücrete (*p* dolar) $p = [3 - (x/40)]^2$ denklemiyle bağlıdır. Otobüs şirketinin yolculuk başına toplam kazancını, $r(x)$, veren bir denklem yazın. Her yolculukta kaç kişi olmalıdır ki, dr/dx marjinal kazancı sıfır olsun. Buna karşılık gelen ücret nedir? (Bu kazancın en yüksek olmasını sağlayan ücrettir, yani otobüs şirketi ücret politikasını yeniden gözden geçirse iyi olur.)

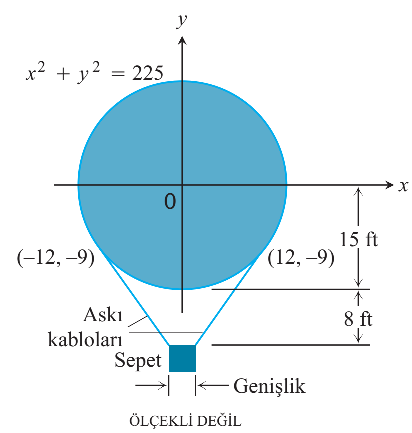
7. Endüstriyel üretim

a. Ekonomistler "büyüme oranı" ifadesini genellikle mutlak değil de, göreli terimler için kullanırlar. Örneğin, $u = f(t)$ bir *t* zamanında bir endüstri kolunda çalışan insan sayısı olsun. (Bu fonksiyon aslında tamsayı değerli bir basamak fonksiyonu olduğu halde, türevlenebildiğini varsayacağız.)

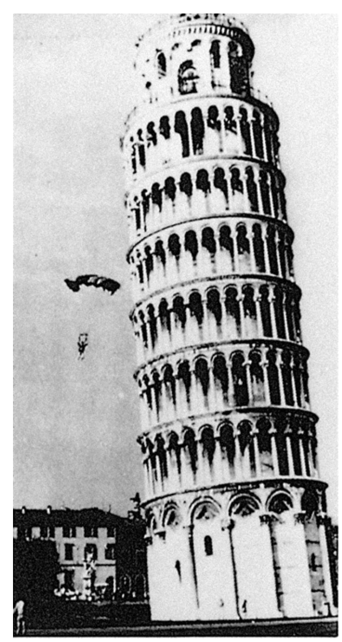
$v = g(t)$ zamanında iş gücü olarak kişi başına ortalama üretim olsun. Dolayısıyla toplam üretim $y = uv$ olur. İş gücü yılda %4'lük bir oranda artıyorsa ($du/dt = 0.04u$) ve kişi başına üretim yılda %5'lik bir oranda artıyorsa ($dv/dt = 0.05v$) toplam üretim y'deki artış oranını bulun.

b. (a) şıkkındaki kişi başına üretim yılda %3 oranında artarken, iş gücünün %2 oranında azaldığını varsayın. Toplam üretim hangi oranda artar veya azalır?

8. Bir gondol tasarlamak 30 ft yarıçaplı bir sıcak hava balonunun imalatçısı, şekilde görüldüğü gibi, balonun 8 ft altına balonun yüzeyine teğet kablolarla bir sepet bağlamak istiyor. Şekilde sepetin iki ucundan (–12, –9) ve (12, –9) noktalarına teğet olarak çıkan iki kablo görülmektedir. Sepetin genişliği ne olmalıdır?



9. Pisa'dan paraşütle Aşağıdaki fotoğraf 5 Ağustos 1988'de Pisa Kulesi'nin üzerinden paraşütle atlayan Mike McCarthy'yi göstermektedir. Atlayış sırasındaki süratinin grafiğinin şeklini kabaca gösteren bir şekil çizin.



Londra'lı Mike McCarthy Pisa Kulesi'nden atlamış ve paraşütünü kendi deyişiyle yere en yakın paraşüt atlayışı olan 179 ft'te açmıştır. Kaynak: *Boston Globe*, 6 Ağustos, 1988.

10. Bir parçacığın hareketi Bir koordinat doğrusunda ilerleyen bir parçacığın $t \geq 0$ zamanındaki konumu

$$s = 10 \cos (t + \pi/4)$$

ile verilmektedir.

a. Parçacığın başlangıç konumu nedir (t = 0)?

b. Parçacığın, orijinin sağında ve solunda ulaştığı en uzaktaki noktalar hangileridir?

c. Parçacığın (b) şıkkında bulduğunuz noktalardaki hızını ve ivmesini bulun.

d. Parçacık ilk olarak orijine ne zaman varır? Bu anda hızı, sürati ve ivmesi nedir?

11. Bir ataşı fırlatmak Dünyada, bir ataşı bir lastikle rahatlıkla 64 ft yukarıya fırlatabilirsiniz. Fırlattıktan t saniye sonra, ataş elinizden $s = 64t - 16t^2$ ft yüksektedir.

a. Ataşın maksimum yüksekliğe ulaşması ne kadar sürer? Elinizden hangi hızla çıkar?

b. Ayda, aynı ivme ataşı t saniyede $s = 64t - 2.6t^2$ ft yükseğe fırlatacaktır. Ataşın maksinum yüksekliğe ulaşması ne kadar sürer ve bu yükseklik nedir?

12. İki parçacığın hızları t saniye anında, bir koordinat eksenindeki iki parçacığın konumları $s_1 = 3t^3 - 12t^2 + 18t + 5$ m ve $s_2 = -t^3 + 9t^2 - 12t$ m dir. Parçacıkların hızları ne zaman aynı olur?

13. Bir parçacığın hızı Sabit m kütleli bir parçacık x-ekseninde ilerlemektedir. Hızı v ve konumu x

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0{}^2) = \frac{1}{2}k(x_0{}^2 - x^2)$$

denklemini sağlamaktadır. Burada, k, v_0 ve x_0 birer sabittir. $v \neq 0$ olduğunda,

$$m\frac{dv}{dt} = -kx$$

olduğunu gösterin.

14. Ortalama ve anlık hız

a. Hareket eden bir noktanın x koordinatı $x = At^2 + Bt + C$ gibi t zamanının ikinci dereceden bir fonksiyonu olarak verilmişse, herhangi bir $[t_1, t_2]$ aralığındaki ortalama hızın zaman aralığının tam orta noktasındaki anlık hıza eşit olduğunu gösterin.

b. (a) şıkkındaki sonucun geometrik önemi nedir?

15. Hangi m ve b değerlerinde

$$y = \begin{cases} \sin x, & x < \pi \\ mx + b, & x \geq \pi \end{cases}$$

fonksiyonu

a. $x = \pi$'de süreklidir?

b. $x = \pi$'de türevlenebilirdir?

16.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 0$'da türevi var mıdır? Açıklayın.

17. a. a ve b'nin hangi değerleri için

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x < 2 \\ ax^2 - bx + 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

fonksiyonu her x değerinde türevlenebilirdir?

b. Ortaya çıkan f grafiğinin geometrisini tartışın.

18. a. a ve b'nin hangi değerleri için

$$g(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq -1 \\ ax^3 + x + 2b, & x > -1 \end{cases}$$

fonksiyonu her x değerinde türevlenebilirdir?

b. Ortaya çıkan g grafiğinin geometrisini tartışın.

19. Türevlenebilir tek fonksiyonlar x'in türevlenebilir bir tek fonksiynunun türevinin bir özelliği var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

20. Türevlenebilir çift fonksiyonlar x'in türevlenebilir bir çift fonksiyonunun türevinin bir özelliği var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

21. f ve g fonksiyonlarının x_0 noktasını içeren bir açık aralıkta tanımlı olduklarını, f'nin x_0'da türevlenebildiğini ve $f(x_0) = 0$, olduğunu ve g'nin x_0'da sürekli olduğunu varsayın. fg çarpımının x_0'da türevlenebildiğini gösterin. Bu, örneğin, $|x|$, $x = 0$'da türevlenemezken, $x|x|$ çapımının türevlenebileceğini gösterir.

22. *(Alıştırma 21'in devamı)* Alıştırma 21'in sonucunu kullanarak aşağıdaki fonksiyonların $x = 0$'da türevlenebildiklerini gösterin.

a. $|x| \sin x$ **b.** $x^{2/3} \sin x$ **c.** $\sqrt[3]{x}(1 - \cos x)$

d. $h(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

23.

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun türevi $x = 0$'da sürekli midir? Peki ya, $k(x) = xh(x)$'in türevi? Cevabınızı açıklayın.

24. Bir f fonksiyonunun her reel x ve y değerlerinde, aşağıdaki koşulları sağladığını varsayın.

i. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.

ii. $f(x) = 1 + xg(x)$, $\lim_{x \to 0} g(x) = 1$.

Her x değerinde $f'(x)$ türevinin var olduğunu ve $f'(x) = f(x)$. olduğunu gösterin.

25. Genelleştirilmiş çarpım kuralı $y = u_1 u_2 \cdots u_n$ türevlenebilir fonksiyonların sonlu bir çarpımıysa, y'nin bu fonksiyonların ortak tanım aralığında türevlenebilir olduğunu ve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du_1}{dx}u_2 \cdots u_n + u_1\frac{du_2}{dx} \cdots u_n + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_{n-1}\frac{du_n}{dx}$$

olduğunu matematiksel indüksiyonla gösterin.

26. Çarpımların yüksek mertebe türevleri için Leibniz kuralı Türevlenebilir fonksiyonların çarpımlarının yüksek mertebe türevleri için Leibniz kuralı

a. $\dfrac{d^2(uv)}{dx^2} = \dfrac{d^2u}{dx^2}v + 2\dfrac{du}{dx}\dfrac{dv}{dx} + u\dfrac{d^2v}{dx^2}$

b. $\dfrac{d^3(uv)}{dx^3} = \dfrac{d^3u}{dx^3}v + 3\dfrac{d^2u}{dx^2}\dfrac{dv}{dx} + 3\dfrac{du}{dx}\dfrac{d^2v}{dx^2} + u\dfrac{d^3v}{dx^3}$

c. $$\frac{d^n(uv)}{dx^n} = \frac{d^nu}{dx^n}v + n\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{dv}{dx} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}}\frac{d^kv}{dx^k} + \cdots + u\frac{d^nv}{dx^n}.$$

olduğunu söyler. (a) ve (b) denklemleri (c) denkleminin özel durumlarıdır. (c) denklemini matematik indüksiyonla ve

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \frac{m!}{k!(m-k)!} + \frac{m!}{(k+1)!(m-k-1)!}$$

eşitliğini kullanarak bulun.

27. Bir saat sarkacının periyodu Bir saat sarkacının periyodu T (ileri ve geri tam bir sallanma için gereken süre) $T^2 = 2\pi^2 L/g$ formülüyle verilir. Burada L saniye olarak ölçülür, $g = 32.2$ ft/sn^2 olarak verilir ve L, sarkacın uzunluğu, ft ile ölçülür. Aşağıdakileri yaklaşık olarak bulun.

a. Periyodu $T = 1$ sn olan saat sarkacının uzunluğunu.

b. (a) şıkkındaki sarkaç 0.01 ft uzatılırsa T'deki dT değişimini.

c. (b) şıkkındaki dT kadarlık periyot değişiminden dolayı saatin bir günde kazandığı ya da kaybettiği miktarı.

28. Eriyen buz küpü Bir buz kübünün erirken küp şeklini koruduğunu varsayın. Kübün kenar uzunluğuna s dersek, hacmi $V = x^3$ ve yüzey alanı $6s^2$ olur. V ve s'nin t zamanının türevlenebilir fonksiyonları olduğu varsayalım. Ayrıca kübün hacminin de yüzey alanıyla orantılı olarak azaldığını varsayalım. (Bu son varsayım erimenin yüzeyde gerçekleştiğini düşünürsek oldukça mantıklıdır: Alan miktarını değiştirmek erimeye bırakılan buzun miktarını değiştirir.) Matematiksel bir ifadeyle

$$\frac{dV}{dt} = -k(6s^2), \qquad k > 0$$

olur. Eksi işareti hacmin azaldığını belirtmektedir. Orantı sabiti k'nin sabit olduğunu kabul edelim. (Fakat gerçekte etraftaki havanın göreli nemliliği, hava sıcaklığı, kırılma veya güneş ışığı bulunmaması gibi bir çok dış etkene bağlıdır.)

Son olarak, kübün ilk bir saat içinde hacminin $1/4$'ünü kaybettiği bir dizi koşul bulunduğunu ve $t = 0$ anında hacmin V_0 olduğunu varsayın. Buz kübünün erimesi ne kadar sürer?

Bölüm 3 Teknoloji Uygulama Projeleri

Mathematica/Maple Module

Kiriş Eğimlerinin Türev Fonksiyonuna Yakınsamaları

Bir eğri üzerinde art arda gelen noktalar arasındaki kirişleri gözünüzde canlandıracaksınız ve aralarındaki uzaklık küçüldükçe neler olduğunu gözleyeceksiniz. Fonksiyon, örnek noktalar ve kirişler tek bir grafikte çizilmiştir. İkinci bir grafik kirişlerin eğimleri ile türev fonksiyonunu karşılaştırmaktadır.

Mathematica/Maple Module

Türevler, Eğimler, Teğet Doğrular ve Film Yapmak

Bölüm I–III. Bir noktada türevi, bir fonksiyonun lineerizasyonunu ve türev fonksiyonunu gözünüzde canlandıracaksınız. Aynı grafik üzerinde grafiğin ve seçilmiş teğetlerinin nasıl çizildiğini öğreniyorsunuz.

Bölüm IV Birçok Teğet Çizmek)

Bölüm V (Film Yapmak). Modülün IV. ve V. Bölümleri bir fonksiyonun grafiği boyunca kayan teğet doğruları canandırmak için kullanılabilir.

Mathematica/Maple Module

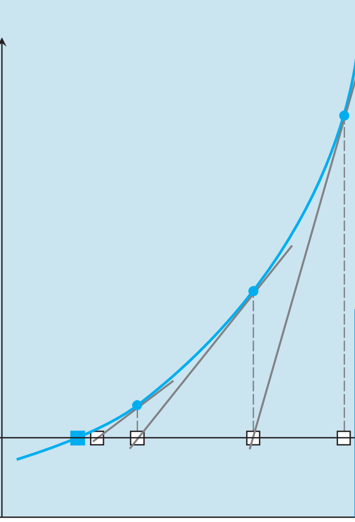
Kiriş Eğimlerinin Türev Fonksiyonuna Yakınsamaları

Soldan ve Sağdan türevleri gözünüzde canlandıracaksınız.

Mathematica/Maple Module

Bir Doğru Boyunca Hareket: Konum → Hız → İvme

Konum, hız ve ivme fonksiyonları arasındaki türev bağıntılarının dramatik canlandırmalarını gözleyin. Metindeki şekiller canlandırılabilir.



Bölüm

4

TÜREV UYGULAMALARI

GİRİŞ Bu bölüm, türevlerin önemli bazı uygulamalarını incelemektedir. Fonksiyonların ekstrem değerlerinin bulunmasında, grafiklerin şekillerinin belirlenmesinde ve incelenmesinde, pay ve paydası ikisi birden sıfıra veya sonsuza yaklaşan kesirlerin limitlerinin bulunmasında ve bir fonksiyonun nerede sıfır olduğunun sayısal olarak bulunmasında türevlerin nasıl kullanıldığını öğreniyoruz. Ayrıca, türevinden fonksiyonu bulma işlemini ele alıyoruz. Bu başarıların bir çoğunun anahtarı, sonuçları Bölüm 5'teki integral analizine giriş kapısını açan *Ortalama Değer Teoremi* dir.

4.1 Fonksiyonların Ekstrem Değerleri

Bu bölüm, sürekli fonksiyonların ekstrem değerlerinin, türevlerinden nasıl bulunup tanımlanacağını göstermektedir. Bunu yapabildiğimiz andan itibaren, bir çok *optimizasyon problemini* çözebiliriz ki, bu problemlerde bazı şeyleri, verilen durumlarda optimal (en iyi) şekilde yapmanın yolunu buluyoruz.

TANIMLAR Mutlak Maksimum, Mutlak Minimum

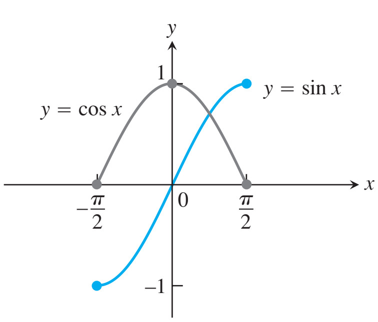
f, tanım kümesi D olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$D\text{'deki her } x \text{ için} \qquad f(x) \le f(c)$$

ise, f'nin D üzerinde, c noktasında **bir mutlak maksimum** değeri,

$$D\text{'deki her } x \text{ için} \qquad f(x) \ge f(c)$$

ise, f'nin D üzerinde, c noktasında **bir mutlak minimum** değeri vardır.



ŞEKİL 4.1 sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının $[-\pi/2, \pi/2]$ aralığı üzerindeki mutlak ekstremumları. Bu değerler fonksiyonun tanım kümesine bağlı olabilir.

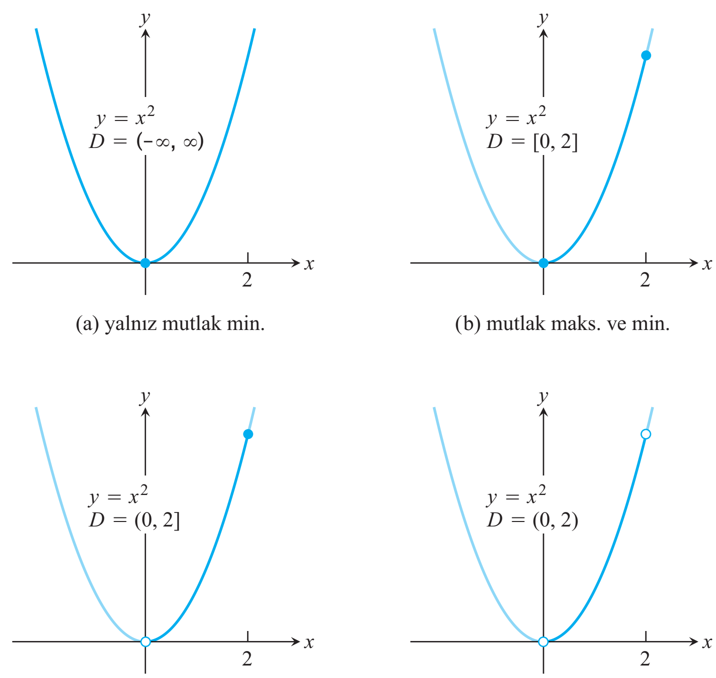
Mutlak maksimum ve minimum değerlere mutlak **ekstrema** (Latincede *ekstremum*'un çoğulu) denir. Mutlak ekstremler ayrıca, aşağıda tanımlanan yerel ekstremlerden ayırt etmek için, **global** ekstrem diye de adlandırılır.

Örneğin, $[-\pi/2, \pi/2]$ aralığında, $f(x) = \cos x$ fonksiyonu maksimum değer olarak 1 değerini (bir kere) ve minimum değer olarak 0 değerini (2 kere) alır. Aynı aralıkta $g(x) = \sin x$ fonksiyonu ise maksimum değer olarak 1, minimum değer olarak –1 değerini alır (Şekil 4.1).

Aynı kuralla tanımlanan fonksiyonların, tanım kümelerine bağlı olarak, farklı ekstrem noktaları olabilir.

ÖRNEK 1 Mutlak Ekstremleri Araştırmak

Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümeleri üzerindeki mutlak ekstremleri Şekil 4.2 de görülebilir.



(a) yalnız mutlak min. (b) mutlak maks. ve min.

(c) yalnız mutlak maks. (d) maks. veya min. yok.

ŞEKİL 4.2 Örnek 1 için grafikler

Fonksiyon kuralı	*D* Tanım kümesi	*D*'deki mutlak ekstremler
(a) $y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	Mutlak maksimum yok. $x = 0$'da mutlak minimum 0.
(b) $y = x^2$	$[0, 2]$	$x = 2$'de mutlak maksimum 4 $x = 0$'da mutlak minimum 0
(c) $y = x^2$	$(0, 2]$	$x = 2$'de mutlak maksimum 4 Mutlak minimum yok.
(d) $y = x^2$	$(0, 2)$	Mutlak ekstrem yok.

■

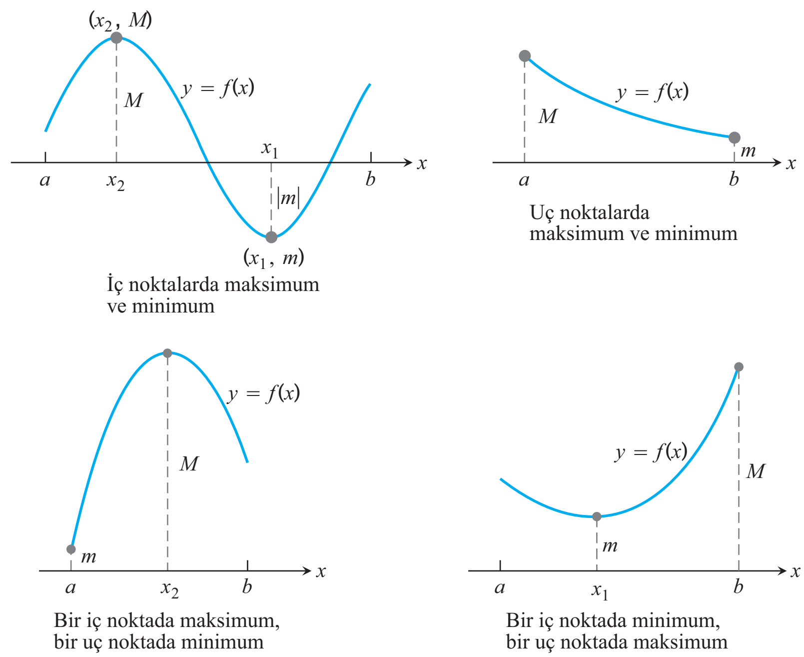
TARİHSEL BİYOGRAFİ

Daniel Bernoulli
(1700–1789)

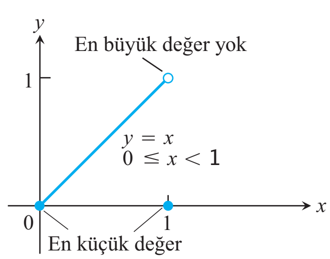
Aşağıdaki teorem, bir $[a, b]$ kapalı aralığının her noktasında sürekli olan bir fonksiyonun, bu aralık üzerinde bir mutlak maksimum değerinin ve bir mutlak minimumu değerinin var olduğunu ileri sürer. Bir fonksiyonun grafiğini çizerken her zaman bu değerleri ararız.

TEOREM 1 Ekstrem Değer Teoremi

f, kapalı bir $[a, b]$aralığının her noktasında sürekli ise, bir mutlak maksimum değer M'ye ve bir mutlak minimum değeri m'ye $[a, b]$ içinde erişir. Yani, $[a, b]$'da, $f(x_1) = m$ ve $f(x_2) = M$ olacak şekilde x_1 ve x_2 sayıları vardır ve $[a, b]$'daki diğer her bir x için $m \leq f(x) \leq M$ dir (Şekil 4.3).



ŞEKİL 4.3 Kapalı bir $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyonun olası mutlak maksimum ve minimumları



ŞEKİL 4.4 Süreksizliğin tek bir noktada olması bile, bir fonksiyonun bir minimumunun veya maksimumunun olmasını engelleyebilir.

$$y = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

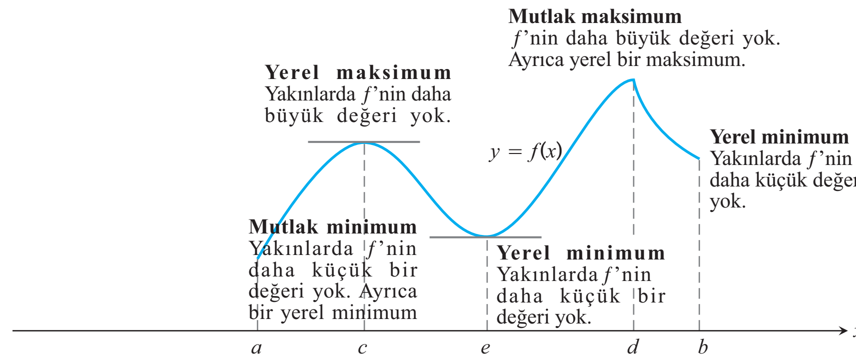
fonksiyonu $[0, 1]$ aralığının $x = 1$ dışındaki her noktasında süreklidir, ama $[0, 1]$ aralığındaki grafiğinin en yüksek bir noktası yoktur.

Ekstrem Değer Teoremi'nin ispatı reel sayı sistemi hakkında detaylı bilgi gerektirmektedir (Bkz. Ek 4), bunun için burada verilmeyecektir. Şekil 4.3 te, bir $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli olan bir fonksiyonun, mutlak ekstrem değerlerinin olası konumları gösterilmektedir. $y = \cos x$ fonksiyonunda gözlediğimiz gibi, bir mutlak minimumun (veya mutlak maksimumun), aralığın iki veya daha fazla farklı noktasında bulunması olasıdır.

Teorem 1'deki, aralığın kapalı ve sonlu olması ve fonksiyonun sürekli olması koşulları anahtar bileşenleridir. Bunlar olmadan, teoremin sonuçlarının geçerli olması gerekmez. Örnek 1, aralığın hem sonlu ve hem de kapalı olmaması durumunda bir mutlak ekstrem değerin bulunmayabileceğini göstermektedir. Şekil 4.4, süreklilik şartının ihmal edilemeyeceğini göstermektedir.

Yerel (Göreceli) Ekstremum Değerler

Şekil 4.5'te, bir fonksiyonun, $[a, b]$ tanım aralığında beş noktada ekstremum değerleri olan grafiği görülmektedir. e noktasında fonksiyonun değerinin, *çevresinde* bulunan her



ŞEKİL 4.5 Maksimum ve minimumların sınıflandırılması

hangi bir noktada olduğundan, daha küçük olmasına rağmen, fonksiyonun mutlak minimumu a noktasındadır. Eğri, c civarında solda yükselir ve sağda düşer böylece $f(c)$'yi bir yerel maksimum yapar. Fonksiyon mutlak maksimum değerini d noktasında alır.

TANIMLAR Yerel Maksimum Yerel Minimum

Bir f fonksiyonunun, tanım aralığının bir c iç noktasında,

$$c\text{'yi içeren bir açık aralıktaki her } x \text{ için} \quad f(x) \geq f(c)$$

ise, bir yerel maksimum değeri vardır. Bir f fonksiyonunun, tanım aralığının bir c iç noktasında,

$$c\text{'yi içeren bir açık aralıktaki her } x \text{ için} \quad f(x) \geq f(c)$$

ise, bir yerel minimumu vardır

c uç noktasını içeren bir yarı açık aralıktaki her x için uygun bir eşitsizlik geçerliyse, f'nin *c uç noktasında* bir **yerel minimumunu** veya **yerel maksimumunu** tanımlayarak, yerel ekstremum tanımını aralıkların uç noktalarını da kapsayacak şekilde genişletebiliriz. Şekil 4.5'te, f fonksiyonunun c ve d noktalarında yerel maksimumları, a, e ve b noktalarında ise yerel minimumları vardır. Yerel ekstremumlara göreceli ekstremumlar da denir.

Bir mutlak maksimum aynı zamanda bir yerel maksimumdur. Her yerdeki en büyük değer olduğu için, en yakın komşuluğundaki en büyük değer de odur. Yani, *bütün yerel maksimumların kümesi aynı zamanda, varsa, mutlak maksimumu da içerecektir.* Benzer şekilde, bütün *yerel minimumların kümesi aynı zamanda, varsa, mutlak minimumu da içerecektir.*

Ekstremumları Bulmak

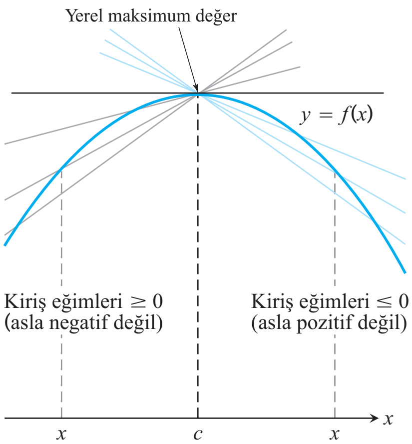
Aşağıdaki teorem, bir fonksiyonun ekstrem değerlerini bulmak için neden genellikle sadece bir kaç değeri incelememiz gerektiğini açıklamaktadır.

TEOREM 2 Yerel Ekstrem Değerler İçin Birinci Türev Teoremi

Tanım aralığının bir c iç noktasında, f'nin bir yerel maksimum veya minimumu varsa ve c'de f' tanımlıysa,

$$f'(c) = 0$$

dır.



ŞEKİL 4.6 Bir yerel maksimum değeri olan bir eğri. c'deki eğim, yani negatif olmayan sayıların ve pozitif olmayan sayıların ortak limiti, sıfırdır.

İspat $f'(c)$'nin bir yerel ekstremumda sıfır olduğunu göstermek için, önce $f'(c)$'nin pozitif olamayacağını, sonra da negatif olamayacağını göstereceğiz. Ne pozitif ne de negatif olmayan tek sayı sıfırdır, yani $f'(c)$ sıfır olmalıdır.

Başlangıç olarak, f'nin $x = c$'de, c'ye yeterince yakın her x değerinde $f(x) - f(c) \leq 0$ olacak şekilde bir yerel maksimum değeri olduğunu varsayın (Şekil 4.6). c, f'nin tanım kümesinin bir iç noktası olduğu için, $f'(c)$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

iki taraflı limitiyle verilir. Bu, $x = c$'de hem sağdan hem de soldan limitlerin var olduğu ve $f'(c)$'ye eşit olduğu anlamına gelir. Bu limitleri ayrı ayrı incelediğimizde

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \quad \text{(}x - c) > 0 \text{ ve } f(x) \leq f(c) \text{ olduğundan} \qquad (1)$$

Aynı şekilde,

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0. \quad (x - c) < 0 \text{ ve } f(x) \leq f(c) \text{ olduğundan} \qquad (2)$$

(1) ve (2) birlikte $f'(c) = 0$ olmasını gerektirir.

Böylece yerel maksimumlarla ilgili teorem ispatlanmış olur. Yerel minimumlarla ilgili teoremi ispatlamak içinse, (1) ve (2)'deki eşitsizlikleri koruyan $f(x) \geq f(c)$ eşitsizliğini kullanırız. ■

Teorem 2, bir fonksiyonun, bir yerel ekstremum değerinin bulunduğu ve türevinin tanımlı olduğu bir iç noktada, birinci türevinin sıfır olduğunu söyler. Dolayısıyla, bir f fonksiyonunun bir ekstremum değerinin (yerel veya mutlak) bulunabileceği yerler

1. $f' = 0$ olduğu iç noktalar,
2. f''nün tanımlı olmadığı iç noktalar,
3. f'nin tanım kümesinin uç noktaları

dır. Aşağıdaki tanım bütün bunları özetlemeye yardımcı olacaktır.

TANIM Kritik Nokta
Bir f fonksiyonunun tanım kümesinin, f''nün sıfır veya tanımsız olduğu bir iç noktası f'nin bir **kritik noktasıdır.**

Böylece, bir fonksiyonun ekstrem değerler alabileceği noktalar sadece tanım kümesinin kritik noktaları ve uç noktalarıdır.

Teorem 2'yi yanlış anlamamak için dikkatli olun, çünkü tersi doğru değildir. Türevlenebilir bir fonksiyonun, bir yerel ekstremum değerinin bulunmadığı bir kritik noktası var olabilir. Örneğin, $f(x) = x^3$ fonksiyonunun, orijinde bir kritik noktası vardır ve buradaki değeri sıfırdır, fakat orijinin sağında pozitif ve solunda negatiftir. Dolayısıyla, orijinde bir yerel ekstremum değeri bulunamaz. Onun yerine, burada bir *dönüm noktası* vardır. Bu kavram, Bölüm 4.4'te tanımlanmakta ve daha fazla tartışılmaktadır.

Ekstremum noktaları bulma nedenlerinin en başında kapalı bir aralıkta sürekli bir fonksiyonun mutlak ekstremlerini bulmak gelir. Teorem 1 böyle değerlerin var olduğunu söyler; Teorem 2 ise bunların ancak kritik ve uç noktalarda bulunabileceğini belirtir.

Genellikle, bu noktaların bir listesini kolaylıkla yapabilir, hangilerinin en büyük ve en küçük olduğunu ve nerede bulunduklarını bulmak için karşılık gelen fonksiyon değerlerini hesaplayabiliriz.

Kapalı Sonlu Bir Aralıkta Sürekli Bir f Fonksiyonunun Mutlak Ekstremleri Nasıl Bulunur?

1. Bütün kritik ve uç noktalarda f'yi hesaplayın.
2. Bu değerlerin en büyüğünü ve en küçüğünü alın.

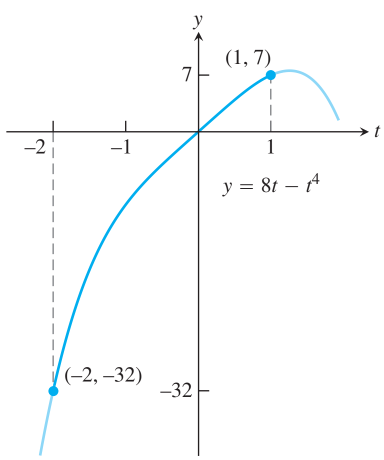
ÖRNEK 2 Mutlak Ekstremleri Bulmak

$f(x) = x^2$'nin $[-2, 1]$ aralığında mutlak maksimum ve minimum değerlerini bulun.

Çözüm Fonksiyon tanım kümesinin tamamında türevlenebilirdir, dolayısıyla tek kritik nokta $f'(x) = 2x = 0$, olduğu $x = 0$ noktasıdır. $x = 0$ ve $x = -2$ ile $x = 1$ uç noktalarında fonksiyonun değerlerini kontrol etmemiz gerekir.

Kritik nokta değeri: $f(0) = 0$
Uç nokta değerleri: $f(-2) = 4$
$f(1) = 1$

Fonksiyonun $x = -2$'de değeri 4 olan bir mutlak maksimumu ve $x = 0$'da değeri 0 olan bir mutlak minimumu vardır. ■



ŞEKİL 4.7 $[-2, 1]$ aralığında $g(t) = 8t - t^4$' nin ekstrem değerleri (Örnek 3).

ÖRNEK 3 Uç Noktalarda Mutlak Ekstremumlar

$g(t) = 8t - t^4$'ün $[-2, 1]$ aralığında mutlak ekstremlerini bulun.

Çözüm Fonksiyon tanım kümesinin tamamında türevlidir, dolayısıyla kritik noktalar sadece $g'(t) = 0$ olduğu yerlerde bulunur. Bu denklemi çözersek,

$$8 - 4t^3 = 0 \qquad \text{veya} \qquad t = \sqrt[3]{2} > 1,$$

verilen tanım kümesinde bulunmayan bir nokta buluruz. Dolayısıyla, fonksiyonun mutlak ekstremleri uç noktalardadır: $g(-2) = -32$ (mutlak minimum) ve $g(1) = 7$ (mutlak maksimum) Şekil 4. 7'ye bakın. ■

ÖRNEK 4 Bir Kapalı Aralık Üzerinde Mutlak Ekstremumları Bulmak

$f(x) = x^{2/3}$'ün $[-2, 3]$ aralığında mutlak ekstremlerini bulun.

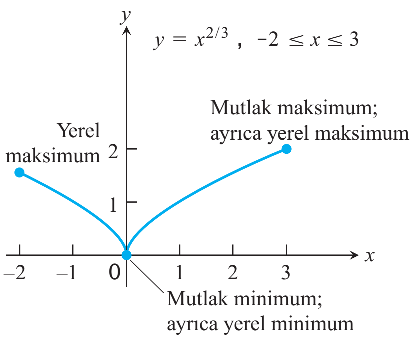
Çözüm Fonksiyonu kritik noktalarda ve uç noktalarda hesaplarız ve değerlerin en büyüğü ile en küçüğünü alırız.

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

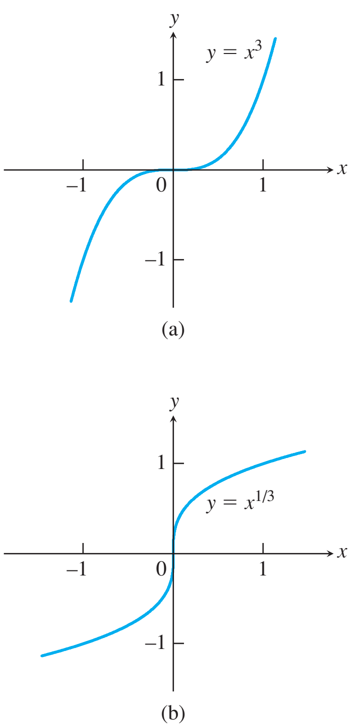
birinci türevinin sıfırları yoktur, fakat $x = 0$'da tanımsızdır. f'nin bu kritik noktadaki ve uç noktalarındaki değerleri

Kritik nokta değeri: $f(0) = 0$
Uç nokta değerleri: $f(-2) = (-2)^{2/3} = \sqrt[3]{4}$
$f(3) = (3)^{2/3} = \sqrt[3]{9}.$

dur.



ŞEKİL 4.8 $f(x) = x^{2/3}$'ün $[-2, 3]$ aralığındaki mutlak ekstrem değerleri $x = 0$ ve $x = 3$'tedir (Örnek 4).



ŞEKİL 4.9 Ekstrem değer bulunmayan kritik noktalar. (a) $y' = 3x^2$ $x = 0$'da sıfırdır, fakat $y = x^3$'ün burada ekstrem değeri yoktur. (b) $x = 0$'da $y' = (1/3)x^{-2/3}$ tanımsızdır fakat $y = x^{1/3}$'ün burada ekstremumu yoktur.

Bu listeden, mutlak maksimum değerin, sağ uç nokta $x = 3$'te bulunan $\sqrt[3]{9} \approx 2.08$, değerinin olduğunu görebiliriz. Mutlak minimum değeri ise $x = 0$ iç noktasında bulunan 0 değeridir. (Şekil 4.8). ■

Bir fonksiyonun ekstremleri sadece kritik ve uç noktalarda bulunabilirken, her kritik veya uç nokta bir ekstrem değerin varlığını belirtmez. Şekil 4.9 bunu iç noktalar için gösterir.

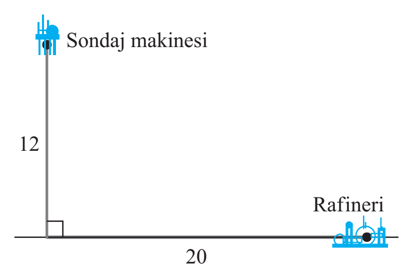
Bu bölümü, çalışmış olduğumuz bu kavramların bir gerçek dünya problemini çözmede nasıl kullanıldıklarını gösteren bir örnekle tamamlıyoruz.

ÖRNEK 5 Bir Sondaj Makinesinden Bir Rafineriye Petrol İletmek

Kıyıdan 12 mil açıktaki bir sondaj makinesi, boru hattı ile kıyıda sondaj makinesi hizasından doğrusal olarak 20 mil ilerideki bir rafineriye bağlanacaktır. Sualtı boru hattı maliyeti mil başına 500.000$ ve yeryüzü boru hattı maliyeti mil başına 300.000$ ise, ikisinin hangi kombinasyonu en ucuz bağlantıyı sağlayacaktır?

Çözüm Problemi hissetmek için birkaç deneme yapalım:

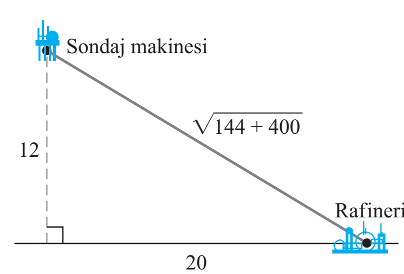
(a) *En az miktarda sualtı hattı*



Sualtı boru hattı çok pahalıdır, dolayısıyla olabildiği kadar az kullanalım. Doğrudan kıyıya ulaşalım (12 mil), sonra rafineriye kadar (20 mil) yeryüzü hattı kullanalım.

$$\begin{aligned}\text{Dolar maliyeti} &= 12(500{,}000) + 20(300{,}000)\\ &= 12{,}000{,}000\end{aligned}$$

(b) *Bütün hat sualtı (en düz rota)*

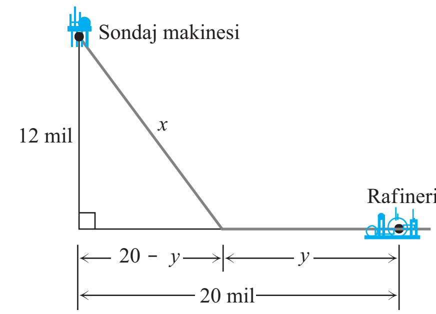


Su altından doğrudan rafineriye gideriz.

$$\begin{aligned}\text{Dolar maliyeti} &= \sqrt{544}\,(500{,}000)\\ &\approx 11{,}661{,}900\end{aligned}$$

Bu (a)'daki plandan daha ucuzdur.

(c) *Bunların arasında bir şey*



Şimdi, sualtı hat uzunluğu x'i ve yeryüzü hat uzunluğu y'yi değişkenler olarak tanımlayalım. x ile y arasındaki ilişkiyi ifade etmenin anahtarı, sondaj makinesinin tam karşısındaki dik açıdır. Pisagor teoremi

$$x^2 = 12^2 + (20 - y)^2$$

$$x = \sqrt{144 + (20 - y)^2} \qquad (3)$$

verir. Bu modelde sadece pozitif kökün anlamı vardır.

Boru hattının dolar maliyeti

$$c = 500{,}000x + 300{,}000y$$

dir. c'yi tek bir değişkenin fonksiyonu olarak ifade edebilmek için (3) denkleminden x'i yerine yazabiliriz:

$$c(y) = 500{,}000\sqrt{144 + (20 - y)^2} + 300{,}000y.$$

Şimdi, amacımız $0 \le y \le 20$ aralığında $c(y)$'nin minimum değerini bulmaktır. Zincir Kuralına göre $c(y)$'nin y'ye göre birinci türevi

$$c'(y) = 500{,}000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2(20 - y)(-1)}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}} + 300{,}000$$

$$= -500{,}000 \frac{20 - y}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}} + 300{,}000$$

dir. c''yü sıfıra eşitlemek

$$500{,}000\,(20 - y) = 300{,}000\sqrt{144 + (20 - y)^2}$$

$$\frac{5}{3}\left(20 - y\right) = \sqrt{144 + (20 - y)^2}$$

$$\frac{25}{9}\left(20 - y\right)^2 = 144 + (20 - y)^2$$

$$\frac{16}{9}\left(20 - y\right)^2 = 144$$

$$(20 - y) = \pm\frac{3}{4} \cdot 12 = \pm 9$$

$$y = 20 \pm 9$$

$$y = 11 \quad \text{veya} \quad y = 29$$

verir.

Yalnız $y = 11$ ilgili aralıktadır. c'nin bu tek kritik noktada ve uç noktalardaki değerleri

$$\begin{aligned} c(11) &= 10{,}800{,}000 \\ c(0) &= 11{,}661{,}900 \\ c(20) &= 12{,}000{,}000 \end{aligned}$$

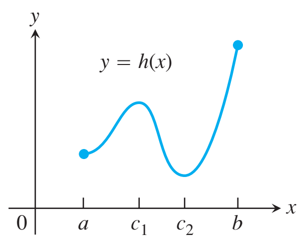
dir. En ucuz bağlantı 10,800,000 $ tutar ve hattı su atından rafinerinin 11 mil uzağına götürerek bu sonuca ulaşırız. ■

ALIŞTIRMALAR 4.1

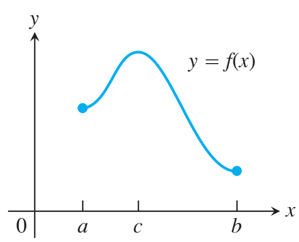
Ekstremumları Grafiklerden Bulmak

1–6 alıştırmalarında, grafiklerden fonksiyonun $[a, b]$ aralığında bir ekstrem değeri olup olmadığını bulun. Yanıtınızın Teorem 1 ile olan uygunluğunu açıklayın.

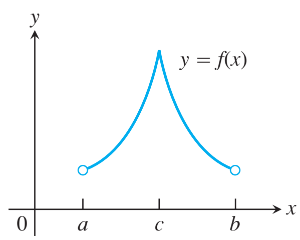
1.



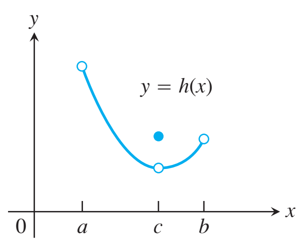
2.



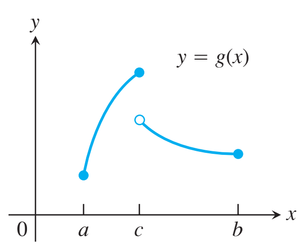
3.



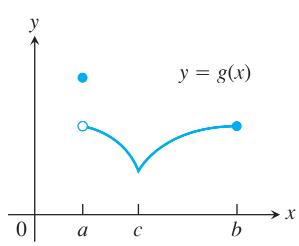
4.



5.

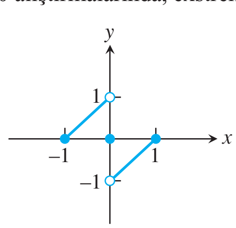


6.

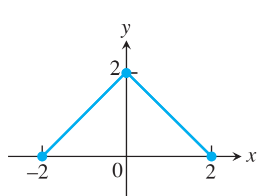


7-10 alıştırmalarında, extremum değerleri ve nerede olduklarını bulun

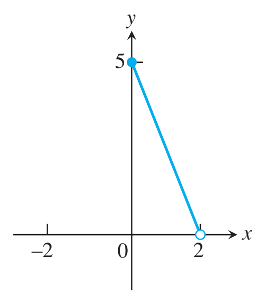
7.



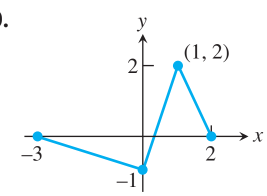
8.



9.



10.



11–14 alıştırmalarında tabloyu bir grafikle eşleyin

11.

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	5

12.

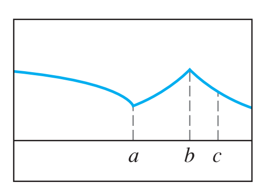
x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	-5

13.

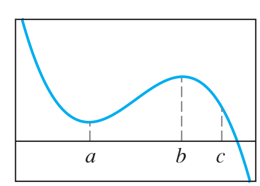
x	$f'(x)$
a	yok
b	0
c	-2

14.

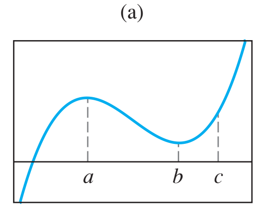
x	$f'(x)$
a	yok
b	yok
c	-1.7



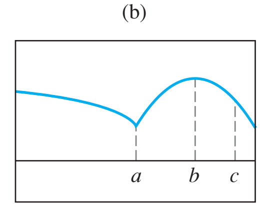
(a)



(b)



(c)



(d)

Kapalı Sonlu Aralıklarda Mutlak Ekstremler

15–30 alıştırmalarında, her fonksiyonun verilen aralıkta maksimum ve minimum değerlerini bulun. Sonra fonksiyonu çizin. Mutlak ekstremlerin bulunduğu noktaları belirleyin ve koordinatlarını yazın.

15. $f(x) = \frac{2}{3}x - 5, \quad -2 \le x \le 3$

16. $f(x) = -x - 4, \quad -4 \le x \le 1$

17. $f(x) = x^2 - 1, \quad -1 \le x \le 2$

18. $f(x) = 4 - x^2, \quad -3 \le x \le 1$

19. $F(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad 0.5 \le x \le 2$

20. $F(x) = -\frac{1}{x}, \quad -2 \le x \le -1$

21. $h(x) = \sqrt[3]{x}, \quad -1 \le x \le 8$

22. $h(x) = -3x^{2/3}, \quad -1 \le x \le 1$

23. $g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \le x \le 1$

24. $g(x) = -\sqrt{5 - x^2}, \quad -\sqrt{5} \le x \le 0$

25. $f(\theta) = \sin\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$

26. $f(\theta) = \tan\theta, \quad -\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

27. $g(x) = \csc x, \quad \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$

28. $g(x) = \sec x, \quad -\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{6}$

29. $f(t) = 2 - |t|, \quad -1 \le t \le 3$

30. $f(t) = |t - 5|, \quad 4 \le t \le 7$

31–34 alıştırmalarında, fonksiyonun mutlak maksimum ve minimumlarını ve bunların hangi noktalarda olduklarını bulun.

31. $f(x) = x^{4/3}, \quad -1 \le x \le 8$

32. $f(x) = x^{5/3}, \quad -1 \le x \le 8$

33. $g(\theta) = \theta^{3/5}, \quad -32 \le \theta \le 1$

34. $h(\theta) = 3\theta^{2/3}, \quad -27 \le \theta \le 8$

Ekstremum Değerleri Bulmak

35–44 alıştırmalarında, fonksiyonun ekstremum değerlerini ve bunların hangi noktalarda olduklarını bulun.

35. $y = 2x^2 - 8x + 9$

36. $y = x^3 - 2x + 4$

37. $y = x^3 + x^2 - 8x + 5$

38. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

39. $y = \sqrt{x^2 - 1}$

40. $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

41. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - x^2}}$

42. $y = \sqrt{3 + 2x - x^2}$

43. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

44. $y = \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2}$

Yerel Eksremumlar ve Kritik Noktalar

45–52 alıştırmalarında, her kritik noktada türevi bulun ve yerel ekstremum değerleri belirleyin

45. $y = x^{2/3}(x + 2)$

46. $y = x^{2/3}(x^2 - 4)$

47. $y = x\sqrt{4 - x^2}$

48. $y = x^2\sqrt{3 - x}$

49. $y = \begin{cases} 4 - 2x, & x \le 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$

50. $y = \begin{cases} 3 - x, & x < 0 \\ 3 + 2x - x^2, & x \ge 0 \end{cases}$

51. $y = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & x \le 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & x > 1 \end{cases}$

52. $y = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}, & x \le 1 \\ x^3 - 6x^2 + 8x, & x > 1 \end{cases}$

53 ve 54 alıştırmalarında, cevabınızı açıklayınız.

53. $f(x) = (x - 2)^{2/3}$ olsun.

a. $f'(2)$ varmıdır?

b. f'nin tek yerel ekstremum değerinin $x = 2$ de olduğunu gösterin.

c. (b) deki sonuç Ekstremum Değer Teoremi ile çelişir mi?

d. (a) ve (b) yi, 2'yi a ile değiştirerek $f(x) = (x - a)^{2/3}$ için tekrarlayın.

54. $f(x) = |x^3 - 9x|$ olsun.

a. $f'(0)$ var mıdır?

b. $f'(3)$ var mıdır?

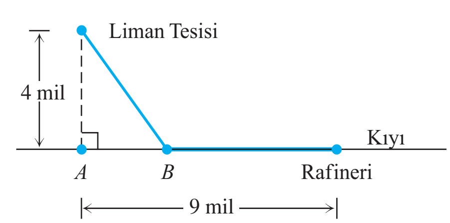
c. $f'(-3)$ var mıdır?

d. f'nin bütün ekstremumlarını belirleyin.

Optimizasyon Uygulamaları

Tek değişkenli bir fonksiyonu maksimize veya minimize ederken, size, çözdüğünüz probleme uygun bir tanım kümesi üzerinde fonksiyonun grafiğini çizmenizi tavsiye ederiz. Grafik, hesaplamalarınıza başlamadan önce olayın içyüzünü anlamanızı sağlayacak ve cevabınızı anlamanıza yardımcı olacak bir görsel kapsam sağlayacaktır.

55. Bir boru hattı kurmak Süper tankerler 4 mil açıktaki bir liman tesisine petrol boşaltırlar. En yakın rafineri, liman tesisine en yakın kıyı noktasından 9 mil doğudadır. Liman tesisini rafineriye bağlayan bir boru hattı kurmak gerekmektedir. Boru hattı su altına kurulursa maliyeti mil başına 300,000\$, yeryüzüne kurulursa maliyeti mil başına 200,000\$ dır



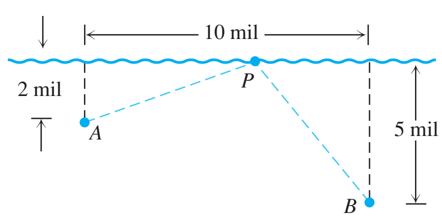
a. B noktasını, kuruluş maliyetini minimize edecek şekilde yerleştirin.

b. Yer yüzü kurulumunun maliyetinin sabit kalması beklenirken su altı kurulumun maliyetinin artması beklenmektedir. Hangi maliyette boru hattını doğrudan A noktasına kurmak optimal (en uygun) hale gelir?

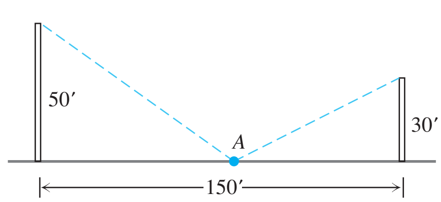
56. Bir ana yolu geliştirmek A köyünü B köyüne bağlayan bir anayol yapılması gerekmektedir. İki köyü birleştiren doğrunun 50 mil güneyinde geliştirilebilecek bir yol bulunmaktadır. Mevcut yolu iyileştirmenin maliyeti mil başına 300,000 \$ dır, oysa yeni bir anayol yapımının maliyeti mil başına 500,000 \$ dır. İki köyü bağlamanın maliyetini minimize edecek iyileştirme ve yeni yapım kombinasyonunu bulun. Açıkçası, önerilen yolun konumun belirleyin.



57. Bir pompa istasyonunu yerleştimek İki şehir, bir nehrin güney tarafında kalmaktadır. İki şehre hizmet edecek bir pompa istasyonu konumlandırılacaktır. Şehirleri pompa istasyonuna birleştiren doğrular boyunca birer boru hattı yapılacaktır. Pompa istasyonunu, boru hattı uzunluğunu minimize edecek şekilde yerleştirin.



58. Bir halatın uzunluğu Bir kule 50 feet, bir diğeri 30 feet yüksekliktedir. Kuleler 150 feet uzaklıktadırlar. A noktasından her iki kulenin tepelerine bir halat çekilecektir.



a. A noktasını, halatın uzunluğu minimum olacak şekilde yerleştirin

b. Genel olarak, kulelerin yüksekliğine bakılmaksızın, A'daki açılar eşit ise halat uzunluğunun minimum olduğunu gösterin.

59. $V(x) = x(10 - 2x)(16 - 2x), \quad 0 < x < 5$
fonksiyonu bir kutunun hacminin modelidir.

a. V'nin ekstremum değerlerini bulunuz.

b. (a) da bulduğunuz değerleri, kutunun hacmine bağlı olarak yorumlayın

60.

$$P(x) = 2x + \frac{200}{x}, \qquad 0 < x < \infty,$$

fonksiyonu, boyutları x $100/x$ olan dikdörtgenin çevresini modellemektedir.

a. P'nin ekstremum değerlerini bulunuz.

b. (a) da bulduğunuz değerleri, dikdörtgenin çevresine bağlı olarak yorumlayın

61. Bir dik üçgenin alanı Hipotenüsünün uzunluğu 5 cm olan bir dik üçgenin mümkün olan en büyük alanı nedir.

62. Bir spor sahasının alanı Bir spor sahası, uzunluğu x birim olan ve iki ucu r yarıçaplı yarım çemberlerle sınırlı bir dikdörtgen şeklinde yapılacaktır. Saha, 400 m uzunluğunda bir parkurla çevrilecektir.

a. Sahanın dikdörtgensel kısmının alanını yalnız x'e bağlı olarak veya yalnız r'ye bağlı olarak ifade edin. (siz seçin)

b. x ve r'nin hangi değerleri için dikdörtgensel bölgenin alanı en büyüktür.

63. Dikey olarak hareket eden bir cismin maksimum yüksekliği Dikey olarak hareket eden bir cismin yüksekliği, s metre ve t saniye olmak üzere

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0, \qquad g > 0,$$

ile verilir. Cismin maksimum yüksekliğini bulun.

64. Tepe akım Herhangi bir t (saniye) zamanında, bir alternatif akım devresindeki akım i (amper), $i = 2\cos t + 2\sin t$ ile verilir. Bu devre için tepe akımı (en büyük genlikli akım) nedir?

Teori ve Örnekler

65. Türev yokken minimum $f(x) = |x|$ fonksiyonu $x = 0$'da türevlenemediği halde, fonksiyonun o noktada mutlak minimumu vardır. Bu Teorem 2 ile uyuşur mu? Yanıtınızı açıklayın.

66. Çift fonksiyonlar Bir $f(x)$ çift fonksiyonunun $x = c$'de yerel bir maksimum değeri varsa, f'nin $x = -c$'deki değeri hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

67. Tek fonksiyonlar Bir $g(x)$ tek fonksiyonunun $x = c$'de yerel bir minimum değeri varsa, g'nin $x = -c$'deki değeri hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

68. Kritik noktalardaki ve uç noktalardaki değerlerini inceleyerek, sürekli bir $f(x)$ fonksiyonun ekstrem değerlerinin nasıl bulunacağını biliyoruz. Ya kritik nokta veya uç nokta *yoksa*, ne olur? Böyle fonksiyonlar gerçekten var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

69. Kübik fonksiyonlar

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

fonksiyonunu göz önüne alın.

a. f'nin 0, 1 veya 2 kritik noktasının olabileceğini gösterin. Düşüncenizi destekleyecek örnekler ve grafikler verin

b. f'nin kaç tane yerel ekstremum değeri bulunabilir?

T 70. Uç noktalarda ekstremumları bulunmayan fonksiyonlar

a.

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

fonksiyonun grafiğini çizin. $f(0) = 0$'ın neden bir ekstremum değer olmadığını açıklayın.

b. Kendiniz, tanım kümesinin bir uç noktasında ekstremum değeri bulunmayan bir fonksiyon oluşturun.

T 71–74 Alıştırmalarındaki fonksiyonların grafiklerini çizin. Sonra, fonksiyonun aralık üzerindeki ekstremum değerlerini bulun ve nerede bulunduklarını söyleyin

71. $f(x) = |x - 2| + |x + 3|, \quad -5 \le x \le 5$

72. $g(x) = |x - 1| - |x - 5|, \quad -2 \le x \le 7$

73. $h(x) = |x + 2| - |x - 3|, \quad -\infty < x < \infty$

74. $k(x) = |x + 1| + |x - 3|, \quad -\infty < x < \infty$

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

75–80 alıştırmalarında, belirlenen kapalı aralıkta verilen fonksiyonun ekstremlerini bulmak için aşağıdaki adımları izlerken bir BCS kullanın.

a. Genel davranışını görmek için, verilen aralıkta fonksiyonu çizin.

b. $f' = 0$ olan iç noktaları bulun. (Bazı alıştırmalarda bir çözüm bulmak için sayısal denklem çözücüsü kullanmak zorunda kalabilirsiniz.) f''nü de çizmek isteyebilirsiniz.

c. f'nün bulunmadığı iç noktaları belirleyin.

d. (b) ve (c)'de bulunan bütün noktalarda ve aralığın uç noktalarında fonksiyonun değerini bulun.

e. Fonksiyonun aralık üzerindeki mutlak ekstremlerini bulun ve bunların hangi noktalarda bulunduklarını belirtin.

75. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 4x + 2, \quad [-20/25, 64/25]$

76. $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x + 1, \quad [-3/4, 3]$

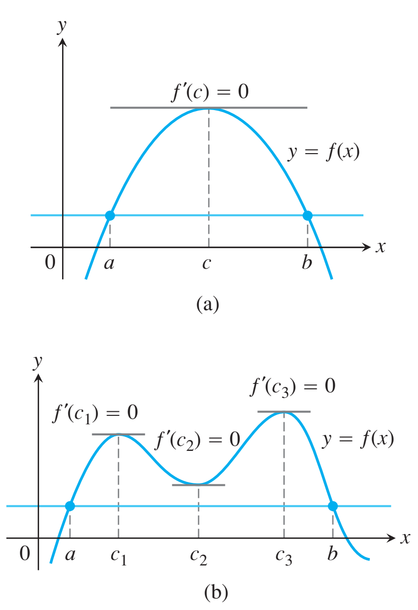
77. $f(x) = x^{2/3}(3 - x), \quad [-2, 2]$

78. $f(x) = 2 + 2x - 3x^{2/3}, \quad [-1, 10/3]$

79. $f(x) = \sqrt{x} + \cos x, \quad [0, 2\pi]$

80. $f(x) = x^{3/4} - \sin x + \frac{1}{2}, \quad [0, 2\pi]$

4.2 Ortalama Değer Teoremi



ŞEKİL 4.10 Rolle Teoremi, türevlenebilir bir eğrinin, yatay bir doğruyu kestiği iki nokta arasında en az bir yatay teğeti olduğunu söyler. Yatay teğet sayısı bir (a) veya daha fazla (b) olabilir.

Sabit fonksiyonların türevlerinin sıfır olduğunu biliyoruz, fakat türevleri sıfır olan bir çok terimden oluşan karmaşık bir fonksiyon olabilir mi? Bir aralık üzerindeki türevleri özdeş olarak eşit olan iki fonksiyon arasındaki bağıntı nedir? Burada gerçekte sorduğumuz şey, hangi fonksiyonların türevlerinin özel bir *tipte* olabildiğidir. Bunlar ve bu bölümde çalışacağımız bir çok soru, Ortala Değer Teoreminin uygulanmasıyla cevaplanır. Bu teoreme ulaşmak için önce Rolle Teoremine gereksinim vardır.

Rolle Teoremi

Bir fonksiyonun grafiğini çizmek, türevlenebilir bir fonksiyonun yatay bir doğruyu kestiği herhangi iki nokta arasında, eğrinin teğetinin yatay olduğu en az bir nokta bulunduğuna dair güçlü geometrik kanıtlar verir (Şekil 4.10). Michel Rolle'nin (1652-1719) 300 yıllık teoremi bunun gerçekten doğru olduğunu söyler. Daha kesin olarak, şu teoremi verebiliriz.

TEOREM 3 ROLLE TEOREMİ

$y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığının her noktasında sürekli ve (a, b) açık aralığının her noktasında türevlenebilir olduğunu varsayın.

$$f(a) = f(b)$$

ise, (a, b)'da

$$f'(c) = 0$$

olacak şekilde en az bir c sayısı vardır.

İspat Sürekli olduğu için, $[a, b]$ aralığında f'nin mutlak maksimum ve minimum değerleri vardır. Bunlar sadece

TARİHSEL BIYOGRAFİ

Michel Rolle
(1652–1719)

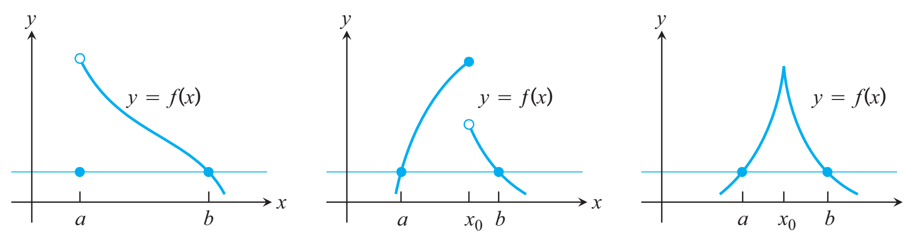
1. f''nün sıfır olduğu iç noktalarda,
2. f''nün bulunmadığı iç noktalarda,
3. fonksiyonun tanım aralığının uç noktalarında, yani burada a ve b noktalarında bulunurlar.

Hipoteze göre, f'nin her iç noktada türevi vardır. Bu (2) şıkkını ortadan kaldırır ve geriye $f' = 0$ olan iç noktalar ve iki uç nokta a ve b kalır.

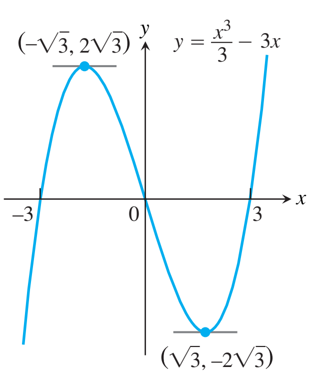
Maksimum veya minimum a ve b arasındaki bir c noktasında ise, Bölüm 4.1'deki Teorem 2'ye göre $f'(c) = 0$'dır ve Rolle teoreminin bir noktasını elde ederiz.

Maksimumun ve minimumun her ikisi de uç noktalarda ise, $f(a) = f(b)$ olduğundan, her $x \in [a, b]$ için f'nin $f(x) = f(a) = f(b)$ ile sabit fonksiyon olması gerekir. Böylece, $f'(x) = 0$ olur ve c aralığının herhangi bir yerinde alınabilir. ■

Teorem 3'ün hipotezleri gerektir. Tek bir noktada bile geçerli değillerse, grafiğin yatay bir teğeti bulunmayabilir (Şekil 4.11).



ŞEKİL 4.11 Rolle Teoreminin hipotezleri sağlamazsa yatay teğet bulunmayabilir.



ŞEKİL 4.12 Rolle Teoreminin söylediği gibi, bu eğrinin x-eksenini kestiği noktaların arasında yatay teğetler vardır (Örnek 1).

ÖRNEK 1 Bir Kübik Polinomun Yatay Teğetleri

Şekil 4.12'de çizili olan

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$$

polinom fonksiyonu [–3, 3] aralığının her noktasında sürekli ve (–3, 3) aralığının her noktasında türevlidir. $f(-3) = f(3) = 0$ olduğundan, Rolle Teoremi, $a = -3$ ile $b = 3$ arasındaki açık aralıkta f''nün en az bir defa sıfır olması gerektiğini söyler. Gerçekten de, $f'(x) = x^2 - 3$, bu aralıkta $x = -\sqrt{3}$ 'te ve $x = \sqrt{3}$'te olmak üzere iki defa sıfır olur. ■

ÖRNEK 2 Bir $f(x) = 0$ Denkleminin Çözümü

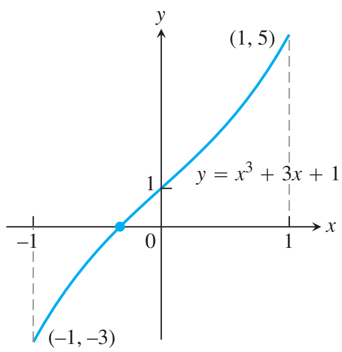
$$x^3 + 3x + 1 = 0$$

Denkleminin tam olarak bir reel kökünün var olduğunu gösterin.

Çözüm $y = f(x) = x^3 + 3x + 1$ olsun.

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

türevi hiçbir noktada sıfır değildir (Çünkü daima pozitiftir).



ŞEKİL 4.13 $y = x^3 + 3x + 1$ polinomunun tek reel sıfırı, eğrinin x-eksenini –1 ile 0 arasında kestiği yukarıda gösterilen noktadır.

Şimdi, $f(x)$'in sıfır olduğu sadece iki $x = a$ ve $x = b$ noktası bile olsaydı, Rolle Teoremi bunlar arasında f''nün sıfır olduğu bir $x = c$ noktasının varlığını garanti ederdi. Bu nedenle, f'nin birden fazla sıfırı yoktur. Aslında, bir sıfırı vardır çünkü Aradeğer Teoremi, $y = f(x)$'in grafiğinin, x eksenini ($y = -3$ olduğu) $x = -1$ ile ($y = 1$ olduğu) $x = 0$ arasında bir yerde kestiğini söyler. (Bkz. Şekil 4.13).

Rolle Teoreminin asıl kullanımı Ortalama Değer Teoreminin ispatındadır.

Ortalama Değer Teoremi

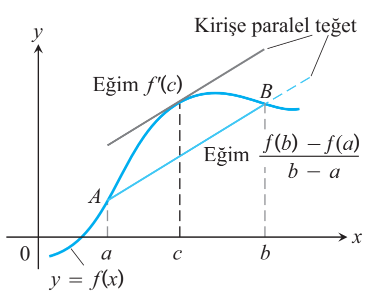
İlk olarak Joseph-Louis Lagrange tarafından ifade edilen Ortalama Değer Teoremi, Rolle teoreminin biraz değiştirilmiş halidir (Şekil 4.14). Şekilde teğetin AB kirişine paralel olduğu bir nokta vardır.

TEOREM 4 Ortalama Değer Teoremi

$y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve (a, b) açık aralığında türevlenebilir olduğunu varsayın. Bu durumda (a, b) aralığında

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{1}$$

olacak şekilde en az bir c noktası vardır.



ŞEKİL 4.14 Geometrik olarak, Ortalama Değer Teoremi A ve B arasında, eğrinin AB kirişine paralel en az bir teğetinin bulunduğunu söyler.

İspat f'nin grafiğini düzlemde bir eğri olarak işaretler ve $A(a, f(a))$ ve $B(b, f(b))$ noktalarından bir doğru geçiririz (Bkz. Şekil 4.15). Bu doğru

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{2}$$

fonksiyonunun (nokta-eğim denklemi) grafiğidir. x noktasında f ve g grafiklerinin arasındaki dikey uzaklık

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \end{aligned} \tag{3}$$

dır. Şekil 4.16'da f, g ve h grafikleri birlikte çizilmiştir.

h fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Rolle Teoreminin hipotezini sağlar. Hem f hem de g, $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında da türevlenebilir olduğundan dolayı, bu durum h için de geçerlidir. Ayrıca, f ve g grafiklerinin ikisi de A ve B noktalarından geçtikleri için, $h(a) = h(b) = 0$ olur. Bu nedenle, (a, b) aralığındaki bir c noktasında $h' = 0$ olur. Bu Denklem (1) için istediğimiz noktadır.

Denklem 1'i doğrulamak için, Denklem (3)'ün iki tarafının da x'e göre türevini alır ve x'i c'ye eşitleriz:

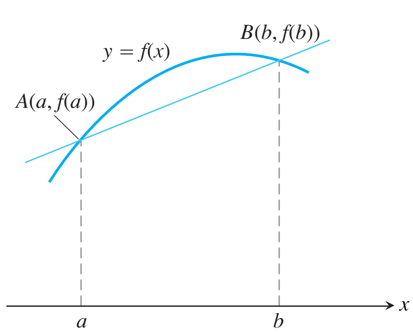
$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{Denklem (3)'ün türevi ...}$$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{... } x = c \text{ ile}$$

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad h'(c) = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \qquad \text{Yeniden düzenlenmiş hali}$$

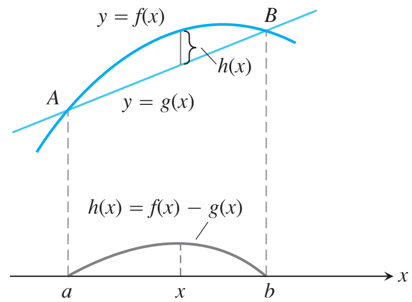
Böylece ispatlamak istediğimiz eşitliği elde ederiz. ∎



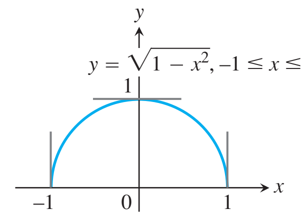
ŞEKİL 4.15 $[a, b]$ aralığında f'nin grafiği ve AB kirişi.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

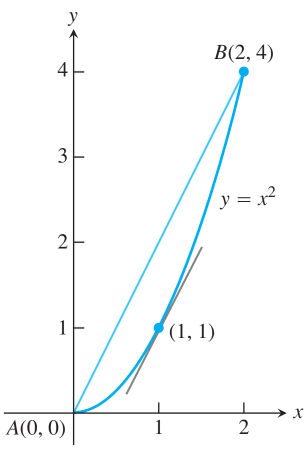
Joseph-Louis Lagrange
(1736–1813)



ŞEKİL 4.16 AB kirişi $g(x)$ fonksiyonunun grafiğidir. $h(x) = f(x) - g(x)$ fonksiyonu x noktasında f ve g grafikleri arasındaki dikey uzaklıktır.



ŞEKİL 4.17 $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ fonksiyonu, f'nin -1 ve 1'de türevlenememesine rağmen $[-1, 1]$ aralığında ortalama değer teoreminin hipotezini (ve sonuçlarını) sağlar..



ŞEKİL 4.18 Örnek 3'te bulduğumuz gibi, $c = 1$ teğetin kirişe paralel olduğu noktadır.

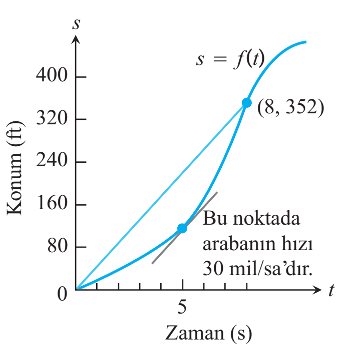
Ortalama Değer Teoreminin hipotezinin f'nin a veya b'de türevlenebilir olmasını gerektirmediğine dikkat edin. a ve b'de süreklilik yeterlidir (Şekil 4.17).

ÖRNEK 3 $f(x) = x^2$ fonksiyonu (Şekil 4.18), $0 \le x \le 2$ için süreklidir ve $0 < x < 2$ için türevlidir. $f(0) = 0$ ve $f(2) = 4$ olduğundan, Ortalama Değer Teoremi, aralıktaki bir c noktasında, $f'(x) = 2x$ türevinin değeri $(4-0)/(2-0) = 2$ olmalıdır. Bu (istisna) durumda c'yi $2c = 2$ denkleminden $c = 1$ olarak buluruz. ■

Bir Fiziksel Yorum

$(f(b) - f(a))/(b - a)$ sayısına f'nin $[a, b]$ aralığındaki ortalama değişimi ve $f'(c)$'ye anlık bir değişim olarak bakarsak, Ortalama Değer Teoremi, bir iç noktadaki anlık değişimin bütün aralıktaki ortalama değişime eşit olduğunu söyler.

ÖRNEK 4 İlk hızı sıfır olan bir arabanın 352 ft yol alması 8 sn sürüyorsa, 8 saniyelik süredeki ortalama hızı $352/8 = 44$ ft/sn'dir. Hızlanma sürecindeki bir anda, Ortalama Değer Teoremine göre, hız göstergesi tam 30 mil/saat (44 ft/sn) gösterecektir (Şekil 4.19). ■



ŞEKİL 4.19 Örnek 4'teki arabanın konum-zaman grafiği

Matematiksel Sonuçlar

Bu bölümün başında, ne tip bir fonksiyonun türevinin bir aralık üzerinde sıfır olduğunu sormuştuk. Ortalama Değer Teoreminin ilk sonucu bu sorunun yanıtını verir.

SONUÇ 1 Türevi Sıfır Olan Fonksiyonlar Sabittir

Bir (a, b) açık aralığının her x noktasında $f'(x) = 0$ ise, C bir sabit olmak üzere, her $x \in (a, b)$ için $f(x) = C$ dir.

İspat f'nin aralığındaki değerinin sabit olduğunu göstermek istiyoruz. Bunu, x_1 ve x_2'da herhangi iki nokta ise $f(x_1) = f(x_2)$ olduğunu göstererek yapacağız. x_1 ve x_2, soldan sağa doğru numaralanırsa $x_1 < x_2$ olur. Bu durumda, f fonksiyonu $[x_1, x_2]$ aralığında Ortalama Değer Teoreminin hipotezini sağlar: $[x_1, x_2]$ aralığının her noktasında türevlenebilir ve dolayısıyla her noktasında süreklidir. Böylece x_1 ve x_2 arasında bulunan bir c noktasında

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

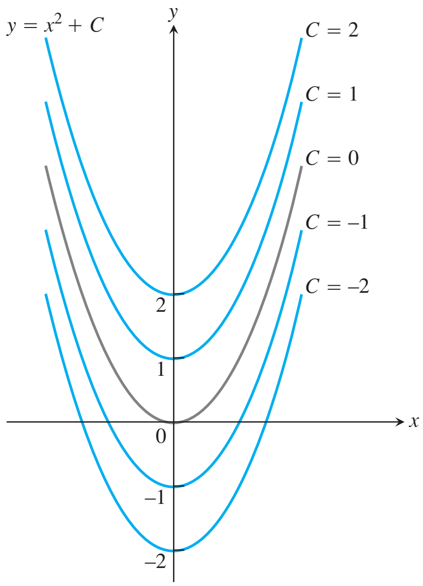
dir. (a, b)'nın her yerinde $f' = 0$ olduğundan, bu denklem

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0, \qquad f(x_2) - f(x_1) = 0, \qquad \text{ve} \qquad f(x_1) = f(x_2). \qquad \blacksquare$$

haline dönüşür.

Bu bölümün başında, bir aralık üzerinde türevleri özdeş olarak eşit olan fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi de sormuştuk. Aşağıdaki sonuç, fonksiyonların söz konusu aralık üzerindeki değerlerinin bir sabit kadar fark ettiğini söyler.

SONUÇ 2 Türevleri Aynı Olan Fonksiyonların Arasındaki Fark Sabittir.
Bir (a, b) aralığının her x noktasında $f'(x) = g'(x)$ ise öyle bir C sabiti vardır ki her $x \in (a, b)$ için $f(x) = g(x) + C$ dir. Yani, $f - g$ farkı (a, b) üzerinde sabittir.



ŞEKİL 4.20 Geometrik bir bakış açısıyla, Ortalama Değer Teoreminin 2. sonucu, bir aralık üzerinde türevleri özdeş olarak eşit olan fonksiyonlar arasındaki farkın sadece bir dikey kayma olduğunu söyler. Türevi $2x$ olan fonksiyonların grafikleri, burada değişik C değerleri için çizilmiş olan $y = x^2 + C$ parabolleridir.

İspat Her $x \in (a, b)$ noktasında, $h = f - g$ fark fonksiyonunun türevi

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

olur. Dolayısıyla, Sonuç 1'e göre (a, b) üzerinde $h(x) = C$'dir. Böylece, (a, b) üzerinde $f(x) - g(x) = C$'dir, dolayısıyla $f(x) = g(x) + C$ bulunur. $\blacksquare$

Sonuç 1 ve Sonuç 2, (a, b) açık aralığının sonlu olmaması durumunda da geçerlidir. Yani, (a, ∞), $(-\infty, b)$ veya $(-\infty, \infty)$ aralıkları için de doğrudurlar.

Sonuç 2, Bölüm 4.8 de ters türevleri tartışırken önemli rol oynar. Bize, örneğin, $(-\infty, \infty)$ aralığında $f(x) = x^2$ fonksiyonunun türevi $2x$ olduğundan, $(-\infty, \infty)$ aralığında türevi $2x$ olan başka herhangi bir fonksiyonun formülünün, C bir sabit olmak üzere $x^2 + C$ olması gerektiğini söyler (Şekil 4.20).

ÖRNEK 5 Türevi $\sin x$ olan ve grafiği $(0, 2)$ noktasından geçen $f(x)$ fonksiyonunu bulun.

Çözüm $f(x)$ ile $g(x) = -\cos x$ fonksiyonlarının türevleri aynı olduğu için, C bir sabit olmak üzere, $f(x) = -\cos x + C$ olduğunu biliyoruz. C'nin değerini $f(0) = 2$ olması (f'nin grafiğinin $(0, 2)$ noktasından geçmesi) koşulundan bulabiliriz:

$$f(0) = -\cos(0) + C = 2, \quad \text{dolayısıyla } C = 3$$

f'nin formülü $f(x) = -\cos x + 3$'tür. $\blacksquare$

İvmeden Hız ve Konum Bulmak

Serbest düşen ve ivmesi 9.8 m/sn^2 olan bir cismin hız ve konum fonksiyonlarının nasıl bulunduğu aşağıda verilmiştir.

$\upsilon(t)$'nin, türevi 9.8 olan bir fonksiyon olduğunu biliyoruz. Ayrıca, $g(t) = 9.8t$ fonksiyonunun türevinin de 9.8 olduğunu biliyoruz. Sonuç 2'ye göre, C bir sabit olmak üzere,

$$\upsilon(t) = 9.8t + C$$

olur. Cisim serbest düştüğü için, $\upsilon(0) = 0$ olur. Buradan

$$9.8(0) + C = 0 \quad \text{ve} \quad C = 0$$

bulunur. Hız fonksiyonu $\upsilon(t) = 9.8t$ $\upsilon(t) = 9.8t$. olmalıdır. Peki, konum fonksiyonu $s(t)$ nedir?

$s(t)$'nin türevi 9.8t olan bir fonksiyon olduğunu biliyoruz. Ayrıca, $f(t) = 4.9t^2$ fonksiyonunun türevinin de $9.8t$ olduğunu biliyoruz. Sonuç 2'ye göre, C bir sabit olmak üzere,

$$s(t) = 4.9t^2 + C$$

olur. Başlangıç yüksakliği, bulunduğu noktadan aşağıya doğru pozitif olarak ölçülen, $s(0) = h$ ise,

$$4.9(0)2 + C = h \quad \text{ve} \quad C = h$$

bulunur. Konum fonksiyonu $s(t) = 4.9t^2 + h$ olmalıdır.

Değişim oranlarından fonksiyonların kendilerini bulma kabiliyeti analizin en güçlü araçlarından biridir. Görecek olduğumuz gibi, Bölüm 5'teki matematiksel gelişmelerin kalbidir.

ALIŞTIRMALAR 4.2

Ortalama Değer Teoreminde *c*'yi Bulmak

1– 4 alıştırmalarındaki fonksiyon ve aralıklar için, ortalama değer teoremindeki

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

denklemini sağlayan c değer veya değerlerini bulun.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad [0, 1]$

2. $f(x) = x^{2/3}, \quad [0, 1]$

3. $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

4. $f(x) = \sqrt{x - 1}, \quad [1, 3]$

Hipotezleri Kontrol Edip Kullanmak

5–8 alıştırmalarındaki fonksiyonların hangileri verilen aralıkta Ortalama Değer Teoreminin hipotezini sağlar, hangileri sağlamaz? Yanıtlarınızı açıklayın.

5. $f(x) = x^{2/3}, \quad [-1, 8]$

6. $f(x) = x^{4/5}, \quad [0, 1]$

7. $f(x) = \sqrt{x(1 - x)}, \quad [0, 1]$

8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

9.

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

fonksiyonu $x = 0$ ile $x = 1$'de sıfırdır ve (0, 1) aralığında türevlenebilir, fakat bu aralıktaki türevi hiçbir zaman sıfır değildir. Bu nasıl olabilir? Rolle teoremine göre, türev (0, 1) aralığının bir noktasında sıfır olmak zorunda değil midir? Açıklayın.

10. Hangi a, m ve b değerlerinde

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, & 0 < x < 1 \\ mx + b, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

fonksiyonu [0, 2] aralığında ortalama değer teoreminin hipotezlerini sağlar?

Kökler (Sıfırlar)

11. a. Aşağıdaki polinomların sıfırlarını ve türevlerinin sıfırlarını bir doğru üzerinde gösterin.

i) $y = x^2 - 4$

ii) $y = x^2 + 8x + 15$

iii) $y = x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x - 2)^2$

iv) $y = x^3 - 33x^2 + 216x = x(x - 9)(x - 24)$

b. Rolle Teoremini kullanarak
$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 'ın her iki sıfırı arasında

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$$

fonksiyonunun bir sıfırı olduğunu gösterin.

12. f''''nün [a, b] aralığında sürekli olduğunu ve f'nin bu aralıkta üç tane sıfırının bulunduğunu varsayın. f''''nün (a, b) aralığında en az bir sıfırının bulunduğunu gösterin. Bu sonucu genelleştirin.

13. Bir $[a, b]$ aralığında $f'' > 0$ ise, bu aralıkta f''nün en fazla bir sıfırı olduğunu gösterin. Bu aralıkta $f'' < 0$ ise ne olur?

14. Üçüncü dereceden bir polinomun en fazla üç tane reel kökü bulunabileceğini gösterin.

15–22 alıştırmalarındaki fonksiyonların verilen aralıkta tek bir sıfırlarının bulunduğunu gösterin.

15. $f(x) = x^4 + 3x + 1, \quad [-2, -1]$

16. $f(x) = x^3 + \dfrac{4}{x^2} + 7, \quad (-\infty, 0)$

17. $g(t) = \sqrt{t} + \sqrt{1+t} - 4, \quad (0, \infty)$

18. $g(t) = \dfrac{1}{1-t} + \sqrt{1+t} - 3.1, \quad (-1, 1)$

19. $r(\theta) = \theta + \sin^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right) - 8, \quad (-\infty, \infty)$

20. $r(\theta) = 2\theta - \cos^2\theta + \sqrt{2}, \quad (-\infty, \infty)$

21. $r(\theta) = \sec\theta - \dfrac{1}{\theta^3} + 5, \quad (0, \pi/2)$

22. $r(\theta) = \tan\theta - \cot\theta - \theta, \quad (0, \pi/2)$

Türevlerden Fonksiyonları Bulmak

23. $f(-1) = 3$ ve her x için $f'(x) = 0$ olduğunu varsayın. Her x için $f(x) = 3$ olmak zorunda mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

24. $f(0) = 5$ ve her x için $f'(x) = 2$ olduğunu varsayın. Her x için $f(x) = 2x + 5$ olmak zorunda mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

25. Her x için, $f'(x) = 2x$ olsun. Şu durumlarda $f(2)$'yi bulun.

a. $f(0) = 0$ **b.** $f(1) = 0$ **c.** $f(-2) = 3$.

26. Türevleri sabit olan fonksiyonlar hakkında ne söylenebilir? Yanıtınızı açıklayın.

27–32 alıştırmalarında, verilen türevlere sahip olabilecek bütün fonksiyonları bulun.

27. **a.** $y' = x$ **b.** $y' = x^2$ **c.** $y' = x^3$

28. **a.** $y' = 2x$ **b.** $y' = 2x - 1$ **c.** $y' = 3x^2 + 2x - 1$

29. **a.** $y' = -\dfrac{1}{x^2}$ **b.** $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ **c.** $y' = 5 + \dfrac{1}{x^2}$

30. **a.** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ **b.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **c.** $y' = 4x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

31. **a.** $y' = \sin 2t$ **b.** $y' = \cos\dfrac{t}{2}$ **c.** $y' = \sin 2t + \cos\dfrac{t}{2}$

32. **a.** $y' = \sec^2\theta$ **b.** $y' = \sqrt{\theta}$ **c.** $y' = \sqrt{\theta} - \sec^2\theta$

33–36 alıştırmalarında, türevi verilen ve grafiği P noktasından geçen fonksiyonu bulun.

33. $f'(x) = 2x - 1, \quad P(0, 0)$

34. $g'(x) = \dfrac{1}{x^2} + 2x, \quad P(-1, 1)$

35. $r'(\theta) = 8 - \csc^2\theta, \quad P\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$

36. $r'(t) = \sec t \tan t - 1, \quad P(0, 0)$

Hızdan Konum Bulmak

37–40 alıştırmalarında, bir koordinat ekseni üzerinde hareket eden bir cismin $v = ds/dt$ hızı ve başlangıç konumu verilmektedir. Cismin t anındaki konumunu bulun.

37. $v = 9.8t + 5, \quad s(0) = 10$

38. $v = 32t - 2, \quad s(0.5) = 4$

39. $v = \sin \pi t, \quad s(0) = 0$

40. $v = \dfrac{2}{\pi}\cos\dfrac{2t}{\pi}, \quad s(\pi^2) = 1$

İvmeden Konum Bulmak

41–44 alıştırmalarında, bir koordinat doğrusu üzerinde hareket eden bir cismin, $a = d^2s/dt^2$ ivmesi, başlangıç hızı ve başlangıç konumu verilmektedir. Cismin t anındaki konumunu bulun.

41. $a = 32, \quad v(0) = 20, \quad s(0) = 5$

42. $a = 9.8, \quad v(0) = -3, \quad s(0) = 0$

43. $a = -4\sin 2t, \quad v(0) = 2, \quad s(0) = -3$

44. $a = \dfrac{9}{\pi^2}\cos\dfrac{3t}{\pi}, \quad v(0) = 0, \quad s(0) = -1$

Uygulamalar

45. **Sıcaklık değişimi** Bir termometrenin, buzdolabından çıkarılıp kaynar suya sokulmasıyla, –19°C'tan 100°C'a çıkması 14 saniye sürmüştür. Bu süre zarfındaki bir anda, civanın 8.5°C/s hızla yükseldiğini gösterin.

46. Bir kamyoncunun, hız limiti 65 mil/sa olan bir ücretli yolda bir ücret gişesine uzattığı bilet, 2 saatte 159 mil yol kat ettiğini göstermektedir. Kamyoncu hız nedeniyle uyarı almıştır. Neden?

47. Klasik hesaplamalar, 170 kürekli bir savaş gemisinin (Eski Yunan veya Roma savaş gemisi) 24 saatte 184 deniz mili yol aldığını söylemektedir. Bu yolculuğun bir anında, savaş gemisinin hızının 7.5 knot'u (saat başına deniz mili) neden aştığını açıklayın.

48. Bir maraton koşucusu 26.2 millik New York maratonunu 2.2 saatte koşmuştur. Koşu esnasında maratoncunun hızının en az iki defa tam olarak 11 mil/saate eşit olduğunu gösterin.

49. 2 saatlik bir araba yolculuğunun bir anında, arabanın hız göstergesindeki değerin yolculuğun ortalama süratine eşit olduğunu gösterin.

50. **Ay' da serbest düşme** Ay'da yerçekimi ivmesi 1.6 m/sn^2 dir. Bir taş, derin bir uçuruma bırakılıyor, 30 sn sonra yere çarpmasından hemen önce ne kadar süratli gidiyordu?

Teori ve Örnekler

51. ***a* ve *b*'nin geometrik ortalaması** İki pozitif a ve b sayısının *geometrik ortalaması* $\sqrt{ab}$ 'dir. Ortalama Değer Teoreminin sonucundaki c'nin, pozitif sayılardan oluşan $[a, b]$ aralığındaki $f(x) = 1/x$ için $c = \sqrt{ab}$ olduğunu gösterin.

52. ***a* ve *b*'nin aritmetik ortalaması** İki a ve b sayısının *aritmetik ortalaması* $(a + b)/2$ sayısıdır. Ortalama değer teoreminin sonucundaki c sayısının, $[a, b]$ aralığındaki $f(x) = x^2$ fonksiyonu için $c = (a + b)/2$ olduğunu gösterin.

T **53.**

$$f(x) = \sin x \sin (x + 2) - \sin^2 (x + 1)$$

fonksiyonunun grafiğini çizin. Grafik ne yapıyor? Neden fonksiyon bu şekilde davranıyor? Cevabınızı açıklayın.

54. Rolle Teoremi

a. $x = -2, -1, 0, 1$ ve 2'de sıfırları bulunan bir $f(x)$ fonksiyonu tanmlayın.

b. f ve türevi f''nü birlikte çizin. Gördüğünüz, Rolle Teoremine nasıl bağlıdır?

c. $g(x) = \sin x$ ve türevi g', aynı olayı sergiler mi?

55. Tek Çözüm f'nin $[a, b]$ üzerinde sürekli olduğunu ve (a, b) üzerinde türevli olduğunu varsayın. Ayrıca, $f(a)$ ile $f(b)$'nin zıt işaretli olduklarını ve a ile b arasında $f' \neq 0$ olduğunu kabul edin. a ile b arasında tam olarak bir defa $f(x) = 0$ olduğunu gösterin.

56. Paralel teğetler f ve g'nin üzerinde türevli olduklarını ve $f(a) = g(a)$ ve $f(b) = g(b)$ olduğunu varsayın. a ile b arasında, f ve g'nin grafiklerinin teğetlerinin paralel veya aynı olduğu, en az bir noktanın var olduğunu gösterin.

57. Türevlenebilir $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri düzlemde aynı noktada başlıyorsa ve fonksiyonların değişim oranları her noktada aynıysa, grafikler aynı olmak zorunda mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

58. Herhangi a ve b sayıları için, $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$ olduğunu gösterin.

59. f'nin $a \leq x \leq b$ üzerinde türevlenebildiğini ve $f(b) < f(a)$ olduğunu varsayın. a ile b arasındaki bir noktada f''nün negatif olduğunu gösterin.

60. f, bir $[a, b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun.

$$\min f' \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \max f'$$

sağlanmasını garanti etmek için f üzerine hangi şartları koyarsınız. Burada, $\min f'$ ve $\max f'$, f''nün $[a, b]$ aralığındaki minimum ve maksimum değerlerini göstermektedir. Cevabınızı açıklayın.

T **61.** $0 \leq x \leq 0.1$ için $f'(x) = 1/(1 + x^4 \cos x)$ ve $f(0) = 1$ ise $f(0, 1)$'i tahmin etmek için Alıştırma 60'taki eşitsizliği kullanın.

T **62.** $0 \leq x \leq 0.1$ için $f'(x) = 1/(1 + x^4)$ ve $f(0) = 2$ ise $f(0, 1)$'i tahmin etmek için Alıştırma 60'taki eşitsizliği kullanın.

63. f'nin her x değerinde türevlenebildiğini, $f(1) = 1$ olduğunu, $(-\infty, 1)$ aralığında $f' < 0$ ve $(1, \infty)$ aralığında $f' > 0$ olduğunu varsayın.

a. Her x için $f(x) \geq 1$ olduğunu gösterin.

b. $f'(1) = 0$ olmak zorunda mıdır? Açıklayın.

64. $f(x) = px^2 + qx + r$ kapalı aralığında tanımlanmış bir fonksiyon olsun. (a, b) aralığında f'nin Ortalama Değer Teoremini sağladığı tek bir nokta olduğunu gösterin.

4.3 Monoton Fonksiyonlar ve Birinci Türev Testi

Türevlenebilir bir fonksiyonun grafiğini çizerken, bir aralık üzerinde nerede arttığını (soldan sağa doğru yükseldiğini) ve nerede azaldığını (soldan sağa doğru alçaldığını) bilmek faydalıdır. Bu bölüm, bir fonksiyonun bir aralık üzerinde artmasının veya azalmasının ne demek olduğunu tam olarak tanımlar ve nerede arttığını, nerede azaldığını belirlemek için bir test verir. Ayrıca, bir fonksiyonun kritik noktalarının, yerel ekstremum değerlerin varlığı konusunda, nasıl test edildiğini göstereceğiz.

Artan Fonksiyonlar ve Azalan Foksiyonlar

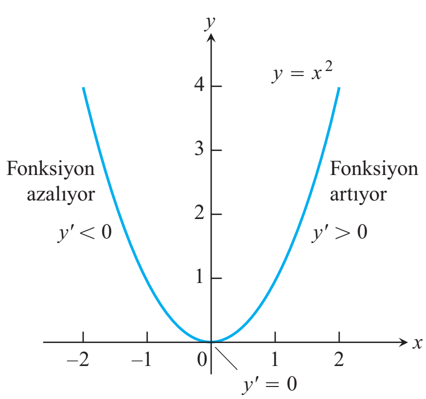
Hangi tip fonksiyonların pozitif türevleri veya negatif türevleri vardır? Ortalama Değer Teoreminin üçüncü sonucunun sağladığı cevap şudur: yalnızca pozitif türevli fonksiyonlar artan fonksiyonlardır; yalnızca negatif türevli fonksiyonlar azalan fonksiyonlardır.

TANIMLAR Artan, Azalan Fonksiyonlar

f, I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1 ile x_2 de I'da herhangi iki nokta olsun.

1. $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ ise, f I'da **artandır** denir.
2. $x_1 < x_2$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise, f I'da **azalandır** denir.

I'da artan veya azalan bir fonksiyona I'da **monotondur** denir.



ŞEKİL 4.21 $f(x) = x^2$ fonksiyonu $(-\infty, 0]$ ve $[0, \infty)$, aralıklarında monotundur, fakat $(-\infty, \infty)$ aralığında monoton değildir.

Artan ve azalan fonksiyonların tanımlarının, I'daki *her* x_1 ve x_2 $(x_1 < x_2)$ nokta çifti için sağlanması gerektiğini fark etmek önemlidir. "<" eşitsizliği fonksiyonların değerlerini karşılaştırdığından, ≤ değil, bazı kitaplar, f, I aralığında *kesin olarak artandır* veya *azalandır* derler. I aralığı sonlu veya sonsuz olabilir.

$f(x) = x^2$ fonksiyonu, grafiğinden görülebileceği gibi (Şekil 4.21) $(-\infty, 0]$ üzerinde azalır ve $[0, \infty)$ üzerinde artar. f fonksiyonu, $(-\infty, 0]$ ve $[0, \infty)$ üzerinde monotondur fakat $(-\infty, \infty)$ üzerinde monoton değildir. $(-\infty, 0)$ aralığı üzerinde teğetlerin eğimlerinin negatif olduğuna dikkat edin, dolayısıyla burada birinci türev daima negatiftir; $(0, \infty)$ için teğetlerin eğimleri pozitiftir, dolayısıyla birinci türev pozitiftir. Aşağıdaki sonuç bu gözlemleri doğrulamaktadır.

SONUÇ 3 Monoton Fonksiyonlar İçin Birinci Türev Testi

f'nin $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevlenebilir olduğunu varsayın.

Her $x \in (a, b)$ noktasında $f'(x) > 0$ ise f, $[a, b]$ aralığında artandır.
Her $x \in (a, b)$ noktasında $f'(x) < 0$ ise f, $[a, b]$ aralığında azalandır.

İspat x_1 ile x_2, $x_1 < x_2$ olmak üzere, $[a, b]$ aralığında iki nokta olsun. $[x_1, x_2]$ aralığında f'ye Ortalama Değer Teoremi uygulanırsa, x_1 ile x_2 arasındaki bir c için

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

bulunur. Bu denklemin sağ tarafının işareti $f'(c)$'nin işaretiyle aynıdır, çünkü $x_2 - x_1$ pozitiftir. Dolayısıyla, (a, b) aralığında f' pozitifse, $f(x_2) > f(x_1)$ ve f' negatifse, $f(x_2) < f(x_1)$ olur. ■

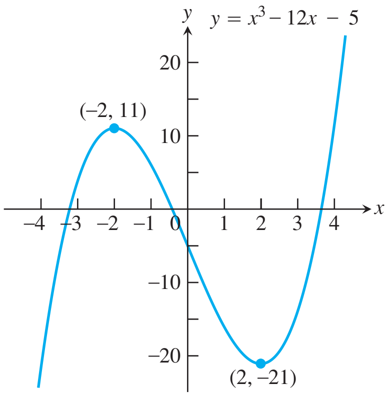
Bir fonksiyonun, nerede artan ve nerede azalan olduğunu bulmak için, Birinci Türev Testinin nasıl uygulanacağı aşağıdadır. $a < b$ bir f fonksiyonunun iki kritik noktası ise ve (a, b) aralığında f' var ve sıfır olmuyorsa, $f'(a, b)$ aralığında pozitif veya negatif olmak zorundadır (Bölüm 3.1, Teorem 2). f''nün (a, b) aralığındaki işaretini belirleyebileceğimiz bir yol, basitçe (a, b) aralığındaki bir x için f''nü hesaplamaktır. Sonra, Sonuç 3'ü uygularız.

ÖRNEK 1 Monoton Fonksiyonlar İçin Birinci Türev Testini Kullanmak

$f(x) = x^3 - 12x - 5$'in kritik noktalarını bulun ve f'nin arttığı ve azaldığı aralıkları belirleyin.

Çözüm f fonksiyonu her yerde sürekli ve türevlenebilirdir. Birinci türev

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) \\ &= 3(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$



ŞEKİL 4.22 $f(x) = x^3 - 12x - 5$ fonksiyonu üç ayrı aralık üzerinde monotondur (Örnek 1).

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Edmund Halley
(1656–1742)

$x = -2$ ve $x = 2$ de sıfırdır. Bu kritik noktalar f'nin tanım kümesini f''nün pozitif veya negatif olduğu $(-\infty, -2), (-2, 2)$, ve $(2, \infty)$ aralıklarına böler. f''nün her bir alt aralıktaki işaretini, f'yi uygun bir noktada hesaplayarak buluruz. Sonra, her bir alt aralığa Sonuç 3 uygulanarak f'nin davranışı belirlenir. Sonuçlar, aşağıdaki tabloda özetlenmiş ve f'nin grafiği Şekil 4.22 de verilmiştir.

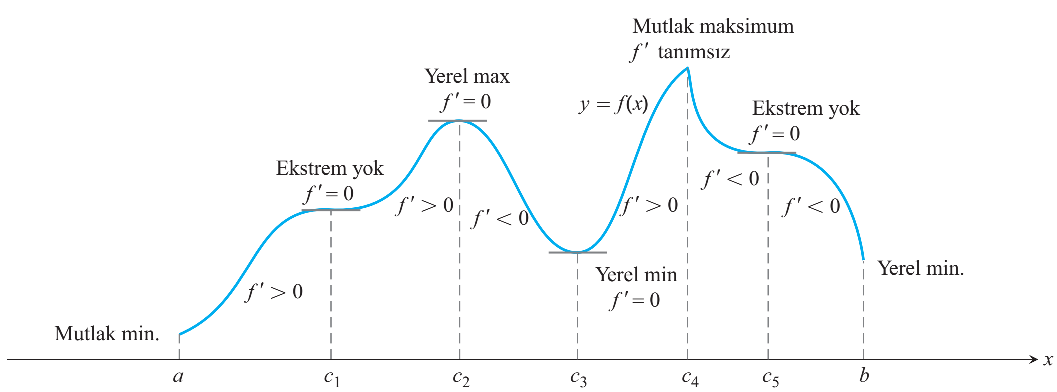
Aralıklar	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Hesaplanmış f'	$f'(-3) = 15$	$f'(0) = -12$	$f'(3) = 15$
f''nün işareti	$+$	$-$	$+$
f'nin davranışı	artan	azalan	artan

Sonuç 3, sonlu aralıklar için olduğu gibi sonsuz aralıklar için de geçerlidir ve bu gerçeği Örnek 1'deki incelemede kullandık.

Bir fonksiyonun nerede arttığını ve nerede azaldığını bilmek, yerel ekstremumların tabiatını nasıl test edeceğimizi de söyler.

Yerel Ekstremum Değerler İçin Birinci Türev Testi

Şekil 4.23'te, f'nin bir yerel minimum değerinin bulunduğu noktaların, hemen solunda $f' > 0$ ve hemen sağında $f' < 0$ dır (Nokta bir uç noktaysa, göz önüne alınması gereken sadece bir taraf vardır). Böylece, minimum değerin solunda fonksiyon azalan ve sağında artandır. Benzer şekilde, f'nin bir yerel maksimum değerinin bulunduğu noktaların, hemen solunda $f' > 0$ ve hemen sağında $f' < 0$ dır. Böylece, maksimum değerin solunda fonksiyon artan ve sağında azalandır.



ŞEKİL 4.23 Bir fonksiyonunun birinci türevi, grafiğin nasıl yükseldiğini ve alçaldığını söyler.

Bu gözlemler, türevlenebilir bir fonksiyonun yerel ekstremum değerlerinin varlığı ve tabiyatı için bir teste yol açar.

Yerel Ekstremum Değerler İçin Birinci Türev Testi

c'nin, sürekli bir f fonksiyonunun bir kritik noktası olduğunu ve f'nin, c'yi içeren bir aralığın her noktasında (c'nin kendisi hariç olabilir) türevlenebilir olduğunu varsayın. Soldan sağa, c'den geçerken.

1. f' c'de negatiften pozitife değişiyorsa, f'nin c'de bir yerel minium değeri vardır.
2. f' c'de pozitiften negatife değişiyorsa, f'nin c'de bir yerel maksimum değeri vardır.
3. f' c'de işaret değiştirmiyorsa (yani, f' c'nin iki tarafında da pozitif veya her iki tarafında da negatif ise), f'nin c'de bir yerel ekstremum değeri yoktur.

Uç noktalarda, yerel ekstremum değerler için test benzerdir, fakat göz önüne alınacak yalnız bir taraf vardır.

İspat Kısım (1). f''nün işareti c'de negatiften pozitife değiştiğinden, (a, c) üzerinde $f' < 0$ ve (c, b) üzerinde $f' > 0$ olacak şekilde a ve b sayıları vardır. $x \in (a, c)$, ise $f(c) < f(x)$ dir, çünkü $f' < 0$ olması f'nin $[a, c]$ üzerinde azalan olmasını gerektirir. $x \in (c, b)$, ise $f(c) < f(x)$ dir, çünkü $f' > 0$ olması f'nin $[c, b]$ üzerinde artan olmasını gerektirir. Bu nedenle, her $x \in (a, b)$ için $f(x) \geq f(c)$ dir. Tanıma göre, f'nin c'de bir yerel minimumu vardır.

Kısım (2) ve (3) benzer şekilde ispatlanır. ■

ÖRNEK 2 Yerel Ekstremum Değerler İçin Birinci Türev Testini Kullanmak

$$f(x) = x^{1/3}(x - 4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$$

fonksiyonunun kritik noktalarını bulun. f'nin arttığı ve azaldığı aralıkları belirleyin. Fonksiyonun yerel ve mutlak ekstremum değerlerini bulun.

Çözüm f fonksiyonu iki sürekli fonksiyonun, $x^{1/3}$ ve $(x - 4)$ çarpımı olduğundan her x te süreklidir. Birinci türev

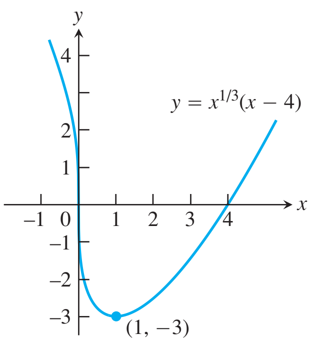
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{4/3} - 4x^{1/3}\right) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3}$$

$$= \frac{4}{3}x^{-2/3}\left(x - 1\right) = \frac{4(x - 1)}{3x^{2/3}}$$

$x = 1$'de sıfır ve $x = 0$'da tanımsızdır. Tanım kümesinde uç noktalar yoktur, dolayısıyla yalnızca $x = 0$ ve $x = 1$ kritik noktaları f'nin herhangi bir ekstremum değerinin bulunabileceği yerlerdir.

Bu kritik noktalar x eksenini f''nün ya pozitif ya da negatif olduğu aralıklara böler. f''nün işaretlerinin şekli f'nin kritik noktalarda ve bu noktaların arasındaki davranışını belirler. Bu bilgiyi aşağıdaki gibi bir resimle gösterebiliriz.

Aralıklar	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
f''nün işareti	−	−	+
f'nin davranışı	azalan	azalan	artan



ŞEKİL 4.24 $f(x) = x^{1/3}(x - 4)$ $x < 1$ iken azalır $x > 1$ iken artar (Örnek 2).

Ortalama Değer Teoreminin üçüncü sonucu, f'nin $(-\infty, 0)$ aralığında azaldığını, $(0, 1)$ aralığında azaldığını ve $(1, \infty)$ aralığında arttığını söyler. Yerel Ekstremum Değerler İçin Birinci Türev Testi, f'nin $x = 0$'da bir ekstremum değerinin bulunmadığını (f' işaret değiştirmez) ve $x = 1$'de bir yerel minimumu bulunduğunu söyler (f' negatiften pozitife değişir).

Yerel minimumun değeri $f(1) = 1^{1/3}(1 - 4) = -3$'tür. Bu ayrıca mutlak bir minimumdur, çünkü solda, fonksiyonun değerleri bu noktaya doğru düşerler ve sağda, yükselerek bu noktadan uzaklaşır. Şekil 4.24 fonksiyonun grafiği ile bu noktayı gösterir.

$\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$ olduğuna dikkat edin, dolayısıyla, f'nin grafiğinin orijinde bir dikey teğeti vardır. ■

ALIŞTIRMALAR 4.3

f' Verildiğinde f'yi İncelemek

Türevleri 1–8 alıştırmalarında verilen fonksiyonlarla ilgili aşağıdaki soruları yanıtlayın.

a. f'nin kritik noktaları nedir?

b. f, hangi aralıklarda artandır veya azalandır?

c. Varsa, hangi noktalarda f yerel maksimum veya minimum değerler alır?

1. $f'(x) = x(x - 1)$ **2.** $f'(x) = (x - 1)(x + 2)$

3. $f'(x) = (x - 1)^2(x + 2)$ **4.** $f'(x) = (x - 1)^2(x + 2)^2$

5. $f'(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$

6. $f'(x) = (x - 7)(x + 1)(x + 5)$

7. $f'(x) = x^{-1/3}(x + 2)$ **8.** $f'(x) = x^{-1/2}(x - 3)$

Verilen Fonksiyonların Ekstrem Değerleri

9–28 alıştırmalarında:

a. Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları bulun.

b. Varsa, fonksiyonun ekstrem değerlerini belirleyin ve bu değerlerin nerede bulunduklarını söyleyin.

c. Varsa, ekstrem değerlerin hangileri mutlaktır?

T **d.** Bulduklarınızı bir hesap makinesi veya bilgisayar kullanarak destekleyin.

9. $g(t) = -t^2 - 3t + 3$ **10.** $g(t) = -3t^2 + 9t + 5$

11. $h(x) = -x^3 + 2x^2$ **12.** $h(x) = 2x^3 - 18x$

13. $f(\theta) = 3\theta^2 - 4\theta^3$ **14.** $f(\theta) = 6\theta - \theta^3$

15. $f(r) = 3r^3 + 16r$ **16.** $h(r) = (r + 7)^3$

17. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ **18.** $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

19. $H(t) = \dfrac{3}{2}t^4 - t^6$ **20.** $K(t) = 15t^3 - t^5$

21. $g(x) = x\sqrt{8 - x^2}$ **22.** $g(x) = x^2\sqrt{5 - x}$

23. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}, \quad x \neq 2$ **24.** $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 + 1}$

25. $f(x) = x^{1/3}(x + 8)$ **26.** $g(x) = x^{2/3}(x + 5)$

27. $h(x) = x^{1/3}(x^2 - 4)$ **28.** $k(x) = x^{2/3}(x^2 - 4)$

Yarı-Açık Aralıklarda Ekstrem Değerler

29–36 alıştırmalarında:

a. Varsa, fonksiyonun verilen aralıktaki ekstrem değerlerini belirleyin ve bu değerlerin nerede bulunduklarını söyleyin.

b. Varsa, ekstrem değerlerin hangileri mutlaktır?

T **c.** Bulduklarınızı bir hesap makinesi veya bilgisayar kullanarak destekleyin.

29. $f(x) = 2x - x^2, \quad -\infty < x \leq 2$

30. $f(x) = (x + 1)^2, \quad -\infty < x \leq 0$

31. $g(x) = x^2 - 4x + 4, \quad 1 \leq x < \infty$

32. $g(x) = -x^2 - 6x - 9, \quad -4 \leq x < \infty$

33. $f(t) = 12t - t^3, \quad -3 \leq t < \infty$

34. $f(t) = t^3 - 3t^2, \quad -\infty < t \leq 3$

35. $h(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x, \quad 0 \leq x < \infty$

36. $k(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \quad -\infty < x \leq 0$

Hesap Makinesi veya Bilgisayarla Grafik Çizme

37–40 alıştırmalarında,

a. Varsa, fonksiyonun verilen aralıktaki ekstrem değerlerini belirleyin ve bu değerlerin nerede bulunduklarını söyleyin.

T **b.** Fonksiyonu ve türevini beraber çizin. f'nin davranışını f''nün işaretlerine ve değerlerine bakarak açıklayın.

37. $f(x) = \dfrac{x}{2} - 2\sin\dfrac{x}{2}, \quad 0 \le x \le 2\pi$

38. $f(x) = -2\cos x - \cos^2 x, \quad -\pi \le x \le \pi$

39. $f(x) = \csc^2 x - 2\cot x, \quad 0 < x < \pi$

40. $f(x) = \sec^2 x - 2\tan x, \quad \dfrac{-\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

Teori ve Örnekler

41 ve 42 alıştırmalarındaki fonksiyonların verilen θ değerlerinde yerel ekstrem değerleri olduğunu gösterin ve bu ekstrem değerlerin çeşidini belirleyin.

41. $h(\theta) = 3\cos\dfrac{\theta}{2}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad \theta = 0$'da ve $\theta = 2\pi$

42. $h(\theta) = 5\sin\dfrac{\theta}{2}, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad \theta = 0$'da ve $\theta = \pi$

43. (1, 1) noktasından geçen türevlenebilir bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini, $f'(1) = 0$ ve

a. $x < 1$ için $f'(x) > 0$ ve $x > 1$ için $f'(x) < 0$ ise,

b. $x < 1$ için $f'(x) < 0$ ve $x > 1$ için $f'(x) > 0$ ise,

c. $x \ne 1$ için $f'(x) > 0$ ise,

d. $x \ne 1$ için $f'(x) < 0$ ise,

çizin.

44. Türevlenebilir bir $y = f(x)$ fonksiyonunun

a. (1,1)'de yerel minimumuyla (3,3)'te yerel maksimumu;

b. (1,1)'de yerel maksimumuyla (3, 3)'te yerel minimumu;

c. (1, 1) ve (3, 3)'te yerel maksimumları;

d. (1, 1) ve (3, 3)'te yerel minimumları

varsa grafiğini çizin.

45. Sürekli bir $y = g(x)$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde çizin.

a. $g(2) = 2$, $x < 2$ için $0 < g' < 1$, $x \to 2^-$ iken $g'(x) \to 1^-$, $x > 2$ için $-1 < g' < 0$ ve $x \to 2+$ iken $g'(x) \to -1^+$;

b. $g(2) = 2$, $x < 2$ için $g' < 0$, $x \to 2^-$ iken $g'(x) \to -\infty$, $x > 2$ için $g' > 0$ ve $x \to 2^+$ iken $g'(x) \to \infty$.

46. Sürekli bir $y = h(x)$ fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde çizin.

a. $h(0) = 0$, her x için $-2 \le h(x) \le 2$, $x \to 0^-$ iken $h'(x) \to \infty$ ve $x \to 0^+$ iken $h'(x) \to -\infty$;

b. $h(0) = 0$, her x için $-2 \le h(x) \le 0$, $x \to 0^-$ iken $h'(x) \to \infty$ ve $x \to 0^+$ iken $h'(x) \to -\infty$;

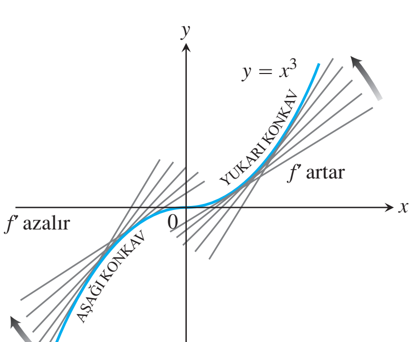
47. x, $c = 2$ noktasından soldan sağa doğru geçerken, $f(x) = x^3 - 3x + 2$ fonksiyonunun grafiği yükselir mi, alçalır mı? Yanıtınızı açıklayın.

48. $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \ne 0$ fonksiyonun arttığı ve azaldığı aralıkları bulun. Yanıtınızın nedenini açıklayın.

4.4 Konkavlık ve Eğri Çizimi

Bölüm 4.3'te, birinci türevin, bir fonksiyonun nerede artığını ve nerede azaldığını nasıl söylediğini gördük. Birinci Türev Testi, türevlenebilir bir fonksiyonun bir kritik noktasında bir yerel minimum veya bir yerel maksimum değer olup olmadığını, veya burada grafiğin artmaya veya azalmaya devam ettiğini söyler.

Bu bölümde, türevlenebilir bir fonksiyonun grafiğinin nasıl büküldüğü veya döndüğü hakkında, ikinci türevin nasıl bilgi verdiğini göreceğiz. Bu ek bilgi, bir fonksiyonun ve grafiğinin davranışının ana yönlerini yakalamamızı ve sonra bu özellikleri bir grafikte göstermemizi sağlar.



ŞEKİL 4.25 $f(x) = x^3$'ün grafiği $(-\infty, 0)$ aralığında aşağı konkav, $(0, \infty)$ aralığında ise yukarı konkavdır (Örnek 1a).

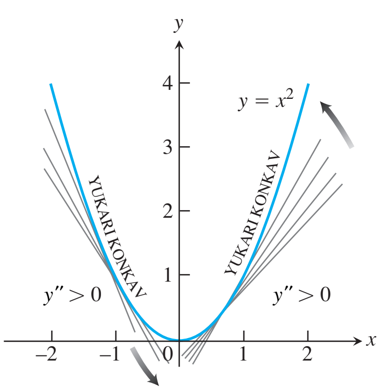
Konkavlık

Şekil 4.25'te göreceğiniz gibi, $y = x^3$ eğrisi, x artarken yükselir, fakat $(-\infty, 0)$ ve $(0, \infty)$ aralıklarıyla tanımlanan bölgelerde farklı yönlerde döner. Eğriyi izleyerek soldan orijine doğru ilerlerken, eğri bizim sağımıza doğru döner ve teğetlerinin altına düşer. $(-\infty, 0)$ aralığında teğetlerin eğimleri azalırlar. Eğri üzerinde, orijinden sağa doğru uzaklaşırken, eğri solumuza doğru döner ve teğetlerinin üzerinde yükselir. $(0, \infty)$ aralığında teğetlerin eğimleri artar. Bu dönme ve bükülme davranışı eğrinin *konkavlığını* belirler.

> **TANIM Yukarıya Konkav, Aşağıya Konkav**
> Türevlenebilir bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği,
>
> **(a)** bir I açık aralığı üzerinde, f' I üzerinde artan ise, **yukarıya konkav**,
>
> **(b)** bir I açık aralığı üzerinde, f' I üzerinde azalan ise, **aşağıya konkav**,
>
> dır.

$y = f(x)$'in ikinci türevi varsa, Ortalama Değer Teoreminin üçüncü sonucunu uygulayarak $f'' > 0$ ise I üzerinde f''nün arttığı, $f'' < 0$ ise f''nün azaldığı sonucunu çıkarırız.

> **Konkavlık İçin İkinci Türev Testi**
> $y = f(x)$ bir I aralığında iki kere türevlenebilir olsun.
>
> **1.** I üzerinde $f'' > 0$ ise, f'nin I'daki grafiği yukarı konkavdır.
>
> **2.** I üzerinde $f'' < 0$ ise, f'nin I'daki grafiği aşağı konkavdır.



ŞEKİL 4.26 $f(x) = x^2$ fonksiyonun grafiği her aralıkta yukarı konkavdır (Örnek 1b).

$y = f(x)$'in ikinci türevi varsa, ikinci türevi gösterirken f'' ve y'' notasyonlarını değişmeli olarak kullanabiliriz.

ÖRNEK 1 Konkavlık Testini Uygulamak

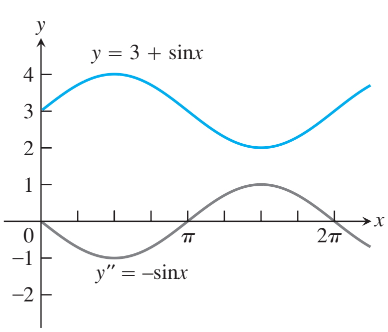
(a) $y = x^3$ eğrisi (Şekil 4.25), $y'' = 6x < 0$ olduğu $(-\infty, 0)$ aralığında aşağı konkav, $y'' = 6x > 0$ olduğu $(0, \infty)$ aralığında ise yukarı konkavdır.

(b) $y = x^2$ eğrisi (Şekil 4.26), $y'' = 0$ daima pozitif olduğundan, $(-\infty, \infty)$ üzerinde yukarı konkavdır. ■

ÖRNEK 2 Konkavlığı Belirlemek

$y = 3 + \sin x$'in $[0, 2\pi)$ üzerindeki konkavlığını belirleyin.

Çözüm $y = 3 + \sin x$'in grafiği, $y'' = -\sin x$'in negatif olduğu $(0, \pi)$ aralığında aşağıya konkav, $y'' = -\sin x$'in pozitif olduğu $(\pi, 2\pi)$ aralığında yukarıya konkavdır (Şekil 4.27). ■



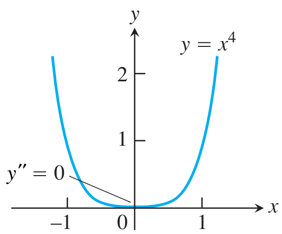
ŞEKİL 4.27 y'nin konkavlığının belirlenmesinde y'' grafiğinin kullanılışı (Örnek 2).

Büküm Noktaları

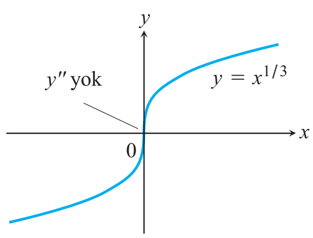
Örnek 2'deki $y = 3 + \sin x$ eğrisinin konkavlığı $(\pi, 3)$ noktasında değişir $(\pi, 3)$ noktasına eğrinin bir *büküm (dönüm) noktası* denir.

> **TANIM Büküm Noktası**
> Bir fonksiyonun teğetinin bulunduğu ve konkavlığın değiştiği noktaya **büküm noktası** denir.

Bir eğri üzerinde, bir noktanın bir tarafında y'' pozitif diğer tarafında negatif ise bu nokta eğrinin bir büküm noktasıdır. Böyle bir noktada, y'' ya sıfır (çünkü türevlerin de ara değer özelliği vardır) ya da tanımsızdır. y iki kere türevlenebilen bir fonksiyonun bir büküm noktasında $y'' = 0$'dır ve y''nün bir yerel maksimum veya minimum değeri vardır.



ŞEKİL 4.28 $y = x^4$'ün grafiğinin, $y'' = 0$ olmasına rağmen, orijine büküm noktası yoktur (Örnek 3).



ŞEKİL 4.29 y'''nün bulunmadığı bir noktada büküm noktası olabilir (Örnek 4).

ÖRNEK 3 $y'' = 0$ Olduğu Bir Noktada Büküm Noktası Bulunmayabilir

$y = x^4$ eğrisinin $x = 0$'da büküm noktası yoktur (Şekil 4.28). O noktada $y'' = 12x^2$ sıfır olduğu halde, işaret değiştirmez. ■

ÖRNEK 4 y'' 'nün Bulunmadığı Bir Noktada Büküm Noktası Bulunabilir

$y = x^{1/3}$ eğrisinin $x = 0$'da bir büküm noktası vardır (Şekil 4.29), fakat o noktada y'' yoktur.

$$y'' = \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{1/3}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}.$$ ■

Örnek 3'ten, ikinci türevin sıfır olduğu bir noktada her zaman bir büküm noktasının bulunmayabileceğini gördük. Örnek 4'ten, ikinci türevin bulunmadığı noktalarda da büküm noktalarının bulunabileceğni gördük.

Bir doğru üzerinde, zamanın bir fonksiyonu olarak hareket eden bir cismin hareketini incelemek için, genellikle cismin, ikinci türevle verilen, ivmesinin nerede pozitif ve nerede negatif olduğunu bilmekle ilgileniriz. Cismin konum fonksiyonunun grafiği üzerindeki büküm noktaları, ivmenin işaret değiştirdiği noktaları gösterir.

ÖRNEK 5 Bir Doğru Boyunca Hareketi İncelemek

Bir parçacık, yatay bir doğru üzerinde

$$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5, \qquad t \geq 0$$

konum fonksiyonu ile hareket etmektedir. Hızı ve ivmeyi bulun ve parçacığın hareketini tanımlayın.

Çözüm Hız,

$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 28t + 22 = 2(t-1)(3t-11)$$

ve ivme

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 12t - 28 = 4(3t - 7)$$

dir. $s(t)$ fonksiyonu artarken, parçacık sağa doğru gider; $s(t)$ azalırken, parçacık sola doğru gider.

$t = 1$ ve $t = 11/3$ iken birinci türev'in $(v = s')$ sıfır olduğuna dikkat edin.

Aralıklar	$0 < t < 1$	$1 < t < 11/3$	$11/3 < t$
$v = s'$'ün işareti	+	−	+
s'nin davranışı	artan	azalan	artan
Parçacağın hareketi	sağa	sola	sağa

Parçacık, $[0, 1)$ ve $(11/3, \infty)$ zaman aralıklarında sağa, $(1, 11/3)$ aralığında sola gider. $t = 1$ ve $t = 11/3$ te, bir an için durağandır.

$t = 7/3$ iken, $a(t) = s''(t) = 4(3t - 7)$ ivmesi sıfırdır.

Aralıklar	$0 < t < 7/3$	$7/3 < t$
$a = s''$'nün işareti	−	+
s'nin grafiği	aşağı konkav	yukarıya konkav

İvme kuvvetinin yönü, [0, 7/3] zaman aralığında sola doğru, $t = 7/3$ te bir anlık sıfır ve bundan sonra sağa doğrudur. ■

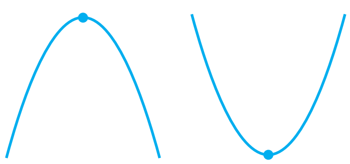
Yerel Ekstremum Değerler İçin İkinci Türev Testi

Bir kritik noktada f''nün işaret değişikliklerine bakmak yerine, bazen bir yerel ekstremum değerin varlığını ve karakterini belirlemede aşağıdaki testi kullanabiliriz.

TEOREM 5 Yerel Ekstremum Değerler İçin İkinci Türev Testi

f'''nün $x = c$'yi içeren bir açık aralıkta sürekli olduğunu varsayın.

1. $f'(c) = 0$ ve $f''(c) < 0$ ise, f'nin $x = c$'de bir yerel maksimumu vardır.
2. $f'(c) = 0$ ve $f''(c) > 0$ ise, f'nin $x = c$'de bir yerel minimumu vardır.
3. $f'(c) = 0$ ve $f''(c) = 0$ ise, test sonuç vermez. Fonksiyonun bir yerel maksimumu, bir yerel minimumu bulunabilir veya hiçbiri bulunmayabilir.



İspat Kısım (1). $f''(c) < 0$ ise, f'' sürekli olduğundan, c'yi içeren bir I açık aralık üzerinde $f''(x) < 0$ dır. Bu nedenle, I üzerinde f' azalandır. $f'(c) = 0$ olduğundan, c'de f''nün işareti pozitiften negatife değişir ve dolayısıyla Birinci Türev Testine göre f'nin c'de bir yerel maksimumu vardır.

Kısım (2)'nin ispatı benzerdir.

Kısım (3) için, $y = x^4$, $y = -x^4$ ve $y = x^3$ fonksiyonlarını düşünün. Her bir fonksiyon için birinci ve ikinci türevler $x = 0$ da sıfırdır. $y = x^4$ fonksiyonunun bu noktada bir yerel minimumu, $y = -x^4$ fonksiyonun bir yerel maksimumu vardır ve $y = x^3$ fonksiyonu $x = 0$'ı içeren her açık aralıkta artandır (burada ne bir maksimumu ne de bir minimumu vardır). Böylece, test sonuç vermez.

Bu test, c'yi içeren bir aralıkta değil *sadece* c'nin *kendisinde* f'' yü bilmemizi gerektirir.

Bu, testi uygulamayı kolaylaştırır. Bu iyi haberdir. Kötü haber şudur: $f'' = 0$ veya c'de f'' yoksa test sonuçsuzdur. Bu durumda yerel ekstremum değerler için Birinci Türev Testi'ni kullanın.

f' ve f'' birlikte, fonksiyonun grafiğinin şeklini, yani, kritik noktaların nerede oldukları ve bir kritik noktada ne olduğunu, fonksiyonun nerede arttığını ve nerede azaldığını ve konkavlığı ile tanımlandığı gibi, eğrinin nasıl döndüğünü ve büküldüğünü söylerler. Bu bilgileri, fonksiyonun, başlıca özelliklerini gösteren, bir grafiğini çizmek için kullanırız.

ÖRNEK 6 f'nin Grafiğini Çizmek İçin f' ve f'''nü Kullanmak

Aşağıdaki adımları kullanarak

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$$

fonksiyonunun bir grafiğini çizin.

(a) f'nin ekstremumlarının nerelerde olduklarını belirleyin.

(b) f'nin artan olduğu aralıkları ve azalan olduğu aralıkları bulun.

(c) f'nin grafiğinin nerede yukarıya konkav ve nerede aşağıya konkav olduğunu bulun.

(d) f'nin grafiğinin genel bir şeklini çizin

(e) Yerel maksimum ve minimum noktalar, büküm noktaları ve eğrinin eksenleri kestiği noktalar gibi özel bazı noktaları işaretleyin.

Çözüm $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ var olduğundan f süreklidir. f'nin tanım kümesi $(-\infty, \infty)$'dur, ayrıca f''nün tanım kümesi de $(-\infty, \infty)$ dur. Böylece, f'nin kritik noktaları sadece f''nün sıfırlarında görülür.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

olduğundan, birinci türev $x = 0$ ve $x = 3$'te sıfırdır.

Aralıklar	$x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x$
f''nün işareti	$-$	$-$	$+$
f'nin davranışı	azalan	azalan	artan

(a) Yerel ekstremumlar için Birinci Türev Testini ve yukarıdaki tabloyu kullanarak, $x = 0$'da bir yerel ekstremum bulunmadığını ve $x = 3$'te bir yerel minimum bulunduğunu görürüz.

(b) Yukarıdaki tabloyu kullanarak, f'nin, $(-\infty, 0]$ ve $[0, 3]$ üzerinde azalan ve $[3, \infty)$ üzerinde artan olduğunu görürüz.

(c) $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$, $x = 0$ ve $x = 2$'de sıfırdır.

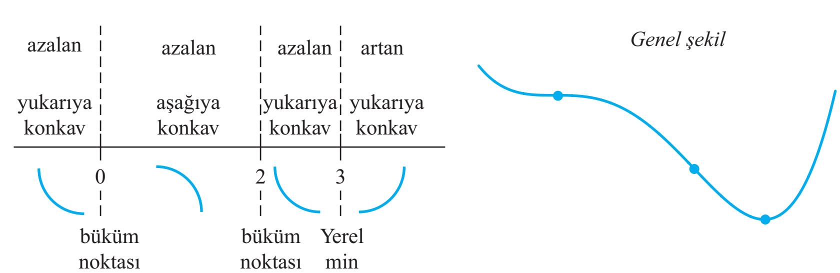
Aralıklar	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
f'''nün işareti	$+$	$-$	$+$
f'nin davranışı	yukarıya konkav	aşağıya konkav	yukarıya konkav

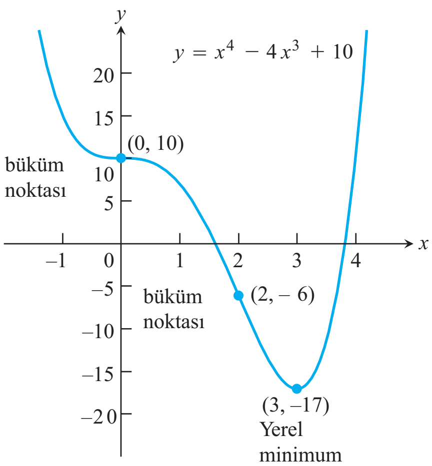
f'nin, $(-\infty, 0)$ ve $(2, \infty)$ aralıklarında yukarıya konkav, $(0, 2)$ aralığında aşağıya konkav olduğunu görürüz.

(d) Yukarıda iki tablodaki bilgileri özetleyerek şunları elde ederiz;

$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x$
azalan yukarıya konkav	azalan aşağıya konkav	azalan yukarıya konkav	artan yukarıya konkav

Eğrinin genel şekli şöyledir;





ŞEKİL 4.30 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$'un grafiği (Örnek 6).

(e) Eğrinin eksenleri kestiği noktaları (mümkünse), y' ve y'''nün sıfır olduğu noktaları çizin. Ekstremum değerleri ve büküm noktalarını gösterin. Eğriyi çizmek için genel şekli bir kılavuz olarak kullanın. (Gerektiğinde ilave noktalar çizin.) Şekil 4.30 f'nin grafiğini göstermektedir. ■

Örnek 6'daki adımlar, bir fonksiyonun ve grafiğinin başlıca özelliklerinin ortaya koyan grafik çiziminde bir prosedür vermesi bakımından yardımcı olurlar.

$y = f(x)$ Grafiğini Çizme Stratejisi

1. f'nin tanım kümesini ve olabilecek simetrileri belirleyin
2. y' ve y'''nü bulun.
3. f'nin kritik noktalarını bulun ve her birinde fonksiyonun davranışını belirleyin
4. Eğrinin nerede arttığını ve nerede azaldığını bulun.
5. Büküm noktalarını (varsa) bulun ve eğrinin konkavlığını belirleyin.
6. Asimptotları tanımlayın.
7. Eksenleri kesim noktalarını ve 3–5 adımlarında bulunanlar gibi, özel noktaları işaretleyin ve eğriyi çizin.

ÖRNEK 7 Grafik çizme Stratejisini Kullanmak

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$$ 'in grafiğini çizin.

Çözüm

1. f'nin tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ dur ve eksenlere veya orijine göre simetri yoktur (Bölüm 1.4).
2. *f' ve f''*'nü bulun.

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$$

x-kesim $x = -1$'de, *y*-kesim ($y = 1$) $x = 0$ da

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)\cdot 2(x+1) - (x+1)^2\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

Kritik noktalar: $x = -1, x = 1$

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^2\cdot 2(-2x) - 2(1-x^2)[2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

Biraz hesaptan sonra

3. *Kritik noktalarda davranış.* f', tanım kümesinin her yerinde tanımlı olduğundan, kritik noktalar yalnızca $f'(x) = 0$ olduğu $x = \pm 1$ noktalarındadır (Adım 2). $f''(-1) = 1 > 0$ olduğundan İkinci Türev Testine göre $x = -1$ de, bir yerel minimum vardır. $f''(1) = -1 < 0$ olduğundan İkinci Türev Testine göre $x = 1$ de, bir yerel maksimum vardır. Adım 6 da, ikisinin de aynı zamanda mutlak ekstremum olduklarını göreceğiz.

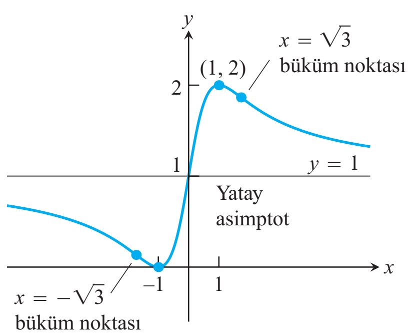
4. *Artanlık ve azalanlık.* $(-\infty, -1)$ aralığında $f'(x) < 0$ olduğunu ve eğrinin azalan olduğunu görürüz. $(-1, 1)$ aralığında, $f'(x) > 0$ dır ve eğri artandır; $(1, \infty)$ aralığında tekrar $f'(x) < 0$ dır ve azalandır.
5. *Büküm noktaları.* İkinci türevin paydasının (Adım 2) daima pozitif olduğuna dikkat edin. İkinci türev, f'', $x = -\sqrt{3}, 0$ ve $\sqrt{3}$ 'te sıfır olur. İkinci türev bu noktaların her birinde işaret değiştirir: $(-\infty, -\sqrt{3})$ üzerinde negatif, $(-\sqrt{3}, 0)$ üzerinde pozitif, $(0, \sqrt{3})$ üzerinde negatif ve $(\sqrt{3}, \infty)$ üzerinde tekrar pozitiftir. Böylece, her nokta bir büküm noktasıdır. Eğri, $(-\infty, -\sqrt{3})$ üzerinde aşağıya konkav, $(-\sqrt{3}, 0)$ üzerinde yukarıya konkav, $(0, \sqrt{3})$ üzerinde aşağıya konkav ve $(\sqrt{3}, \infty)$ üzerinde tekrar yukarıya konkavdır.
6. *Asimptotlar.* $f(x)$'in payını açarak ve sonra pay ve paydayı x^2 ile bölerek

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2} = \frac{x^2+2x+1}{1+x^2} \qquad \text{Payı açmak}$$

$$= \frac{1+(2/x)+(1/x^2)}{(1/x^2)+1}. \qquad x^2 \text{ ile bölmek}$$

elde edilir. $x \to \infty$ iken $f(x) \to 1^+$ ve $x \to -\infty$ iken $f(x) \to 1^-$ olduğunu görürüz. Böylece $y = 1$ doğrusu yatay asimptottur.

f, $(-\infty, -1)$ üzerinde azaldığından ve sonra $(-1, 1)$ üzerinde arttığından, $f(-1) = 0$'ın bir yerel minimum olduğunu biliyoruz. f, $(1, \infty)$ üzerinde azalmasına rağmen bu aralık üzerinde $y = 1$ yatay asimptotunu asla kesmez (asimptota üstten yaklaşır). Grafik asla negatif olmadığından, aynı $f(-1) = 0$ zamanda bir mutlak minimumdur. Benzer şekilde, $f(1) = 2$ bir mutlak maksimumdur çünkü grafik $(-\infty, -1)$ üzerinde alttan yaklaştığı $y = 1$ yatay asimptotunu asla kesmez. Bu nedenle, dikey asimptotlar yoktur (f'nin değer kümesi $0 \leq y \leq 2$ dir).

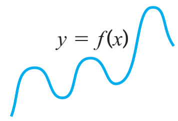
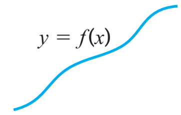
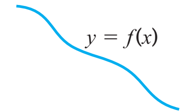
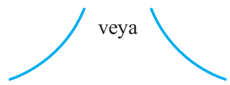
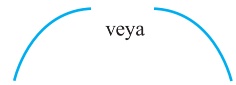
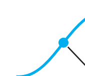
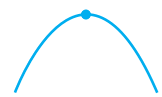
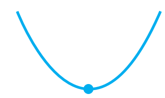


ŞEKİL 4.31 $y = \dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}$'in grafiği (Örnek 7).

7. f'nin grafiği Şekil 4.31'de çizilmiştir. $x \to -\infty$ iken $y = 1$ yatay asimptotuna yaklaşan grafiğin, nasıl aşağıya konkav olduğuna ve $x \to \infty$ iken $y = 1$'e yaklaşımında nasıl yukarıya konkav olduğuna dikkat edin. ■

Türevlerden Fonksiyonlar Hakkında Bilgi Edinmek

Örnek 6 ve 7'de gördüğümüz gibi, iki defa türevlenebilir bir $y = f(x)$ fonksiyonu hakkında neredeyse gereken her şeyi, birinci türevini inceleyerek öğrenebiliriz. Grafiğin nerede yükselip alçaldığını ve yerel ekstremum değerlerin nerede olduklarını bulabiliriz. Yükselme ve alçalma aralıklarını geçerken grafiğin nasıl büküldüğünü öğrenmek için y''nün türevini alabiliriz. Fonksiyonun grafiğinin şeklini belirleyebiliriz. Türevden elde edemeyeceğimiz tek bilgi grafiği xy-düzlemine nasıl yerleştireceğimizdir. Fakat Bölüm 4.2'de gördüğümüz gibi, grafiği yerleştirmek için gerekli olan tek ek bilgi f'nin bir noktadaki değeridir. Türev, limitler kullanılarak bulunan asimptotlar hakkında bize bilgi vermez (Bölüm 2.4 ve 2.5).

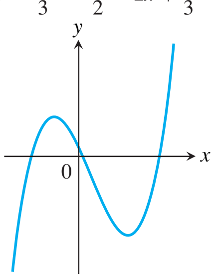
 Türevlenebilir ⇒ düzgün, bağlantılı; yükselip alçalabilir	 $y' > 0 \Rightarrow$ soldan sağa doğru yükselir; dalgalı olabilir.	 $y' < 0 \Rightarrow$ soldan sağa doğru alçalır; dalgalı olabilir.
 $y'' > 0 \Rightarrow$ yukarı konkav; dalga yok; grafik yükselip alçalabilir	 $y'' < 0 \Rightarrow$ aşağı konkav; dalga yok; grafik yükselip alçabilir	 y'' işaret değiştirir büküm noktası
 y' işaret değiştirir ⇒ yerel maksimum veya yerel minimum	 bir noktada $y' = 0$ ve $y'' < 0$; Yerel maksimum	 bir noktada $y' = 0$ ve $y'' > 0$; Yerel minimum

ALIŞTIRMALAR 4.4

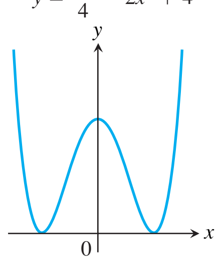
Grafikleri Çizilmiş Fonksiyonları İncelemek

1–8 alıştırmalarında grafikleri verilen fonksiyonların büküm noktalarını, yerel maksimum ve minimumlarını belirleyin. Fonksiyonların aşağı konkav ve yukarı konkav oldukları aralıkları belirleyin.

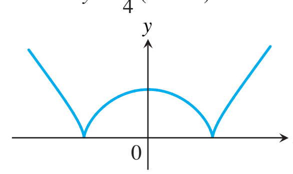
1. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$



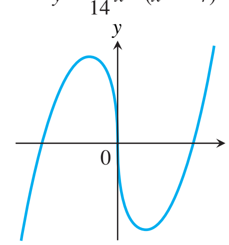
2. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4$



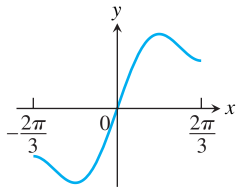
3. $y = \frac{3}{4}(x^2 - 1)^{2/3}$



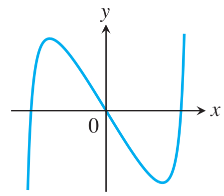
4. $y = \frac{9}{14}x^{1/3}(x^2 - 7)$



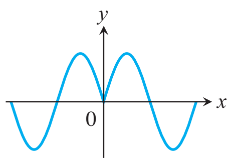
5. $y = x + \sin 2x, -\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$



6. $y = \tan x - 4x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

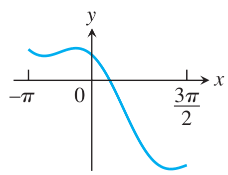


7. $y = \sin |x|, -2\pi \le x \le 2\pi$



ÖLÇEKLİ DEĞİL

8. $y = 2\cos x - \sqrt{2}\,x, -\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$



Denklemlerin Grafiklerini çizmek

Sayfa 272'deki grafik çizme yönteminin adımlarını izleyerek 9–40 alıştırmalarındaki denklemlerin grafiğini çizin. Bütün yerel ekstremum ve büküm noktalarının koordinatlarını belirtin.

9. $y = x^2 - 4x + 3$

10. $y = 6 - 2x - x^2$

11. $y = x^3 - 3x + 3$

12. $y = x(6 - 2x)^2$

13. $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$

14. $y = 1 - 9x - 6x^2 - x^3$

15. $y = (x - 2)^3 + 1$

16. $y = 1 - (x + 1)^3$

17. $y = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$

18. $y = -x^4 + 6x^2 - 4 = x^2(6 - x^2) - 4$

19. $y = 4x^3 - x^4 = x^3(4 - x)$

20. $y = x^4 + 2x^3 = x^3(x + 2)$

21. $y = x^5 - 5x^4 = x^4(x - 5)$

22. $y = x\left(\frac{x}{2} - 5\right)^4$

23. $y = x + \sin x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

24. $y = x - \sin x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

25. $y = x^{1/5}$

26. $y = x^{3/5}$

27. $y = x^{2/5}$

28. $y = x^{4/5}$

29. $y = 2x - 3x^{2/3}$

30. $y = 5x^{2/5} - 2x$

31. $y = x^{2/3}\left(\frac{5}{2} - x\right)$

32. $y = x^{2/3}(x - 5)$

33. $y = x\sqrt{8 - x^2}$

34. $y = (2 - x^2)^{3/2}$

35. $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}, \quad x \ne 2$

36. $y = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$

37. $y = |x^2 - 1|$

38. $y = |x^2 - 2x|$

39. $y = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \le 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

40. $y = \sqrt{|x - 4|}$

y' Biliniyorsa Genel Şekli Çizmek

41–62 alıştırmalarının her biri sürekli bir $y = f(x)$ fonksiyonunun birinci türevini vermektedir. y'''nü bulun ve sayfa 214'teki grafik çizme yönteminin 2–4 adımlarını kullanarak f'nin grafiğinin genel şeklini bulun.

41. $y' = 2 + x - x^2$

42. $y' = x^2 - x - 6$

43. $y' = x(x - 3)^2$

44. $y' = x^2(2 - x)$

45. $y' = x(x^2 - 12)$

46. $y' = (x - 1)^2(2x + 3)$

47. $y' = (8x - 5x^2)(4 - x)^2$

48. $y' = (x^2 - 2x)(x - 5)^2$

49. $y' = \sec^2 x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

50. $y' = \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

51. $y' = \cot\frac{\theta}{2}, \quad 0 < \theta < 2\pi$

52. $y' = \csc^2\frac{\theta}{2}, \quad 0 < \theta < 2\pi$

53. $y' = \tan^2\theta - 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

54. $y' = 1 - \cot^2\theta, \quad 0 < \theta < \pi$

55. $y' = \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

56. $y' = \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

57. $y' = (x + 1)^{-2/3}$

58. $y' = (x - 2)^{-1/3}$

59. $y' = x^{-2/3}(x - 1)$

60. $y' = x^{-4/5}(x + 1)$

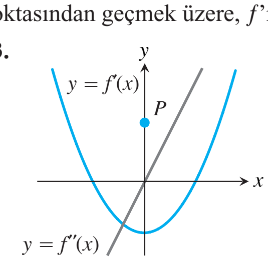
61. $y' = 2|x| = \begin{cases} -2x, & x \le 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$

62. $y' = \begin{cases} -x^2, & x \le 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

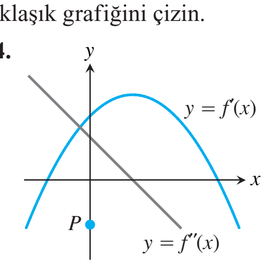
y' ve y'' Grafiklerinden y'yi Çizmek

63–66 alıştırmalarının her birinde bir $y = f(x)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevlerinin grafikleri verilmektedir. Resmi kopyalayın ve P noktasından geçmek üzere, f'nin yaklaşık grafiğini çizin.

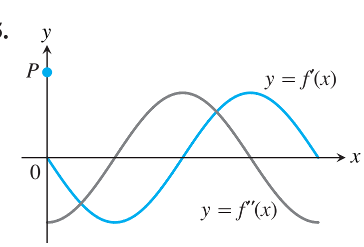
63.



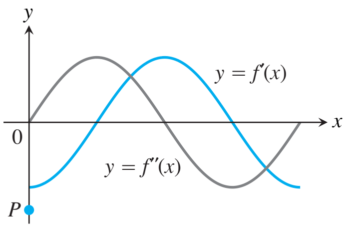
64.



65.

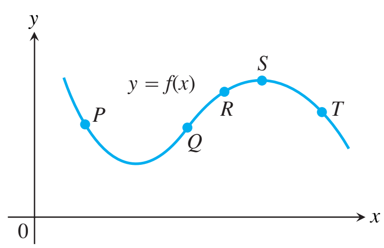


66.



Teori ve Örnekler

67. Aşağıdaki şekil iki kere türevlenebilir bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin bir parçasını göstermektedir. İşaretlenmiş beş noktada y' ve y'''nü pozitif, negatif veya sıfır olarak belirleyin.



68. Aşağıda verilenlerle düzgün birleştirilmiş bir $y = f(x)$ grafiği çizin.

$f(-2) = 8,$	$f'(2) = f'(-2) = 0,$
$f(0) = 4,$	$\|x\| < 2$ için $f'(x) < 0$
$f(2) = 0,$	$x < 0$ için $f''(x) < 0$
$\|x\| > 2$ için $f'(x) > 0$	$x > 0$ için $f''(x) > 0$

69. Aşağıda verilenlerle iki kere türevlenebilen bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizin. Mümkün olduğu yerde koordinatları belirtin.

x	y	Türevler
$x < 2$		$y' < 0, \quad y'' > 0$
2	1	$y' = 0, \quad y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' > 0, \quad y'' > 0$
4	4	$y' > 0, \quad y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0, \quad y'' < 0$
6	7	$y' = 0, \quad y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0, \quad y'' < 0$

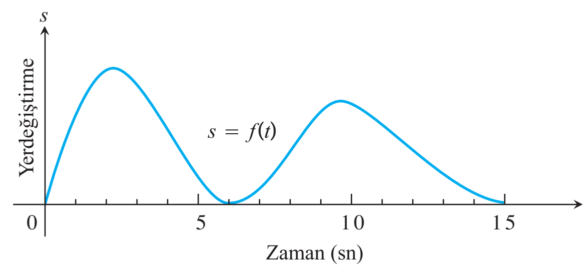
70. $(-2, 2)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ ve $(2, 2)$ noktalarından geçen ve ilk iki türevi aşağıdaki işaret şekillerine uyan iki kere türevlenebilir bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizin.

y': + (−2) − (0) + (2) −

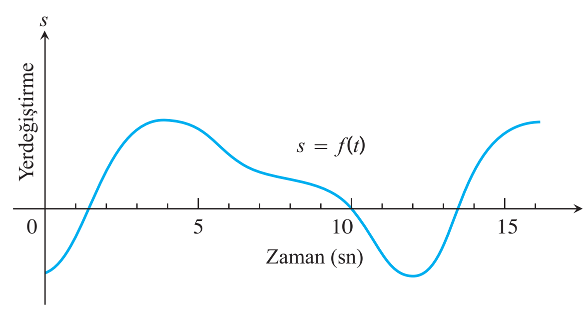
y'': − (−1) + (1) −

Bir Doğru Boyunca Hareket 71 ve 72 alıştırmalarındaki grafiklerde bir koordinat doğrusu üzerinde ileri geri ilerleyen bir cismin $s = f(t)$ konumu görülmektedir. (**a**) Cisim ne zaman orijinden uzaklaşır, ne zaman orijine yaklaşır? Yaklaşık hangi anlarda (**b**) hız sıfıra eşittir? (**c**) ivme sıfıra eşittir? (**d**) İvme ne zaman pozitif, ne zaman negatiftir?

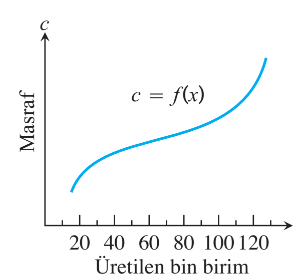
71.



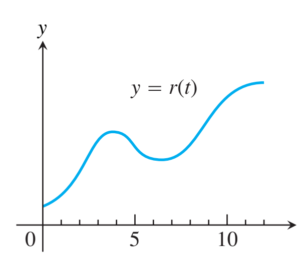
72.



73. Marjinal maliyet Aşağıdaki grafik x adet mal üretmenin $c = f(x)$ hayali masrafını göstermektedir. Yaklaşık hangi üretim seviyesinde marjinal masraf azalmayı bırakıp artmaya başlar?



74. Aşağıdaki grafik Widget Şirketi'nin son 12 yıl içindeki aylık kazancını göstermektedir? Yaklaşık olarak hangi zaman aralıklarında marjinal kazanç artmakta, hangilerinde azalmaktadır?



75. $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi

$$y' = (x-1)^2(x-2)$$

olduğunu varsayın. Varsa, hangi noktalarda f'nin grafiğinin yerel bir minimumu, yerel bir maksimumu veya bir büküm noktası vardır? (*Yol gösterme:* y' için işaret tablosu çizin.)

76. $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi

$$y' = (x-1)^2(x-2)(x-4)$$

olduğunu varsayın. Varsa, hangi noktalarda f'nin grafiğinin yerel bir minimumu, yerel bir maksimumu veya bir büküm noktası vardır?

77. $x > 0$ için, $f(1) = 0$ ve $f'(x) = 1/x$ olan bir $y = f(x)$ eğrisi çizin. Böyle bir eğrinin konkavlığı hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

78. Hiçbir yerde sıfır olmayan sürekli bir ikinci türeve sahip olan bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

79. b, c ve d birer sabitse, hangi b değerinde $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ eğrisinin $x = 1$'de bir büküm noktası vardır? Yanıtınızı açıklayın.

80. **Yatay teğetler** Doğru mu, yanlış mı? Açıklayın.

a. Çift mertebeli (en büyük üssü çift) her polinomun grafiğinin en az bir yatay teğeti vardır.

b. Tek mertebeli (en büyük üssü tek) her polinomun grafiğinin en az bir yatay teğeti vardır.

81. **Paraboller**

a. $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ parabolünün tepe noktasının koordinatlarını bulun.

b. Parabol ne zaman yukarı konkav, ne zaman aşağı konkavdır? Yanıtınızı açıklayın.

82. İki kere türevlenebilir bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin konkavlığının her $f''(x) = 0$ olduğunda değiştiği doğru mudur? Yanıtınızı açıklayın.

83. **Kuadratik eğriler** Bir $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ kuadratik eğrisinin büküm noktaları hakkında ne söyleyebilirsiniz? Yanıtınızı açıklayın.

84. **Kübik eğriler** Bir $y = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$ kübik eğrisinin büküm noktaları hakkında ne söyleyebilirsiniz? Yanıtınızı açıklayın.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

85–88 alıştırmalarında, fonksiyonunun grafiği üzerindeki (varsa) büküm noktalarını ve fonksiyonun bir yerel minimumu veya bir yerel maksimum değerinin bulunduğu noktaların koordinatlarını bulun. Sonra bu noktaların hepsinin aynı anda görülebileceği kadar büyük bir bölgede fonksiyonun grafiğini çizin. Çiziminize fonksiyonun birinci ve ikinci türevlerini de ekleyin. Bu grafiklerin x-eksenini kestikleri değerler ile fonksiyonun grafiği arasında nasıl bir ilişki vardır? Türevlerin grafikleri başka hangi yönlerden fonksiyonun grafiğiyle ilişkilidir?

85. $y = x^5 - 5x^4 - 240$

86. $y = x^3 - 12x^2$

87. $y = \dfrac{4}{5}x^5 + 16x^2 - 25$

88. $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 20$

89. $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ fonksiyonunu ve ilk iki türevini birlikte çizin. f've f''nün işaretleri ve değerlerine bağlı olarak f fonksiyonunun davranışını yorumlayın.

90. $f(x) = x \cos x$ fonksiyonunu ve ikinci türevini $0 \leq x \leq 2\pi$ aralığında birlikte çizin. f'''nün işaretleri ve değerlerine bağlı olarak f fonksiyonunun davranışını yorumlayın.

91. **a.** Ortak bir ekranda, $k = 0$ ve civarındaki negatif ve pozitif değerler için $f(x) = x^3 + kx$ fonksiyonunu çizin. k'nin değeri grafiğin şeklini nasıl etkilemektedir?

b. $f'(x)$'i bulun. Göreceğiniz gibi, $f'(x)$ x'in kuadratik bir fonksiyonudur. Bu kuadratik denklemin diskriminantını bulun ($ax^2 + bx + c$'nin diskriminantı $b^2 - 4ac$'dir). Hangi k değerlerinde diskriminant pozitif, hangilerinde sıfır veya negatiftir? Hangi k değerlerinde f''nün iki sıfırı ya da tek sıfırı vardır, hangilerinde hiç sıfırı yoktur? Şimdi k değerlerinin f fonksiyonunun grafiğinin şekliyle olan ilişkilerini açıklayın.

c. Başka k değerlerini deneyin. $k \to -\infty$ ve $k \to \infty$ iken ne olur?

92. **a.** Ortak bir ekranda, $k = -4$ ve civarındaki değerler için $f(x) = x^4 + kx^3 + 6x^2,\ -2 \leq x \leq 2$ fonksiyonunu çizin. k'nin değeri grafiğin şeklini nasıl etkilemektedir?

b. $f''(x)$'i bulun. Göreceğiniz gibi, $f''(x)$ x'in kuadratik bir fonksiyonudur. Bu kuadratik denklemin diskriminantını bulun (Alıştırma 91(b)'ye bakın). Hangi k değerlerinde diskriminant pozitif, hangilerinde sıfır veya negatiftir? Hangi k değerlerinde $f''(x)$'in iki sıfırı ya da tek sıfırı vardır, hangilerinde hiç sıfırı yoktur? Şimdi k değerlerinin f fonksiyonunun grafiğinin şekliyle olan ilişkilerini açıklayın.

93. **a.** $y = x^{2/3}(x^2 - 2)$ fonksiyonunu $-3 \leq x \leq 3$ aralığında çizin. Ekranda konkavlık, yükselme ve alçalma ile ilgili gördüklerinizi analiz kullanarak doğrulayın (Grafik çizicinize bağlı olarak, x'in negatif değerlerinde bir çizim elde etmek için $x^{2/3}$'ü $(x^2)^{1/3}$ olarak yazmak zorunda kalabilirsiniz).

b. Eğrinin $x = 0$'da bir sivri ucu mu, yoksa sadece sağdan ve soldan türevleri farklı olan bir köşesi mi vardır?

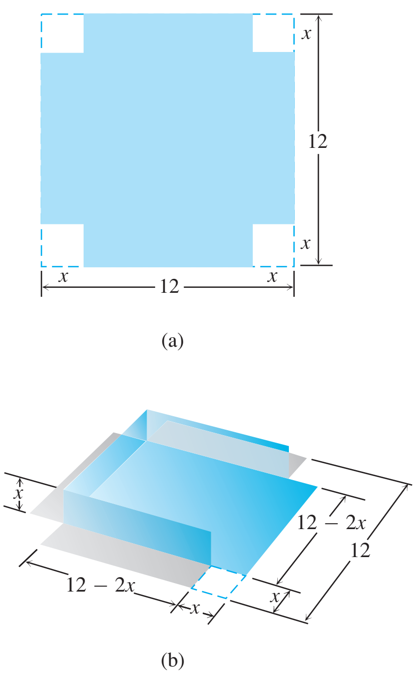
94. **a.** $y = 9x^{2/3}(x - 1)$ fonksiyonunu $-0.5 \leq x \leq 1.5$ aralığında çizin. Ekranda konkavlık, yükselme ve alçalma ile ilgili gördüklerinizi analiz kullanarak doğrulayın. Orijinin soluna doğru eğrinin konkavlığı nedir? (Grafik çizicinize bağlı olarak, x'in negatif değerlerinin bir çizimini elde etmek için $x^{2/3}$'ü $(x^2)^{1/3}$ olarak yazmak zorunda kalabilirsiniz).

b. Eğrinin $x = 0$'da bir sivri ucu mu, yoksa sadece sağdan ve soldan türevleri farklı olan bir köşesi mi vardır?

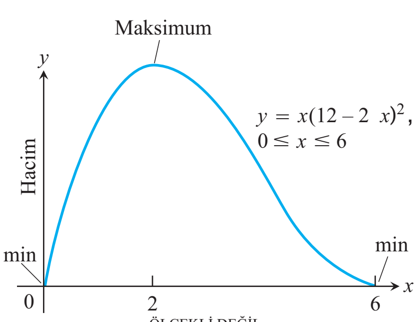
95. $y = x^2 + 3 \sin 2x$ eğrisinin $x = -3$ civarında yatay bir teğeti var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

4.5 Uygulamalı Optimizasyon Problemleri

Bir şeyi optimize etmek demek onu bir yönden minimize veya maksimize etmek demektir. Çevresi sabit olan maksimum alanlı bir dikdörtgenin boyutları nedir? Silindirik bir kutu için en ucuz şekil nedir? En karlı üretim veriminin boyutu nedir? Diferansiyel hesap, bir fonksiyonun maksimizasyonunu veya minimizasyonunu isteyen problemlerin çözümü için güçlü bir araçtır. Bu bölümde, iş hayatından, matematikten fizik ve ekonomiden çeşitli optimizasyon problemler çözüyoruz.



ŞEKİL 4.32 Kare şeklindeki ince bir teneke levhanın köşeleri kesilerek yapılan açık kutu. Hacmi maksimize eden köşe ölçüleri nedir (Örnek 1)?



ŞEKİL 4.33 Şekil 4.32'deki kutunun hacminin, x'in fonksiyonu olarak grafiği

İş ve Endüstriden Örnekler

ÖRNEK 1 Bir Kutu Üretmek

Üstü açık bir kutu 12×12 inç^2'lik bir teneke levhanın köşelerinden eş büyüklükte küçük kareler kesilip, kenarları kıvrılarak yapılacaktır. Kutunun mümkün olduğunca fazla şey alabilmesi için köşelerden kesilen kareler ne büyüklükte olmalıdır?

Çözüm İşe bir resimle başlarız (Şekil 4.32). Şekilde, kenar karelerinin köşeleri x inçtir. Kutunun hacmi bu değişkenin bir fonksiyonudur:

$$V(x) = x(12 - 2x)^2 = 144x - 48x^2 + 4x^3 \qquad V = hlw$$

Teneke levhanın kenarları sadece 12 inç uzunluğunda olduğu için, $x \leq 6$ ve V'nin tanım aralığı $0 \leq x \leq 6$ aralığı olur.

V'nin grafiği (Şekil 4.33) $x = 0$'da ve $x = 6$'da 0 değerli birer minimum ve $x = 2$ yakınında bir maksimum olduğunu gösterir. Daha fazlasını öğrenmek için, V'nin x'e göre birinci türevini inceleriz:

$$\frac{dV}{dx} = 144 - 96x + 12x^2 = 12(12 - 8x + x^2) = 12(2 - x)(6 - x).$$

$x = 2$ ve $x = 6$ köklerinden, sadece $x = 2$ fonksiyonun değer aralığında bulunur ve kritik nokta listesini oluşturur. Bu tek kritik noktada ve iki uç noktada V'nin değerleri şöyledir:

Kritik nokta değeri: $V(2) = 128$

Uç nokta değerleri : $V(0) = 0, \quad V(6) = 0.$

Maksimum hacim 128 inç^3 olur. Kesilen karelerin bir kenarı 2 inç olmalıdır. ■

ÖRNEK 2 Randımanlı Bir Silindirik Kutu Tasarlamak

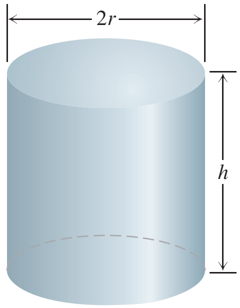
Bir dik silindir şeklinde bir 1 litrelik kutu yapmanız isteniyor (Şekil 4.34). Hangi boyutlarda en az malzeme kullanılır?

Çözüm *Kutunun hacmi:* r ve h santimetre olarak ölçülürse, kutunun hacmi cm^3 olarak

$$\pi r^2 h = 1000 \qquad 1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$$

olur.

Kutunun yüzey alanı: $A = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{dairesel tabanlar}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{dairesel duvar}}$



ŞEKİL 4.34 Bu 1 litrelik kutu $h = 2r$ olduğunda en az malzeme gerektirir (Örnek 2).

"En az malzeme" terimini nasıl yorumlayacağız? Bir olasılık malzemenin kalınlığını ve üretimdeki artıkları göz ardı etmektir. Bu durumda, $\pi r^2 h = 1000$ koşulunu sağlayan ve toplam yüzey alanını olabildiğince küçük yapan r ve h boyutlarını ararız.

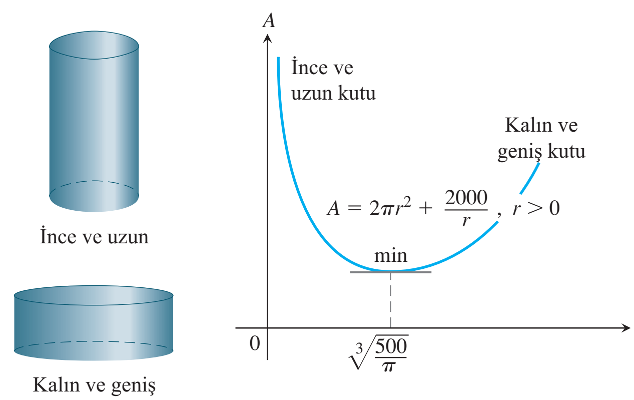
Yüzey alanını tek değişkenin fonksiyonu olarak ifade etmek için, $\pi r^2 h = 1000$ den bir değişkeni çözer ve bunu yüzey alanı formülünde yerine yazarız. h'yi çözmek daha kolaydır:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Böylece A'nın formülü şu hale gelir:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) \\ &= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \end{aligned}$$

Amacımız, A'nın değerini minimize eden bir $r > 0$ değeri bulmaktır. Şekil 4.35 böyle bir değerin varlığını ileri sürer.



ŞEKİL 4.35 $A = 2\pi r^2 + 2000/r$'nin grafiği yukarıya konkavdır.

Grafikte şuna dikkat edin: küçük bir r değeri için (bir boru parçası gibi ince uzun bir kap), $2000/r$ terimi baskın çıkar ve A büyük olur. Daha büyük r değerlerinde (pizza tabağı gibi kısa geniş bir kap), $2\pi r^2$ terimi baskındır ve A yine büyük olur.

A, uç noktaları bulunmayan bir aralık, $r > 0$ üzerinde türevlenebilir olduğundan, sadece birinci türevinin sıfır olduğu yerde bir minimumu olabilir.

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$$0 = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} \qquad dA/dr = 0 \text{ yazın}$$

$$4\pi r^3 = 2000 \qquad r^2 \text{ ile çarpın}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5.42 \qquad r\text{'yi çözün.}$$

$r = \sqrt[3]{500/\pi}$ 'de ne olur?

İkinci türev

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$$

A'nın bütün tanım aralığında pozitiftir. Bu nedenle, A'nın grafiği her yerde yukarı konkavdır ve A'nın $r = \sqrt[3]{500/\pi}$'deki değeri bir mutlak minimumdur.

h'nin karşı gelen değeri (biraz işlemden sonra)

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

dir. En az malzeme kullanılan 1-litrelik en randımanlı kutunun yüksekliği çapına eşittir, burada $r \approx 5.42$ cm ve $h \approx 10.84$ cm. ■

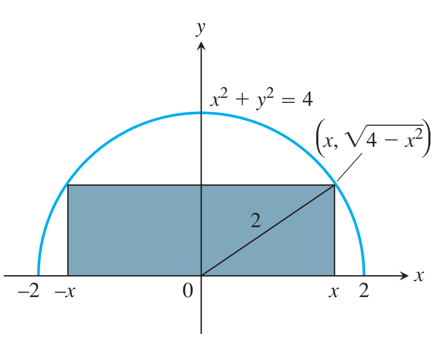
Uygulamalı Optimizasyon Problemlerini Çözmek

1. *Problemi okuyun.* Anlayana kadar problemi okuyun. Neler verilmiştir? Optimize edilecek bilinmeyenin niceliği nedir?
2. *Bir resim çizin*. Problem için önemli olabilecek noktaları isimlendirin.
3. *Değişkenleri belirleyin.* Resimdeki ve problemdeki her bağıntıyı bir denklem veya cebirsel bir ifade olarak yazın ve bilinmeyen değişkeni tanımlayın.
4. *Bilinmeyen nicelik için bir denklem yazın.* Yapabiliyorsanız, bilinmeyenleri problemdeki bir değişken cinsinden veya iki bilinmeyenli iki denklem şeklinde ifade edin. Bu oldukça işlem gerektirebilir.
5. *Tanım kümesindeki kritik noktaları ve uç noktalarını test edin.* Fonksiyonun grafiğinin şekli hakkında bildiklerinizi kullanın. Kritik noktaları belirlemek ve sınıflandırmak için birinci ve ikinci türevleri kullanın.

Matematikten ve Fizikten Örnekler

ÖRNEK 3 Dikdörtgen yerleştirmek

2 yarıçaplı bir yarı çemberin içine bir dikdörtgen yerleştirilecektir. Bu dikdörtgenin alanı en fazla ne olabilir ve boyutları nedir?



ŞEKİL 4.36 Örnek 3'teki yarım çember içine çizilen dikdörtgen.

Çözüm Çemberin ve dikdörtgenin koordinat sistemine yerleştirilmesiyle elde edilen dikdörtgenin köşesinin koordinatları $(x, \sqrt{4 - x^2})$ olsun (Şekil 4.36). Bu durumda, dikdörtgenin uzunluğu, yüksekliği ve alanı sağ alt köşenin koordinatı x cinsiden ifade edilebilir:

$$\text{Uzunluk: } 2x, \qquad \text{Yükseklik: } \sqrt{4-x^2}, \qquad \text{Alan: } 2x \cdot \sqrt{4-x^2}$$

x'in değerlerinin, dikdörtgenin seçilen köşesinin bulunduğu $0 \le x \le 2$ aralığında olması gerektiğine dikkat edin.

Amacımız, [0, 2] tanım kümesi üzerinde

$$A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$$

fonksiyonunun mutlak maksimum değerini bulmaktır.

$$\frac{dA}{dx} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2}$$

türevi, $x = 2$ olduğunda tanımsız ve

$$\frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2} = 0$$
$$-2x^2 + 2(4-x^2) = 0$$
$$8 - 4x^2 = 0$$
$$x^2 = 2 \quad \text{veya} \quad x = \pm\sqrt{2}$$

olduğunda sıfırdır. İki kök $x = \sqrt{2}$ ve $x = -\sqrt{2}$ 'den sadece $x = \sqrt{2}$ A'nın tanım aralığında bulunur ve kritik nokta listesine katılır. A'nın uç noktalardaki ve bu tek noktadaki değerleri şöyledir:

Kritik nokta değeri: $A\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}\sqrt{4-2} = 4$

Uç nokta değerleri: $A(0) = 0, \quad A(2) = 0.$

Dikdörtgenin yüksekliği $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2}$ ve uzunluğu $2x = 2\sqrt{2}$ olduğunda, alanın maksimum değeri 4 olur. ■

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Willebrord Snell van Royen (1580–1626)

ÖRNEK 4 Fermat Prensibi ve Snell Yasası

Işığın hızı içinde dolaştığı ortama bağlıdır ve daha yoğun ortamlarda daha yavaş olma eğilimi vardır.

Optikteki Fermat prensibi ışığın her zaman bir noktadan diğerine en çabuk gidebileceği yoldan gittiğini söyler. Bir ışık demetinin, ışık hızının c_1 olduğu bir ortamdaki A noktasından hızının c_2 olduğu bir ortamdaki B noktasına giderken izleyeceği yolu bulun.

Çözüm A'dan B'ye giden ışık bu işi en çabuk gidebileceği yoldan yaptığına göre, yolculuk zamanını minimize edecek bir yol arayacağız. A ve B'nin xy-düzleminde bulunduklarını ve iki ortamı ayıran doğrunun x ekseni olduğunu varsayacağız (Şekil 4.37).

Düzgün bir ortamda, yani ışığın hızının sabit kaldığı bir ortamda, "en kısa zaman" "en kısa yol" anlamına gelir ve ışık demeti bir doğru izleyecektir. Dolayısıyla, A'dan B'ye giden yol A'dan bir P sınır noktasına giden bir doğru parçası ve oradan da B'ye giden bir başka doğru parçasından oluşur. Mesafe eşittir sürat çarpı zaman formülünden

$$\text{Zaman} = \frac{\text{mesafe}}{\text{sürat}}$$

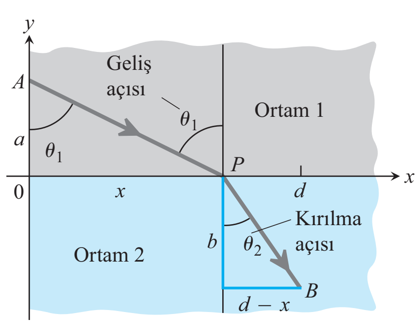
olarak bulunur. Işığın A'dan P'ye gitmesi için gereken zaman buradan

$$t_1 = \frac{AP}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1}$$

şeklinde bulunur. P'den B'ye gitmesi için gereken zaman ise

$$t_2 = \frac{PB}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c_2}$$

olur.



ŞEKİL 4.37 Bir ortamdan daha yoğun bir ortama geçerken kırılan (yolu değişen) bir ışın demeti (Örnek 4).

A'dan B'ye gitmesi için gereken zaman bunların toplamıdır:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c_2}.$$

Bu denklem t'yi x'in, tanım aralığı $[0, d]$ olan bir fonksiyonu olarak tanımlar ve biz de t'nin bu kapalı aralıktaki minimumunu bulmak istiyoruz. Buradan

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{c_2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

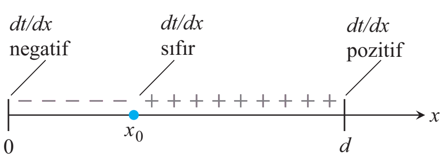
türevini elde ederiz. Şekil 4.37'teki θ_1 ve θ_2 açıları cinsinden

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sin\theta_1}{c_1} - \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$

bulunur. x'i $0 \le x \le d$ aralığına kısıtlarsak, t'nin $x = 0$'da bir negatif türevi ve $x = d$'de bir pozitif türevi vardır. Dolayısıyla, Türevler İçin Ara Değer Teoremine göre (Bölüm 3.1) $dt/dx = 0$ olduğu bir $x_0 \in [0, d]$ noktası vardır (Şekil 4.38). Böyle tek bir nokta bulunur, çünkü dt/dx x'in artan bir fonksiyonudur (Alıştırma 54'e bakın). Bu noktada

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$

olur. Bu denklem **Snell yasası** veya **Kırılma Yasası**dır ve optik teoride önemli bir prensiptir. Işık demetinin izlediği yolu tanımlar ■



ŞEKİL 4.38 Örnek 4'teki dt/dx'in işaret düzeni

Ekonomiden Örnekler

Bu örneklerde, analizin ekonomi teorisine katkıda bulunduğu iki noktaya dikkat çekmek istiyoruz. İlki, kârı maksimize etmek için yapılması gerekenler, ikincisi ortalama maliyeti minimize etmek için yapılması gerekler.

$r(x) = x$ birim satmanın kazancı

$c(x) = x$ birim üretmenin maliyeti

$p(x) = r(x) - c(x) = x$ birim üretme ve satmanın kârı

olduğunu varsayın. **Marjinal gelir, marjinal maliyet** ve **marjinal kâr**

$$\frac{dr}{dx} = \text{marjinal gelir,}$$

$$\frac{dc}{dx} = \text{marjinal maliyet,}$$

$$\frac{dp}{dx} = \text{marjinal kâr}$$

olarak verilir. İlk gözlem p kârının bu türevlerle olan ilişkisi hakkındadır.

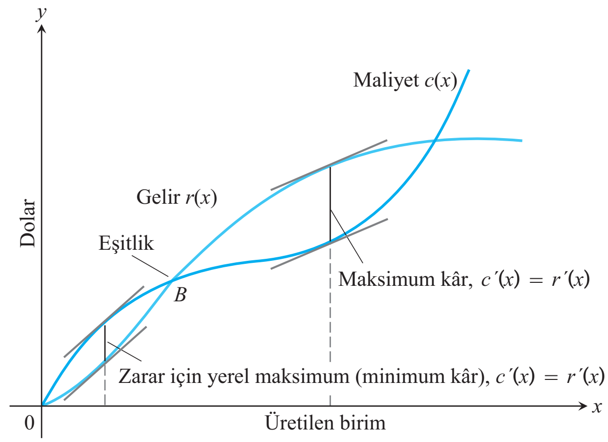
$r(x)$ ve $c(x)$ her $x > 0$ için türevlenebiliyorsa ve $p(x) = r(x) - c(x)$'in maksimum bir değeri varsa, bu $p'(x) = 0$ olduğu bir üretim seviyesinde ortaya çıkar. $p'(x) = r'(x) - c'(x)$ olduğundan, $p'(x) = 0$

$$r'(x) - c'(x) = 0 \quad \text{veya} \quad r'(x) = c'(x)$$

gerektirir.

Bu nedenle

> Maksimum kâra yol açan üretim seviyesinde, marjinal gelir marjinal maliyete eşittir (Şekil 4.39)



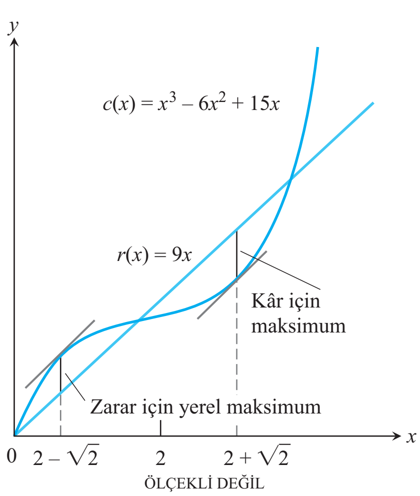
ŞEKİL 4.39 Tipik bir maliyet fonksiyonunun grafiği aşağı konkav başlar ve daha sonra yukarı konkav olur. Eşitlik noktası *B*'de gelir eğrisini keser. *B*'nin solunda, şirket zararla çalışmaktadır. Sağda ise şirket, maksimum kâr $c'(x) = r'(x)$'te gerçekleşmek üzere, kârla çalışmaktadır. Daha da sağda, maliyet geliri geçer (belki pazar doyumu, işgücü artımı ve malzeme maliyetlerinin bir birleşiminden dolayı) ve üretim seviyesi yine kârsız bir hale gelir.

ÖRNEK 5 Kârı Maksimize Etmek

x, bin birimi temsil etmek üzere

$$r(x) = 9x \quad \text{ve} \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

olsun. Kârı maksimize edecek bir üretim seviyesi var mıdır? Varsa, nedir?



ŞEKİL 4.40 Örnek 5 için maliyet ve gelir eğrileri.

Çözüm $r'(x) = 9$ ve $c'(x) = 3x^2 - 12x + 15$ olduğuna dikkat edin.

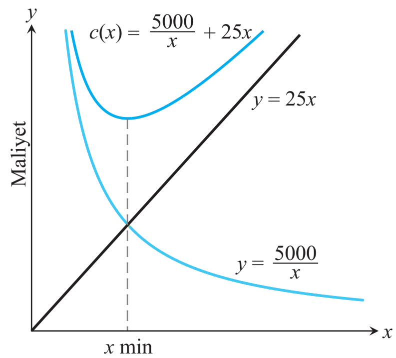
$$3x^2 - 12x + 15 = 9 \qquad c'(x) = r'(x) \text{ koyun.}$$
$$3x^2 - 12x + 6 = 0$$

Kuadratik denklemin iki çözümü

$$x_1 = \frac{12 - \sqrt{72}}{6} = 2 - \sqrt{2} \approx 0.586 \qquad \text{ve}$$

$$x_2 = \frac{12 + \sqrt{72}}{6} = 2 + \sqrt{2} \approx 3.414$$

tür. En fazla kar için olası üretim seviyeleri $x \approx 0.586$ bin birim veya $x \approx 3.414$ bin birimdir. $p(x) = r(x) - c(x)$'in ikinci türevi, $r''(x)$ her yerde sıfır olduğundan $p''(x) = -c''(x)$ dir. Böylece, $p''(x) = 6(2 - x)$, $x = 2 + \sqrt{2}$ de pozitif ve $x = 2 - \sqrt{2}$ de negatiftir. İkinci Türev Testine göre, yaklaşık olarak $x = 3.414$ yakınlarında bir maksimum kâr (gelirin maliyeti aştığı yer) ve yaklaşık olarak $x = 0{,}586$ yakınlarında maksimum zarar gözükür. $r(x)$'in grafiği Şekil 4.40'ta gösterilmiştir. ■



ŞEKİL 4.41 Ortalama günlük maliyet $c(x)$, bir hiperbol ve bir lineer fonksiyonun toplamıdır (Örnek 6).

ÖRNEK 6 Maliyeti Minimize Etmek

Bir marangoz, her gün 5 mobilya üretmek için fidan-üretimi maun kullanmaktadır. Her bir tahta konteynerinin teslimatı 5000 $ iken bu malzemenin depolama ücreti gün başına bir birim için 10$ dır. Bir birim, bir mobilya üretmek için gereken malzemedir. Teslimatlar arasındaki üretim devresinde, günlük ortalama maliyeti minimize etmek için her defasında ne kadar malzeme sipariş edilmelidir ve ne sıklıkta teslimat yapılmalıdır?

Çözüm Her x günde bir teslimat yapılması istenirse, bu üretim devresinde yeterli malzemenin bulunması için $5x$ birim sipariş edilmelidir. *Ortalama* depolama miktarı yaklaşık olarak teslimatın yarısı kadar, veya $5x/2$ dir. Böylece, her bir devrenin teslimat ve depolama maliyeti yaklaşık olarak

Devre başına maliyet = teslimat maliyeti + depolama maliyeti

$$\text{Devre başına maliyet} = \underbrace{5000}_{\substack{\text{teslimat}\\\text{maliyeti}}} + \underbrace{\left(\frac{5x}{2}\right)}_{\substack{\text{depolanan}\\\text{ortalama miktar}}} \cdot \underbrace{x}_{\substack{\text{depolanan}\\\text{gün sayısı}}} \cdot \underbrace{10}_{\substack{\text{gün başına}\\\text{depolama maliyeti}}}$$

Ortalama günlük maliyet $c(x)$'i devre başına maliyeti devredeki gün sayısı x'e bölerek buluruz (Bkz. Şekil 4.41).

$$c(x) = \frac{5000}{x} + 25x, \qquad x > 0.$$

$x \to 0$ iken ve $x \to \infty$ iken günlük ortalama maliyet çok büyür. Dolayısıyla bir minimum olmasını bekleriz, fakat nerede? Amacımız, mutlak minimum maliyeti sağlayan, teslimatlar arası x gün sayısını belirlemektir.

Türevin nerede sıfır olduğunu belirleyerek kritik noktaları buluruz:

$$c'(x) = -\frac{5000}{x^2} + 25 = 0$$
$$x = \pm\sqrt{200} \approx \pm 14.14.$$

İki kritik noktadan sadece $\sqrt{200}$ $c(x)$'in tanım kümesindedir. Ortalama günlük maliyetin kritik nokta değeri

$$c\left(\sqrt{200}\right) = \frac{5000}{\sqrt{200}} + 25\sqrt{200} = 500\sqrt{2} \approx \$707.11.$$

dır. $c(x)$'in tanım kümesi $(0, \infty)$ dur ve $c''(x) = 10000/x^3 > 0$ dır. Böylece, $x = \sqrt{200} \approx 14.14$ gün de bir mutlak minimum vardır.

Marangoz, egzotik tahtadan her 14 günde 5(14) = 70 birim teslimatlık bir program yapmalıdır. ■

Örnek 5 ve 6'da birim sayısı x'in herhangi bir pozitif reel sayı olmasına izin verdik. Gerçekte, genellikle x 'in sadece pozitif tamsayı (veya sıfır) olması durumunda bir anlam vardır. Cevabımızı yuvarlamamız gerekirse, yukarı mı yoksa aşağı mı yuvarlamalıyız?

ÖRNEK 7 Minimum Maliyetin Hassasiyeti

Örnek 6 da en iyi çözüm için, teslimatlar arasındaki gün sayısını yukarı mı yoksa aşağı mı yuvarlamalıyız?

Çözüm 14.14 ten 14'e yuvarlarsak ortalama günlük maliyet yaklaşık olarak 0.03 \$ kadar artar:

$$c(14) = \frac{5000}{14} + 25(14) = \$707.14$$

ve

$$c(14) - c(14.14) = \$707.14 - \$707.11 = \$0.03$$

olur.

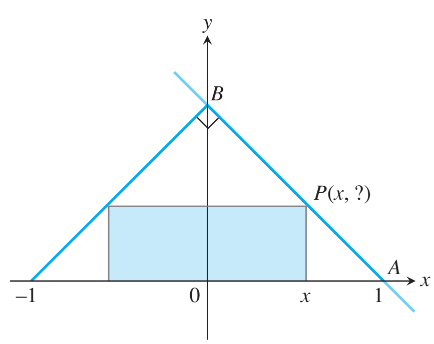
Öte yandan, $c(15) = \$708.33$ dir ve yukarı yuvarlarsak maliyetimiz $\$708.33 - \$707.11 = \$1.22$ artar. Böylece, x'i aşağıya, 14 güne yuvarlamamız daha iyidir. ■

ALIŞTIRMALAR 4.5

Tek değişkenli bir fonksiyonu maksimize veya minimize ederken, çözdüğünüz probleme uygun bir tanım aralığında fonksiyonun grafiğini çizmenizi tavsiye ederiz. Grafik hesaplamalarınıza bir öngörüş getirecek ve yanıtınızı anlamanıza yardımcı olacak görsel bir kapsam sağlayacaktır.

Geometrik Uygulamalar

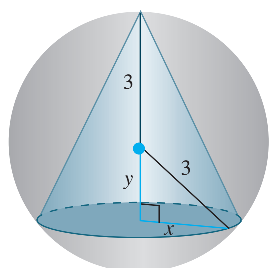
1. **Çevreyi minimize etmek** Alanı 16 inç^2 olan bir dikdörtgenin olası en küçük çevresi ve boyutları nedir?
2. Çevreleri 8 m olan bütün dikdörtgenler arasında alanı en büyük olanının bir kare olduğunu gösterin.
3. Aşağıda verilen şekil, hipotenüsü 2 birim uzunluğunda bir ikizkenar dik üçgenin içine yerleştirilmiş bir dikdörtgeni göstermektedir.
   a. P'nin y koordinatını x cinsinden ifade edin (*Yol gösterme: AB doğrusu için bir denklem yazın*).
   b. Dikdörtgenin alanını x cinsinden ifade edin.
   c. Dikdörtgenin alabileceği en büyük alan ve boyutları nedir?



4. Bir dikdörtgenin tabanı x-ekseninde ve üst iki köşesi $y = 12 - x^2$ parabolünün üzerine bulunmaktadır. Dikdörtgenin alabileceği en büyük alan ve boyutları nedir?
5. Kenarları 8 inç ve 15 inç olan dikdörtgen bir kartonun köşelerinden eş büyüklükte kareler kesip, kenarları katlayarak açık bir dikdörtgen kutu yapmayı planlıyorsunuz. Bu şekilde yapabileceğiniz en büyük hacimli kutunun boyutları ve hacmi nedir?
6. Birinci dörtte bir bölgenin köşesini $(a, 0)$'dan $(0, b)$'a giden 20 birim uzunluğunda bir doğru parçasıyla kapatmayı planlıyorsunuz. Doğru parçasıyla çevrelenen üçgenin alanının $a = b$ olduğunda en büyük olduğunu gösterin.
7. **En iyi çit planı** Dikdörtgen bir tarla parçası bir kenarından bir nehir ve diğer üç kenarından elektrikli çitle çevrelenecektir. Elinizde 800 m tel bulunuyorsa, en fazla ne kadar bir alanı çevreleyebilirsiniz? Boyutları nedir?
8. **En kısa çit** 216 m^2'lik dikdörtgen bir bezelye tarhı bir çitle çevrelenecek ve kenarlardan birine paralel başka bir çitle eşit iki parçaya ayrılacaktır. En küçük toplam çit uzunluğunu sağlamak için dış dikdörtgenin boyutları ne olmalıdır? Ne kadar çit gerekecektir?
9. **Bir tank tasarlamak** Demir fabrikanız bir kağıt fabrikası için 500 ft^3 hacminde, kare tabanlı, üstü açık, bir dikdörtgen şeklinde çelik tank yapmak için anlaşmıştır. Tank, paslanmaz çelik tabakaların kenarlarından birbirlerine lehimlenmesiyle yapılacaktır. Üretim mühendisi olarak işiniz tankın olabildiğince hafif ağırlıkta olmasını sağlayacak taban ve yükseklik boyutlarını bulmaktır.
   a. Fabrikaya kullanmaları için hangi boyutları bildirirsiniz?
   b. Ağırlığı nasıl hesaba kattığınızı kısaca açıklayın.
10. **Yağmur suyu toplamak** 1125 ft^3'lük üstü açık, tabanı bir kenarı x ft olan bir kareden oluşan ve y ft derinlikte dikdörtgen şeklinde bir tank yağmur suyu toplamak için üstü yerle aynı seviyede olacak şekilde yapılacaktır. Tankın maliyeti sadece tankın yapıldığı malzemeden değil, xy çarpımıyla orantılı kazma masrafından da oluşmaktadır.
    a. Toplam maliyet
    $$c = 5(x^2 + 4xy) + 10xy$$
    ise, hangi x ve y değerleri bunu minimize eder?
    b. (a) daki maliyet fonksiyonu için olası bir senaryo verin.

11. Bir poster tasarlamak Kenar payları yukarıda ve aşağıda 4-inç ve diğer iki kenarda 2-inç olmak üzere, 50 inç^2 baskı içerecek bir poster tasarımı yapıyorsunuz. Kullanılacak kağıdın miktarını minimize edecek tüm boyutlar nedir?

12. 3 yarıçaplı bir kürenin içine oturtulabilecek en büyük dik koninin hacmini bulun.



13. Bir üçgenin iki kenarının uzunlukları a ve b, ve aralarındaki açı θ'dır. Hangi θ değer üçgenin alanını maksimize eder? (*İpucu:* $A = (1/2)ab \sin \theta$).

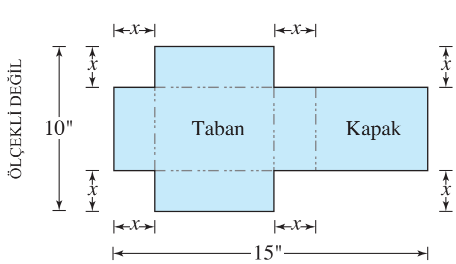
14. Bir kutu tasarlamak 1000 cm^3'lük bir hacim içerebilecek en hafif (en az malzemeyle yapılmış), üstü açık, dik bir silindir kutunun boyutları nedir? Buradaki sonucunuzu Örnek 2'deki sonuçla karşılaştırın.

15. Bir kutu tasarlamak Üretim sürecindeki fireyi de hesaba katarak, 1000 cm^3 hacimli dik silindirik kutu tasarımı yapıyorsunuz. Yanlar için alüminyumu keserken fire olmamaktadır, ancak r yarıçaplı taban ve tavan kenarları $2r$ uzunluğunda olan karelerden kesilecektir. Dolayısıyla her kutu için kullanılacak toplam alüminyum miktarı Örnek 2'deki $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ yerine

$$A = 8r^2 + 2\pi rh$$

olacaktır. Örnek 2'de en ekonomik kutu için h'nin r'ye oranı 2'ye 1'di. Şimdi bu oran nedir?

T **16. Kapaklı bir kutu tasarlamak** Bir mukavva parçası 10 inç e 15 inç ölçülerindedir. Şekilde gösterildiği gibi ölçüsü 10 inç olan kenarın köşelerinden eş kareler çıkarılıyor. Çıkıntılar katlanarak kapaklı bir dikdörtgensel kutu elde edecek şekilde diğer köşelerden eş dikdörtgenler çıkarılıyor.



a. Kutunun hacmi için bir $V(x)$ formülü yazı

b. Problemdeki durum için V'nin tanım kümesini bulun ve bu tanım kümesi üzerinde V'yi çizin.

c. Maksimum hacmi bulmak için bir grafik yöntem kullanın ve bu değeri veren x'i bulun.

d. (c) deki cevabınızı analitik olarak doğrulayın.

T **17. Bir bavul tasarlamak** 24-inç'e 36-inç bir karton tabaka, şekilde gösterildiği gibi 24-inç'e 18-inç bir dikdörtgen elde edilecek şekilde ikiye katlanıyor. Sonra, katlı dikdörtgenin köşelerinden kenar uzunluğu x olan dört eş kare çıkarılıyor. Daha sonra karton açılıyor ve altı çıkıntı, yanları ve bir kapağı olan bir kutu oluşturmak üzere yukarıya katlanıyor.

a. Kutunun hacmi için bir $V(x)$ formülü yazın.

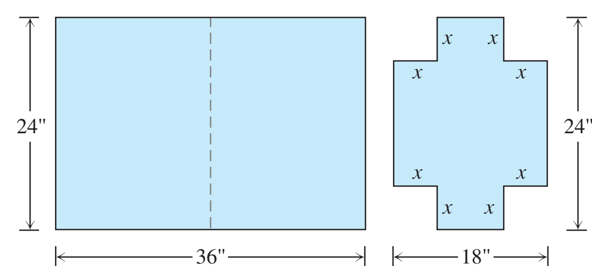
b. Problemdeki durum için V'nin tanım kümesini bulun ve bu tanım kümesi üzerinde V'yi çizin.

c. Maksimum hacmi bulmak için bir grafik yöntem kullanın ve bu değeri veren x'i bulun.

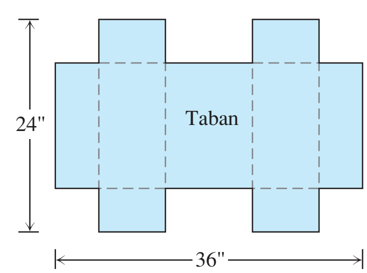
d. (c) deki cevabınızı analitik olarak doğrulayın.

e. 1120 inç^3 hacim veren bir x değeri bulun.

f. (b)'de ortaya çıkan durumu tanımlayan bir paragraf yazın.



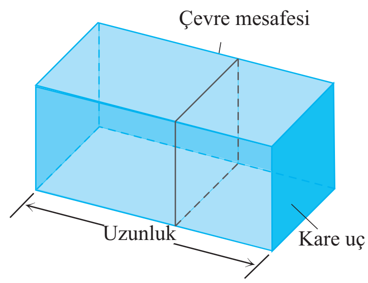
Sonra karton tabaka açılıyor



18. $x = -\pi$'den $x = \pi$'ye kadar $y = 4 \cos (0.5x)$ eğri yayının altına bir dikdörtgen çizilecektir. En büyük alanlı dikdörtgenin boyutları ve en büyük alan nedir?

19. 10 cm yarıçaplı bir kürenin içine oturtulacak en büyük hacimli dik dairesel silindirin boyutlarını bulun. En büyük hacim nedir?

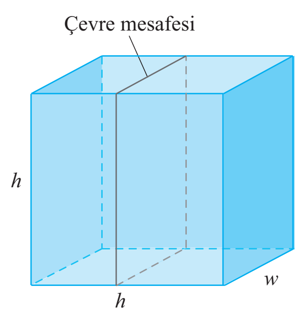
20. a. Amerikan Posta Servisi ancak, uzunluğu ve çevre mesafesinin toplamı 108 inçi aşmayan kutuları yurtiçi taşıma için kabul etmektedir. Hangi boyutlar, uçları birer kare olan kutuya olası en büyük hacmi verir?



b. 108 inçlik (uzunluk artı çevre mesafesi 108-inç olacak) bir kutunun hacminin grafiğini, uzunluğunun bir fonksiyonu olarak çizin ve gördüklerinizi (a)' daki yanıtınızla karşılaştırın.

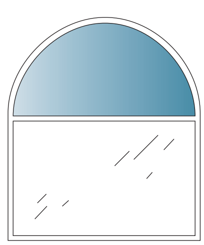
21. (*Örnek 20'nin devam.*)

a. Ucu kare olan bir kutu almak yerine, boyutları $h \times h \times w$ ve çevre mesafesi $2h + 2w$ olacak şekilde kenarları kare olan bir kutu aldığınızı varsayın. Bu durumda kutuya en büyük hacmi sağlayacak boyutlar nedir?



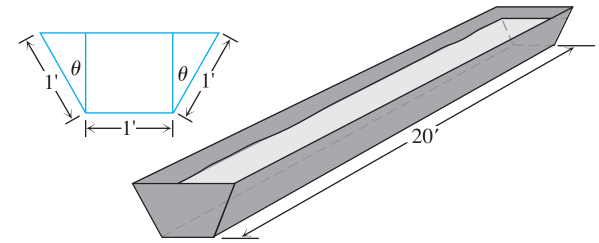
b. Hacmin grafiğini, h'nin bir fonksiyonu olarak çizin ve gördüğünüzü (a) daki çevabınızla karşılaştırın.

22. Bir pencere üzerine bir yarım çember konulmuş bir dikdörtgenden oluşmaktadır. Dikdörtgen şeffaf camdan yapılmışken, yarım çember birim alan başına şeffaf camın yarısı kadar ışık geçiren buzlu camdan yapılmıştır. Toplam çevre sabittir. En fazla ışık verecek pencere boyutlarını bulun. Çerçevenin kalınlığını dikkate almayın.



23. Bir silo (taban dahil değil) üzerine bir yarım küre oturtulmuş bir silindirden oluşacak şekilde yapılacaktır. Yüzey alanının birim kare başına yapım maliyeti yarım küre için silindir yan duvarınınkinin iki katıdır. Hacim sabit ve yapım maliyeti minimum olacaksa, kullanılması gereken boyutları bulun. Silonun kalınlığını ve yapımdaki fireyi dikkate almayın.

24. Aşağıdaki oluk gösterilen boyutlarda yapılacaktır. Sadece θ açısı değiştirilebilir. Hangi θ değeri oluğun hacmini maksimize edecektir?

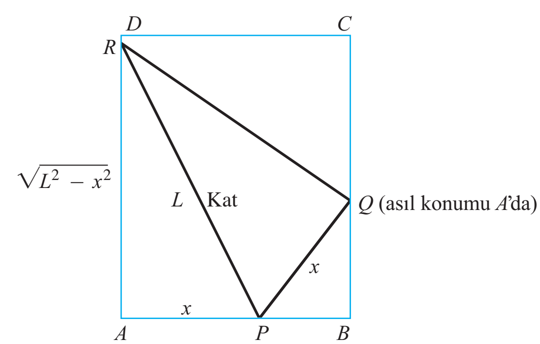


25. Kağıt katlamak Aşağıda gösterilen 8.5'e-11-inçlik dikdörtgen kağıt parçası düz bir yüzeye konulmuş ve köşelerinden biri, şekilde gösterildiği gibi, karşısındaki uzun kenarın üzerine konmuş ve kağıt düzleştirilirken orada tutulmuştur. Problemimiz katın olabildiğince küçük olmasını sağlamaktır. Uzunluğa L deyin. Bunu kağıt ile deneyin

a. $L^2 = 2x^3/(2x - 8.5)$ olduğunu gösterin.

b. Hangi x değeri L^2'yi minimize eder?

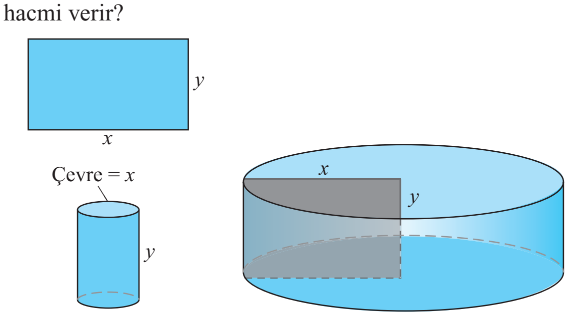
c. L'nin minimum değeri nedir?



26. Silindirler kurmak Aşağıdaki iki kurulum probleminin cevaplarını karşılaştırın.

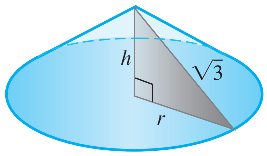
a. Boyutları x cm'ye y cm ve çevresi 36 cm olan dikdörtgensel bir kağıt, şekilde (a) kısmında gösterildiği gibi, bir silindir yapmak üzere yuvarlanacaktır. x ve y'nin hangi değerleri en büyük hacmi verir?

b. Aynı kağıt, şekilde (b) kısmında gösterildiği gibi, y uzunluğundaki kenarlarından biri etrafında, bir silindir tarayacak şekilde döndürülecektir. x ve y'nin hangi değerleri en büyük hacmi verir?



(a) (b)

27. Koniler Kurmak Hipotenüs $\sqrt{3}$ m uzunluğunda olan bir dik üçgen, dik kenarlarından biri etrafında, bir dik dairesel koni elde etmek üzere çevriliyor. Bu yolla yapılabilecek en büyük hacimli koninin yarıçapını, yüksekliğini ve hacmini bulun.



28. Hangi a değerlerinde $f(x) = x^2 + (a/x)$ fonksiyonunun

a. $x = 2$'de yerel bir minimumu vardır?

b. $x = 1$'de bir büküm noktası bulunur?

29. $f(x) = x^2 + (a/x)$ fonksiyonunun hiçbir a değerinde bir yerel maksimumu olamayacağını gösterin.

30. Hangi a ve b değerlerinde $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ fonksiyonunun

a. $x = -1$'de bir yerel maksimumu, $x = 3$'te bir yerel minimumu vardır?

b. $x = 4$'te bir yerel minimumu ve $x = 1$'de bir büküm noktası vardır?

Fiziksel Uygulamalar

31. Dikey hareket Dikey olarak hareket eden bir cismin yüksekliği, s feet ve t saniye olmak üzere

$$s = -16t^2 + 96t + 112$$

ile verilmektedir. Aşağıdakileri bulun

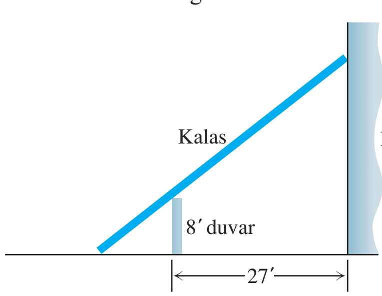
a. cismin $t = 0$ anındaki hızını

b. maksimum yüksekliğini ve zamanını

c. $s = 0$ iken hızını

32. En çabuk rota Jane, kıyıdan 2 mil açıkta bir bottadır ve kıyı şeridinde bota en yakın noktadan 6 mil ileride bir sahil köyüne ulaşmak istemektedir. Saatte 2 mil hızla kürek çekebilmekte ve saatte 5 mil hızla yürüyebilmektedir. Köye en kısa zamanda ulaşabilmesi için, botla kıyıdaki hangi noktaya çıkmalıdır.

33. Kısa kalas Aşağıda gösterilen 8-ft'lik duvar binadan 27-ft uzaktadır. Duvarın dışındaki bir yerden binanın kenarına ulaşabilecek en kısa kalasın uzunluğunu bulun.

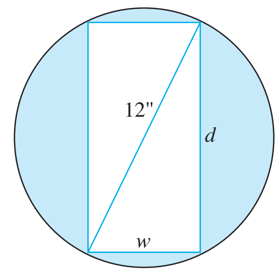


T **34. Bir kalasın kuvveti** Dikdörtgen şeklinde tahta bir kalasın kuvveti S, genişliği kere kalınlığının karesi ile orantılıdır (Şekle bakınız).

a. 12-inç-çaplı silindir şeklinde bir kütükten kesilebilecek en kuvvetli kalasın boyutlarını bulun.

b. S'yi kalasın eni w'nun bir fonksiyonu olarak çizin. Orantı sabitini $k = 1$ olarak alın. Gördüklerinizi (a)'daki yanıtınızla karşılaştırın.

c. Aynı ekranda, veya farklı bir ekranda, S'yi kalasın kalınlığı d'nin fonksiyonu olarak çizin. Yine $k = 1$ alın. Grafiklerinizi birbiriyle ve (a)'daki yanıtınızla karşılaştırın. k için başka bir değer seçmenin etkisi ne olurdu? Deneyin.



T **35. Bir kalasın sertliği** Bir kalasın sertliği S genişliği kere kalınlığının kübü ile orantılıdır.

a. 12-inç-çaplı silindir şeklinde bir kütükten kesilebilecek en sert kalasın boyutlarını bulun.

b. S'yi kalasın eni w'nun bir fonksiyonu olarak çizin. Orantı sabitini $k = 1$ olarak alın. Gördüklerinizi (a)'daki yanıtınızla bağdaştırın.

c. Aynı ekranda, veya farklı bir ekranda, S'yi kalasın kalınlığı d'nin fonksiyonu olarak çizin. Yine $k = 1$ alın. Grafiklerinizi birbiriyle ve (a)'daki yanıtınızla karşılaştırın. k için başka bir değer seçmenin etkisi ne olurdu? Deneyin.

36. Bir doğru üzerinde hareket İki parçacığın s-ekseni üzerindeki konumları, s_1 ve s_2 metre, t saniye olmak üzere $s_1 = \sin t$ ve $s_2 = \sin(t + \pi/3)$'dir.

a. $0 \leq t \leq 2\pi$ aralığının hangi an(lar)ında iki parçacık buluşur?

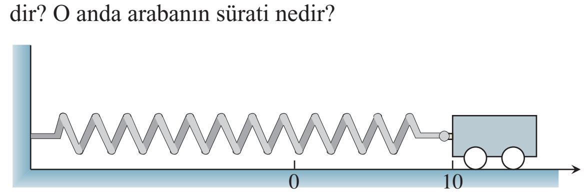
b. Parçacıklar arasındaki uzaklık en fazla ne olur?

c. $0 \leq t \leq 2\pi$ aralığında, parçacıklar arasındaki uzaklık ne zaman eh hızlı değişir?

37. Sürtünmesiz araba Duvara bir yayla bağlı sürtünmesiz küçük bir araba durgun konumundan 10 cm çekiliyor ve $t = 0$ anında 4 saniye için salınıma bırakılıyor. t anındaki konumu $s = 10 \cos \pi t$'dir.

a. Arabanın maksimum hızı nedir? Araba bu hıza ne zaman ulaşır? O anda nerededir ve ivmesinin büyüklüğü nedir?

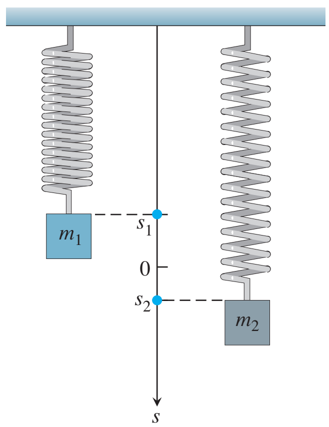
b. Araba, ivmesinin büyüklüğü maksimum olduğunda nerededir? O anda arabanın sürati nedir?



38. Yanyana yaylarla asılı olan iki kütlenin konumları $s_1 = 2 \sin t$ ve $s_2 = \sin 2t$'dir.

a. $0 < t$ aralığının hangi anında iki kütle birbirini geçer? (*İpucu*: $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$)

b. $0 \le t \le 2\pi$ aralığında hangi anda kütleler arasındaki dikey uzaklık en büyüktür? Bu uzaklık nedir? (*İpucu:* $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$)



39. İki gemi arasındaki uzaklık Öğleyin, A gemisi B gemisinin 12 deniz mili kuzeyindedir. A gemisi gün boyu güneye doğru 12 not (saatte deniz mili; bir deniz mili 2000 yardadır) hızla gitmektedir. B gemiside doğuya doğru 8 notla gitmektedir.

a. Zamanı öğleyin $t = 0$ olarak alın ve gemiler arasında uzaklık s'yi t'nin bir fonksiyonu olarak ifade edin.

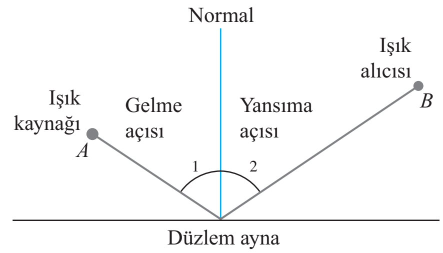
b. Öğle vakti ve 1 saat sonra gemiler arasındaki uzaklık hangi hızla değişmektedir?

c. O günkü görüş mesafesi 5 deniz milidir. Gemiler hiç birbirini görebildi mi?

T **d.** $-1 \le t \le 3$ aralığında s ve ds/dt'nin grafiklerini t'nin fonksiyonları olarak birlikte ve mümkünse farklı renklerde çizin. Grafikleri karşılaştırın ve gördüklerinizi (a) ve (b)'deki yanıtlarla bağdaştırın.

e. ds/dt'nin grafiğinin birinci bölgede yatay bir asimptotu varmış gibi görünmektedir. Bu $t \to \infty$ iken ds/dt'nin bir limit değere ulaştığını belirtir. Bu değer nedir? Bu değerin gemilerin tek tek hızlarıyla ilişkisi nedir?

40. Optikteki Fermat prensibi Optikteki Fermat prensibi ışığın bir noktadan diğerine giderken yolculuk zamanını minimize edecek bir yol izlediğini söyler. Bir A kaynağından çıkan ışık, şekilde gösterildiği gibi, bir düzlem ayna tarafından bir B noktasındaki alıcıya yansıtılmaktadır. Işığın Fermat prensibini gerçekleştirmesi için, gelme açısının yansıma açısına eşit olması gerektiğini gösterin. (Bu sonuç analiz kullanmadan da çıkartılabilir. İsterseniz tamamen geometrik bir yaklaşım da vardır.)



41. Teneke zehirlenmesi Metalik teneke 13.2°'nin altında tutulduğunda, zamanla kırılgan hale gelir ve gri bir toza parçalanır. Teneke cisimler yıllarca soğuk bir iklimde tutulursa kendiliğinden bu gri toza parçalanır. Yıllar önce kiliselerindeki teneke org borularının parçalandığını gören Avrupalılar bu değişikliğe *teneke zehirlenmesi* adını verdiler, çünkü zehirli gibi görünüyordu. Aslında gerçekten zehirliydi, çünkü gri toz kendi oluşumunun katalizörüdür.

Bir kimyasal reaksiyonun *katalizörü* kendisi değişime uğramadan tepkime hızını kontrol eden bir maddedir. Bir *otokatalitik tepkime* ürünü kendi oluşumunun katalizörü olan bir tepkimedir. Böyle bir tepkime başlangıçta katalizör miktarı azsa yavaş gelişebilir ve en sonunda da esas maddenin çoğu kullanıldığı zaman yine yavaşlar. Ancak, arada, hem madde hem de katalizör ürünü bol bulunduğunda, tepkime daha hızlı ilerler.

Bazı durumlarda, reaksiyonun $v = dx/dt$ hızı hem ortamda bulunan esas madde hem de ürün miktarı ile orantılıdır. Yani, v yalnızca x'in bir fonksiyonu olarak kabul edilebilir ve

$$v = kx(a - x) = kax - kx^2$$

yazılabilir. Burada

x = ürün miktarı

a = başlangıçtaki madde miktarı

k = pozitif bir sabit.

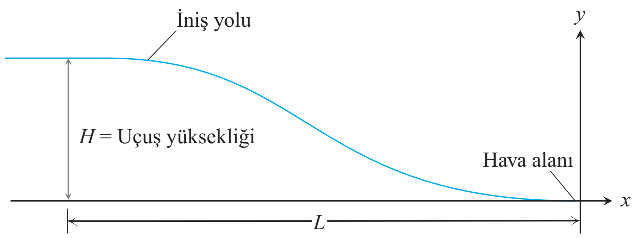
Hangi x değerlerinde v hızının bir maksimumu vardır? v' nin maksimum değeri nedir?

42. Uçağın iniş yolu Bir uçak, şekilde gösterildiği gibi, bir hava alanının, yatay olarak L uzaklığındaki pistine iniş için alçalmaya başladığında H yüksekliğindedir. Uçağın iniş yolunun (rotası) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $y(-L) = H$ ve $y(0) = 0$ şeklinde bir kübik polinom fonksiyonun grafiği olduğunu varsayın.

a. $x = 0$ da dy/dx nedir?

b. $x = -L$ da dy/dx nedir?

c. $y(x) = H\left[2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$ olduğunu göstermek için dy/dx'in $x = 0$'daki ve $x = -L$'deki değerlerini $y(0) = 0$ ve $y(-L) = H$ ile birlikte kullanın.



İş ve Ekonomi

43. Her bir sırt çantasını üretmek ve dağıtmak size c dolara mal olmaktadır. Sırt çantalarının her biri x dolara satılıyorsa, satılan çanta sayısı, a ve b belirli pozitif sabitler olmak üzere,

$$n = \frac{a}{x - c} + b(100 - x)$$

ile veriliyor. Hangi satış fiyatı maksimum kâr getirecektir?

44. Aşağıdaki fiyatları öneren bir tur hizmeti veriyorsunuz.

50 kişi (turu gerçekleştirmek için minimum sayı) tura katılırsa, kişi başı 200$.

Maksimum toplam 80 kişiye kadar her ek kişi için, kişi başı fiyat 2$ azalır.

Turu yapmak 6000$ (sabit maliyet) artı kişi başına 32$ tutmaktadır. Kârınızı maksimize etmek için kaç kişi gereklidir?

45. Vilson sipariş miktarı formülü Envanter yönetiminin formüllerinden biri malların ortalama haftalık siparişinin, ödemesinin ve depolanmasının maliyetinin

$$A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2}$$

olduğunu söyler. Burada q elinizdekiler azaldığında ısmarladığınız şeylerin (ayakkabılar, radyolar, süpürgeler, veya her ne olursa) miktarı, k bir sipariş vermenin maliyeti (aynısı, her ne kadar sıklıkta sipariş verirseniz verin), c bir malın maliyeti (bir sabit), m her hafta satılan mal sayısı (bir sabit) ve h de mal başına haftalık depolama maliyetidir (yer, sigorta, imkanlar ve güvenlik gibi şeyleri de içeren bir sabit).

a. Mağazanızın envanter müdürü olarak işiniz $A(q)$'yu minimize edecek miktarı bulmaktır. Bu nedir? (Yanıt bularak bulacağınız formüle *Wilson lot boyutu formülü* denir).

b. Sipariş maliyetleri bazen sipariş miktarına bağlıdır. Böyle olduğunda, k'yi, k ve q'nun sabit bir katının toplamı $k + bq$ ile değiştirmek daha gerçekçidir. Bu durumda, ısmarlanacak en ekonomik miktar nedir?

46. Üretim seviyesi Ortalama maliyetin en küçük olduğu üretim seviyesinin (varsa), ortalama maliyetin marjinal maliyete eşit olduğu, seviyede olduğunu gösterin.

47. $r(x) = 6x$ ve $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ sizin gelir ve maliyet fonksiyonlarınız ise, yapabileceğiniz en iyi şeyin başa baş kalmak (gelirle maliyetin eşit olması) olduğunu gösterin.

48. Üretim seviyesi $c(x) = x^3 - 20x^2 + 20{,}000x$ fonksiyonunun x adet mal üretmenin maliyeti olduğunu varsayın. x adet mal üretmenin ortalama maliyetini minimize edecek bir üretim seviyesi bulun.

49. Ortalama günlük maliyet Örnek 6'da, herhangi bir malzemenin teslimatının d kadar bir maliyete maruz kaldığını varsayın, depolama maliyeti gün başına bir birim için s $ ve üretim oranı günde p birimdir.

a. Her x günde ne kadar teslimat yapılmalıdır.

b. Eşitliği gösterin

$$\text{devre başına maliyet} = d + \frac{px}{2}sx$$

c. Teslimatlar arasındaki, teslimat ve depolamanın *ortalama günlük maliyetini* minimize eden x^* zamanını ve teslimat miktarını bulun.

d. x^*'ın $y = d/x$ hiperbolü ve $y = psx/2$ doğrusunun kesim noktasında ortaya çıktığını gösterin.

50. Ortalama maliyeti minimize etmek x, bin birim olmak üzere $c(x) = 2000 + 96x + 4x^{3/2}$ olduğunu varsayın. Ortalama maliyeti minimize edecek bir üretim seviyesi varmıdır?

Tıp

51. İlaca duyarlılık (*Bölüm 3.2, Alıştırma 50'nin devamı*) dR/dM türevini maksimize eden M değerini bularak vücudun en duyarlı olduğu ilaç miktarını bulun. Burada

$$R = M^2\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right)$$

ile verilir ve C bir sabittir.

52. Nasıl öksürüyoruz

a. Öksürdüğümüzde, trake (soluk borusu) dışarı çıkan havanın hızını arttıracak şekilde kasılır. Bu hızı maksimize etmek için ne kadar kasılması gerektiği ve öksürdüğümüzde gerçekten bu kadar kasılıp kasılmadığı sorusunu akla getirir.

Soluk borusu duvarının esnekliği ve duvarın yakınlarında havanın sürtünmeyle nasıl yavaşlatıldığı hakkında yapılan uygun varsayımlar altında, ortalama akış hızı v

$$v = c(r_0 - r)r^2 \text{ cm/sn} \qquad \frac{r_0}{2} \le r \le r_0$$

denklemiyle modellenebilir. Burada r_0 trakenin cm olarak yarıçapı ve c de değeri kısmen trakenin uzunluğuna bağlı olan pozitif bir sabittir.

$r = (2/3)r_0$ olduğunda, yani trake %33 oranında kasıldığında v'nin en büyük olduğunu gösterin. Bunun en güzel yanı, x-ışını fotoğraflarının öksürdüğümüzde trakenin bu kadar kasıldığını doğrulamasıdır.

T **b.** $r_0 = 0.5$ ve $c = 1$ olarak alın ve v'yi $0 \le r \le 0.5$ aralığında çizin. Gördüklerinizi $r = (2/3)\, r_0$ olduğunda v'nin maksimum olduğu iddiasıyla karşılaştırın.

Teori ve Örnekler

53. Pozitif tam sayılar için bir eşitsizlik a, b, c ve d pozitif tamsayılarsa, şu ifadeyi doğrulayın:

$$\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{abcd} \geq 16$$

54. Örnek 4'teki dt/dx türevi

a.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \text{'nin}$$

x'in artan bir fonksiyonu olduğunu gösterin.

b.

$$g(x) = \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}} \text{'nin}$$

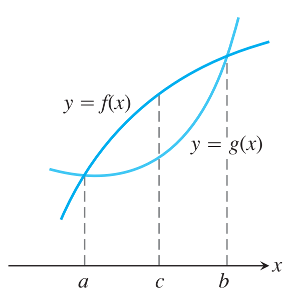
x'in azalan bir fonksiyonu olduğunu gösterin.

c.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{c_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}} \text{'nin}$$

x'in artan bir fonksiyonu olduğunu gösterin.

55. $f(x)$ ve $g(x)$ aşağıda şekilleri verilen türevlenebilir fonksiyonlar olsun. c noktası eğriler arasındaki dikey mesafenin en büyük olduğu yerdir. İki eğrinin c noktasındaki teğetlerinin bir özelliği var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.



56. $f(x) = 3 + 4\cos x + \cos 2x$ fonksiyonunun hiç negatif olup olmadığını bulmanız istensin.

a. Neden sadece $[0, 2\pi]$ aralığındaki x değerlerini ele almanız gerektiğini açıklayın.

b. f hiç negatif olur mu? Açıklayın.

57. a. $y = \cot x - \sqrt{2}\csc x$ fonksiyonunun $0 < x < \pi$ aralığında bir mutlak maksimumu bulunmaktadır. Bunu bulun.

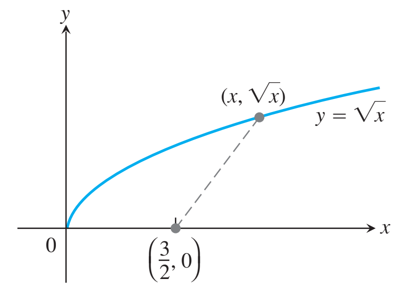
T **b.** Fonksiyonun grafiğini çizin ve gördüklerinizi (a)'daki yanıtınızla karşılaştırın.

58. a. $y = \tan x + 3\cot x$ fonksiyonunun $0 < x < \pi/2$ aralığında bir mutlak minimumu bulunmaktadır. Bunu bulun.

T **b.** Fonksiyonun grafiğini çizin ve gördüklerinizi (a)'daki yanıtınızla karşılaştırın.

59. a. $y = \sqrt{x}$ eğrisi $(3/2, 0)$ noktasına ne kadar yaklaşır? (*Yol gösterme:* Uzaklığın karesini minimize ederseniz, kareköklerden kurtulursunuz)

T **b.** $y = \sqrt{x}$'i ve uzaklık fonksiyonunu birlikte çizin ve gördüklerinizi (a)'daki cevabınızla bağdaştırın.



60. a. $y = \sqrt{16-x^2}$ yarıçemberi $\left(1, \sqrt{3}\right)$ noktasına ne kadar yaklaşır?

T **b.** $y = \sqrt{16-x^2}$'i ve uzaklık fonksiyonunu birlikte çizin ve gördüklerinizi (a)'daki cevabınızla bağdaştırın.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

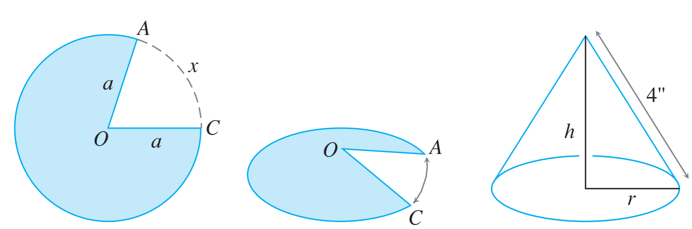
61 ve 62 alıştırmalarında bir BCS kullanmak faydalı olabilir.

61. Genelleştirilmiş koni problemi Yüksekliği h ve yarıçapı r olan bir koni, yarıçapı a inç olan yassı bir dairesel diskten, yay uzunluğu x inç olan bir AOC dilimi çıkarılarak ve sonra OA ve OC kenarları birleştirilerek yapılmıştır.

a. Koninin hacmi V'nin bir formülünü x ve a cinsinden bulun.

b. $a = 4, 5, 6, 8$ için, maksimum hacimli konide r ve h'yi bulun.

c. Maksimum hacimli koni için, r ve h arasında a'dan bağımsız basit bir bağıntı bulun.

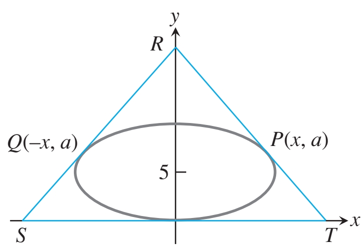


ÖLÇEKLİ DEĞİL

62. Bir elipsi sınırlamak $P(x, a)$ ve $Q(-x, a)$ $(0, 5)$ merkezli

$$\frac{x^2}{100} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$

elipsin üst yarısı üzerinde iki nokta olsun. Elipsin P ve Q noktalarındaki teğetler kullanılarak, şekilde gösterildiği gibi, bir RST üçgeni oluşturuluyor.



a. $y = f(x)$ elipsin üst yarısını temsil eden fonksiyon olmak üzere, üçgenin alanının

$$A(x) = -f'(x)\left[x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2$$

olduğunu gösterin.

b. A'nın tanım kümesi nedir? Grafiğin asimptotları problemin konusu ile nasıl ilişkilidir?

c. En küçük alanlı üçgenin yüksekliğini belirleyin. Elips merkezinin y koordinatıyla nasıl ilişkilidir?

d. (a), (b) ve (c) şıklarını, (0, 13) merkezli

$$\frac{x^2}{C^2} + \frac{(y - B)^2}{B^2} = 1$$

elipsi için tekrarlayın. Yükseklik $3B$ iken, üçgenin alanının minimum olduğunu gösterin.

4.6 Belirsiz Şekiller ve L'Hôpital Kuralı

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Guillaume François Antoine de l'Hôpital (1661–1704)

Onyedinci yüzyılın sonlarında, John Bernoulli hem payları hem de paydaları sıfıra veya $+\infty$ giden kesirlerin limitlerini bulmak için bir yol keşfetti. Kural günümüzde, kuralın ilk kez basılı olarak yayınlandığı ilk diferansiyel analize giriş kitabını yazan bir Fransız soylusunun, Guillaume François **Antoine de l'Hôpital**'in adıyla l'Hôpital Kuralı olarak bilinmektedir.

0 /0 Belirsiz Şekli

$f(x)$ ve $g(x)$ sürekli fonksiyonlarının ikisi de $x = a$'da sıfırsa,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$x = a$ yazılarak bulunamaz. Bunu yazmak 0/0 verir ki bu da **belirsiz form** olarak adlandırılan, hesaplayamadığımız anlamsız bir ifadedir. Bazen, fakat her zaman değil, belirsiz formlara yol açan limitler kısaltma, terimleri yeniden düzenlenme veya başka cebirsel işlemler yardımıyla bulunabilir. Bu, Bölüm 2'den edindiğimiz tecrübedir. Bölüm 2.4'te $\lim_{x\to 0} (\sin x)/x$'i bulmak önemli ölçüde analiz gerektirdi. Fakat türevleri hesapladığımız ve $x = a$ yazdığımızda her zaman 0/ 0'ın eşdeğerini veren

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

limitinde hatırı sayılır bir başarı gösterdik. l'Hôpital kuralı türevlerle sağladığımız başarıyı, belirsiz formlara yol açan limitleri hesaplarken kullanmamızı sağlar.

TEOREM 6 L'Hôpital Kuralı (Birinci Şekil)

$f(a) = g(a) = 0$ olduğunu, $f'(a)$ ve $g'(a)$'nın var olduğunu ve $g'(a) \neq 0$ olduğunu varsayın. Bu durumda

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

olur.

Dikkat

f/g'ye l'Hôpital Kuralını uygulamak için, f'nin türevini g'nin türevine bölün. f/g'nin türevini alma tuzağına düşmeyin. Kullanılacak bölüm f'/g''dür, $(f/g)'$ değil.

İspat Kendileri de birer limit olan $f'(a)$ ve $g'(a)$'dan geriye doğru gidersek,

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \quad \blacksquare$$

buluruz.

ÖRNEK 1 L'Hôpital Kuralını Kullanmak

(a) $$\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x} = \left.\frac{3-\cos x}{1}\right|_{x=0} = 2$$

(b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \left.\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1}\right|_{x=0} = \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

Bazen, bir türev alma işleminden sonra, Örnek 2 de gördüğümüz gibi, yeni pay ve payda'nın ikisi birden $x = a$ da sıfırdır. Bu durumda L'Hôpital Kuralının daha kuvvetli bir şeklini uygularız.

TEOREM 7 **L'Hôpital Kuralı (Daha Kuvvetli Şekil)**

$f(a) = g(a) = 0$ olduğunu, f ile g'nin a noktasını içeren bir I açık aralığında türevlenebilir olduklarını varsayın. Ayrıca $x \neq a$ ise, I 'da $g'(x) \neq 0$ olduğunu varsayın. Bu durumda, sağdaki limitin var olması koşuluyla

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olur.

Teorem 7'yi ispatlamadan önce bir örneği inceleyelim.

ÖRNEK 2 L'Hôpital Kuralının Kuvvetli Şeklini Uygulamak

(a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1/2)(1+x)^{-1/2}-1/2}{2x} \qquad \text{Hala } \frac{0}{0}\text{; tekrar türev alın.}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-(1/4)(1+x)^{-3/2}}{2} = -\frac{1}{8} \qquad \frac{0}{0} \text{ değil; limit bulundu.}$$

(b) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} \qquad \text{Hala } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} \qquad \text{Hala } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6} \qquad \frac{0}{0} \text{ değil; limit bulundu.} \quad \blacksquare$$

L'Hôpital Kuralının kuvvetli şeklinin ispatı, Cauchy'nin Ortalama Değer Teoremine dayanır. Bir fonksiyon yerine iki fonksiyon içeren bir Ortalama Değer Teoremi. Önce Cauchy Teoremini ispat ediyoruz ve sonra nasıl L'Hôpital Kuralına yol açtığını gösteriyoruz.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Augustin-Louis Cauchy
(1789–1857)

TEOREM 8 Cauchy Ortalama Değer Teoremi

f ve g fonksiyonlarının $[a, b]$ aralığında sürekli, (a, b)'de türevlenebilir olduklarını ve ayrıca (a, b)'de $g'(x) \neq 0$ olduğunu varsayın. Bu durumda, (a, b)'de

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

olacak şekilde bir c sayısı bulunur.

İspat Bölüm 4.2'deki Ortalama Değer Teoremini iki kere uygularız. İlk olarak, $g(a) \neq g(b)$ olduğunu göstermek için kullanırız. Eğer $g(a) = g(b)$ olsaydı, Ortalama Değer Teoremi, a ile b arasındaki bir c sayısı için

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 0$$

verirdi. Oysa (a, b)'de $g'(x) \neq 0$ olduğu için, bu doğru olamaz.

Sonra, Ortalama Değer Teoremini

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

fonksiyonuna uygularız. Bu fonksiyon f ve g ile aynı yerlerde sürekli ve türevlenebilirdir ve $F(b) = F(a) = 0$'dır. Dolayısıyla a ve b arasında $F'(c) = 0$ olduğu bir c sayısı vardır. f ve g cinsinden ifade edildiğinde bu denklem

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g'(c)] = 0$$

veya

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

haline dönüşür. ■

Şuna dikkat edin, Bölüm 4.2'deki Ortalama Değer Teoremi, $g(x) = x$ ile Teorem 8 dir.

Cauchy Ortalama Değer Teoremi'nin, $x = (t)$ ve $y = f(t)$ parametrik denklemleri ile tanımlanan bir C eğrisi için bir geometrik yorumu vardır. Bölüm 3.5 Denklem (2) den, parametrik eğrinin t deki eğimi

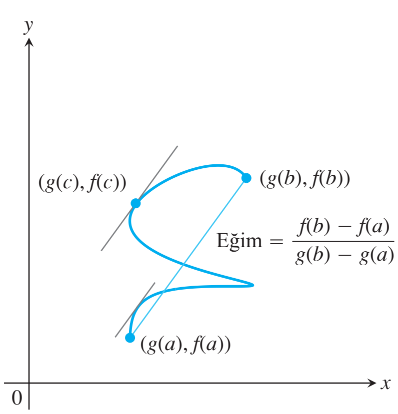
$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

ile verilir, bundan dolayı $f'(c)/g'(c)$, $t = c$ için eğrinin teğetinin eğimidir. C üzerindeki $(g(a), f(a))$ ve $(g(b), f(b))$ noktalarını birleştiren kirişin eğimi

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

dır. Teorem 8, (a, b) aralığında, eğrinin $(g(c), f(c))$'deki teğetinin eğiminin, $(g(a), f(a))$ ve $(g(b), f(b))$ noktalarını birleştiren kirişin eğimi ile aynı olduğu, bir c parametre değerinin var olduğunu söyler. Bu geometrik sonuç Şekil 4.42 de gösterilmiştir. Parametrenin, bu şekilde birden fazla c değerinin olabileceğine dikkat edin.

Şimdi Teorem 7'yi ispat edelim.



ŞEKİL 4.42 $(g(c), f(c))$'deki teğetin eğiminin, $(g(a), f(a))$ ve $(g(b), f(b))$ noktalarını birleştiren kirişin eğimi ile aynı olduğu en az bir $t = c$, $a < c < b$ parametre değeri vardır.

L'Hôpital Kuralının Daha Kuvvetli Şeklinin İspatı Önce limit denklemini $x \to a^+$ durumu için gerçekleriz. Bu yöntemi $x \to a^-$'ye uygulamak için neredeyse hiç değişikliğe gerek yoktur ve bu iki durumun birleştirilmesi sonucu verir.

x'in a'nın sağında bulunduğunu varsayın. Bu durumda $g'(x) \neq 0$ olur ve a'dan x'e kadar olan kapalı aralıkta Cauchy Ortalama Değer Teoremini uygulayabiliriz. Bu adım, a ile x arasında

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

olacak şekilde bir c sayısı sağlar. Ama $f(a) = g(a) = 0$'dır, dolayısıyla

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

olur. x a'ya yaklaşırken, c de a'ya yaklaşır çünkü x ile a arasındadır. Böylece

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olur. Bu l'Hôpital kuralını x'in a'ya üstten yaklaştığı durum için doğrular. x'in a'ya alttan yaklaştığı durum ise Cauchy Ortalama Değer Teoremini $[x, a]$, $x < a$, kapalı aralığına uygulanarak ispatlanır. ■

Gerçek hayatta karşılaşılan bir çok fonksiyon ve bu kitaptaki bir çok fonksiyon, l'Hopital kuralının koşullarını sağlar.

L'Hôpital Kuralını Kullanmak

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

limitini l'Hôpital kuralı ile bulmak için, $x = a$ da $0/0$ fomunu elde ettiğiniz sürece f ve g'nin türevlerini almaya devam edin. Fakat, bu türevlerden biri veya öteki $x = a$ da sıfırdan farklı olduğunda türev almayı dururururuz. Payın veya paydanın sıfırdan farklı sonlu bir limitinin olması durumunda l'Hôpital Kuralı uygulanamaz.

ÖRNEK 3 L'Hôpital Kuralının Kuvvetli Şeklinin Yanlış Uygulanması

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1 + 2x} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \frac{0}{0} \text{ değil; limit bulundu}$$

Buraya kadar hesaplama doğrudur, fakat l'Hôpital kuralını bir kere daha uygulamak için türev almaya devam edersek,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1 + 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

buluruz, ki bu da yanlıştır. L'Hôpital Kuralı sadece belirsiz şekiller veren limitlere uygulanabilir ve $0/1$ bir belirsiz şekil değildir. ■

Teorem 7'nin ispatından açıkça görüldüğü gibi, l'Hôpital kuralı, ayrıca tek taraflı limitlere de uygulanır.

ÖRNEK 4 L'Hôpital Kuralının Tek-Taraflı Limitlerle Kullanmak

∞ ve $+\infty$'un aynı şey demek olduğunu hatırlayın.

(a) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x^2}$ $\qquad \dfrac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x}{2x} = \infty$ $\qquad$ $x > 0$ için pozitif

(b) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{x^2}$ $\qquad \dfrac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0^-} \dfrac{\cos x}{2x} = -\infty$ $\qquad$ $x < 0$ için negatif ■

∞/∞, $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$ Belirsiz Şekilleri

Bazen, $x = a$ yazarak $x \to a$ iken limit hesaplamaya çalıştığımızda, $0/0$ yerine ∞/∞, $\infty \cdot 0$ veya $\infty - \infty$ gibi ne olduğu belirsiz ifadeler elde ederiz. Önce ∞/∞ formunu ele alıyoruz.

Daha ileri seviyede kitaplarda l'Hôpital Kuralının $0/0$'a olduğu gibi ∞/∞'a uygulandığı da ispatlanmaktadır. $x \to a$ iken $f(x) \to \pm\infty$ ve $g(x) \to \pm\infty$ ise, sağdaki limitin var olması koşuluyla

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

dir. $x \to a$ notasyonunda a sonlu veya sonsuz olabilir. Ayrıca, $x \to a$ ifadesi $x \to a^+$ veya $x \to a^-$ tek taraflı limitleri ile değiştirilebilir.

ÖRNEK 5 ∞/∞ Belirsiz Şekli ile Çalışmak

(a) $\lim_{x\to\pi/2} \dfrac{\sec x}{1 + \tan x}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x - 2x^2}{3x^2 + 5x}$

limitlerini bulun.

Çözüm

(a) Pay ve payda $x = \pi/2$'de süreksizdir, bu yüzden burada tek taraflı limitleri inceleriz. L'Hôpital Kuralını uygulamak için, bir uç noktası $x = \pi/2$ olan herhangi bir I açık aralığı seçebiliriz.

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\sec x}{1 + \tan x} \qquad \text{soldan } \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\sec x \tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \sin x = 1$$

Bir belirsiz şekil olarak $(-\infty)/(-\infty)$ ile sağdan türevde 1 dir. Bu nedenle, iki taraflı limit 1'e eşittir.

(b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x - 2x^2}{3x^2 + 5x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1 - 4x}{6x + 5} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{-4}{6} = -\dfrac{2}{3}$ ■

Şimdi dikkatimizi $\infty \cdot 0$ ve $\infty - \infty$ belirsiz şekillerine çeviriyoruz. Bazen bu şekiller, cebirsel işlemler yardımıyla $0/0$ veya ∞/∞ belirsiz şekillerine dönüştürülmek üzere ele alınabilir. Burada yine, $\infty \cdot 0$'ın veya $\infty - \infty$'un birer sayı olduğunu ileri sürmek niyetinde değiliz. Bunlar sadece, limitleri düşünürken fonksiyonların davranışlarını tanımlayan notasyonlardır. Bu belirsiz şekillerle nasıl çalışmamız gerektiğini gösteren örnekler aşağıdadır.

ÖRNEK 6 $\infty \cdot 0$ Belirsiz Şekli ile Çalışmak

$$\lim_{x\to\infty}\left(x \sin\frac{1}{x}\right)$$

limitini bulun.

Çözüm

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(x \sin\frac{1}{x}\right) & & \infty \cdot 0\\ &= \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{h}\sin h\right) & h = 1/x.\\ &= 1\end{aligned}$$

■

ÖRNEK 7 $\infty - \infty$ Belirsiz Şekli ile Çalışmak

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$$

limitini bulun.

Çözüm $x \to 0^+$ ise $\sin x \to 0^+$ dir ve

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \to \infty - \infty$$

olur. Benzer şekilde $x \to 0^-$ ise $\sin x \to 0^-$dir ve

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \to -\infty - (-\infty) = -\infty + \infty$$

olur. İki şekilde limitte ne olduğunu göstermez. Limiti bulmak için, önce kesirleri birleştiririz:

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} \qquad \text{ortak payda } x \sin x \text{ dir.}$$

Sonra, sonuca l'Hôpital Kuralını uygularız:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x \sin x} & \frac{0}{0}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{\sin x + x\cos x} & \text{Hala } \frac{0}{0}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0\end{aligned}$$

■

bulunur.

ALIŞTIRMALAR 4.6

Limitleri Bulmak

1–6 alıştırmalarında, limiti bulmak için l'Hôpital Kuralını kullanın. Sonra, limiti Bölüm 2'de öğrendiğimiz bir yöntemle hesaplayın.

1. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$

3. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{5x^2-3x}{7x^2+1}$

4. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{4x^3-x-3}$

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

6. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2x^2+3x}{x^3+x+1}$

L'Hôpital Kuralını Uygulamak

7–26 alıştırmalarındaki limitleri l'Hôpital kuralıyla bulun.

7. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin t^2}{t}$

8. $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{2x-\pi}{\cos x}$

9. $\lim_{\theta\to \pi} \dfrac{\sin\theta}{\pi-\theta}$

10. $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$

11. $\lim_{x\to \pi/4} \dfrac{\sin x-\cos x}{x-\pi/4}$

12. $\lim_{x\to \pi/3} \dfrac{\cos x-0.5}{x-\pi/3}$

13. $\lim_{x\to (\pi/2)} -\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\tan x$

14. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x}{x+7\sqrt{x}}$

15. $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x^2-(3x+1)\sqrt{x}+2}{x-1}$

16. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$

17. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{a(a+x)}-a}{x}, \quad a>0$

18. $\lim_{t\to 0} \dfrac{10(\sin t-t)}{t^3}$

19. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x(\cos x-1)}{\sin x-x}$

20. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sin(a+h)-\sin a}{h}$

21. $\lim_{r\to 1} \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$, n pozitif bir tam sayı

22. $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

23. $\lim_{x\to \infty} (x-\sqrt{x^2+x})$

24. $\lim_{x\to \infty} x\tan\dfrac{1}{x}$

25. $\lim_{x\to \pm\infty} \dfrac{3x-5}{2x^2-x+2}$

26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{\tan 11x}$

Teori ve Uygulamalar

L'Hôpital Kuralının 27–30 alıştırmalarındaki limitlere yardımı olmaz. Deneyin; bir döngü içinde kalırsınız. Limitleri bir başka yolla bulun.

27. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}$

28. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}$

29. $\lim_{x\to (\pi/2)^-} \dfrac{\sec x}{\tan x}$

30. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\cot x}{\csc x}$

31. Hangisi doğru, hangisi yanlıştır? Cevabınızı açıklayın.

a. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-3} = \lim_{x\to 3} \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{6}$

b. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-3} = \dfrac{0}{6} = 0$

32. **∞/∞ Şekli** $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ olan ve aşağıdakileri sağlayan türevlenebilir iki f ve g fonksiyonu bulun.

a. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 3$ **b.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

c. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$

33. **Sürekli genişleme** Aşağıdaki fonksiyonu $x = 0$ da sürekli kılacak bir c değeri bulun. c değerinizin neden işe yaradığını açıklayın.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{9x-3\sin 3x}{5x^3}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

34. $f(x) = \begin{cases} x+2, & x\neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ve $g(x) = \begin{cases} x+1, & x\neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

olsun.

a. $\lim_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 1$ fakat $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 2$

olduğunu gösterin.

b. Bunun neden l'Hôpital Kuralı ile çelişmediğini açıklayın.

T 35. **0/0 Şekli** Grafik çizerek

$$\lim_{x\to 1} \dfrac{2x^2-(3x+1)\sqrt{x}+2}{x-1}$$

limiti için bir tahminde bulunun. Sonra tahmininizi l'Hôpital Kuralı ile doğrulayın.

T 36. **$\infty - \infty$ Şekli**

a. $f(x) = x-\sqrt{x^2+x}$ 'in grafiğini uygun, geniş bir x değerleri aralığında çizerek

$$\lim_{x\to\infty} \left(x-\sqrt{x^2+x}\right)$$

limiti için tahminde bulunun.

b. Şimdi, limiti l'Hôpital Kuralı ile bularak tahmininizi doğrulayın. İlk adım olarak, $f(x)$'i $\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)/\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)$ kesri ile çarpın ve yeni pay'ı sadeleştirin.

T **37.** $f(x) = \dfrac{1 - \cos x^6}{x^{12}}$ olsun. f'nin bazı grafiklerinin $\lim_{x\to 0} f(x)$ limiti hakkında neden yanlış bilgi verdiğini açıklayın. (*İpucu*: [–1, 1]'e [–0.5, 1] çerçevesini deneyin)

38. Aşağıda verilen fonksiyonlar ve aralıklar için, Cauchy Ortalama Değer Teoreminin sonucunu sağlayan bütün c değerlerini bulun.

a. $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $(a, b) = (-2, 0)$

b. $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, (a, b) keyfi

c. $f(x) = x^3/3 - 4x$, $g(x) = x^2$, $(a, b) = (0, 3)$

39. Şekilde, çemberin OA yarıçapı 1 dir ve AB çembere A da teğettir. AC yayının radyan ölçüsü ve AB doğru parçasının uzunluğu θ. B ve C den geçen doğru, x-eksenini $P(x, 0)$ noktasında kesmektedir.

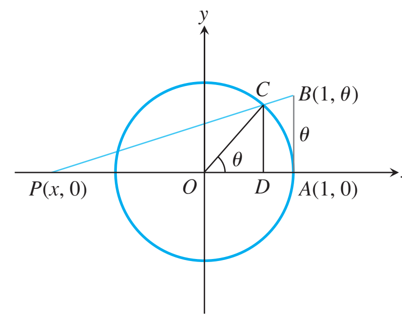
a. PA uzunluğunun

$$1 - x = \frac{\theta(1 - \cos\theta)}{\theta - \sin\theta}$$

b. $\lim_{\theta\to 0}(1 - x)$ 'i bulun.

c. $\lim_{\theta\to\infty}[(1 - x) - (1 - \cos\theta)] = 0$ olduğunu gösterin.

Bunu geometrik olarak yorumlayın.

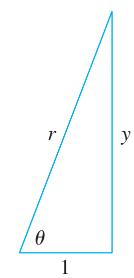


40. Bir dik üçgenin bir dik kenarının uzunluğu 1, diğerinin uzunluğu y ve hipotenüsünün uzunluğu r dir. y'nin karşısındaki açının radyan ölçüsü θ dir. $\theta \to \pi/2$ iken aşağıdaki limitleri bulun.

a. $r - y$.

b. $r^2 - y^2$.

c. $r^3 - y^3$.



4.7 Newton Yöntemi

Tarihsel Biyografi

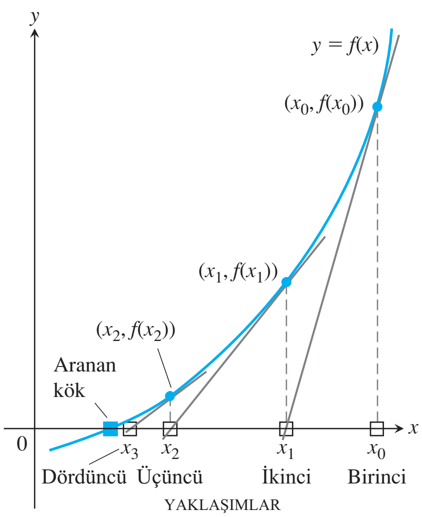
Niels Henrik Abel
(1802–1829)

Matematiğin temel problemlerinden biri denklemler çözmektir. Kuadratik kök formülünü kullanarak, $x^2 - 3x + 2 = 0$ denklemini sağlayan bir noktayı (çözümü) nasıl bulacağımızı biliyoruz. Kübik ve dördüncü dereceden denklemleri (3. veya 4. dereceden polinomlar) çözmek için de daha karmaşık formüller vardır, fakat Norveçli matematikçi Neils Abel beşinci dereceden polinomları çözmek için basit formüllerin bulunmadığını gösterdi. Ayrıca, $\sin x = x^2$ gibi, hem transandant fonksiyonlar ve hem de polinomlar veya başka cebirsel fonksiyonlar içeren denklemleri çözmek için de basit formüller yoktur.

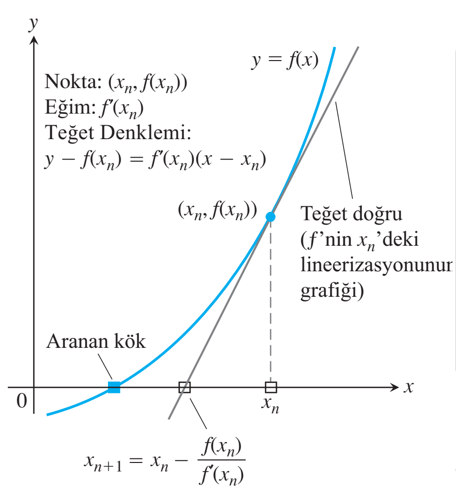
Bu bölümde, *Newton yöntemi,* ya da *Newton-Raphson yöntemi* denen ve bir $f(x) = 0$ denkleminin çözümüne yaklaşmak için bir teknik olan bir sayısal yöntem çalışacağız. Aslında bu yöntem, f'nin sıfır olduğu noktaların yakınlarında $y = f(x)$ grafiğinin yerine teğetleri kullanır (f'nin sıfır olduğu bir x değeri, f fonksiyonunun bir kökü ve $f(x) = 0$ denkleminin bir çözümüdür).

Newton Yönteminin İşleyişi

Bir $f(x) = 0$ denkleminin bir çözümünü tahmin ederken Newton yönteminin amacı çözüme yaklaşan bir yaklaşımlar dizisi üretmektir. Dizinin birinci sayısı x_0'ı seçeriz. Sonra, uygun koşullar altında, yöntem f'nin grafiğinin x eksenini kestiği bir noktaya doğru adım adım ilerleyerek geri kalanını halleder (Şekil 4.43).



ŞEKİL 4.43 Newton yöntemi bir x_0 başlangıç tahmini ile başlar ve (uygun durumlarda) bir zaman aralığında tahmini bir adım geliştirir.



ŞEKİL 4.44 Newton yönteminin art arda adımlarının geometrisi. Eğri üzerinde x_n'den yukarı doğru çıkar ve teğeti aşağı doğru izleyerek x_{n+1}'i buluruz.

Yöntem, her adımda lineerizasyonlarından birinin sıfırı ile f'nin sıfırına yaklaşır. Nasıl çalıştığı aşağıdadır.

Başlangıç tahmini, x_0 grafik çizerek veya sadece tahmin edilerek seçilebilir. Yöntem daha sonra $y = f(x)$ eğrisinin $(x_0, f(x_0))$ noktasındaki teğetini, eğriye yaklaşımda bulunmakta kullanır ve teğetin x eksenini kestiği noktaya x_1 der (Şekil 4.43). x_1 noktası genelde çözüme x_0'dan daha yakındır. Eğrinin $(x_1, f(x_1))$ noktasındaki teğetinin x-eksenini kestiği nokta olan x_2 noktası dizideki bir sonraki yaklaşımdır. Her yaklaşımı bir sonrakini hesaplamada kullanıp, köke yeterince yaklaşıp durabilecek noktaya gelene dek bu işe devam ederiz.

Art arda yaklaşımları üretmek için aşağıdaki şekilde bir formül geliştirebiliriz. x_n yaklaşımı verilmişse, eğrinin $(x_n, f(x_n))$ noktasındaki teğetinin nokta-eğim denklemi

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

dir. Teğetin x eksenini kestiği noktayı $y = 0$ yazarak buluruz (Şekil 4.44).

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x - x_n$$

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad f'(x_n) \neq 0 \text{ ise}$$

x'in bu değeri bir sonraki yaklaşım olan x_{n+1}'dir.
Burada Newton'un metodunun bir özeti vardır.

Newton Yönteminin İşleyişi

1. $f(x) = 0$ denkleminin bir köküne bir ilk yaklaşım için bir tahminde bulunun. Bir $y = f(x)$ grafiği size yardımcı olacaktır.
2. İlk yaklaşımı kullanarak bir ikincisini, ikinciyi kullanarak üçüncüsünü ve bu şekilde devam ederek kökü bulmak için aşağıdaki denklemi kullanın.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad f'(x_n) \neq 0 \text{ ise} \qquad (1)$$

Newton Yöntemini Uygulama

Newton yönteminin uygulamaları genellikle, bunları bilgisayar veya hesap makinelerine daha uygun hale getiren, çok sayıda sayısal hesaplamalar içerir. İlk örneğimizde $\sqrt{2}$'ye ondalık yaklaşımları $f(x) = x^2 - 2 = 0$ denkleminin pozitif kökünü tahmin ederek bulacağız. Yine de, hesaplamalar elle yapıldığında dahi (çok sıkıcı olabilir), denklemlerin çözümlerini bulmak için güçlü bir yol verirler.

İlk örneğimizde $f(x) = x^2 - 2 = 0$ denkleminin pozitif kökünü tahmin ederek $\sqrt{2}$'ye ondalık yaklaşımlar bulacağız.

ÖRNEK 1 2'nin Kare Kökünü Bulmak

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

denkleminin pozitif kökünü bulun.

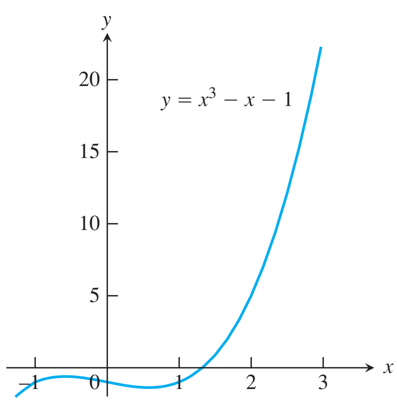
Çözüm $f(x) = x^2 - 2$ ve $f'(x) = 2x$ ile, (1) denklemi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n{}^2 - 2}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

halini alır.

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

denklemi, her yaklaşımdan bir sonrakine birkaç tuşa basarak ulaşmamızı sağlar. $x_0 = 1$ başlangıç değeri ile, aşağıdaki tablonun ilk sütunundaki sonuçları elde ederiz (5 ondalık basamağa kadar, $\sqrt{2} = 1.41421$'dir).



ŞEKİL 4.45 $f(x) = x^3 - x - 1$ fonksiyonunun grafiği x-eksenini bir defa keser; bu bulmak istediğimiz köktür. (Örnek 2).

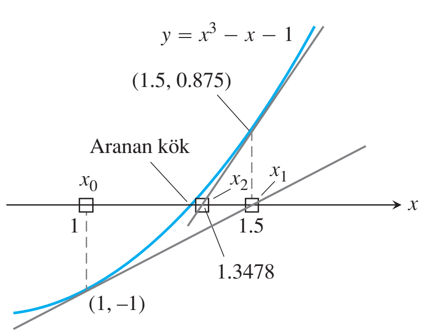
	Hata	**Doğru rakam sayısı**
$x_0 = 1$	-0.41421	1
$x_1 = 1.5$	0.08579	1
$x_2 = 1.41667$	0.00246	3
$x_3 = 1.41422$	0.00001	5

■

Newton yöntemi çok çabuk yakınsadığı için (bunun hakkında daha fazlası daha sonra) çoğu hesap makinesinin kök bulmakta kullandığı yöntemdir. Örnek 1'deki tablodaki aritmetik, 5 ondalık basamak yerine 13 ondalık basamağa kadar götürülseydi, bir adım daha gitmek $\sqrt{2}$'yi 10 dan daha fazla ondalık basamağa kadar doğru verecekti.

ÖRNEK 2 Newton Yöntemini Kullanmak

$y = x^3 - x$ eğrisinin $y = 1$ yatay doğrusunu kestiği noktanın x koordinatını bulun.



ŞEKİL 4.46 Tablo 4.1'deki ilk üç x değeri (dört ondalığa kadar).

Çözüm Eğri doğruyu $x^3 - x = 1$ veya $x^3 - x - 1 = 0$ olduğunda keser. $f(x) = x^3 - x - 1$ ne zaman sıfır olur? $f(1) = -1$ ve $f(2) = 5$ olduğundan, Ara Değer Teoremine göre aralığında bir kökün var olduğunu biliyoruz (Şekil 4.45).

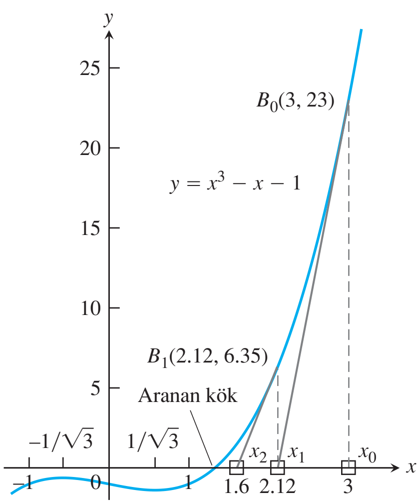
Newton yöntemini, $x_6 = 1$ başlangıç değeri ile f'ye uygularız. Sonuçlar Tablo 4.1 ve Şekil 4.6'da görülmektedir.

$n = 5$ iken, $x_6 = x_5 = 1.324717957$ sonucuna ulaşırız. $x_{n+1} = x_n$ olduğunda (1) denklemi $f(x_n) = 0$ olduğunu gösterir. $f(x) = 0$'ın 9 ondalık basamağa kadar çözümünü bulduk.

Şekil 4.7'de Örnek 2'deki işlemin $x_0 = 3$ ile eğri üzerindeki B_0 (3, 23) noktasından başlamış olabileceğini belirttik. B_0 noktası x ekseninden oldukça uzaktır, fakat B_0'daki teğet x eksenini (2.12, 0) yakınında keser, dolayısıyla x_1 x_0'a göre daha gelişmiştir. $f(x) = x^3 - x - 1$ ve $f'(x) = 3x^2 - 1$ olmak üzere, (1) denklemini daha önceki gibi üst üste kullanırsak, 9 ondalıklı çözüm $x_7 = x_6 = 1.3247\ 17957$'yi yedi adımda doğrularız. ■

TABLO 4.1 $x_0 = 1$ **ile** $f(x) = x^3 - x - 1$ **fonksiyonuna Newton yöntemini uygulamanın sonuçları**

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	−1	2	1.5
1	1.5	0.875	5.75	1.3478 26087
2	1.3478 26087	0.1006 82173	4.4499 05482	1.3252 00399
3	1.3252 00399	0.0020 58362	4.2684 68292	1.3247 18174
4	1.3247 18174	0.0000 00924	4.2646 34722	1.3247 17957
5	1.3247 17957	−1.8672E-13	4.2646 32999	1.3247 17957



ŞEKİL 4.47 $x = 1/\sqrt{3}$'ün sağındaki herhangi bir x_0 başlama değeri bizi köke götürecektir.

Şekil 4.47'deki eğrinin $x = -1/\sqrt{3}$'te yerel bir maksimumu ve $x = 1/\sqrt{3}$'te yerel bir minimumu vardır. x_0 bu noktalar arasındayken Newton yönteminden iyi bir sonuç alamayabiliriz, fakat $x = 1/\sqrt{3}$'ün sağındaki herhangi bir noktadan başlayarak sonucu elde ederiz. Bunu yapmak pek akıllıca olmaz ama B_0'ın daha da sağından, örneğin $x_0 = 0$'dan da başlayabilirdik. Bu daha uzun sürerdi, fakat yine aynı sonuca yakınsardı.

Newton Yönteminin Yakınsaklığı

Pratikte, Newton yöntemi genellikle etkileyici bir hızla yakınsar, fakat bu garantili olmadığından yakınsamanın gerçekten bulunduğunu test etmeniz gerekir. Bunu yapmanın bir yolu fonksiyonu çizerek x_0 için uygun bir başlama değeri bulmaktır. $|f(x_n)|$'e değer vererek fonksiyonun bir sıfırına yaklaşıp yaklaşmadığınızı test edebilir, $|x_n - x_{n+1}|$'i hesaplayarak yöntemin yakınsayıp yakınsamadığını kontrol edebilirsiniz.

Ancak, teori biraz yardım sağlar. İleri analizin bir teoremi bir r kökü civarında bir aralıktaki her x için

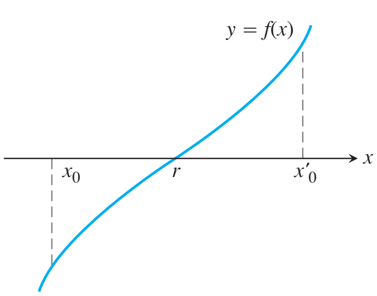
$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right| < 1 \tag{2}$$

ise, yöntemin bu aralıktaki herhangi bir x_0 başlama değeri için r'ye yakınsayacağını söyler. f'nin grafiği, x-eksenini kestiği noktanın yakınlarında çok yatay değilse bu koşulun sağlandığına dikkat edin.

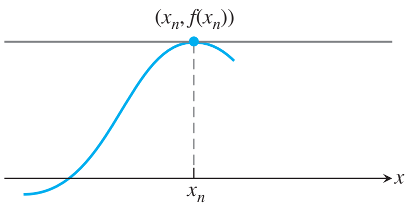
r ve x_0 r ile arasında, $f(x_0) > 0$ iken f'nin grafiği yukarıya konkav, $f(x_0) < 0$ iken f'nin grafiği aşağıya konkav ise Newton yöntemi daima yakınsar. (Bkz. Şekil 4.48.) Çoğu durumda, r köküne yakınsamanın hızı

$$\underbrace{|x_{n+1} - r|}_{\text{hata } e_{n+1}} \le \frac{\max|f''|}{2\min|f'|}|x_n - r|^2 = \text{sabit} \cdot \underbrace{|x_n - r|^2}_{\text{hata } e_n}, \tag{3}$$

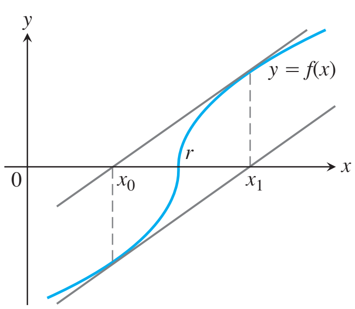
ileri analiz formülü ile ifade edilir. Burada maks ve min, r'yi içeren aralıktaki maksimum ve minimum değerleri göstermektedir. Formül, $n + 1$. adımdaki hatanın, bir sabit kere n. adımdaki hatanın karesinden büyük olmadığını söyler. Sabit, 1 den küçük veya eşit ise ve $|x_n - r| < 10^{-3}$ ise $|x_{n+1} - r| < 10^{-6}$'dır. Formül bir adımda üç ondalık basamak doğruluktan altı ondalık basamağa ilerler ve her başarılı adımda, doğruluk basamak sayısı ikiye katlanmaya devam eder.



ŞEKİL 4.48 Newton yöntemi iki başlama noktasından da r'ye yakınsayacaktır.



ŞEKİL 4.49 $f'(x_n) = 0$ ise x_{n+1}'i tanımlayacak bir kesim noktası yoktur.



ŞEKİL 4.50 Newton yöntemi yakınsamaz. r'ye herhangi bir yaklaşma elde etmeden x_0'dan x_1' ve tekrar x_0'a gidersiniz.

Fakat İşler Kötüye Gidebilir

$f'(x_n) = 0$ ise, *Newton yöntemi durur* (Şekil 4.49). Bu durumda, yeni bir başlama noktası deneyin. Elbette, f'nin ve f''nün ortak bir kökü bulunabilir. Bunun böyle olup olmadığını belirlemek için, önce $f'(x) = 0$'ın çözümlerini bulabilir ve f'yi bu değerlerde kontrol edebilirsiniz. Ya da f ve f''nü birlikte çizebilirsiniz.

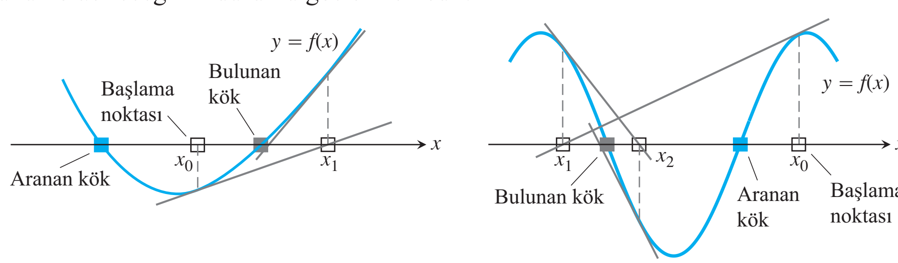
Newton yöntemi her zaman yakınsamaz. Örneğin,

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{r - x}, & x < r \\ \sqrt{x - r}, & x \geq r, \end{cases}$$

ise, grafik Şekil 4.50'deki gibi olacaktır. $x_0 = r - h$ ile başlarsak, $x_1 = r + h$ buluruz ve art arda yaklaşımlar bu iki değer arasında gidip gelecektir. Herhangi bir iterasyon sayısı bizi aradığımız köke ilk tahminimizden daha fazla yaklaştırmaz.

Newton yöntemi yakınsarsa, bir köke yakınsar. Yinede dikkatli olun. Yöntemin yakınsar gibi göründüğü ancak orada bir kök bulunmadığı durumlar bulunmaktadır. Neyse ki, böyle durumlar nadirdir.

Newton yöntemi bir köke yakınsarsa, bu düşündüğünüz kök olmayabilir. Şekil 4.51 bunun olabileceği iki durumu göstermektedir.



ŞEKİL 4.51 Çok uzaktan başlarsanız, Newton yöntemi aradığınız kökü bulamayabilir.

Fraktal Havuzlar ve Newton Yöntemi

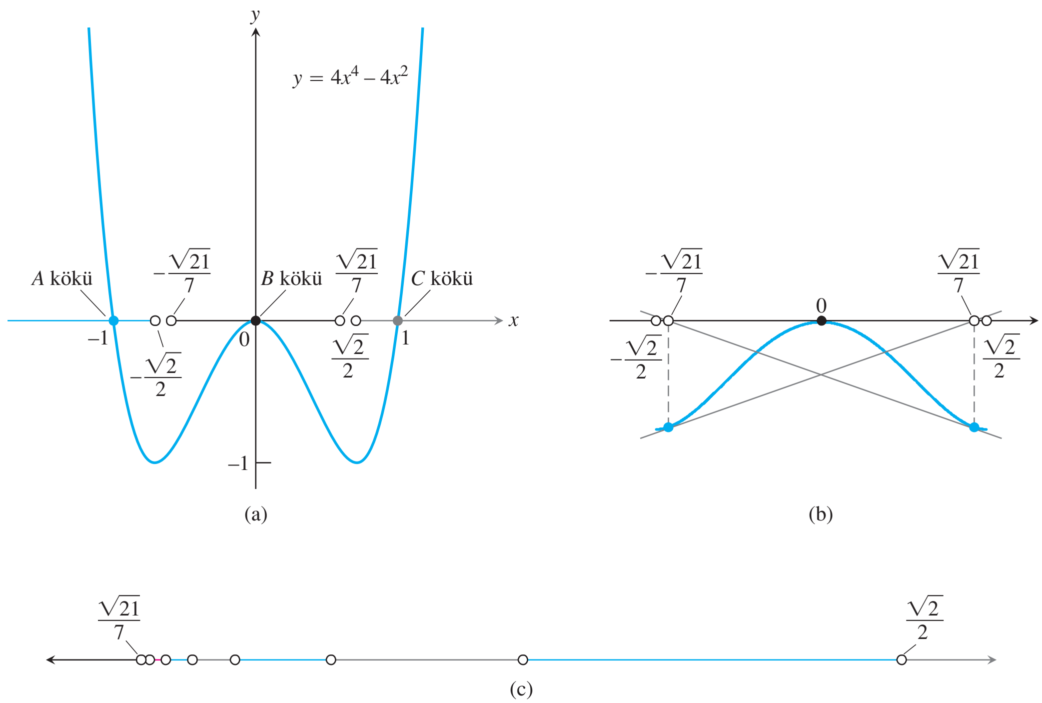
Newton yöntemiyle kök bulma işlemi kaotik olabilir, yani bazı denklemler için son çıktı başlama değerinin yerine fazlasıyla bağlı olabilir.

$4x^4 - 4x^2 = 0$ denklemi buna bir örnektir (Şekil 4.52a). x-eksenindeki mavi bölgedeki başlama değerleri A köküne giderler. Siyah bölgedeki başlama değerleri B köküne, kırmızı bölgedeki başlama değerleri ise C köküne giderler. $\pm\sqrt{2}/2$ noktaları yatay teğetleri verir. $\pm\sqrt{21}/7$ noktaları "dönerler", yani ikisi de birbirini verir (Şekil 4.52b).

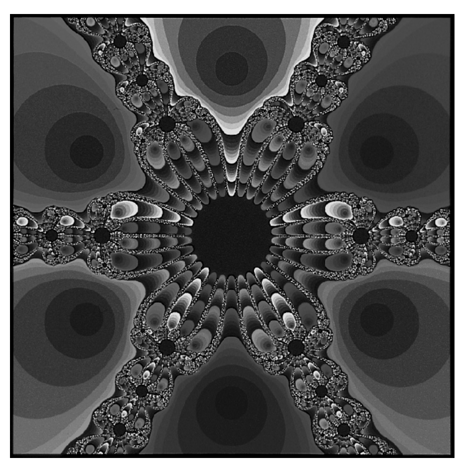
$\sqrt{21}/7$ ve $\sqrt{2}/2$ arasındaki aralık, C köküne giden noktaların açık aralıklarının arasında bulunan sonsuz sayıda A köküne giden noktaların açık aralıklarını içerir (Şekil 4.52c). Birbirini izleyen aralıkların sınır noktaları (bunlardan sonsuz sayıda vardır) köklere gitmeyip, bir değerden diğerine dönüp dururlar. Üstelik, $\sqrt{21}/7$'ye sağdan yaklaşan noktaları seçtiğimizde, hangi noktaların A'ya, hangi noktaların C'ye gittiklerini ayırt etmek oldukça güçleşir. $\sqrt{21}/7$'nin aynı tarafında, hedefleri birbirinden çok uzakta olan birbirlerine keyfi derecede yakın noktalar buluruz

Kökleri diğer noktaların "çekicileri" olarak düşünürsek, Şekil 4.52'deki renklendirme çektikleri noktaların aralıklarını ("çekme aralıkları") gösterir. A ve B kökleri arasındaki aralıkların, ya A'ya ya da B'ye çekileceklerini düşünebilirsiniz, fakat gördüğümüz gibi, durum böyle değildir. A ve B arasında C'ye çekilen noktaların sonsuz sayıda aralığı vardır. Aynı şekilde, B ile C arasında da A'ya çekilen noktaların sonsuz sayıda aralığı bulunmaktadır.

Newton yöntemini kompleks $z^6 - 1 = 0$ denklemini çözmek için kullandığımızda daha dramatik bir kaotik davranış örneğiyle karşılaşırız. Bu denklemin altı çözümü vardır: 1, -1, ve dört kompleks sayı, $\pm(1/2) \pm \left(\sqrt{3}/2\right)i$.



ŞEKİL 4.52 (a) $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$, $(-\sqrt{21}/7, \sqrt{21}/7)$ ve $(\sqrt{2}/2, \infty)$' daki başlama değerleri sırasıyla A, B ve C köklerini verir. (b) $x = \pm\sqrt{21}/7$ değerleri sadece birbirini verir. (c) $\sqrt{21}/7$ ve $\sqrt{2}/2$ değerleri arasında, C'ye giden noktaların açık aralıkları arasında yer alan sonsuz sayıda A'ya giden değerlerin açık aralığı bulunur. Bu davranış $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{21}/7)$ aralığında da görülür.



ŞEKİL 4.53 Bilgisayarla üretilen bu başlangıç değer portresi, $z^6 - 1 = 0$ denklemini çözmek için Newton yöntemi kullanıldığında, kompleks düzlemdeki farklı noktaların başlama değeri olarak kullanıldıklarında nereye gittiklerini göstermek için renklendirilmiştir. Kırmızı noktalar 1'e, yeşil noktalar $(1/2) + (\sqrt{3}/2)i$ 'ye, koyu mavi noktalar $(-1/2) + (\sqrt{3}/2)i$ 'ye gider ve böyle devam eder. 32 adımdan sonra bir kökün 0.1 birim yakınına ulaşmayan diziler yaratan başlama noktaları siyahla gösterilmiştir.

Şekil 4.53'ün (bundan önceki sayfada) gösterildiği gibi, altı kökten her birinin sonsuz sayıda çekim "havuzu" vardır (Ek 5). Kırmızı havuzlardaki başlama noktaları 1 köküne çekilirler, yeşil havuzdakiler $(1/2) + \left(\sqrt{3}/2\right)i$, köküne çekilirler ve böyle devam eder. Her havuzun karmaşık şekli art arda büyütmeler altında kendini sonsuza kadar tekrar eden bir sınırı vardır.

ALIŞTIRMALAR 4.7

Kök Bulmak

1. Newton yöntemini kullanarak $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin çözümlerini tahmin edin. Soldaki çözüm için $x_0 = -1$ ve sağdaki çözüm için $x_0 = 1$ ile başlayın. Sonra, her iki durumda da x_2'yi bulun.
2. Newton yöntemiyle $x^3 + 3x + 1 = 0$ denkleminin tek reel kökünü tahmin edin. $x_0 = 0$ ile başlayın ve x_2'yi bulun.
3. Newton yöntemiyle $f(x) = x^4 + x - 3$ fonksiyonunun iki sıfırını tahmin edin. Soldaki sıfır için $x_0 = -1$ ve sağdaki sıfır için $x_0 = 1$ ile başlayın. Sonra, her iki durumda da x_2'yi bulun.
4. Newton yöntemiyle $f(x) = 2x - x^2 + 1$ fonksiyonunun iki sıfırını tahmin edin. Soldaki sıfır için $x_0 = 0$ ve sağdaki sıfır için $x_0 = 2$ ile başlayın. Sonra, her iki durumda da x_2'yi bulun.
5. Newton yöntemiyle, 2'nin pozitif dördüncü kökünü $x^4 - 2 = 0$ denklemini çözerek bulun. $x_0 = 1$ alın ve x_2'yi bulun.
6. Newton yöntemiyle, 2'nin negatif dördüncü kökünü $x^4 - 2 = 0$ denklemini çözerek bulun. $x_0 = -1$ alın ve x_2'yi bulun.

Teori, Örnekler ve Uygulamalar

7. **Bir kök tahmin etmek** İlk tahmininizde şanslı olduğunuzu varsayın, yani x_0 $f(x) = 0$ denkleminin çözümü olsun. $f'(x_0)$'in tanımlı olduğunu ve 0 olmadığını varsayarak, x_1'e ve daha sonraki yaklaşımlara ne olur?
8. **pi'yi tahmin etmek** $\cos x = 0$ denklemini çözmek için Newton yöntemini kullanarak $\pi/2$'yi beş ondalık basamak hassaslıkta bulmayı düşünüyorsunuz. Başlama değerinizin ne olduğu fark eder mi? Yanıtınızı açıklayın.
9. **Salınım** $h > 0$ ise
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$
denklemine Newton yöntemini uygulamanın, $x_0 = h$ ise $x_1 = -h$ ve $x_0 = -h$ ise $x_1 = h$ vereceğini gösterin. Tersliğin nerede olduğunu gösteren bir resim çizin.
10. **Giderek kötüleşen yaklaşımlar** $x_0 = 1$ alarak $f(x) = x^{1/3}$ fonksiyonuna Newton yöntemini uygulayın ve x_1, x_2, x_3 ve x_4'ü hesaplayın. $|x_n|$ .için bir formül bulun. $n \to \infty$ iken, $|x_n|$'ye ne olur? Neler olduğunu gösteren bir şekil çizin.
11. Aşağıdaki dört ifadenin neden aynı bilgiye gerek duyduğunu açıklayın:
    i) $f(x) = x^3 - 3x - 1$'in köklerini bulun.
    ii) $y = x^3$ eğrisi ile $y = 3x + 1$ doğrusunun kesişim noktalarının x koordinatlarını bulun.
    iii) $y = x^3 - 3x$ eğrisinin $y = 1$ yatay doğrusunu kestiği noktaların x koordinatlarını bulun.
    iv) $g(x) = (1/4)x^4 - (3/2)x^2 - x + 5$ fonksiyonunun türevinin sıfır olduğu x değerlerini bulun.
12. **Bir gezegenin yerini bulmak** Bir gezegenin uzay koordinatlarını bulmak için, $x = 1 + 0.5 \sin x$ gibi denklemleri çözmemiz gerekir. $f(x) = x - 1 - 0.5 \sin x$ fonksiyonunun grafiğini çizmek fonksiyonun $x = 1.5$ civarlarında bir kökü olduğunu gösterir. Bu tahmini geliştirmek için Newton yönteminin bir uygulamasını kullanın. Yani, $x_0 = 1.5$ ile başlayarak x_1'i bulun (Kökün değeri 5 ondalık basamağa kadar 1.49870'tir). Radyan kullanmayı unutmayın.
13. T **Bir grafik çizer üzerinde Newton yöntemini kullanmak için bir program** $f(x) = x^3 + 3x + 1$ olsun. Newton yöntemindeki hesaplamalar için bir program
    a. $y_0 = f(x)$ ve y_1 = NDER $f(x)$ olsun.
    b. x'e $x_0 = -0.3$ girin.
    c. Sonra x'e $x - (y_0/y_1)$ girin ve Enter tuşuna tekrar tekrar basın. Sayılar f'nin sıfırına yaklaşırken izleyin.
    d. Farklı x_0'lar için (b) ve (c) adımlarını tekrarlayın.
    e. Kendi denkleminizi yazın ve bunu Newton yöntemiyle çözmek için bu yaklaşımı kullanın. Cevaplarınızı, hesap makinenizin kendisinde bulunan, fonksiyonların sıfırlarını veren özelliğin verdiği cevaplarla karşılaştırın.
14. T (*Alıştırma 11'in devamı*)
    a. $f(x) = x^3 - 3x - 1$'in iki negatif kökünü 5 ondalık basamağa kadar bulmak için Newton yöntemini kullanın.
    b. $f(x) = x^3 - 3x - 1$'in grafiğini $-2 \leq x \leq 2.5$ aralığında çizin. f'nin 5 ondalık basamağa kadar sıfırlarını tahmin etmek için ZOOM ve TRACE kullanın.
    c. $g(x) = 0.25x^4 - 1.5x^2 - x - 5$'in grafiğini çizin. Uygun ölçeklemeyle beraber ZOOM ve TRACE kullanarak 5 ondalık basamağa kadar grafiğin yatay teğetlerinin bulunduğu x değerlerini bulun.
15. T **Eğrileri Kesiştirmek** $y = \tan x$ eğrisi $y = 2x$ doğrusunu $x = 0$ ile $x = \pi/2$ arasında keser. Newton yöntemini kullanarak tam yerini bulun.
16. T **Bir kuadratiğin gerçek çözümleri** Newton yöntemini kullanarak $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$ denkleminin iki reel çözümünü bulun.
17. T **a.** $\sin 3x = 0.99 - x^2$ denkleminin kaç çözümü vardır?
    b. Bunları bulmak için Newton yöntemini kullanın.

T **18. Eğrileri Kesiştirmek**

a. $\cos 3x$ hiç x'e eşit olur mu? Yanıtınızı açıklayın.

b. Newton yöntemini kullanarak nerede olduğunu bulun.

T **19.** $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ fonksiyonunun 4 reel kökünü bulun.

T **20. pi'yi tahmin etmek** $x_0 = 3$ ile $\tan x = 0$ denklemini çözmek için Newton yöntemini kullanarak, hesap makinenizin gösterdiği basamağa kadar π'yi tahmin edin.

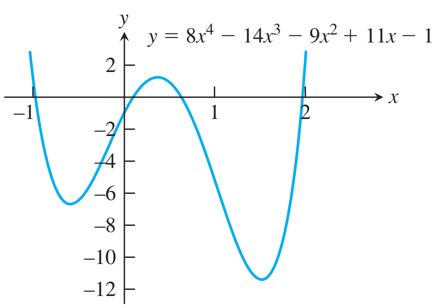
21. Hangi x değer(ler)inde $\cos x = 2x$ olur?

22. Hangi x değer(ler)inde $\cos x = -x$ olur?

23. Bölüm 2.6'daki Ara Değer Teoremini kullanarak, $f(x) = x^3 + 2x - 4$'ün $x = 1$ ve $x = 2$ arasında bir kökü olduğunu gösterin. Kökü 5 ondalık basamağa kadar bulun.

24. Dördüncü meretebe polinomu çarpanlara ayırmak Aşağıdaki çarpanlara ayırmada r_1'den r_4'e değerleri tahmin edin.

$$8x^4 - 14x^3 - 9x^2 + 11x - 1 = 8(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4).$$



T **25. Farklı sıfırlara yakınsama** Verilen başlama değerlerini kullanarak $f(x) = 4x^4 - 4x^2$ fonksiyonunun sıfırlarını bulmak için Newton yöntemini kullanın (Şekil 4.52).

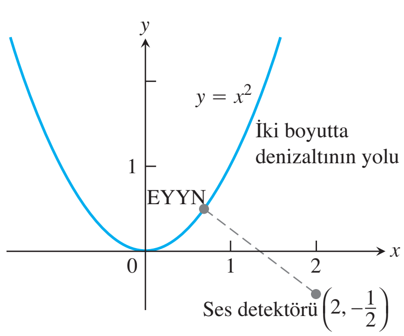
a. $x_0 = -2$ ve $x_0 = -0.8$, $\left(-\infty, -\sqrt{2}/2\right)$ içinde

b. $x_0 = -0.5$ ve $x_0 = 0.25$, $\left(-\sqrt{21}/7, \sqrt{21}/7\right)$ içinde

c. $x_0 = 0.8$ ve $x_0 = 2$, $\left(\sqrt{2}/2, \infty\right)$ içinde

d. $x_0 = -\sqrt{21}/7$ ve $x_0 = \sqrt{21}/7$ de

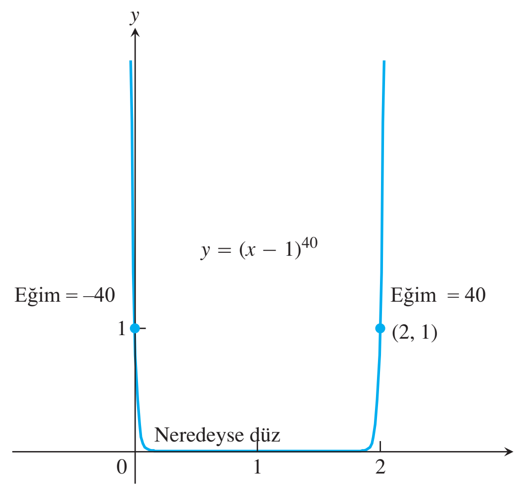
26. Ses detektörü problemi Denizaltı bulma problemlerinde, sık sık bir denizaltının su altındaki bir ses detektörüne en yakın yaklaşma noktasını (EYYN) bulmak gereklidir. Denizaltının $y = x^2$ parabolik yolunu izlediğini ve detektörün $(2, -1/2)$ noktasında bulunduğunu varsayın.



a. Denizaltı ve detektör arasındaki mesafeyi minimize eden x değerinin $x = 1/(x^2 + 1)$ denkleminin çözümü olduğunu gösterin.

b. $x = 1/(x^2 + 1)$ denklemini Newton yöntemiyle çözün.

27. Kökünde neredeyse düz olan eğriler Bazı eğriler o kadar düzdür ki, pratikte, Newton metodu kökten doğru bir yaklaşım veremeyecek kadar uzak bir yerde durur. $f(x) = (x - 1)^{40}$ fonksiyonuna $x_0 = 2$ başlama değeriyle Newton denklemini uygulayarak makinenizin $x = 1$ köküne ne kadar yaklaştığına bakın.



28. Aranan kökten başkasını bulmak $f(x) = 4x^4 - 4x^2$ fonksiyonunun üç kökü de Newton yöntemi, $x = \sqrt{21/7}$ civarında başlatılarak bulunabilir. Deneyin. (Şekil 4.52'ye bakın.)

29. İyon konsantrasyonu bulmak Hidroklorik asit içinde doymuş bir magnezyum hidroksit çözeltisinin asitliliğini bulurken hidronyum iyonu konsantrasyonu $[H_3O^+]$ için

$$\frac{3.64 \times 10^{-11}}{[H_3O^+]^2} = [H_3O^+] + 3.6 \times 10^{-4}$$

denklemini çıkarırsınız. $[H_3O^+]$'nin değerini bulmak için, $x = 10^4[H_3O^+]$ alır ve denklemi

$$x^3 + 3.6x^2 - 36.4 = 0$$

haline getirirsiniz. Sonra da bunu Newton yöntemini kullanarak çözersiniz. x ve $[H_3O^+]$ için ne bulursunuz? (2 ondalık basamağa kadar.)

T **30. Kompleks kökler** Kompleks sayılarla aritmetik yapabilecek bir bilgisayar veya hesap makineniz varsa, $z^6 - 1 = 0$ denklemini Newton yöntemiyle çözmek için deneyler yapın. Kullanılacak rekürans bağıntısı

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^6 - 1}{6z_n^5} \quad \text{veya} \quad z_{n+1} = \frac{5}{6}z_n + \frac{1}{6z_n^5}$$

olarak verilmektedir. (Diğerleri yanında) şu değerleri de kullanın $2, i, \sqrt{3} + i$.

4.8 Ters Türevler

Bir fonksiyonun türevinin nasıl bulunacağını öğrendik. Ancak, bir çok problem, bilinen türevinden (bilinen değişim oranından) fonksiyonun bulunmasını gerektirir. Örneğin, belli bir başlangıç yüksekliğinden düşmekte olan bir cismin hız fonksiyonunu biliyor olabiliriz ve belirli bir periyot içinde herhangi bir anda cismin yüksekliğini bilmeye ihtiyacımız olabilir. Daha genel olarak, bir F fonksiyonunu türevi olan f'den bulmak istiyoruz. Böyle bir F fonksiyonu varsa, buna f'nin *ters türevi* denir.

Ters Türevleri Bulmak

TANIM Ters Türev
Bir I aralığındaki her x için $F'(x) = f(x)$ ise F'ye I aralığı üzerinde f'nin bir **ters türevi** denir.

$F(x)$ fonksiyonunu, türevi olan $f(x)$'ten bulma işlemine *ters türev alma* denir. Bir f fonksiyonunun ters türevini göstermek için F, bir g fonksiyonunun ters türevini göstermek için G vs. gibi büyük harfler kullanırız.

ÖRNEK 1 Ters Türevleri Bulmak

Aşağıdaki fonksiyonların her biri için bir ters türev bulunuz

(a) $f(x) = 2x$

(b) $g(x) = \cos x$

(c) $h(x) = 2x + \cos x$

Çözüm

(a) $F(x) = x^2$

(b) $G(x) = \sin x$

(c) $H(x) = x^2 + \sin x$

Her cevap, türev alarak kontrol edilebilir. $F(x) = x^2$'nin türevi $2x$'dir. $G(x) = \sin x$'in türevi $\cos x$ ve $H(x) = x^2 + \sin x$'in türevi de $2x + \cos x$'dir. ■

Türevi $2x$ olan tek fonksiyon $F(x) = x^2$ değildir. $x^2 + 1$ fonksiyonunun türevi de aynıdır. Herhangi bir C için $x^2 = C$'nin de öyle. Başka var mıdır?

Bölüm 4.2 deki Ortalama Değer Teoreminin 2. Sonucu cevabı verir: Bir fonksiyonun herhangi iki ters türevi bir sabit kadar fark eder. Bu nedele, C **keyfi bir sabit** olmak üzere $x^2 + C$ fonksiyonları, $f(x) = 2x$'in *bütün* ters türevlerini oluşturur. Daha genel olarak, aşağıdaki sonuç geçerlidir.

> F fonksiyonu bir I aralığı üzerinde f'nin bir **ters türevi** ise f'nin I aralığı üzerindeki en genel Ters Türevi, C keyfi bir sabit olmak üzere
>
> $$F(x) + C$$
>
> dir.

Böylece, f'nin I aralığı üzerindeki en genel ters türevi, grafikleri dikey olarak birbirinin ötelenmesi olan bir $F(x) + C$ fonksiyon *ailesi*dir. Bu aileden özel bir ters türevi, C'ye belirli bir değer atayarak seçebiliriz. Böyle bir atamanın nasıl yapılabileceğini gösteren bir örnek aşağıdadır.

ÖRNEK 2 Özel Bir Ters Türev Bulmak

$f(x) = \sin x$'in $F(0) = 3$ eşitliğini sağlayan bir ters türevini bulun

Çözüm $-\cos x$'in türevi $\sin x$ olduğundan,

$$F(x) = -\cos x + C$$

genel ters türevi $f(x)$'in bütün ters türevlerini verir. $F(0) = 3$ koşulu C için belirli bir değer tanımlar. $F(x) = -\cos x + C$ de $x = 0$ yazmak

$$F(0) = -\cos 0 + C = -1 + C$$

verir. $F(0) = 3$ olduğundan, C'yi çözersek $C = 4$ buluruz. Böylece,

$$F(x) = -\cos x + 4$$

$F(0) = 3$ eşitliğini sağlayan ters türevdir. ■

Değişik türev alma kurallarından geriye doğru çalışırken, ters türevler için formüller ve kurallar geliştirebiliriz. Her bir durumda, verilen bir fonksiyonun bütün ters türevlerini gösteren genel ifadede keyfi bir C sabiti vardır. Tablo 4.2, önemli birkaç fonksiyonun ters türevlerini göstermektedir.

TABLO 4.2 Ters Türev Formülleri

	Fonksiyon	**Genel ters türev**
1.	x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$, n rasyonel
2.	$\sin kx$	$-\dfrac{\cos kx}{k} + C, \quad k$ bir sabit, $k \neq 0$
3.	$\cos kx$	$\dfrac{\sin kx}{k} + C, \quad k$ bir sabit, $k \neq 0$
4.	$\sec^2 x$	$\tan x + C$
5.	$\csc^2 x$	$-\cot x + C$
6.	$\sec x \tan x$	$\sec x + C$
7.	$\csc x \cot x$	$-\csc x + C$

Tablo 4.2 deki kurallar, soldaki fonksiyonu elde etmek üzere, genel ters türev'in, türevi alınarak kolaylıkla gerçeklenebilir. Örneğin, C sabitinin değeri ne olursa olsun, $\tan x + C$'nin türevi $\sec^2 x$ dir ve bu, $\sec^2 x$'in en genel ters türevi formülünü saptar.

ÖRNEK 3 Tablo 4.2'yi Kullanarak Ters Türev Bulmak

Aşağıdaki fonksiyonların her birinin genel ters türevlerini bulunuz.

(a) $f(x) = x^5$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(c) $h(x) = \sin 2x$

(d) $i(x) = \cos \dfrac{x}{2}$

Çözüm

(a) $F(x) = \dfrac{x^6}{6} + C$ — $n = 5$ ile Formül 1

(b) $g(x) = x^{-1/2}$, bu yüzden

$$G(x) = \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C$$ — $n = -1/2$ ile Formül 1

(c) $H(x) = \dfrac{-\cos 2x}{2} + C$ — $k = 2$ ile Formül 2

(d) $I(x) = \dfrac{\sin (x/2)}{1/2} + C = 2 \sin \dfrac{x}{2} + C$ — $k = 1/2$ ile Formül 3 ■

Diğer türev kurallarına karşılık da ters türev kuralları vardır. Ters türevleri toplayıp çıkarabilir, bir sabitle çarpabiliriz.

Tablo 4.3'teki formüller, ters türevlerin türevleri alınarak ve sonucun orijinal fonksiyonla uyuştuğu gerçeklenerek, kolaylıkla ispatlanabilir. Formül 2, $k = -1$ ile Formül 1'in özel halidir.

TABLO 4.3 Ters Türevlerin Lineerlik Kuralları

		Fonksiyon	Genel ters türev
1.	*Sabit Çarpan Kuralı:*	$kf(x)$	$kF(x) + C$, k bir sabit
2.	*Negatif Kuralı:*	$-f(x)$	$-F(x) + C$,
3.	*Toplam veya Fark Kuralı:*	$f(x) \pm g(x)$	$F(x) \pm G(x) + C$

ÖRNEK 4 Ters Türevler için Lineerlik Kurallarını Kullanmak

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + \sin 2x$$

Fonksiyonunun genel ters türevini bulun.

Çözüm Örnek 3'teki g ve h fonksiyonları ile, elimizde $f(x) = 3g(x) + h(x)$ vardır. Örnek 3b'den $g(x)$'in bir ters türevi $G(x) = 2\sqrt{x}$ olduğundan, ters türevler için Sabit Çarpan Kuralından, $3g(x) = 3/\sqrt{x}$ 'in bir ters türevi $3G(x) = 3 \cdot 2\sqrt{x} = 6\sqrt{x}$ dir. Benzer şekilde, Örnek 3c'den $h(x) = \sin 2x$ 'in bir ters türevinin $H(x) = (-1/2)\cos 2x$ olduğunu biliyoruz. Ters türevler için Toplam Kuralından, $f(x)$'in genel ters türev formülünü, C keyfi bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} F(x) &= 3G(x) + H(x) + C \\ &= 6\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cos 2x + C \end{aligned}$$

olarak elde ederiz. ■

Ters türevler birkaç önemli rol oynar. Bunları bulmanın yöntem ve teknikleri analizin başlıca bölümlerinden biridir (Bu, Bölüm 8'in konusudur).

Başlangıç Değer Problemleri ve Diferansiyel Denklemler

Bir $f(x)$ fonksiyonu için bir ters türev bulma problemi,

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

denklemini sağlayan bir $y(x)$ fonksiyonu bulmakla aynıdır. Bilinmeyen bir y fonksiyonunun türevini içeren bir denklem olduğundan, böyle bir denkleme **diferansiyel denklem** denir. Bunu çözmek için, denklemi sağlayan bir $y(x)$ fonksiyonu bulmamız gerekir. Bu fonksiyon, $f(x)$'in ters türevi alınarak bulunur. Ters türev alma işlemi sırasında ortaya çıkan keyfi sabiti, bir

$$y(x_0) = y_0$$

başlangıç koşulu belirleyerek saptarız. Bu koşul, $x = x_0$ iken $y(x)$'in değeri y_0'dır demektir. Bir diferansiyel denklem ve bir başlangıç koşulu kombinasyonu başlangıç **değer problemi** adını alır. Böyle denklemler bütün bilim kollarında önemli roller oynarlar. Aşağıda başlangıç değer problemi çözümüne bir örnek verilmiştir.

ÖRNEK 5 Eğim Fonksiyonundan ve Bir Noktasından Bir Eğriyi Bulmak

$(1, -1)$ noktasından geçmesi gereken ve (x, y) noktasındaki eğimi $3x^2$ olan eğrinin denklemini bulun.

Çözüm Matematiksel lisanla, aşağıdakilerden oluşan başlangıç değer problemini çözmemiz istenmektedir:

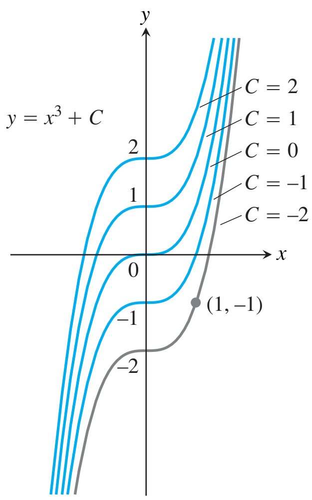
Diferansiyel denklem: $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$ Eğrinin eğimi $3x^2$'dir

Başlangıç koşulu: $y(1) = -1$

1. *Diferansiyel denklemi çözün:* y fonksiyonu $f(x) = 3x^2$'nin bir ters türevidir, şu halde

$$y = x^3 + C$$

dir. Bu sonuç bize, y'nin bir C değeri için $x^3 + C$'ye eşit olduğunu söyler. Bu değeri, $y(1) = -1$ başlangıç koşulundan buluruz.



ŞEKİL 4.54 $y = x^3 + C$ eğrileri koordinat düzlemini üst üste gelmeden doldururlar. Örnek 5'te, verilen (1, –1) noktasından geçen eğriyi $y = x^3 - 2$ olarak tanımlarız.

2. *C'yi hesaplayın.*

$$\begin{aligned} y &= x^3 + C \\ -1 &= (1)^3 + C \qquad y(1) = -1 \text{ başlangıç koşulu} \\ C &= -2. \end{aligned}$$

Aradığımız eğri, $y = x^3 - 2$ dir (Şekil 4.54.) ■

$f(x)$ fonksiyonunun en genel ters türevi $F(x) + C$ (Örnek 5'te $x^3 + C$), $dy/dx = f(x)$ diferansiyel denkleminin $y = F(x) + C$ **genel çözümünü** verir. Genel çözüm, denklemin *bütün* çözümlerini (sonsuz tane vardır, her C içi bir tane) verir. Diferansiyel denklemi genel çözümünü bularak **çözeriz**. Sonra, $y(x_0) = y_0$ koşulunu sağlayan bir **özel çözüm** bularak başlangıç değer problemini çözeriz.

Ters Türev ve Hareket

Şunu öğrendik: bir cismin konumunun türevi, cismin hızını ve hızının türevi de cismin ivmesini verir. Bir cismin ivmesini bilirsek, bir ters türev bulmakla cismin hızını ve hızının ters türevinden de cismin konum fonksiyonunu ortaya çıkarabiliriz. Bu işlem, Bölüm 4.2 Sonuç 2 de bir uygulama olarak kullanılmıştır. Şimdi, ters türevler cinsinden bir terminolojimiz ve kavramsal bir yapımız bulunduğuna göre, problemi, diferansiyel denklemler açısından bir kere daha ele alalım.

ÖRNEK 6 Yükselen Bir Balondan Bir Paket Bırakmak

Bir balon, 80 ft yükseklikten bir paket bıraktığında 12 ft/sn hızla yükselmektedir. Paketin yere ulaşması ne kadar sürer.

Çözüm $v(t)$ paketin t anındaki hızını ve $s(t)$ de yerden yüksekliğini göstersin. Dünyanın yüzeyi civarında yerçekimi ivmesi 32 ft/sn^2'dir. Bırakılan pakete başka kuvvetlerin etki etmediğini kabul ederek

$$\frac{dv}{dt} = -32 \qquad \text{yerçekimi ivmesi alçalma yönünde etki ettiğinden negatiftir.}$$

buluruz. Bu bizi, paketin hareketi için matematik modelimiz olan, aşağıdaki başlangıç değer problemine götürür:

$$\textit{Diferansiyel denklem:} \quad \frac{dv}{dt} = -32$$

$$\textit{Başlangıç koşulu:} \quad v(0) = 12$$

Paketin hızını elde etmek için, başlangıç değer problemini çözeriz.

1. *Diferansiyel denklemi çözün:* –32'nin ters türevi için genel bir formül

$$v = -32t + C$$

dir. Diferansiyel denklemin genel çözümünü bulduğumuza göre, problemimizin çözümü olan özel bir çözüm bulmak için başlangıç koşulunu kullanırız.

2. *C'yi hesaplayın:*

$$\begin{aligned} 12 &= -32(0) + C \qquad v(0) = 12 \text{ başlangıç koşulu} \\ C &= 12. \end{aligned}$$

Başlangıç değer probleminin çözümü

$$v = -32t + 12$$

dir. Hız, yüksekliğin türevi olduğundan ve paketin bırakıldığı $t = 0$ anında paketin yüksekliği 80 ft olduğundan, ikinci bir başlangıç değer problemi elde ederiz:

Diferansiyel denklem: $\dfrac{ds}{dt} = -32t + 12$ — Son denklemde $v = ds/dt$ yazın

Başlangıç koşulu: $s(0) = 80$

Yüksekliği, zamanın bir fonksiyonu olarak bulmak için bu başlangıç değer problemini çözeriz.

1. *Diferansiyel denklemi çözün:* $-32t + 12$'nin genel ters türevi aşağıdaki gibidir.

$$s = -16t^2 + 12t + C$$

2. *C'yi hesaplayın:*

$$80 = -16(0)^2 + 12(0) + C \qquad s(0) = 80 \text{ başlangıç koşulu}$$
$$C = 80$$

Paketin, t anında yerden yüksekliği

$$s = -16t^2 + 12t + 80$$

dir.

Çözümü kullanın : Paketin ne kadar zamanda yere ulaşacağını bulmak için s yerine sıfır yazar ve t'yi çözeriz:

$$-16t^2 + 12t + 80 = 0$$
$$-4t^2 + 3t + 20 = 0$$
$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{329}}{-8} \qquad \text{Kuadratik formül}$$
$$t \approx -1.89, \qquad t \approx 2.64.$$

Paket, balondan bırakıldıktan yaklaşık 2.64 sn sonra yere çarpar (Negatif kökün fiziksel anlamı yoktur). ■

Belirsiz İntegraller

Bir f fonksiyonun bütün ters türevlerini göstermek için özel bir sembol kullanılır.

TANIM Belirsiz İntegraller, İntegrant

f'nin bütün ters türevlerinin kümesine, f'nin x'e göre **belirsiz integrali** denir ve

$$\int f(x)\,dx$$

ile gösterilir. $\int$ sembolü bir **integral işareti**dir. f fonksiyonu integralin **integrandı**, x ise **integrasyon değişkeni**dir.

Bu notasyonu kullanarak, Örnek 1'in çözümünü aşağıdaki gibi tekrar ifade ederiz:

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int (2x + \cos x)\,dx = x^2 + \sin x + C$$

Bu notasyon, Bölüm 5'te incelenecek olan, ters türevlerin başlıca uygulamasıyla ilgilidir. Ters türevler, sonsuz toplamların limitlerini hesaplamada anahtar rol oynar. Bölüm 5'in, Analizin Temel Teoremi, denen ana sonucunda tanımlanan beklenmedik ve harika bir şekilde faydalı bir rol.

ÖRNEK 7 Terim – Terime Yapılan Belirsiz İntegrasyon ve İntegrasyon Sabitini Yeniden Yazmak

Hesaplayınız:

$$\int (x^2 - 2x + 5)\,dx$$

Çözüm $x^2 - 2x + 5$'in bir ters türevinin $(x^3/3) - x^2 + 5x$ olduğunu hatırlarsak, integrali

$$\int (x^2 - 2x + 5)\,dx = \overbrace{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x}^{\text{Ters türev}} + \underbrace{C}_{\text{keyfi sabit}}$$

olarak hesaplayabiliriz. Ters türevi hatırlamazsak, Toplam, Fark ve Sabit Çarpan kuralları ile terim-terim ortaya çıkarabiliriz:

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 2x + 5)\,dx &= \int x^2\,dx - \int 2x\,dx + \int 5\,dx\\ &= \int x^2\,dx - 2\int x\,dx + 5\int 1\,dx\\ &= \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) - 2\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) + 5(x + C_3)\\ &= \frac{x^3}{3} + C_1 - x^2 - 2C_2 + 5x + 5C_3\end{aligned}$$

Bu formül olması gerektiğinden karmaşıktır. C_1, $-2C_2$ ve $5C_3$'ü tek bir $C = C_1 - 2C_2 + 5C_3$ keyfi sabitinde birleştirirsek, formül

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

basit haline sadeleşir.

ve halâ bütün ters türevleri verir. Bu nedenle, terim terim integre etmeyi seçseniz bile doğrudan son hale gitmenizi tavsiye ederiz.

$$\int (x^2 - 2x + 5)\,dx = \int x^2\,dx - \int 2x\,dx + \int 5\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C.$$

yazın. Her bir kısım için bulabildiğiniz en basit ters türevi bulun ve integrasyonun sonunda bir keyfi sabit ekleyin.

ALIŞTIRMALAR 4.8

Ters Türevleri Bulmak

1–16 alıştırmalarında her bir fonksiyon için bir ters türev bulun. Yapabildiklerinizi akıldan yapın. Yanıtlarınızı türev alarak kontrol edin.

1. **a.** $2x$ **b.** x^2 **c.** $x^2 - 2x + 1$

2. **a.** $6x$ **b.** x^7 **c.** $x^7 - 6x + 8$

3. **a.** $-3x^{-4}$ **b.** x^{-4} **c.** $x^{-4} + 2x + 3$

4. **a.** $2x^{-3}$ **b.** $\frac{x^{-3}}{2} + x^2$ **c.** $-x^{-3} + x - 1$

5. **a.** $\frac{1}{x^2}$ **b.** $\frac{5}{x^2}$ **c.** $2 - \frac{5}{x^2}$

6. **a.** $-\frac{2}{x^3}$ **b.** $\frac{1}{2x^3}$ **c.** $x^3 - \frac{1}{x^3}$

7. **a.** $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ **b.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ **c.** $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

8. **a.** $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ **b.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$ **c.** $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

9. **a.** $\frac{2}{3}x^{-1/3}$ **b.** $\frac{1}{3}x^{-2/3}$ **c.** $-\frac{1}{3}x^{-4/3}$

10. **a.** $\frac{1}{2}x^{-1/2}$ **b.** $-\frac{1}{2}x^{-3/2}$ **c.** $-\frac{3}{2}x^{-5/2}$

11. **a.** $-\pi \sin \pi x$ **b.** $3 \sin x$ **c.** $\sin \pi x - 3 \sin 3x$

12. **a.** $\pi \cos \pi x$ **b.** $\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}$ **c.** $\cos\frac{\pi x}{2} + \pi \cos x$

13. **a.** $\sec^2 x$ **b.** $\frac{2}{3}\sec^2\frac{x}{3}$ **c.** $-\sec^2\frac{3x}{2}$

14. **a.** $\csc^2 x$ **b.** $-\frac{3}{2}\csc^2\frac{3x}{2}$ **c.** $1 - 8\csc^2 2x$

15. **a.** $\csc x \cot x$ **b.** $-\csc 5x \cot 5x$ **c.** $-\pi \csc\frac{\pi x}{2}\cot\frac{\pi x}{2}$

16. **a.** $\sec x \tan x$ **b.** $4 \sec 3x \tan 3x$ **c.** $\sec\frac{\pi x}{2}\tan\frac{\pi x}{2}$

Belirsiz İntegralleri Bulmak

17–54 alıştırmalarındaki en genel ters türevleri veya belirsiz integralleri bulun. Yanıtlarınızı türev alarak kontrol edin.

17. $\int (x + 1)\,dx$ **18.** $\int (5 - 6x)\,dx$

19. $\int \left(3t^2 + \frac{t}{2}\right) dt$ **20.** $\int \left(\frac{t^2}{2} + 4t^3\right) dt$

21. $\int (2x^3 - 5x + 7)\,dx$ **22.** $\int (1 - x^2 - 3x^5)\,dx$

23. $\int \left(\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}\right) dx$ **24.** $\int \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{x^3} + 2x\right) dx$

25. $\int x^{-1/3}\,dx$ **26.** $\int x^{-5/4}\,dx$

27. $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$ **28.** $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$

29. $\int \left(8y - \frac{2}{y^{1/4}}\right) dy$ **30.** $\int \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{y^{5/4}}\right) dy$

31. $\int 2x(1 - x^{-3})\,dx$ **32.** $\int x^{-3}(x + 1)\,dx$

33. $\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2}\,dt$ **34.** $\int \frac{4 + \sqrt{t}}{t^3}\,dt$

35. $\int (-2 \cos t)\,dt$ **36.** $\int (-5 \sin t)\,dt$

37. $\int 7 \sin\frac{\theta}{3}\,d\theta$ **38.** $\int 3 \cos 5\theta\,d\theta$

39. $\int (-3 \csc^2 x)\,dx$ **40.** $\int \left(-\frac{\sec^2 x}{3}\right) dx$

41. $\int \frac{\csc\theta \cot\theta}{2}\,d\theta$ **42.** $\int \frac{2}{5}\sec\theta \tan\theta\,d\theta$

43. $\int (4 \sec x \tan x - 2 \sec^2 x)\, dx$

44. $\int \frac{1}{2}(\csc^2 x - \csc x \cot x)\, dx$

45. $\int (\sin 2x - \csc^2 x)\, dx$

46. $\int (2 \cos 2x - 3 \sin 3x)\, dx$

47. $\int \frac{1 + \cos 4t}{2}\, dt$

48. $\int \frac{1 - \cos 6t}{2}\, dt$

49. $\int (1 + \tan^2 \theta)\, d\theta$

(*İpucu:* $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$)

50. $\int (2 + \tan^2 \theta)\, d\theta$

51. $\int \cot^2 x\, dx$

(*İpucu:* $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$)

52. $\int (1 - \cot^2 x)\, dx$

53. $\int \cos \theta (\tan \theta + \sec \theta)\, d\theta$

54. $\int \frac{\csc \theta}{\csc \theta - \sin \theta}\, d\theta$

Ters Türev Formüllerini Kontrol Etmek

55–60 alıştırmalarındaki formülleri türev alarak doğrulayın.

55. $\int (7x - 2)^3\, dx = \frac{(7x - 2)^4}{28} + C$

56. $\int (3x + 5)^{-2}\, dx = -\frac{(3x + 5)^{-1}}{3} + C$

57. $\int \sec^2 (5x - 1)\, dx = \frac{1}{5} \tan (5x - 1) + C$

58. $\int \csc^2 \left(\frac{x - 1}{3}\right) dx = -3 \cot \left(\frac{x - 1}{3}\right) + C$

59. $\int \frac{1}{(x + 1)^2}\, dx = -\frac{1}{x + 1} + C$

60. $\int \frac{1}{(x + 1)^2}\, dx = \frac{x}{x + 1} + C$

61. Her formülün doğru mu yanlış mı olduğunu söyleyin ve yanıtınızı kısaca açıklayın.

a. $\int x \sin x\, dx = \frac{x^2}{2} \sin x + C$

b. $\int x \sin x\, dx = -x \cos x + C$

c. $\int x \sin x\, dx = -x \cos x + \sin x + C$

62. Her formülün doğru mu yanlış mı olduğunu söyleyin ve yanıtınızı kısaca açıklayın.

a. $\int \tan \theta \sec^2 \theta\, d\theta = \frac{\sec^3 \theta}{3} + C$

b. $\int \tan \theta \sec^2 \theta\, d\theta = \frac{1}{2} \tan^2 \theta + C$

c. $\int \tan \theta \sec^2 \theta\, d\theta = \frac{1}{2} \sec^2 \theta + C$

63. Her formülün doğru mu yanlış mı olduğunu söyleyin ve yanıtınızı kısaca açıklayın.

a. $\int (2x + 1)^2\, dx = \frac{(2x + 1)^3}{3} + C$

b. $\int 3(2x + 1)^2\, dx = (2x + 1)^3 + C$

c. $\int 6(2x + 1)^2\, dx = (2x + 1)^3 + C$

64. Her formülün doğru mu yanlış mı olduğunu söyleyin ve yanıtınızı kısaca açıklayın.

a. $\int \sqrt{2x + 1}\, dx = \sqrt{x^2 + x + C}$

b. $\int \sqrt{2x + 1}\, dx = \sqrt{x^2 + x} + C$

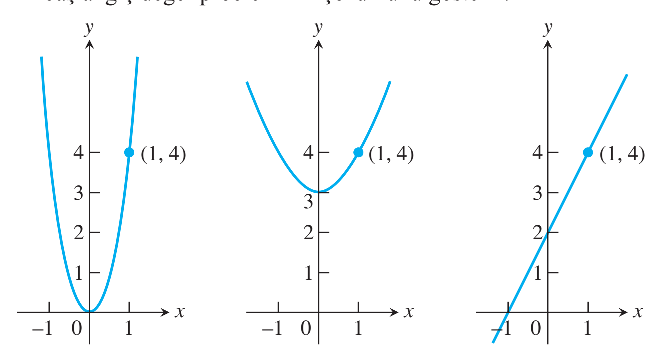
c. $\int \sqrt{2x + 1}\, dx = \frac{1}{3}\left(\sqrt{2x + 1}\right)^3 + C$

Başlangıç Değer Problemleri

65. Aşağıdaki grafiklerden hangisi

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad x = 1 \text{ iken } y = 4$$

başlangıç değer probleminin çözümünü gösterir?



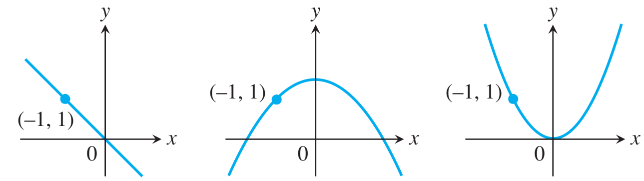
(a) (b) (c)

Yanıtınızı açıklayın.

66. Aşağıdaki grafiklerden hangisi

$$\frac{dy}{dx} = -x, \quad x = -1 \text{ iken } y = 1$$

başlangıç değer probleminin çözümünü gösterir?



(a) (b) (c)

Yanıtınızı açıklayın.

67–86 alıştırmalarındaki başlangıç değer problemlerini çözün.

67. $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 7, \quad y(2) = 0$

68. $\dfrac{dy}{dx} = 10 - x, \quad y(0) = -1$

69. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2} + x, \quad x > 0; \quad y(2) = 1$

70. $\dfrac{dy}{dx} = 9x^2 - 4x + 5, \quad y(-1) = 0$

71. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^{-2/3}, \quad y(-1) = -5$

72. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \quad y(4) = 0$

73. $\dfrac{ds}{dt} = 1 + \cos t, \quad s(0) = 4$

74. $\dfrac{ds}{dt} = \cos t + \sin t, \quad s(\pi) = 1$

75. $\dfrac{dr}{d\theta} = -\pi \sin \pi\theta, \quad r(0) = 0$

76. $\dfrac{dr}{d\theta} = \cos \pi\theta, \quad r(0) = 1$

77. $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{2} \sec t \tan t, \quad v(0) = 1$

78. $\dfrac{dv}{dt} = 8t + \csc^2 t, \quad v\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -7$

79. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2 - 6x; \quad y'(0) = 4, \quad y(0) = 1$

80. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0; \quad y'(0) = 2, \quad y(0) = 0$

81. $\dfrac{d^2r}{dt^2} = \dfrac{2}{t^3}; \quad \left.\dfrac{dr}{dt}\right|_{t=1} = 1, \quad r(1) = 1$

82. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{3t}{8}; \quad \left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=4} = 3, \quad s(4) = 4$

83. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 6; \quad y''(0) = -8, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = 5$

84. $\dfrac{d^3\theta}{dt^3} = 0; \quad \theta''(0) = -2, \quad \theta'(0) = -\dfrac{1}{2}, \quad \theta(0) = \sqrt{2}$

85. $y^{(4)} = -\sin t + \cos t;$
$y'''(0) = 7, \quad y''(0) = y'(0) = -1, \quad y(0) = 0$

86. $y^{(4)} = -\cos x + 8 \sin 2x;$
$y'''(0) = 0, \quad y''(0) = y'(0) = 1, \quad y(0) = 3$

Eğriler Bulmak

87. xy-düzleminde, (9, 4) noktasından geçen ve her noktadaki eğimi $3\sqrt{x}$ olan $y = f(x)$ eğrisini bulun.

88. **a.** Aşağıdaki özelliklere sahip bir $y = f(x)$ eğrisi bulun.

i) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x$

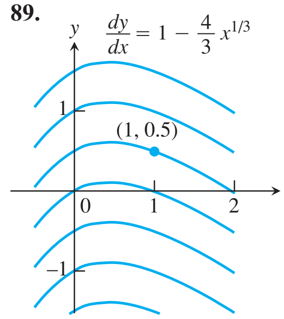
ii) Grafiği (0, 1) noktasından geçer ve o noktada yatay bir teğeti vardır.

b. Böyle kaç tane eğri vardır? Nereden biliyorsunuz?

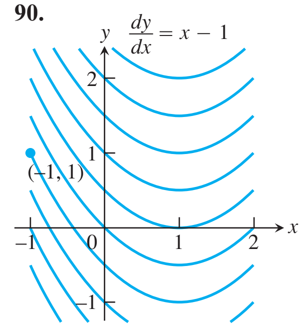
Çözüm (İntegral) Eğrileri

89–92 alıştırmalarında diferansiyel denklemlerin çözüm eğrileri verilmektedir. Her durumda, belirtilen noktadan geçen eğrinin denklemini bulun.

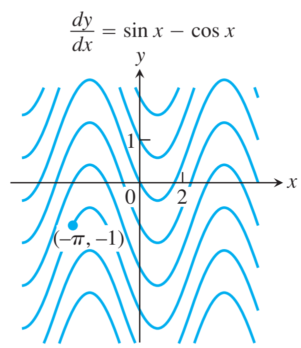
89.



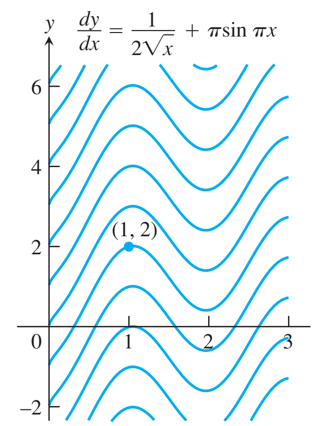
90.



91.



92.



Uygulamalar

93. Hızın bir ters türevinden yer değiştirmeyi bulmak.

a. s-ekseninde hareket eden bir cismin hızının

$$\frac{ds}{dt} = v = 9.8t - 3.$$

olduğunu varsayın.

i) $t = 0$ iken $s = 5$ alarak, $t = 1$'den $t = 3$'e kadar olan zaman aralığında cismin yer değiştirmesini bulun.

ii) $t = 0$ iken $s = -2$ alarak, $t = 1$'den $t = 3$'e kadar cismin yer değiştirmesini bulun.

iii) $t = 0$ iken $s = s_0$ alarak, $t = 1$'den $t = 3$'e kadar cismin yer değiştirmesini bulun.

b. Bir koordinat doğrusunda ilerleyen bir cismin konumu s'nin, t'nin türevlenebilir bir fonksiyonu olduğunu varsayın. ds/dt hız fonksiyonunun bir ters türevini biliyorsanız, cismin $t = a$'dan $t = b$'ye kadar yer değiştirmesini, bu anlardaki kesin konumlarını bilmiyorsanız bile, bulabileceğiniz doğru mudur? Yanıtınızı açıklayın.

94. Dünyadan ayrılmak Bir roket Dünya yüzeyinden 20 m/sn^2'lik sabit bir ivmeyle ayrılır. 1 dakika sonra roketin hızı nedir?

95. Bir arabayı zamanında durdurmak Karşınızda bir kaza görüp frenlere bastığınızda, otoyolda 60 mil/sa (88 ft/sn) sabit hızıyla gidiyorsunuz. Arabanızı 242 ft sonra durdurmak için ne kadarlık bir sabit ivme gerekmektedir? Bunu bulmak için, aşağıdaki adımları izleyin.

1. Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözün:

Diferansiyel denklem: $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -k$ (k bir sabit)

Başlangıç koşulları: $t = 0$ iken $\dfrac{ds}{dt} = 88$ ve $s = 0$

Zaman ve uzaklığı frene basılmasından itibaren ölçerek

2. $ds/dt = 0$ yapan t değerini bulun (Yanıt k'yı içerecektir).

3. Adım 2'de bulduğunuz t değerinde $s = 242$ olmasını sağlayan k değerini bulun.

96. Bir motosikleti durdurmak Illinois Eyaleti Bisiklet Sürücü Güvenliği Programı sürücülerin fren yaptıklarında 45 ft mesafede hızlarını 30 mil/saatten (44 ft/sn) 0 mil/saate düşürmelerini gerektirmektedir. Hangi sabit ivme bunu sağlar?

97. Bir koordinat doğrusunda hareket Bir parçacık bir koordinat doğrusunda $a = d^2s/dt^2 = 15\sqrt{t} - \left(3/\sqrt{t}\right)$ ivmesiyle, $t = 1$ iken $ds/dt = 4$ ve $s = 0$ koşullarını sağlayacak şekilde hareket etmektedir.

a. $v = ds/dt$ hızını t cinsinden bulun.

b. s konumunu t cinsinden bulun.

T **98. Çekiç ve tüy.** *Apollo* 15'in astronotu David Scott vakumda bütün cisimlerin aynı (sabit) ivmeyle düştüklerini göstermek için ayda yerden 4 ft yükseklikten bir çekiç ve bir tüy bırakmıştır. Olayın televizyon çekimi, çekiç ve tüyün dünya üzerinde, vakumda, 4 ft'i sadece yarım saniyede düşeceklerken, daha yavaş düştüklerini göstermektedir. Çekiç ve tüyün ayda 4 ft düşmeleri ne kadar sürmüştür? Bunu bulmak için, s'yi t'nin bir fonksiyonu olarak alıp, aşağıdaki başlangıç değer problemini çözün. Sonra s'yi 0 yapan t değerini bulun.

Diferansiyel denklem: $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -5.2\ \text{ft/sn}^2$

Başlangıç koşulları: $t = 0$ iken $\dfrac{ds}{dt} = 0$ ve $s = 4$

99. Sabit ivmeli hareket Bir koordinat doğrusu boyunca sabit bir a ivmesiyle haraket eden bir cismin s konumunun standart denklemi

$$s = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + s_0 \qquad (1)$$

ile verilir. Burada v_0 ve s_0 cismin $t = 0$ anındaki hız ve konumudur. Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözerek, bu denklemi türetin.

Diferansiyel denklem: $\dfrac{d^2s}{dt^2} = a$

Başlangıç koşulları: $t = 0$ iken $\dfrac{ds}{dt} = v_0$ ve $s = s_0$ 0.

100. Bir gezegenin yüzeyi yakınında serbest düşme Yer çekimi ivmesinin g uzunluk birimi/sn^2 olduğu bir gezegeninin yüzeyinin yakınındaki serbest düşme için Alıştırma 99'daki (1) denklemi, s cismin yüzeyden yüksekliği olmak üzere,

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0 \qquad (2)$$

halini alır. Denklemde eksi işareti vardır, çünkü yerçekimi ivmesi azalan s yönünde aşağı doğru etki eder. $t = 0$ anında cisim yükseliyorsa, v_0 pozitif, cisim düşüyorsa negatiftir.

Alıştırma 99'un sonucunu kullanmak yerine, (2) denklemini uygun başlangıç değer problemini çözerek türetebilirsiniz. Bu hangi başlangıç değer problemidir? Doğru olduğundan emin olmak için, adımlarınızı açıklayarak denklemi çözün.

Teori ve Örnekler

101.

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - \sqrt{x}\right) \quad \text{ve} \quad g(x) = \frac{d}{dx}(x + 2) \ \text{olduğunu}$$

varsayın. Aşağıdakileri bulun

a. $\int f(x)\,dx$ **b.** $\int g(x)\,dx$

c. $\int [-f(x)]\,dx$ **d.** $\int [-g(x)]\,dx$

e. $\int [f(x) + g(x)]\,dx$ **f.** $\int [f(x) - g(x)]\,dx$

102. Çözümlerin tekliği Türevlenebilir $y = F(x)$ ve $y = G(x)$ fonksiyonlarının ikisi de bir I aralığında

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

başlangıç değer problemini sağlıyorlarsa, I'daki her x değerinde $F(x) = G(x)$ olmalı mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

103–106 alıştırmalarındaki başlangıç değer problemlerini çözmek için bir BCS kullanın. Çözüm eğrilerini çizin.

103. $y' = \cos^2 x + \sin x, \quad y(\pi) = 1$

104. $y' = \frac{1}{x} + x, \quad y(1) = -1$

105. $y' = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}, \quad y(0) = 2$

106. $y'' = \frac{2}{x} + \sqrt{x}, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0$

Bölüm 4 Tekrar Soruları

1. Kapalı bir aralıkta sürekli olan bir fonksiyonun değerleri hakkında ne söylenebilir?
2. Bir fonksiyonun tanım kümesinde bir yerel ekstremum değeri ve bir mutlak ekstremum değeri olması ne demektir? Yerel ve mutlak ekstremum değerler arasındaki ilişki nedir? Örnek verin.
3. Sürekli bir fonksiyonun kapalı bir aralıktaki mutlak ekstremumlarını nasıl bulursunuz? Örnek verin.
4. Rolle Teoreminin hipotezleri ve sonuçları nedir? Bu hipotezler gerçekten gerekli midir? Örnek verin.
5. Ortalama Değer Teoreminin hipotezleri ve sonuçları nedir? Teoremin fiziksel yorumu ne olabilir?
6. Ortalama Değer Teoreminin üç sonucunu söyleyin.
7. f''nü ve f'nin bir $x = x_0$ noktasındaki değerini bilerek bazen bir fonksiyonu nasıl tanımlarsınız? Örnek verin.
8. Yerel ekstremum değerler için Birinci Türev Testi nedir? Nasıl uygulandığına ilişkin örnekler verin.
9. İki kere türevlenebilir bir fonksiyonun grafiğinin nerede yukarıya konkav, nerede aşağıya konkav olduğunu belirlemek için nasıl test edersiniz? Örnekler verin.
10. Bir büküm noktası nedir? Bir örnek verin. Büküm noktalarının bazen ne gibi fiziksel önem vardır?
11. Yerel Ekstrem Değerler için İkinci Türev Testi nedir? Nasıl uygulandığına ilişkin örnek verin.
12. Bir fonksiyonun türevleri size grafiğinin şekli hakkında ne söyler?
13. Bir polinomun grafiğini çizmek için kullanacağınız adımları sıralayın. Bir örnekle gösterin.
14. Bir sivri uç nedir? Örnekler verin.
15. Bir rasyonel fonksiyonun grafiğini çizmek için kullanacağınız adımları sıralayın. Bir örnekle gösterin.
16. Maks-min problemlerini çözmek için genel bir strateji tanımlayın. Örnekler verin.
17. L'Hôpital Kuralını açıklayın. Kuralı ne zaman kullanıp ne zaman duracağınızı nereden biliyorsunuz? Bir örnek verin.
18. ∞/∞, $\infty \cdot 0$ ve $\infty - \infty$ belirsiz şekillerine yol açan limitleri bazen nasıl ele alabilirsiniz? Örnekler verin.
19. Denklem çözümü için Newton yöntemini tanımlayın. Bir örnek verin. Yöntemin ardındaki teori nedir? Yöntemi kullanırken dikkat etmeniz gereken şeyler nedir?
20. Bir fonksiyonun birden fazla ters türevi olabilir mi? Varsa, ters türevler nasıl ilişkilidir? Açıklayın.
21. Bir belirsiz integral nedir? Nasıl hesaplarsınız? Belirsiz integralleri bulmak için ne gibi genel formüller biliyorsunuz.
22. $dy/dx = f(x)$ şeklindeki bir diferansiyel denklemi bazen nasıl çözebilirsiniz?
23. Bir başlangıç değer problemi nedir? Nasıl çözersiniz? Bir örnek verin.
24. Bir koordinat doğrusu boyunca hareket eden bir cismin ivmesini, zamanın bir fonksiyonu olarak biliyorsanız, cismin konum fonksiyonunu bulmak için daha ne bilmeniz gerekir? Bir örnek verin.

Bölüm 4 Problemler

Ekstremum Değerlerin Varlığı

1. $f(x) = x^3 + 2x + \tan x$ fonksiyonunun yerel maksimum veya minimum değerleri var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.
2. $g(x) = \csc x + 2 \cot x$ fonksiyonunun yerel maksimum değerleri var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.
3. $f(x) = (7 + x)(11 - 3x)^{1/3}$ fonksiyonunun mutlak bir minimum veya maksimumu var mıdır? Varsa, bunları bulun ya da neden bulunmadıklarını açıklayın. f'nin bütün kritik noktalarını listeleyin.

4. $f(x) = \dfrac{ax + b}{x^2 - 1}$ fonksiyonunun $x = 3$'te değeri 1 olan bir yerel ekstremum değerinin bulunmasını sağlayacak a ve b değerlerini bulun. Bu ekstremum değer bir minimum mu yoksa bir maksimum mudur? Yanıtınızı açıklayın.

5. Her x değerinde tanımlı $f(x) = \lfloor x \rfloor$ en büyük tamsayı fonksiyonunun [0, 1) aralığının her noktasında 0 değerinde bir yerel maksimum değeri vardır. Bu yerel maksimumlardan bazıları aynı zamanda f'nin yerel minimumları da olabilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

6. **a.** Bir f fonksiyonunun bir $x = c$ noktasında bir yerel minimum veya maksimumu bulunmamasına rağmen birinci türevinin sıfır olmasına bir örnek verin.

   b. Bu, Bölüm 3.1'deki Teorem 2 ile nasıl uyuşur? Yanıtınızı açıklayın.

7. $y = 1/x$ fonksiyonu $0 < x < 1$ aralığında sürekli olmasına rağmen, bu aralıkta bir maksimum veya minimum değer almaz. Bu sürekli fonksiyonlar için Ekstremum Değer Teoremiyle çelişir mi? Neden?

8. $y = |x|$ fonksiyonunun $-1 \le x < 1$ aralığındaki maksimum ve minimum değerleri nedir? Aralığın kapalı olmadığına dikkat edin. Bu sürekli fonksiyonlar için Ekstremum Değer Teoremiyle uyumlu mudur? Neden?

T 9. Bir fonksiyonun global davranışını gösterecek kadar büyük bir grafik önemli yerel davranışları göstermeyebilir. $f(x) = (x^8/8) - (x^6/2) - x^5 + 5x^3$ fonksiyonunun grafiği buna bir örnektir.

   a. $-2.5 \le x \le 2.5$ aralığında f'nin grafiğini çizin. Grafiğin nerelerde yerel ekstrem değerleri veya büküm noktaları var gibi görünmektedir?

   b. $f'(x)$'i çarpanlarına ayırın ve f'nin $x = \sqrt[3]{5} \approx 1.70998$ de yerel bir maksimumu ve $x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73205$'te yerel minimumları olduğunu gösterin.

   c. Grafiği büyütün ve $x = \sqrt[3]{5}$ ve $x = \sqrt{3}$ 'te ekstremum değerlerin varlığını gösteren bir çerçeve bulun.

   Buradaki ana fikir analiz olmadan üç ekstrem değerden ikisinin varlığının büyük ihtimalle fark edilmeyeceğidir. Fonksiyonun herhangi bir normal grafiğinde, değerler ekrandaki tek bir noktaya karşılık gelecek kadar yakın olabilirler.

   (*Kaynak: Uses of Technology in the Mathematics Curriculum,* Benny Evans ve Jerry Johnson, Oklahoma State University, National Science Foundation grant USE – 8950044 altında 1990'da basılmıştır.)

T 10. (*Alıştırma 9'un devamı*)

   a. $f(x) = (x^8/8) - (2/5)x^5 - 5x - (5/x^2) + 11$ fonksiyonunun grafiğini $-2 \le x \le 2$ aralığında çizin. Grafiğin nerelerde yerel ekstremum değerleri veya büküm noktaları var gibi görünmektedir?

   b. f'i çarpanlarına ayırın ve f'nin $x = \sqrt[7]{5} \approx 1.2585$'de bir yerel maksimumu ve $x = \sqrt[3]{2} \approx 1.2599$ 'da bir yerel minimumu olduğunu gösterin.

   c. Grafiği büyüterek $x = \sqrt[7]{5}$ ve $x = \sqrt[3]{2}$ 'de ekstremum değerlerin varlığını gösteren bir çerçeve bulun.

Ortalama Değer Teoremi

11. **a.** $g(t) = \sin^2 t - 3t$ fonksiyonunun, tanım kümesi içindeki her aralıkta azaldığını gösterin.

    b. $\sin^2 t - 3t = 5$ denkleminin kaç çözümü vardır? Yanıtınızı açıklayın.

12. **a.** $y = \tan\theta$ fonksiyonunun tanım kümesi içindeki her aralıkta arttığını gösterin.

    b. (a) şıkkındaki yanıt gerçekten doğruysa, $\tan \pi = 0$ değerinin $\tan(\pi/4) = 1$ değerinden ufak olmasını nasıl açıklarsınız?

13. **a.** $x^4 + 2x^2 - 2 = 0$ denkleminin [0, 1] aralığında kesin olarak tek bir çözümünün olduğunu gösterin.

T **b.** Çözümü hesaplayabildiğiniz ondalık basamağa kadar bulun.

14. **a.** $f(x) = x/(x + 1)$ fonksiyonunun, tanım kümesi içindeki her aralıkta arttığını gösterin.

    b. $f(x) = x^3 + 2x$ fonksiyonunun bir minimum veya bir maksimum değerinin bulunmadığını gösterin.

15. **Bir depodaki su** Sağanak yağış yüzünden, bir depodaki su hacmi 24 saatte 1400 ar-ft artmıştır. Bu zaman aralığının bir anında depo hacminin 225.000 galon/dak'dan fazla artıyor olduğunu gösterin. (Bir ar-ft 43.560 ft^3, yani bir ft derinliğinde bir ar alanı dolduracak hacimdir. Bir ft^3 7.48 galondur.)

16. $F(x) = 3x + C$ formülü her C değeri için farklı bir fonksiyon verir. Ancak, bütün bu fonksiyonların x'e göre türevleri aynıdır. Türevleri 3 olan türevlenebilir fonksiyonlar yalnızca bunlar mıdır? Başkaları bulunabilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

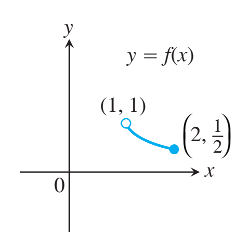
17.
$$\frac{x}{x+1} \neq -\frac{1}{x+1}$$
olduğu halde
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x+1}\right)$$
olduğunu gösterin. Bu Ortalama Değer Teoreminin ikinci sonucuyla çelişmez mi? Yanıtınızı açıklayın.

18. $f(x) = x^2/(x^2 + 1)$ ve $g(x) = -1/(x^2 + 1)$ fonksiyonlarının birinci türevlerini hesaplayın. Bu fonksiyonların grafikleri hakkında ne gibi sonuçlar çıkartabilirsiniz?

Grafiklerden Sonuç Çıkartmak

19–20 alıştırmalarında soruları cevaplamak için grafikleri kullanın

19. f'nin bütün ekstremum değerlerini ve nerelerde bulunduklarını belirleyin.



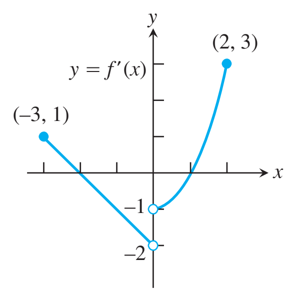
20. $y = f(x)$ fonksiyonunun

a. artan

b. azalan

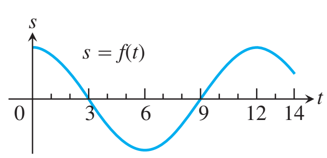
olduğu aralıkları belirleyin.

c. fonksiyonun yerel ekstremum değerlerinin nerelerde bulunduğunu ve her birinin bir yerel maksimum mu yoksa minimum mu olduğunu göstermek için f''nün verilen grafiğini kullanın.

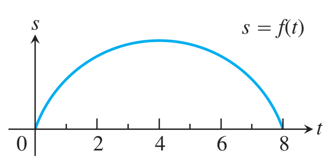


21 ve 22 problemlerindeki her grafik bir koordinat doğrusunda ilerleyen bir cismin $s = f(t)$ konum fonksiyonunu vermektedir (t zamanı belirmektedir). Yaklaşık olarak hangi zamanlarda (varsa) her cismin **(a)** hızı sıfıra eşittir? **(b)** ivmesi sıfıra eşittir? Yaklaşık olarak hangi zaman aralıklarında cisim **(c)** ileri **(d)** geri doğru ilerler?

21.



22.



Grafikler ve Grafik Çizme

23–32 problemlerindeki eğrileri çizin.

23. $y = x^2 - (x^3/6)$ **24.** $y = x^3 - 3x^2 + 3$

25. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$

26. $y = (1/8)(x^3 + 3x^2 - 9x - 27)$

27. $y = x^3(8 - x)$ **28.** $y = x^2(2x^2 - 9)$

29. $y = x - 3x^{2/3}$ **30.** $y = x^{1/3}(x - 4)$

31. $y = x\sqrt{3 - x}$ **32.** $y = x\sqrt{4 - x^2}$

33–38 problemlerinin her biri bir $y = f(x)$ fonksiyonunun birinci türevini vermektedir. **(a)** f'nin grafiğinin hangi noktalarında, varsa, bir minimumu, maksimumu veya büküm noktası bulunmaktadır? **(b)** Grafiğin genel şeklini çizin.

33. $y' = 16 - x^2$ **34.** $y' = x^2 - x - 6$

35. $y' = 6x(x + 1)(x - 2)$ **36.** $y' = x^2(6 - 4x)$

37. $y' = x^4 - 2x^2$ **38.** $y' = 4x^2 - x^4$

39–42 problemlerinde, her fonksiyonun grafiğini çizin. Fonksiyonun birinci türevini kullanarak gördüklerinizi açıklayın.

39. $y = x^{2/3} + (x - 1)^{1/3}$ **40.** $y = x^{2/3} + (x - 1)^{2/3}$

41. $y = x^{1/3} + (x - 1)^{1/3}$ **42.** $y = x^{2/3} - (x - 1)^{1/3}$

43–50 problemlerindeki fonksiyonların grafiklerini çizin.

43. $y = \dfrac{x + 1}{x - 3}$ **44.** $y = \dfrac{2x}{x + 5}$

45. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ **46.** $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x}$

47. $y = \dfrac{x^3 + 2}{2x}$ **48.** $y = \dfrac{x^4 - 1}{x^2}$

49. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3}$ **50.** $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

L'Hôpital Kuralını Uygulamak

51–62 alıştırmalarındaki limitleri l'Hôpital kuralıyla bulun.

51. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$ **52.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^a - 1}{x^b - 1}$

53. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\tan x}{x}$ **54.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x + \sin x}$

55. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{\tan(x^2)}$ **56.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$

57. $\lim\limits_{x\to \pi/2^-} \sec 7x \cos 3x$ **58.** $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} \sec x$

59. $\lim\limits_{x\to 0} (\csc x - \cot x)$ **60.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

61. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}\right)$

62. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2 - 1} - \dfrac{x^3}{x^2 + 1}\right)$

Optimizasyon

63. Negatif olmayan iki sayının toplamı 36'dır.

a. kareköklerinin farkları en büyükse ve

b. kareköklerinin toplamı en büyükse

bu sayıları bulun.

64. Negatif olamayan iki sayının toplamı 20'dir. Aşağıdaki durumlarda sayıları bulun.

a. Bir sayı ile diğerinin karekökünün çarpımı olabildiğince büyükse.

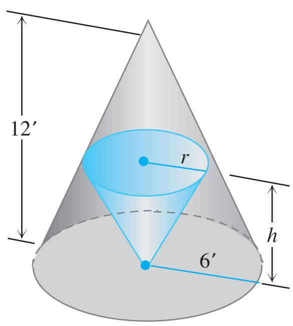
b. Bir sayı ile diğerinin karekökünün toplamı olabildiğince büyükse.

65. Bir ikizkenar üçgenin bir köşesi orijindedir ve tabanı, köşeleri $y = 27 - x^2$ eğrisinin üzerinde, eksenin üst tarafında olmak üzere x-eksenine paraleldir. Üçgenin alabileceği en büyük alanı bulun.

66. Bir müşteriniz sizden üstü açık dikdörtgen şeklinde paslanmaz çelik bir fıçı tasarlamanızı istedi. Çeyrek inçlik tabakadan kesilecek, tabanı kare ve hacmi 32 ft^3 olacak ve gerektiğinden daha ağır olmayacaktır. Hangi boyutları tavsiye edersiniz?

67. Yarıçapı $\sqrt{3}$ olan bir kürenin içine sığdırılabilecek en büyük dik silindirin yarıçapını ve yüksekliğini bulun.

68. Aşağıdaki şekilde biri diğerinin içine ters olarak yerleştirilmiş iki koni gösterilmektedir. İki taban paraleldir ve küçük koninin tepesi büyük koninin tabanının merkezindedir. Hangi r ve h değerleri küçük koniye olası en büyük hacmi verecektir?



69. **Lastik üretimi** Firmanız günde x yüz tane A kalitesinde ve y yüz tane B kalitesinde lastik üretebilmektedir. Burada $0 \le x \le 4$ ve

$$y = \frac{40 - 10x}{5 - x}.$$

olarak verilmektedir. A kalitesindeki lastiklerdeki kârınız B kalitesindeki lastiklerin kârının iki katıdır. Her iki cins için üretilmesi gereken en kârlı sayı nedir?

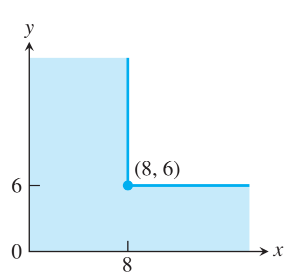
70. **Parçacık hareketi** s-ekseni üzerindeki iki parçacığın konumları $s_1 = \cos t$ ve $s_2 = \cos(t + \pi/4)$'tür.

a. Parçacıklar arasındaki uzaklık en fazla ne olur?

b. Parçacıklar ne zaman çarpışır?

T 71. **Üstü açık kutu** Kenarları 10 ve 16 inç olan bir kartonun köşelerinden eşit kenar uzunluklu kareler kesip, kenarları yukarıya katlayarak üstü açık bir dikdörtgen kutu yapmayı planlıyorsunuz. Bu şekilde yapabileceğiniz en büyük hacimli kutunun boyutları nedir?

72. **Merdiven problemi** Aşağıda gösterilen koridorun köşesinden yatay olarak döndürebileceğiniz en uzun merdivenin ortalama boyu (ft) nedir? Yanıtınızı virgülden sonra bir basamağa yuvarlayın.



Newton Yöntemi

73. $f(x) = 3x - x^3$ olsun. $f(x) = -4$ denkleminin [2, 3] aralığında bir çözümünün bulunduğunu gösterin ve bunu bulmak için Newton yöntemini kullanın.

74. $f(x) = x^4 - x^3$ olsun. $f(x) = 75$ denkleminin [3, 4] aralığında bir çözümünün bulunduğunu gösterin ve bunu bulmak için Newton yöntemini kullanın.

Belirsiz İntegralleri Hesaplama

75–90 Alıştırmalarındaki belirsiz integralleri (en genel ters türevleri) hesaplayın. Türev alarak cevaplarınızı kontrol edin.

75. $\int (x^3 + 5x - 7)\,dx$

76. $\int \left(8t^3 - \frac{t^2}{2} + t\right) dt$

77. $\int \left(3\sqrt{t} + \frac{4}{t^2}\right) dt$

78. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{3}{t^4}\right) dt$

79. $\int \frac{dr}{(r + 5)^2}$

80. $\int \frac{6\,dr}{\left(r - \sqrt{2}\right)^3}$

81. $\int 3\theta\sqrt{\theta^2 + 1}\,d\theta$

82. $\int \frac{\theta}{\sqrt{7 + \theta^2}}\,d\theta$

83. $\int x^3(1 + x^4)^{-1/4}\,dx$

84. $\int (2 - x)^{3/5}\,dx$

85. $\int \sec^2 \frac{s}{10}\,ds$

86. $\int \csc^2 \pi s\,ds$

87. $\int \csc\sqrt{2}\theta \cot\sqrt{2}\theta\,d\theta$

88. $\int \sec\frac{\theta}{3}\tan\frac{\theta}{3}\,d\theta$

89. $\int \sin^2 \frac{x}{4}\,dx$

90. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx$ $\left(\textit{Yol gösterme}: \cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)$

Başlangıç Değer Problemleri

91–94 problemlerindeki başlangıç değer problemlerini çözün.

91. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1}{x^2}, \quad y(1) = -1$

92. $\frac{dy}{dx} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2, \quad y(1) = 1$

93. $\frac{d^2r}{dt^2} = 15\sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}}; \quad r'(1) = 8, \quad r(1) = 0$

94. $\frac{d^3r}{dt^3} = -\cos t; \quad r''(0) = r'(0) = 0, \quad r(0) = -1$

Bölüm 4 Ek ve İleri Alıştırmalar

1. Bir aralıktaki minimum ve maksimum değerleri aynı olan bir fonksiyon için ne söyleyebilirsiniz? Yanıtınızı açıklayın.

2. Süreksiz bir fonksiyonun kapalı bir aralıkta ne bir mutlak minimumu ne de bir mutlak maksimumu bulunamayacağı doğru mudur? Yanıtınızı açıklayın.

3. Sürekli bir fonksiyonun bir açık aralıktaki ve bir yarı açık aralıktaki ekstremum değerleri hakkında bir sonuç çıkarabilir misiniz? Yanıtınızı açıklayın.

4. Yerel ekstremumlar f'nin yerel maksimum ve minimum değerlerinin bulunduğu noktaları tanımlamak için

$$\frac{df}{dx} = 6(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$$

türevinin işaret tablosunu kullanın.

5. Yerel ekstremumlar

a. $y = f(x)$ fonksiyonunun birinci türevinin

$$y' = 6(x+1)(x-2)^2$$

olduğunu varsayın. Varsa, hangi noktalarda f'nin grafiğinin bir maksimumu, minimumu veya büküm noktası bulunur?

b. $y = f(x)$ fonksiyonunun birinci türevinin

$$y' = 6x(x+1)(x-2)$$

olduğunu varsayın. Varsa, hangi noktalarda f'nin grafiğinin bir maksimumu, minimumu veya büküm noktası bulunur?

6. Her x için $f'(x) \le 2$ ise, f'nin değerleri $[0, 6]$ aralığında en fazla ne kadar artabilir? Yanıtınızı açıklayın.

7. Bir fonksiyonu sınırlamak f'nin $[a, b]$ aralığında sürekli ve c'nin aralığın bir iç noktası olduğunu varsayın. $[a, c)$'de $f'(x) \le 0$ ve $(c, b]$'de $f'(x) \ge 0$ ise, $f(x)$'in $[a, b]$'de $f(c)$'den daha küçük olamayacağını gösterin.

8. Bir eşitsizlik

a. Her x için $-1/2 \le x/(1+x^2) \le 1/2$ olduğunu gösterin.

b. f'nin, türevi $f'(x) = x/(1+x^2)$ olan bir fonksiyon olduğunu varsayın. (a)'daki sonucu kullanarak her a ve b için

$$|f(b) - f(a)| \le \frac{1}{2}|b-a|$$

olduğunu gösterin.

9. $f(x) = x^2$ fonksiyonunun türevi $x = 0$'da sıfırdır, fakat f sabit bir fonksiyon değildir. Bu, türevleri sıfır olan fonksiyonların sabit olduklarını söyleyen Ortalama Değer Teoremi sonucuyla çelişmez mi? Yanıtınızı açıklayın.

10. Ekstremumlar ve büküm noktaları $h = fg$ x'in türevlenebilir iki fonksiyonunun çarpımı olsun.

a. Yerel maksimumları $x = a$'da olmak üzere, f ve g pozitifse ve f' ve g' a'da işaret değiştiriyorsa, h'nin a'da yerel bir maksimumu bulunur mu?

b. f ve g grafiklerinin $x = a$'da büküm noktaları varsa, h'nin grafiğinin a'da bir büküm noktası var mıdır?

Her iki durumda da, yanıt evetse, ispatlayın. Yanıt hayırsa, bir örnek verin.

11. Bir fonksiyon bulmak $f(x) = (x+a)/(bx^2+cx+2)$ fonksiyonundaki a, b ve c değerlerini bulmak için aşağıdaki bilgileri kullanın.

i) a, b ve c'nin değerleri ya 0 ya da 1'dir.

ii) f'nin grafiği $(-1, 0)$ noktasından geçer.

iii) $y = 1$ doğrusu f'nin grafiğinin bir asimptotudur.

12. Yatay teğet k sabitinin hangi değer veya değerlerinde $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ eğrisinin tek bir yatay teğeti bulunur?

13. En büyük üçgen yerleştirmek A ve B noktaları birim çemberin bir çapının uçlarında ve C noktası da çemberin üzerinde bulunur. ABC üçgeninin alanının, üçgen ikizkenarsa en büyük olacağı doğru mudur? Nereden biliyorsunuz?

14. İkinci türev testini ispat etmek Yerel maksimum ve minimumlar için İkinci Türev Testi (Bölüm 4.4) şunları söyler:

a. $f'(c) = 0$ ve $f''(c) < 0$ ise, f'nin $x = c$'de bir yerel maksimum değeri vardır.

b. $f'(c) = 0$ ve $f''(c) > 0$ ise, f'nin $x = c$'de bir yerel minimum değeri vardır.

ifadesini ispat etmek için, $\epsilon = (1/2)|f''(c)|$ alın. Daha sonra

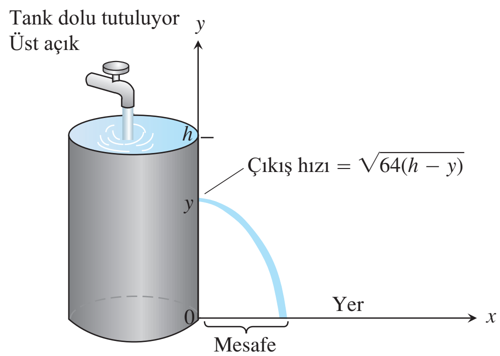
$$f''(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(c+h)}{h}$$

olduğunu kullanarak, herhangi bir $\delta > 0$ için,

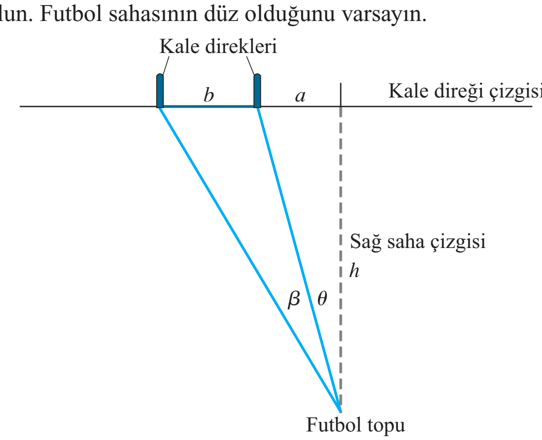
$$0 < |h| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(c+h)}{h} < f''(c) + \epsilon < 0$$

olduğu sonucunu çıkarın. Yani, $-\delta < h < 0$ için $f'(c+h)$ pozitif ve $0 < h < \delta$ için $f'(c+h)$ negatiftir. (b) ifadesini de benzer şekilde ispatlayın.

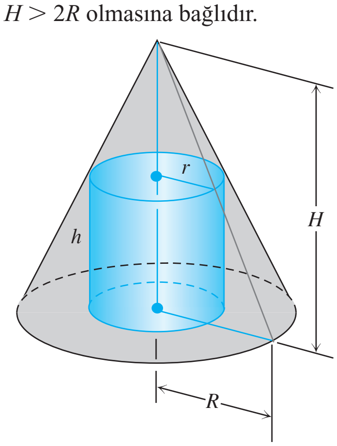
15. Bir su deposundaki delik Aşağıda gösterilen tanka akan suyun tanktan olası en uzak yere düşmesini sağlayacak bir yükseklikte bir delik delmek istiyorsunuz. Deliği basıncın düşük olduğu üst tarafa doğru delerseniz, su yavaş çıkacak, ancak buna nazaran daha fazla havada kalacaktır. Deliği alt tarafa yakın bir yerden delerseniz, su daha yüksek bir hızla fışkıracak, fakat yere düşmesi daha kısa sürecektir. Varsa, delik için en iyi yer neresidir? (*İpucu*: Çıkan bir su parçacığının y yüksekliğinden yere düşmesi ne kadar sürecektir?)



16. Bir saha golü atmak Bir Amerikan futbolu oyuncusu top sağ saha çizgisi üzerindeyken bir saha golü atmak istiyor. Kale direklerinin b ft aralıklı ve saha çizgisinin sağ kale direğinden $a > 0$ ft uzakta olduğunu varsayın (Aşağıdaki şekle bakın.) Kale direği çizgisinden vurucuya en büyük β açısını sağlayacak h uzaklığını bulun. Futbol sahasının düz olduğunu varsayın.



17. Değişken yanıtlı bir maks-min problemi Bazen bir maks-min probleminin çözümü, söz konusu şekillerin orantılarına bağlıdır. Buna örnek olarak, r yarıçaplı ve h yükseklikli bir dik silindirin aşağıda gösterildiği gibi R yarıçaplı ve H yükseklikli bir dik koninin içine yerleştirildiğini varsayın. Silindirin toplam yüzey alanını (alt ve üst taban dahil olmak üzere) maksimize eden r yarıçapını (R ve H cinsinden) bulun. Göreceğiniz gibi, çözüm $H \leq 2R$ veya $H > 2R$ olmasına bağlıdır.



18. Bir parametreyi minimize etmek $mx - 1 + (1/x)$ 'i bütün pozitif x değerlerinde sıfıra eşit veya sıfırdan büyük yapacak en küçük pozitif m sabitini bulun.

19. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\sin 5x}{3x}$ **b.** $\lim_{x\to 0} \sin 5x \cot 3x$

c. $\lim_{x\to 0} x \csc^2 \sqrt{2x}$ **d.** $\lim_{x\to \pi/2} (\sec x - \tan x)$

e. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x - \tan x}$ **f.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{x \sin x}$

g. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sec x - 1}{x^2}$ **h.** $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

20. Aşağıdaki limitlerde l'Hôpital kuralı yararsızdır. Limitleri başka yollardan bulun.

a. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x}+5}$ **b.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x + 7\sqrt{x}}$

21. Hafta başına x birim üretmenin, bir firmaya maliyetinin $y = a + bx$ dolar olduğunu varsayın. Hafta başına x birimi, $P = c - ex$ dolar birim fiyatından satabilmektedir. a, b, c ve e den her biri pozitif bir sabiti göstermektedir. **(a)** Hangi üretim seviyesi kârı maksimize eder? **(b)** Karşı gelen fiyat nedir? **(c)** Bu üretim seviyesindeki haftalık kâr nedir? **(d)** Hükümet satılan her bir adet için t dolar vergi koyarsa kârı maksimize etmek için her birimin satış fiyatı ne olmalıdır? Bu satış fiyatı ile vergiden önceki satış fiyatı arasındaki farkı yorumlayın.

22. Bölme yapmadan çarpmaya göre tersleri bulmak Bir a sayısının çarpmaya göre tersinin değerini, $f(x) = (1/x) - a$ fonksiyonuna Newton yöntemini uygularsanız, bölmeye gerek kalmadan bulabilirsiniz. Örneğin, $a = 3$ ise, gereken fonksiyon $f(x) = (1/x) - 3$'tür.

a. $y = (1/x) - 3$'ün grafiğini çizin. Grafik x eksenini nerede keser?

b. Bu durumdaki rekürasyon bağıntısının

$$x_{n+1} = x_n(2 - 3x_n),$$

olduğunu gösterin. Bu durumda bölmeye gerek yoktur.

23. $x = \sqrt[q]{a}$ 'yı bulmak için $f(x) = x^q - a$'ya Newton yöntemini uygularız. Burada, a'nın bir pozitif reel sayı olduğunu ve q'nun bir pozitif tamsayı olduğunu varsayıyoruz. x_1'in x_0 ve a/x_0^{q-1}'in "ağırlıklı ortalaması" olduğunu gösterin ve

$$x_1 = m_0 x_0 + m_1\left(\frac{a}{x_0^{q-1}}\right), \qquad m_0 > 0,\ m_1 > 0,\quad m_0 + m_1 = 1$$

olacak şekilde m_0, m_1 katsayılarını bulun. x_0 ve a/x_0^{q-1} eşit ise hangi sonuca ulaşırsınız? Bu durumda x_1 değeri ne olmalıdır?

24. $y = ax + b$ (a ve b keyfi sabitler) doğru ailesi $y'' = 0$ ile karakterize edilebilir. h ve r keyfi sabitler olmak üzere bütün

$$(x - h)^2 + (y - h)^2 = r^2$$

çemberleri tarafından sağlanan benzer bir bağıntı bulun (*İpucu*: verilen denklem ve türev alarak elde edeceğiniz başka iki denklemden h ve r yi eleyin).

25. Bir otomobilin frenlerinin sabit bir k ft/sn^2'lik ivme ürettiğini varsayın. **(a)** Frene basıldığında, otoyolda 60 mil/sa (88 ft/sn) sabit hızla giden bir otomobili 100 ft sonra durdurmak için k'nın ne olması gerektiğini belirleyiniz? **(b)** Aynı k ile, 30 mil/sa hızla giden bir otomobil durmadan önce ne kadar yol alır?

26. $f(x)$ ve $g(x)$, $f'(x) = g(x)$ ve $f''(x) = -f(x)$ bağıntılarını sağlayan iki sürekli ve türevlenebilir fonksiyon ve $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$ olsun. $h(0) = 5$ ise $h(10)$'u bulunuz.

27. d^2y/dx^2'nin her yerde sıfır olduğu ve $x = 0$, $y = 0$ iken $dy/dx = 1$ olan bir eğri var mıdır? Cevabınıza bir neden söyleyin.

28. xy-düzleminde $(1, -1)$ noktasından geçen ve x'teki eğimi daima $3x^2 + 2$ olan eğrinin denklemini bulunuz.

29. Bir parçacık x-ekseninde hareket etmektedir. İvmesi $a = -t^2$ dir. $t = 0$ da parçacık orijindedir. Hareketi sırasında $b > 0$ olmak üzere $x = b$ noktasına ulaşmakta fakat b'den öteye gitmemektedir. $t = 0$ anındaki hızını belirleyin.

30. Bir parçacık $a = \sqrt{t} - \left(1/\sqrt{t}\right)$ ivmesi ile hareket etmektedir. $t = 0$ iken hızının $\upsilon = 4/3$ ve konumunun $s = -4/15$ olduğunu varsayarak aşağıdakileri bulunuz.

a. υ hızını t'ye bağlı olarak.

b. s konumunu t'ye bağlı olarak.

31. $a > 0$ ile $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ veriliyor. Minimumu göz önüne alarak, ancak ve yalnız $b^2 - ac \le 0$ ise her x için $f(x) \ge 0$ olduğunu gösterin.

32. Schwarz eşitsizliği

a. Alıştırma 31 de

$$f(x) = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \cdots + (a_nx + b_n)^2$$

olsun.

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

Schwartz eşitsizliğini ispatlayın.

b. Schwartz eşitsizliğindeki eşitliğin ancak ve ancak 1'den n'ye kadar her i için a_ix'i $-b_i$'ye eşit yapacak bir x değeri varsa sağlanacağını gösterin.

Bölüm 4 Teknoloji Uygulama Projeleri

Mathematica/Maple Module

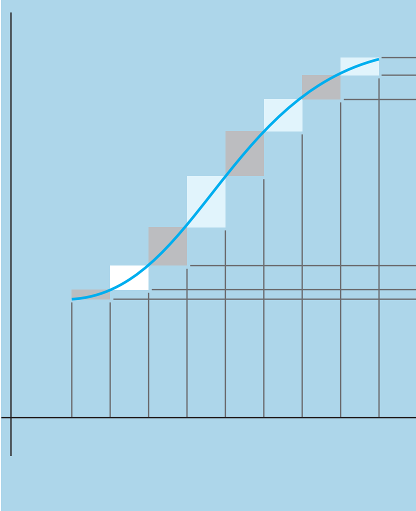
Bir Doğru Boyunca Hareket : Konum → Hız → İvme

Konum, hız ve ivme arasındaki türev ilişkilerinin canlandırılmış görüntüleri ile bir grafiğin şeklini gözleyeceksiniz. Konu içindeki şekiller canladırılabilir.

Mathematica/Maple Module

Newton Yöntemi : π yi Tahmin Edin. Kaç Ondalık Basamağa Kadar ?

Bir fonksiyon çizin, bir kök gözleyin, kök yakınında bir başlangıç noktası alın ve köke istenilen doğruluk derecesine kadar yaklaşmak için Newton Tekrarlama İşlemini kullanın. π, e ,ve $\sqrt{2}$ sayılarına yaklaşılmda bulunulmaktadır.



Bölüm

5 İNTEGRASYON

GİRİŞ Klasik geometrinin muazzam başarılarından biri, üçgenlerin, kürelerin ve konilerin alanları ve hacimleri için formüller elde etmekti. Bu bölümde, bunların ve başka daha genel şekillerin alanlarını ve hacimlerini hesaplamak için bir yöntem öğreneceğiz. Geliştireceğimiz yöntemin adı, alanlar ve hacimlerden çok daha fazlasını hesaplamak için bir araç olan, integrasyon dur. İntegralin istatistik, ekonomi, bilim ve mühendislikte bir çok uygulamaları vardır. Olasılıklardan enerji tüketim ortalamalarına ve bir baraj kapaklarına uygulanan kuvvetlere kadar değişen büyüklükleri hesaplamamızı sağlar.

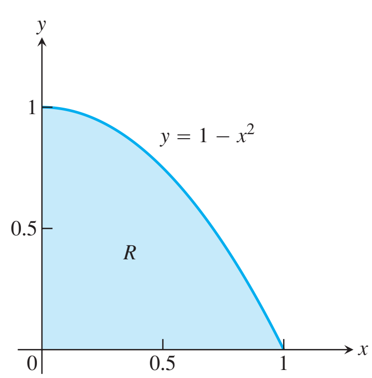
İntegrasyonun ardındaki fikir, bir çok büyüklüğü, onu küçük parçalara bölerek ve sonra her parçanın katkısını toplayarak etkili bir şekilde hesaplayabileceğimiz fikridir. İntegral teorisini, tabiatını açıkça gösterdiği alan belirlemede geliştiriyoruz. Sonlu toplamlar içeren örneklerle başlıyoruz. Bunlar doğal olarak, daha çok terim toplandığında ne olduğu sorusuna yol açarlar. Terimlerin sayısı sonsuza giderken limite geçmek bir integral verir. İntegrasyon ve türev alma yakından bağlı oldukları halde, türevin ve ters türevin rollerini, Bölüm 5.4 te ortaya çıkana kadar görmeyeceğiz. Analizin Temel Teoremi'nde içerilen bağlılıklarının tabiatı, analizdeki en önemli fikirlerden biridir.

5.1 Sonlu Toplamlarla Tahminde Bulunmak

Bu bölüm, alana, ortalama değerlere ve zaman içinde bir parçacık tarafından alınan mesafeye sonlu toplamlarla nasıl yaklaşımda bulunulabileceğini göstermektedir. Sonlu toplamlar, Bölüm 5.3'teki integrali tanımlamanın temelleridir.

Alan

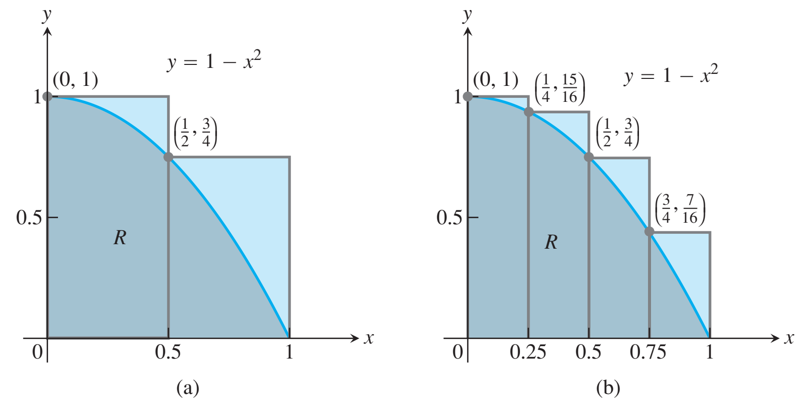
Sınırı eğrisel olan bir bölgenin alanına, bir dikdörtgenler topluluğunun alanlarını toplayarak yaklaşımda bulunulabilir. Daha çok dikdörtgen kullanmak yaklaşımın doğruluk derecesini arttırır.



ŞEKİL 5.1 R bölgesinin alanı basit bir geometri formülü ile bulunamaz (Örnek 1).

ÖRNEK 1 Alana Yaklaşımda Bulunmak

x-ekseninin üstünde, $y = 1 - x^2$'nin grafiği altında ve $x = 0$ ile $x = 1$ dikey doğruları arasında kalan renkli R bölgesinin alanı nedir? (Bkz. Şekil 5.1) Bir mimar, şekli R ile tanımlanan özel bir pencerenin ağırlığını hesaplamak için bu alanı bilmek isteyebilir. Fakat ne yazık ki, R bölgesi gibi eğrisel sınırları olan şekillerin alanlarını hesaplamak için basit bir geometrik formül yoktur.



ŞEKİL 5.2 (a) R bölgesini içeren iki dikdörtgen kullanarak R'nin alanı için aslından fazla bir tahmin elde ederiz. (b) Dört dikdörtgen daha iyi bir tahmin verir. Her iki tahmin de alanın gerçek değerini aşar.

Henüz R'nin tam alanını belirlemek için bir yöntemimiz olmamasına rağmen, basit bir şekilde yaklaşımda bulunabiliriz. Şekil 5.2a, birlikte R bölgesini içeren iki dikdörtgen göstermektedir. Her dikdörtgenin genişliği $1/2$ dir ve yükseklikleri soldan sağa 1 ve $3/4$ tür. Her dikdörtgenin yüksekliği, $[0, 1]$'de dikdörtgenin tabanını oluşturan alt aralığının sol uç noktasında f'nin hesaplanmasıyla elde edilen, f fonksiyonunun maksimum değeridir. İki dikdörtgenin toplam alanı, R bölgesinin alanı A'ya bir yaklaşımdır.

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8} = 0.875$$

İki dikdörtgen R bölgesini içerdiğinden, bu tahmin gerçek alandan daha büyüktür. 0.875 bir **üst toplamdır** deriz çünkü, her bir dikdörtgenin yüksekliği, dikdörtgenin taban aralığındaki bir x için $f(x)$'in maksimum (en büyük) değeri olarak alınmıştır. Şekil 5.2b de, her birinin genişliği $1/4$ olan ve birlikte R bölgesini içeren daha ince dört dikdörtgen alarak tahminimizi geliştiriyoruz. Bu dört dikdörtgen, R'yi içerdiklerinden dolayı hala A dan büyük olan

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{32} = 0.78125$$

yaklaşımını verir.

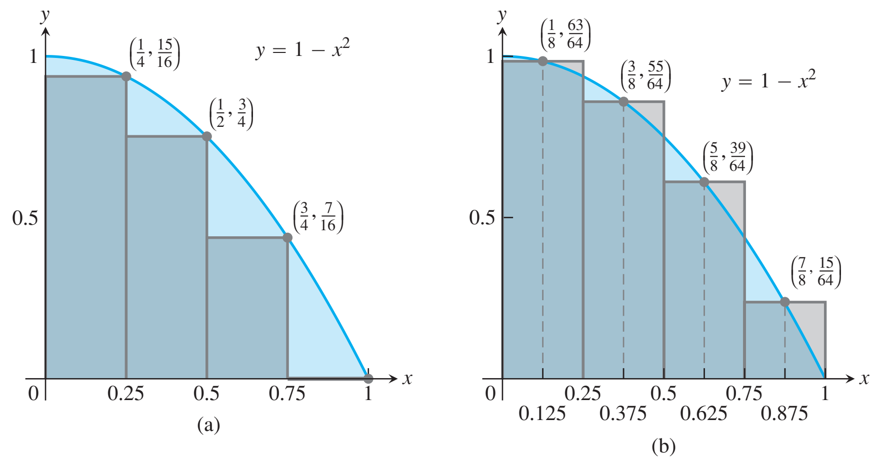
Bunun yerine, alanı tahmin etmek için Şekil 5.3a'daki gibi R bölgesinin içinde kalan dört dikdörtgen kullandığımızı varsayın. Her dikdörtgenin genişliği önceki gibi $1/4$ tür fakat dikdörtgenler daha kısadır ve bütünüyle f'nin grafiği altında kalırlar. $f(x) = 1 - x^2$ fonksiyonu $[0, 1]$ de azalandır. Dolayısıyla, bu dikdörtgenlerden her birinin yüksekliği, dikdörtgenin tabanını oluşturan alt aralığın sağ uç noktasında f'nin değeri ile verilir. Dördüncü dikdörtgenin yüksekliği sıfırdır ve bu yüzden alana katkısı yoktur. Yükseklikleri, taban aralıklarındaki birer x için $f(x)$'in minimum değerleri olan bu dikdörtgenleri toplamak alanın

$$A \approx \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{17}{32} = 0.53125$$

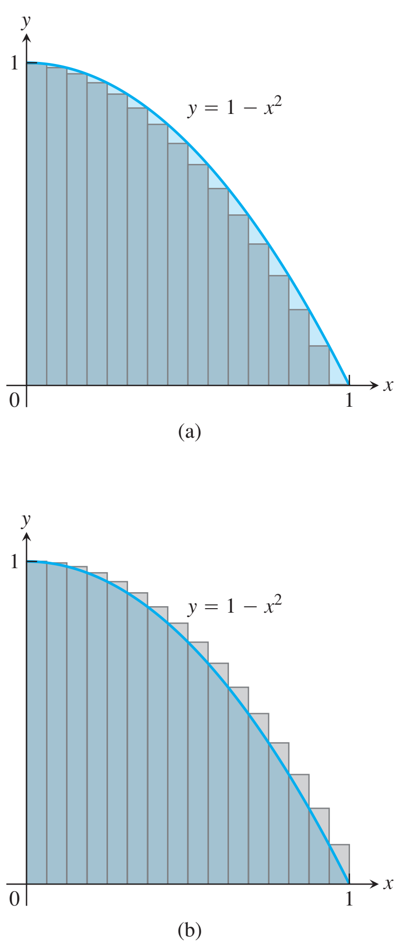
alt toplam yaklaşımını verir

Bütün dikdörtgenler R bölgesinin içinde kaldıklarından, bu tahmin A'nın gerçek değerinden küçüktür. A'nın gerçek değeri bu alt ve üst toplamların arasında bir yerdedir:

$$0.53125 < A < 0.78125$$



ŞEKİL 5.3 (a) R bölgesinin içindeki dikdörtgenler alan için gerçek değerin altında bir tahmin verirler. (b) Orta nokta kuralı, yükseklikleri tabanlarının orta noktalarında $y = f(x)$'in değerlerine eşit olan dikdörtgenler kullanır.



ŞEKİL 5.4 (a) $\Delta x = 1/16$ eşit genişlikli 16 dikdörtgen kullanan bir alt toplam. (b) 16 dikdörtgen kullanan bir üst toplam.

Alt ve üst toplam yaklaşımlarının her ikisini birden göz önüne alarak, sadece alan için tahminler değil, alanın gerçek değeri bunlar arasında kaldığından, aynı zamanda bu tahminlerdeki olası hatanın büyüklüğü için bir sınır elde ederiz. Burada hata $0.78125 - 0.53125 = 0.25$'ten daha büyük olamaz.

Bir başka tahmin de, yükseklikleri tabanlarının orta noktalarında f'nin değerlerine eşit olan dikdörtgenler kullanarak elde edilebilir (Şekil 5.3b). Bu tahmin yöntemine, alan tahmini için **orta nokta kuralı** denir. Orta nokta kuralı bir alt toplam ile bir üst toplam arasında bir tahmin verir fakat alanın gerçek değerinden büyük mü yoksa küçük mü olduğu açık değildir. Daha önceki gibi genişlikleri $1/4$ olan dört dikdörtgen ile orta nokta kuralı R bölgesinin alanını

$$A \approx \frac{63}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{55}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{39}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{64} \cdot \frac{1}{4} = \frac{172}{64} \cdot \frac{1}{4} = 0.671875$$

olarak tahmin eder. Hesapladığımız her toplamda, f'nin tanımlı olduğu $[a, b]$ aralığı $\Delta x = (b - a)/n$ eşit genişlikli (uzunluk da denir) n alt aralığa ayrılmış ve f her bir alt aralıktaki bir noktada hesaplanmıştır: birinci alt aralıkta c_1, ikinci alt aralıkta c_2 vs. Böylece bütün sonlu toplamlar

$$f(c_1)\,\Delta x + f(c_2)\,\Delta x + f(c_3)\,\Delta x + \cdots + f(c_n)\,\Delta x$$

şeklindedirler. Her dikdörtgen öncekinden daha ince olacak şekilde daha çok dikdörtgen almakla, bu sonlu toplamların R bölgesinin gerçek alanına çok daha iyi bir yaklaşımda bulundukları görülmektedir.

Şekil 5.4a, R'nin alanı için eşit genişlikli 16 dikdörtgen kullanan bir alt toplam yaklaşımı göstermektedir. Bunların alanlarının toplamı, gerçek alana yakın gözüken fakat dikdörtgenler R'nin içinde kaldıklarından gerçek alandan hala küçük olan 0.634765625 tir.

Şekil 5.4b, eşit genişlikli 16 dikdörtgen kullanan bir üst toplam yaklaşımı göstermektedir. Bunların alanlarının toplamı, dikdörtgenler birlikte R'yi içerdiklerinden, gerçek alandan bir şekilde büyük olan 0.697265625 tir. Orta nokta kuralı bu 16 dikdörtgen için 0.6669921875 toplam alanını verir fakat bu tahminin alanın gerçek değerinden büyük mü yoksa küçük mü olduğu açık değildir.

TABLO 5.1 *R*'nin alanı için sonlu yaklaşımlar

Alt aralıkların sayısı	Alt toplam	Orta nokta kuralı	Üst toplam
2	.375	.6875	.875
4	.53125	.671875	.78125
16	.634765625	.6669921875	.697265625
50	.6566	.6667	.6766
100	.66165	.666675	.67165
1000	.6661665	.66666675	.6671665

Tablo 5.1, *R*'nin alanına yaklaşım için 1000'e kadar dikdörtgen kullanan üst toplam ve alt toplam yaklaşımlarının değerlerini göstermektedir. Bölüm 5.2 de, her bir dikdörtgenin genişliği sıfıra giderken ve dikdörtgenlerin sayısı sonsuza giderken limit alarak, *R* gibi bölgelerin alanlarının gerçek değerlerinin nasıl elde edileceğini göreceğiz. Orada geliştirilecek teknikle *R*'nin alanının tam olarak $2/3$ olduğunu gösterebileceğiz. ■

Gidilen Mesafe

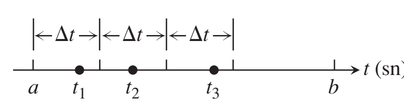
Bir otoyolda yönünü değiştirmeden ilerleyen bir otomobilin $\upsilon(t)$ hız fonksiyonunu bildiğimizi ve $t = a$ ile $t = b$ zaman aralığında otomobilin ne kadar ilerleyeceğini bilmek istediğimizi varsayın. $\upsilon(t)$ 'nin bir $F(t)$ ters türevini biliyorsak, $s(t) = F(t) + C$ yazarak otomobilin konum fonksiyonu $s(t)$'yi bulabiliriz. Sonra, gidilen mesafe konumdaki değişiklik, $s(b) - s(a)$ hesaplanarak bulunabilir (Bkz. Bölüm 4.8 Alıştırma 93). Hız fonksiyonu, otomobildeki hız göstergesinin değişik zamanlardaki kayıtlardan belirlenmişse, hız için bir ters türev fonksiyonu bulabileceğimiz bir formül yoktur. Peki, bu durumda ne yapacağız?

υ(t) hız fonksiyonu için bir ters türev bilmiyorsak, gidilen mesafeye aşağıdaki şekilde yaklaşımda bulunabiliriz. $[a, b]$ aralığını, her birinde hız'ın neredeyse sabit olduğu kısa zaman aralıklarına böleriz. Her alt zaman aralığında gidilen mesafeye, bilinen

$$\text{Mesafe} = \text{hız} \times \text{zaman}$$

uzaklık formülüyle yaklaşımda bulunur ve $[a, b]$ boyunca bütün sonuçları toplarız.

Bölünen aralığın aşağıdaki gibi göründüğünü varsayın:



Burada alt aralıkların hepsinin uzunluğu Δt'dir. Birinci alt aralıktan bir t_1 noktası alın. Eğer Δt hızın neredeyse sabit olacağı kadar kısaysa, birinci zaman aralığında otomobilin gittiği mesafe yaklaşık $\upsilon(t_1)\,\Delta t$ kadardır. t_2 ikinci alt aralıktaki bir nokta ise ikinci zaman aralığında otomobilin gittiği mesafe yaklaşık $\upsilon(t_2)\,\Delta t$ kadardır. Bütün zaman aralıklarında gidilen mesafelerin toplamı, n alt aralıkların toplam sayısı olmak üzere

$$D \approx \upsilon(t_1)\,\Delta t + \upsilon(t_2)\,\Delta t + \cdots + \upsilon(t_n)\,\Delta t,$$

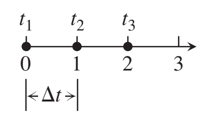
dir.

ÖRNEK 2 Bir Merminin Yüksekliğini Tahmin Etmek

Dik olarak havaya atılan bir merminin hızı $f(t) = 160 - 9.8t$ m/sn'dir. Tanımlanan toplama tekniğini kullanarak merminin ilk 3 saniyede ne kadar yükseldiğini bulun. Toplamlar gerçek sonuç 435.9 m'ye ne kadar yaklaşmaktadır?

Çözüm Farklı aralık sayılarında ve farklı hesaplama noktalarındaki sonuçları araştıracağız. $f(t)$'nin azalan olduğuna dikkat edin, bu nedenle sol uç noktaları seçmek bir üst toplam tahmini; sağ uç noktaları seçmek bir alt toplam tahmini verir.

(a) *f'nin sol uç noktalarda hesaplandığı 1 uzunluklu 3 alt aralık. Bir üst toplam*:

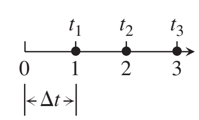


$t = 0$, 1 ve 2'de hesaplanmış f ile

$$\begin{aligned} D &\approx f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + f(t_3)\,\Delta t \\ &= [160 - 9.8(0)](1) + [160 - 9.8(1)](1) + [160 - 9.8(2)](1) \\ &= 450.6. \end{aligned}$$

buluruz.

(b) *f'nin sağ uç noktalarda hesaplandığı 1 uzunluklu 3 alt aralık. Bir alt toplam*:

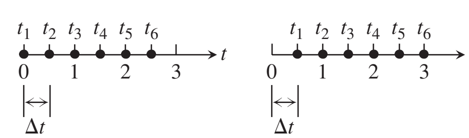


$t = 1$, 2 ve 3'te hesaplanmış f ile

$$\begin{aligned} D &\approx f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + f(t_3)\,\Delta t \\ &= [160 - 9.8(1)](1) + [160 - 9.8(2)](1) + [160 - 9.8(3)](1) \\ &= 421.2. \end{aligned}$$

buluruz.

(c) *1/2 uzunluğunda 6 alt aralıkla*



buluruz.

Sol uç noktaları kullanan bir üst toplam: $D \approx 443.25$ sağ uç noktaları kullanan bir alt toplam: $D \approx 428.55$.

Bu altı aralık tahminleri, üç aralık tahminlerinden biraz daha sonuca yakındır. Alt aralıklar kısaldıkça sonuçlar daha da iyileşir.

Tablo 5.2'de görebileceğimiz gibi, sol uç nokta üst toplamları gerçek değer 435.9'a yukarıdan yaklaşırlarken, sağ uç nokta alt toplamları alttan yaklaşır. Gerçek değer bu alt

TABLO 5.2 Gidilen mesafe tahminleri

Alt aralıkların sayısı	Her alt aralığın uzunluğu	Üst toplam	Alt toplam
3	1	450.6	421.2
6	1/2	443.25	428.55
12	1/4	439.57	432.22
24	1/8	437.74	434.06
48	1/16	436.82	434.98
96	1/32	436.36	435.44
192	1/64	436.13	435.67

ve üst toplamların arasında bir yerde bulunmaktadır. En yakın girdilerdeki hatanın büyüklüğü 0.23, yani gerçek değerin ufak bir yüzdesidir:

$$\text{Hata büyüklüğü} = \left|\,\text{gerçek değer} - \text{hesaplanan değer}\,\right|$$

$$= \left|\,435.9 - 435.67\,\right| = 0.23$$

$$\text{Hata yüzdesi} = \frac{0.23}{435.9} \approx \%0.05.$$

Tablodaki son girdilerden merminin uçuşun ilk üç saniyesinde 436 m civarında yükseldiği sonucunu çıkarmak mantıklıdır. ■

Gidilen Mesafeye Karşı Yerdeğiştirme

Konum fonksiyonu $s(t)$ olan bir cisim bir koordinat doğrusu üzerinde yönünü değiştirmeden hareket ediyorsa $t = a$ ile $t = b$ zaman aralığında gitmiş olduğu toplam mesafeyi, Örnek 2'deki gibi kısa aralıklar üzerinde gitmiş olduğu mesafeleri toplayarak bulabiliriz. Cisim, hareketi süresince bir veya daha fazla defa yön değiştirirse, kat edilen toplam mesafeyi bulmak için cismin $v(t)$ hızının mutlak değeri olan $|v(t)|$, süratini kullanmamız gerekir. Örnek 2'deki gibi yalnızca hızı kullanmak, sadece cismin başlangıç ve bitiş konumları arasındaki fark olan $s(b) - s(a)$ **yer değiştirmesinin** bir tahminini verir.

Nedenini görmek için, $[a, b]$ aralığını, cismin t_{k-1} den t_k'ya hızının çok değişmediği, yeteri kadar küçük Δt eşit aralıklarına bölelim. Bu durumda $v(t_k)$, bütün alt aralık boyunca cismin hızının iyi bir yaklaşımını verir. Bundan dolayı, zaman aralığı boyunca cismin konumunun koordinatındaki değişim yaklaşık olarak

$$v(t_k)\,\Delta t$$

dir. $v(t_k)$ pozitif ise değişim pozitif, $v(t_k)$ negatif ise değişim negatiftir.

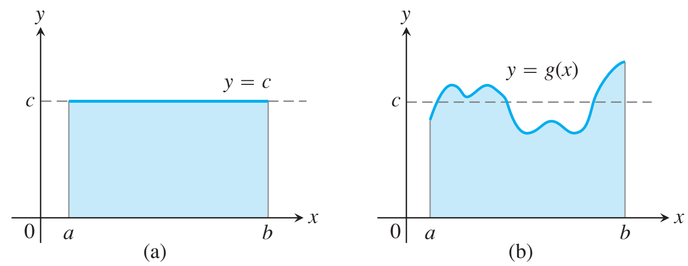
Her iki durumda alt aralık süresince gidilen toplam mesafe yaklaşık olarak

$$|v(t_k)|\,\Delta t$$

dir. **Alınan toplam yol** yaklaşık olarak

$$|v(t_1)|\,\Delta t + |v(t_2)|\,\Delta t + \cdots + |v(t_n)|\,\Delta t$$

toplamıdır.



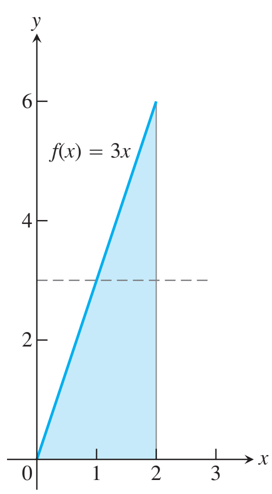
ŞEKİL 5.5 (a) $f(x) = c$'nin $[a, b]$ aralığı üzerindeki ortalama değeri, dikdörtgen alanının $b - a$'ya bölümüdür. (b) $g(x)$'in $[a, b]$ aralığı üzerindeki ortalama değeri, grafiği altındaki alanın $b - a$'ya bölümüdür.

Negatif Olmayan Bir Fonksiyonun Ortalama Değeri

n sayıdan oluşan bir $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kümesinin ortalama değeri, sayıların toplamını n'ye bölmekle elde edilir. Fakat, sürekli bir f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığı üzerindeki ortalama değeri nedir? Böyle bir fonksiyon sonsuz sayıda değer alabilir. Örneğin, bir şehrin belirli bir yerindeki sıcaklık, her gün yükselen ve alçalan sürekli bir fonksiyondur. Bir şehirde, gün içinde ortalama sıcaklık 73 derecedir demek ne anlama gelmektedir?

Fonksiyon sabit olduğunda bu soruyu cevaplamak kolaydır. $[a, b]$ aralığı üzerinde değeri sabit ve c olan bir fonksiyonun ortalama değeri c dir. c pozitif ise fonksiyonun $[a, b]$ aralığı üzerindeki grafiği yüksekliği c olan bir dikdörtgen verir. Bu durumda fonksiyonun ortalama değeri geometrik olarak, bu dikdörtgenin alanının $b - a$ genişliğine bölümü olarak yorumlanabilir (Şekil 5.5a).

Şekil 5.5b'deki gibi sabit olmayan bir g fonksiyonunun ortalama değerini bulmak istersek ne olacak? Bu grafiği, $x = a$ ve $x = b$ duvarları ile sınırlı bir deponun içinde çalkalanmakta olan suyun yüksekliğinin bir fotoğrafı olarak düşünebiliriz. Su hareket ederken her noktadaki yüksekliği değişir fakat ortalama yüksekliği sabit kalır. Suyun ortalama yüksekliğini elde etmek için, seviyesi ve yüksekliği sabit olana kadar durulmasını bekleriz. Sonuçtaki c yüksekliği g'nin grafiği altındaki alanın $b - a$'ya bölümüne eşittir. Negatif olmayan bir fonksiyonun bir $[a, b]$ aralığı üzerindeki ortalama değerini, grafiğinin altındaki alanın $b - a$'ya bölümü olarak tanımlarız. Bu tanımın geçerli olması için, bir grafiğin altındaki alan ile neyin kastedildiğini tam olarak anlamamız gerekir. Bu, Bölüm 5.3'te elde edilecektir. Şimdilik iki basit örneğe bakalım.



ŞEKİL 5.6 $f(x) = 3x$ fonksiyonunun $[0, 2]$ aralığı üzerindeki ortalama değeri 3 tür (Örnek 3).

ÖRNEK 3 Bir Lineer Fonksiyonun Ortalama Değeri

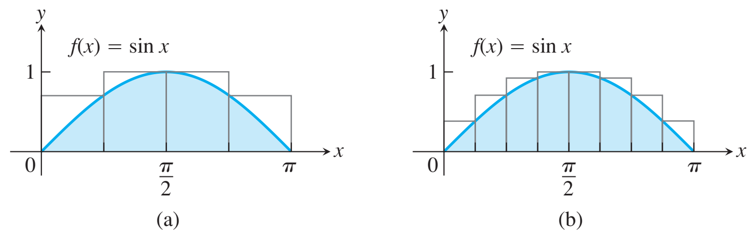
$f(x) = 3x$ fonksiyonunun $[0, 2]$ aralığı üzerindeki ortalama değeri nedir?

Çözüm Ortalama, grafiğin altındaki alanın aralığın genişliğine bölümüne eşittir. Bu durumda, grafiğin altındaki alanı kestirmek için sonlu yaklaşımda bulunmak zorunda değiliz: yüksekliği 6 ve tabanı 2 olan bir üçgenin alanı 6 dır (Şekil 5.6). Aralığın genişliği $b - a = 2 - 0 = 2$ dir. Fonksiyonun ortalama değeri $6/2 = 3$ tür. ■

ÖRNEK 4 x'in Ortalama Değeri

$f(x) = \sin x$ fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığı üzerindeki ortalama değerini kestirin.

Çözüm Şekil 5.7'de $\sin x$'in 0 ile π arasındaki grafiğine bakarak, ortalama yüksekliğinin



ŞEKİL 5.7 $f(x) = \sin x$'in $[0, \pi]$ aralığı üzerindeki ortalama değerini hesaplamak için 0 ile π arasında $f(x) = \sin x$'in altındaki alana (a) dört dikdörtgen; (b) sekiz dikdörtgen kullanarak yaklaşımda bulunmak.

0 ile 1 arasında bir yerde olduğunu görebiliriz. Ortalamayı bulmak için grafiğin altındaki A alanını bulmamız ve bu alanı aralığın uzunluğu $\pi - 0 = \pi$ ile bölmemiz gerekir.

Alanı belirlemek için basit bir yolumuz yoktur, dolayısıyla sonlu toplamlarla yaklaşırız. Bir üst toplam yaklaşımı elde etmek için, $[0, \pi]$ üzerinde $y = \sin x$'in altında ve x-ekseninin üstündeki alanı birlikte içiren, genişlikleri eşit ve $\pi/4$ olan dört dikdörtgenin alanlarını toplarız. Dikdörtgenlerin yüksekliklerini, her bir alt aralıkta $\sin x$'in en büyük değeri olarak alırız. Özel bir alt aralık üzerinde bu en büyük değer, sol uç noktada, sağ uç noktada veya bunlar arasında bir yerde bulunabilir. Bir üst toplam için dikdörtgenin yüksekliğini bulmak amacıyla $\sin x$'i bu noktada hesaplarız. Dikdörtgen alanlarının toplamı toplam alanı kestirir (Şekil 5.7a):

$$A \approx \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{4} + \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{4} + \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{4} + \left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{\pi}{4} \approx (3.42)\cdot\frac{\pi}{4} \approx 2.69$$

$\sin x$'in ortalama değerini kestirmek için yaklaşık alanı π ile böleriz ve $2.69/\pi \approx 0.86$ yaklaşımını elde ederiz.

Her biri $y = \sin x$ 'in grafiği üzerinde kalan (Şekil 5.7b), genişlikleri eşit ve $\pi/8$ olan sekiz dikdörtgen kullanırsak

$$A \approx \left(\sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{5\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{8}\right)\cdot\frac{\pi}{8}$$

$$\approx (.38 + .71 + .92 + 1 + 1 + .92 + .71 + .38)\cdot\frac{\pi}{8} = (6.02)\cdot\frac{\pi}{8} \approx 2.365$$

alan yaklaşımını elde ederiz. Bu sonucu aralığın uzunluğu olan π ile bölmek, daha doğru olan 0.753 tahminini verir. Alana yaklaşım için bir üst toplam kullandığımızdan bu tahmin, $\sin x$'in $[0, \pi]$ üzerindeki gerçek ortalama değerinden büyüktür. Her bir dikdörtgenin giderek inceldiği daha çok dikdörtgen kullanırsak gerçek ortalama değere daha çok yaklaşırız. Bölüm 5.3'teki tekniği kullanarak gerçek ortalama değerin $2/\pi \approx 0.64$ olduğunu göreceğiz.

Daha önceki gibi, $y = \sin x$'in grafiği altında kalan dikdörtgenler de kullanabilir ve bir alt toplam yaklaşımı hesaplayabilirdik veya orta nokta kuralını da kullanabilirdik. Bölüm 5.3'te, yaklaşım dikdörtgenlerinin bir üst toplam, bir alt toplam veya arada bir toplam verecek şekilde seçilmesinin önemli olmadığını göreceğiz. Her durumda, bütün dikdörtgenler yeteri kadar ince ise, yaklaşımlar gerçek alana yakındırlar. . ■

Özet

Pozitif bir fonksiyonun grafiği altındaki alana, yön değiştirmeyen bir cismin kat ettiği yola ve negatif olmayan bir fonksiyonun bir aralık üzerindeki ortalama değerine sonlu toplamlarla yaklaşımda bulunulabilir. Önce aralığı, her bir alt aralıkta f fonksiyonu neredeyse sabit olacak şekilde, alt aralıklara böleriz. Sonra her alt aralığın genişliğini, fonksiyonun bu alt aralıkta bir noktadaki değeri ile çarparız ve bu çarpımları toplarız. $[a, b]$ aralığı, genişlikleri eşit ve $\Delta x = (b - a)/n$ olan n alt aralığa bölündüyse ve $f(c_k)$, fonksiyonun k. alt aralıktan seçilen c_k noktasındaki değeri ise bu işlem

$$f(c_1)\,\Delta x + f(c_2)\,\Delta x + f(c_3)\,\Delta x + \cdots + f(c_n)\,\Delta x$$

şeklinde bir sonlu toplam verir. c_k noktalarının seçimi, fonksiyonun k. alt aralıktaki değerini maksimize veya minimize edebilir veya bu arada bir değer verebilir. Gerçek değer, üst toplamlar ve alt toplamlarla verilen yaklaşımların arasında bir yerde kalır. Gördüğümüz sonlu toplam yaklaşımları, daha ince ve daha çok alt aralık aldığımızda daha iyi sonuçlar vermişlerdir.

ALIŞTIRMALAR 5.1

Alan

1–4 alıştırmalarında, fonksiyonun grafiği altında kalan alanı kestirmek için sonlu yaklaşımlar kullanın.

a. eşit genişlikli iki dikdörtgen ile bir alt toplam.

b. eşit genişlikli dört dikdörtgen ile bir alt toplam.

c. eşit genişlikli iki dikdörtgen ile bir üst toplam.

d. eşit genişlikli dört dikdörtgen ile bir üst toplam.

1. $f(x) = x^2$, $x = 0$ ve $x = 1$ arasında.

2. $f(x) = x^3$, $x = 0$ ve $x = 1$ arasında.

3. $f(x) = 1/x$, $x = 1$ ve $x = 5$ arasında.

4. $f(x) = 4 - x^2$, $x = -2$ ve $x = 2$ arasında.

Yükseklikleri, tabanının orta noktasındaki fonksiyon değeri ile verilen (*orta nokta kuralı*) dikdörtgenler kullanarak, aşağıdaki fonksiyonların grafikleri altındaki alanları, önce iki sonra dört dikdörtgen kullanarak kestirin.

5. $f(x) = x^2$, $x = 0$ ve $x = 1$ arasında.

6. $f(x) = x^3$, $x = 0$ ve $x = 1$ arasında.

7. $f(x) = 1/x$, $x = 1$ ve $x = 5$ arasında.

8. $f(x) = 4 - x^2$, $x = -2$ ve $x = 2$ arasında.

Mesafe

9. Kat edilen mesafe Aşağıdaki tablo 10 saniye süre ile bir yol boyunca ilerleyen bir model tren motorunun hızını göstermektedir. 1 uzunluklu 10 alt aralık kullanarak

a. sol uç nokta değerleri ile

b. sağ uç nokta değerleri ile

motorun aldığı yolu kestirin.

Zaman (sn)	Hız (inç/sn)	Zaman (sn)	Hız (inç./sn)
0	0	6	11
1	12	7	6
2	22	8	2
3	10	9	6
4	5	10	0
5	13		

10. Akıntıya karşı alınan yol Kabaran bir nehrin kıyısında oturmuş, gelen dalganın bir şişeyi akıntıya karşı götürmesini izliyorsunuz. Bir saat boyunca her 5 dakikada bir akışın hızını aşağıda verilen tabloya kaydediyorsunuz. Şişe bu 1 saat içinde akıntıya karşı ne kadar ilerlemiştir? 5 uzunluklu 12 aralık kullanarak

a. sol uç değerlerde

b. sağ uç değerlerde

bir tahminde bulunun.

Zaman (dak.)	Hız (m/sn)	Zaman (dak.)	Hız (m/sn)
0	1	35	1.2
5	1.2	40	1.0
10	1.7	45	1.8
15	2.0	50	1.5
20	1.8	55	1.2
25	1.6	60	0
30	1.4		

11. Bir yolun uzunluğu Siz ve bir arkadaşınız virajlı ve bozuk bir yolda, hız göstergesi çalışan, fakat mil göstergesi bozuk olan bir arabayla yola çıkmak üzeresiniz. Bu belirli mesafenin ne kadar olduğunu bulmak için, 10 saniyelik aralıklarla arabanın hızını ölçerek aşağıdaki tabloda gösterilen değerleri elde ediyorsunuz. Yolun uzunluğunu

a. sol uç nokta değerlerini kullanarak,

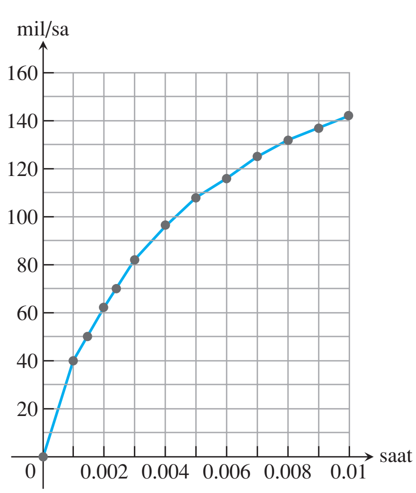
b. sağ uç nokta değerlerini kullanarak

hesaplayın.

Zaman (s)	Hız (ft/sn'ye çevrilmiş) (30 mil/sa = 44 ft/sn)	Zaman (s)	Hız (ft/sn'ye çevrilmiş) (30 mil/sa = 44 ft/sn)
0	0	70	15
10	44	80	22
20	15	90	35
30	35	100	44
40	30	110	30
50	44	120	35
60	35		

12. Hız datasından kat edilen mesafe Aşağıdaki tabloda 0 mil/saatten hızlanarak 36 saniyede (bir saatin binde 10'u) 142 mil/sa hıza ulaşan bir yarış arabasının hız verileri bulunmaktadır.

Zaman (sa)	Hız (mil/sa)	Zaman (sa)	Hız (mil/sa)
0.0	0	0.006	116
0.001	40	0.007	125
0.002	62	0.008	132
0.003	82	0.009	137
0.004	96	0.010	142
0.005	108		



a. Dikdörtgenler kullanarak arabanın 142 mil/saat hıza çıkması için gereken 36 saniyede ne kadar yol aldığını bulun.

b. Arabanın yarı yola varması kabaca ne kadar sürer? O anda arabanın hızı nedir?

Hız ve Mesafe

13. Hava direnci ile serbest düşüş Bir cisim bir uçaktan aşağı doğru atılıyor. Cisim giderek hızlanıyor, ancak ivme hava direnci yüzünden zamanla azalıyor. İvme ft/sn^2 olarak ölçülüyor ve atılışından sonraki 5 s boyunca her saniyede bir aşağıdaki tabloya işleniyor.

t	0	1	2	3	4	5
a	32.00	19.41	11.77	7.14	4.33	2.63

a. $t = 5$ sn iken sürat için tahmini bir üst değer bulun.

b. $t = 5$ sn iken sürat için tahmini bir alt değer bulun.

c. $t = 3$ sn iken, düşülen mesafe için bir üst tahmin bulun.

14. Bir merminin aldığı yol Bir cisim deniz seviyesinden yukarı doğru 400 ft/sn'lik bir ilk hızla atılmıştır.

a. Cisme etkiyen tek kuvvetin yerçekimi olduğunu varsayarak, 5 sn geçtikten sonraki sürati için tahmini bir üst değer bulun. Yerçekimi sabitini $g = 32$ ft/sn^2 olarak alın.

b. 5 sn sonra gelinen yükseklik için bir alt değer bulun.

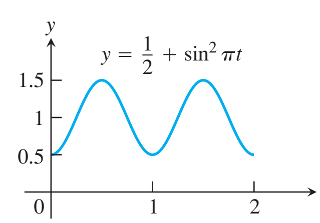
Bir Fonksiyonun Ortalama Değeri

15–18 alıştırmalarında, sonlu bir toplam kullanarak f'nin verilen aralıktaki ortalama değerini aralığı eşit uzunluklu dört alt aralığa bölerek ve f'yi bu aralıkların orta noktalarında hesaplayarak bulun.

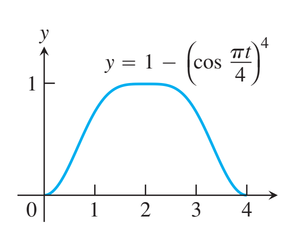
15. $f(x) = x^3, \quad [0, 2]$

16. $f(x) = 1/x, \quad [1, 9]$

17. $f(t) = (1/2) + \sin^2 \pi t, \quad [0, 2]$



18. $f(t) = 1 - \left(\cos \dfrac{\pi t}{4}\right)^4, \quad [0, 4]$



Kirlilik Kontrolü

19. Su kirliliği Hasarlı bir tankerden denize yağ sızmaktadır. Tankerdeki hasar, aşağıdaki tabloya kaydedilen sızmanın her saat daha da artmasından anlaşılacağı gibi artmaktadır.

Zaman (sa)	0	1	2	3	4
Sızma (gal/sa)	50	70	97	136	190

Zaman (sa)	5	6	7	8
Sızma (gal/sa)	265	369	516	720

a. 5 saat sonra sızmış olan yağ miktarı için bir alt ve üst değer bulun.

b. (a) şıkkını 8 saat sonra sızmış olan yağ miktarı için tekrarlayın.

c. ilk 8 saaten sonra tanker 720 gal/sa yağ sızdırmaya devam etmektedir. Eğer tankerde başlangıçta 25.000 gal yağ varsa, en kötü ve en iyi durumlarda bütün yağın boşalması için ortalama kaç saat daha geçmesi gerekir?

20. Air pollution Bir güç santrali petrol yakarak elektrik üretmektedir. Yanma işleminin sonucunda ortaya çıkan zararlı maddeler duman bacalarında gaz temizleyicilerle temizlenmektedir. Zamanla, temizleyiciler etkinliklerini kaybederler ve kirlilik geçerli hükümet standartlarını aştığı zaman değiştirilmeleri gerekir. Kirlilik ölçümleri her ayın sonunda alınarak zehirli maddelerin ne hızla atmosfere yayıldıkları belirlenir. Aşağıdaki tabloda bu ölçümler verilmektedir.

Ay	**Oc.**	**Şub.**	**Mart**	**Nis.**	**May.**	**Haz.**
Zehirli madde sızma hızı (ton/gün)	0.20	0.25	0.27	0.34	0.45	0.52

Ay	**Tem.**	**Ağu.**	**Eyl.**	**Ekim**	**Kas.**	**Ara.**
Zehirli madde sızma hızı (ton/gün)	0.63	0.70	0.81	0.85	0.89	0.95

a. Bir ayın 30 gün olduğunu ve yeni gaz temizleyicilerin sadece 0.05 ton/gün sızmaya izin verdiklerini varsayarak, Haziran sonuna kadar sızan kirliliğin toplam tonajının üst değerini hesaplayın. Alt değer nedir?

b. En iyi durumda, yaklaşık olarak ne zaman toplam 125 ton zehirli madde atmosfere karışır?

Bir Çemberin Alanı

21. Yarıçapı 1 olan bir çember içine bir düzgün n-kenarlı çokgen yerleştirin ve n'nin aşağıdaki değerleri için çokgenin alanını hesaplayın.

a. 4 (kare) **b.** 8 (sekizgen) **c.** 16

d. (a), (b) ve (c) deki alanları çemberin alanı ile karşılaştırın

22. (*Alıştırma 21'in devamı*)

a. Yarıçapı 1 olan bir çember içine bir düzgün n-kenarlı çokgen yerleştirin ve çokgenin köşelerine çizilen yarıçapların oluşturduğu n eş üçgenden birinin alanını hesaplayın.

b. Çizilen çokgenin alanının limitini $n \to \infty$ iken bulun.

c. (a) ve (b) de yaptığınız hesaplamaları r yarıçaplı bir çember için tekrarlayın

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

23–26 alıştırmalarında, aşağıdaki adımları gerçekleştirmek için bir BCS kullanın.

a. Verilen aralıkta fonksiyonları çizin.

b. Aralığı n = 100, 200 ve 1000 alt aralığa bölün ve fonksiyonun her alt aralığın orta noktasındaki değerini bulun.

c. (b) şıkkında üretilen fonksiyon değerlerinin ortalamasını bulun.

d. (c) şıkkında $n = 1000$ alt aralık için hesaplanan ortalama değeri kullanarak $f(x)$ = (ortalama değer) denklemi çözün.

23. $f(x) = \sin x, \quad [0, \pi]$ **24.** $f(x) = \sin^2 x, \quad [0, \pi]$

25. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

26. $f(x) = x \sin^2 \frac{1}{x}, \quad \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

5.2 Sigma Gösterimi ve Sonlu Toplamların Limitleri

Bölüm 5.1 de sonlu toplamlarla tahmin etmede çoğunlukla çok sayıda terim içeren toplamlarla (örneğin Tablo 5.1 de 1000'e kadar) karşılaştık. Bu bölümde çok sayıda terim içeren toplamları yazmak için bir gösterim tanıtıyoruz. Gösterimi tanımladıktan ve birkaç özelliğini belirttikten sonra terimleri sayısı sonsuza yaklaşan bir sonlu toplam yaklaşımına ne olduğuna bakacağız.

Sonlu Toplamlar ve Sigma Gösterimi

Sigma Gösterimi, çok sayıda terimi olan bir sonlu toplamı

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

şeklinde kısa olarak yazmamızı sağlar. Büyük Yunan harfi Σ (Sigma'nın baş harfi S'ye karşılık gelir) ve "toplam" anlamındadır. **Toplama indisi** k, toplamın nereden başladığını (Σ sembolünün altındaki sayıdan) ve nerede sona erdiğini söyler (Σ sembolünün üstündeki sayıda). İndisi göstermek için herhangi bir harf kullanılabilir fakat i, j ve k gelenekseldir.

k indisi $k = n$ da sonlanır.

Toplama sembolü (Yunan harfi sigma) — $$\sum_{k=1}^{n} a_k$$ — a_k, k terim için bir formüldür

k indisi $k = 1$ den başlar.

Böylece,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 = \sum_{k=1}^{11} k^2$$

ve

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(100) = \sum_{i=1}^{100} f(i)$$

yazabiliriz. Bu eşitliklerin sağ tarafında kullanılan sigma gösterimi sol taraftaki toplam ifadelerinden daha sadedir (daha bir bütündür).

ÖRNEK 1 Sigma Gösterimini Kullanmak

Sigma gösteriminde toplam	**Toplamın açık hali, her *k* değeri için bir terim**	**Toplamın değeri**
$\sum_{k=1}^{5} k$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$	15
$\sum_{k=1}^{3} (-1)^k k$	$(-1)^1(1) + (-1)^2(2) + (-1)^3(3)$	$-1 + 2 - 3 = -2$
$\sum_{k=1}^{2} \frac{k}{k+1}$	$\frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1}$	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$
$\sum_{k=4}^{5} \frac{k^2}{k-1}$	$\frac{4^2}{4-1} + \frac{5^2}{5-1}$	$\frac{16}{3} + \frac{25}{4} = \frac{139}{12}$

■

Toplamanın alt limiti 1 olmak zorunda değildir; herhangi bir tamsayı olabilir.

ÖRNEK 2 Farklı İndis Başlangıç Değerleri Kullanmak

$1 + 3 + 5 + 7 + 9$ toplamını sigma gösteriminde yazın.

Çözüm Terimleri üreten formül toplamın alt sınırı ile değişir fakat üretilen terimler aynı kalır. Çoğunlukla $k = 0$ veya $k = 1$ ile başlamak en basitidir.

$k = 0$ *ile başlamak:* $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=0}^{4}(2k + 1)$$

$k = 1$ *ile başlamak:* $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=1}^{5}(2k - 1)$$

$k = 2$ *ile başlamak:* $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=2}^{6}(2k - 3)$$

$k = -3$ *ile başlamak:* $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=-3}^{1}(2k + 7)$$ ■

Eğer,

$$\sum_{k=1}^{3}(k + k^2)$$

şeklinde bir toplam söz konusu ise terimleri aşağıdaki şekilde yeniden düzenleyebiliriz.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}(k + k^2) &= (1 + 1^2) + (2 + 2^2) + (3 + 3^2) \\ &= (1 + 2 + 3) + (1^2 + 2^2 + 3^2) \quad \text{Terimleri tekrar gruplama} \\ &= \sum_{k=1}^{3} k + \sum_{k=1}^{3} k^2\end{aligned}$$

Bu, sonlu toplamlar için genel bir kural gösterir:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Bu şekilde dört kural aşağıda verilmiştir. Bunların doğru olduklarının bir ispatı matematik tümevarım yöntemi ile elde edilebilir (Bkz. Ek 1).

Sonlu Toplamlar için Cebir Kuralları

1. *Toplam Kuralı:* $$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$
2. *Fark Kuralı:* $$\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$$
3. *Sabitle Çarpım Kuralı:* $$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$ (Herhangi bir c sayısı)
4. *Sabit Değer Kuralı:* $$\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$$ (c herhangi bir sabit değer)

ÖRNEK 3 Sonlu Toplamlar için Cebir Kurallarını Kullanmak

(a) $\sum_{k=1}^{n}(3k - k^2) = 3\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2$ — Fark kuralı ve Sabitle çarpım kuralı.

(b) $\sum_{k=1}^{n}(-a_k) = \sum_{k=1}^{n}(-1)\cdot a_k = -1\cdot\sum_{k=1}^{n} a_k = -\sum_{k=1}^{n} a_k$ — $n = 4$ ile (2) ve (1) denklemleri

(c) $\sum_{k=1}^{3}(k + 4) = \sum_{k=1}^{3} k + \sum_{k=1}^{3} 4$ — Toplam kuralı

$$= (1 + 2 + 3) + (3\cdot 4)$$

$$= 6 + 12 = 18$$

Sabit değer kuralı

(d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = n\cdot\frac{1}{n} = 1$ — Sabit değer kuralı ($1/n$ bir sabittir) ■

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Yıllar boyu insanlar sonlu toplamların değerleri için bir çok formül geliştirmişlerdir. Bunların en ünlüleri ilk n tamsayının toplamı (Gauss bunu 8 yaşındayken bulmuştur) ve ilk n tamsayının kareleri ile küplerinin toplamı için olan formüllerdir.

ÖRNEK 4 İlk n Tamsayının Toplamı

İlk n tamsayının toplamının

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

olduğunu gösterin.

Çözüm: Formül, ilk 4 sayının toplamının

$$\frac{(4)(5)}{2} = 10$$

olduğunu söyler. Toplama bu iddiayı gerçekler:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Formülü genel olarak ispatlamak için toplamdaki terimleri iki defa yazarız, bir ileriye ve bir de geriye doğru

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & n \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 1 \end{array}$$

Birinci sütundaki iki terimi toplarsak $1 + n = n + 1$ elde ederiz. Benzer şekilde, ikinci sütundaki iki terimi toplarsak $2 + (n - 1) = n + 1$ elde ederiz. Herhangi bir sütundaki iki terimin toplamı $n + 1$ dir. n sütunu topladığımızda, her biri $n + 1$'e eşit olan n terim elde ederiz ve toplam $n(n + 1)$'e eşittir. Bu istenen değerin iki katı olduğundan ilk n sayının toplamı $(n)(n + 1)/2$ dir. ■

İlk n tamsayının kareleri ile küpleri toplamı için olan formüller matematik tümevarım yöntemi ile ispatlanır (Bkz. Ek 1). Aşağıda bunları belirtiyoruz.

İlk n kare: $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

İlk n küp: $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Sonlu Toplamların Limitleri

Bölüm 5.1'de ele alınan sonlu toplam yaklaşımları, terim sayısı arttırıldığında ve alt aralıkların genişlikleri (uzunlukları) kısaldığında daha doğru hale geldiler. Aşağıdaki örnek, alt aralıkların genişlikleri sıfıra giderken ve sayıları sonsuza giderken bir limit değerinin nasıl hesaplanacağını göstermektedir.

ÖRNEK 5 Bir Alana Sonlu Yaklaşımların Limiti

Sayıları sonsuza ve genişlikleri sıfıra giden eşit genişlikli dikdörtgenler kullanarak, $y = 1 - x^2$'nin grafiğinin altında ve x-eksenin [0, 1] aralığının üst kısmındaki R bölgesinin alanının alt yaklaşımlarının limit değerini bulun (Bkz. Şekil 5.4a).

Çözüm Genişlikleri eşit ve $\Delta x = (1-0)/n$ olan n tane dikdörtgen kullanarak bir alt toplam yaklaşımı hesaplarız ve $n \to \infty$ iken ne olduğuna bakarız. [0, 1] aralığını eşit genişlikli n alt aralığa ayırmakla başlarız

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, n\right].$$

Her alt aralığın genişliği $1/n$ dir. $1 - x^2$ fonksiyonu [0, 1] aralığı üzerinde azalandır ve bir alt aralıktaki en küçük değeri, alt aralığın sağ uç noktasındadır. Dolayısıyla, $[(k-1)/n, k/n]$ alt aralığı üzerinde yüksekliği $f(k/n) = 1 - (k/n)^2$ olan dikdörtgenlerle oluşturulan ve toplamı

$$f\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right).$$

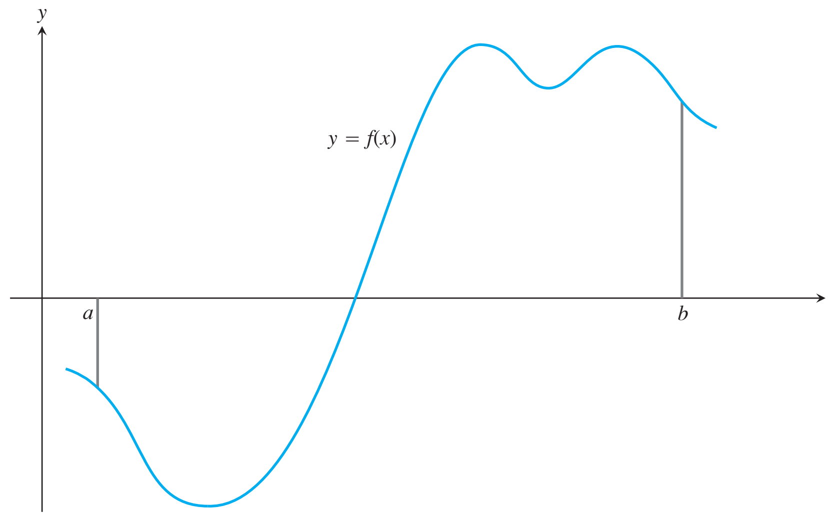
olan bir alt toplam elde edilir. Bunu sigma gösterimiyle yazar ve basitleştiririz

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{k^2}{n^3}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3} && \text{Fark Kuralı} \\
&= n \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 && \text{Sabit değer ve Sabit Kat Kuralı} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{n^3}\right)\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} && \text{İlk } n \text{ Sayının Kareleri Kuramı} \\
&= 1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} && \text{Pay Açılmış}
\end{aligned}$$

Her n için sağlanan bir alt toplam ifadesi elde ettik. $n \to \infty$ için bu ifadenin limitini alarak, alt aralıkların sayısı artarken ve alt aralıkların genişlikleri sıfıra giderken alt toplamların yakınsadığını görürüz:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}\right) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$$

Alt toplam yaklaşımları $2/3$'e yakınsar. Benzer bir hesaplama üst toplam yaklaşımlarının da $2/3$'e yakınsadığını gösterir (Alıştırma 35). Bölüm 5.1'in sonundaki özet anlamında, her sonlu yaklaşım da aynı 2/3 değerine yakınsar. Her sonlu yaklaşımının,



ŞEKİL 5.8 Bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli tipik bir $y = f(x)$ fonksiyonu.

alt toplam ile üst toplam yaklaşımları arasında sıkıştırılmış olduğu gösterilebileceğinden bu doğrudur. Bu nedenle R bölgesinin alanını bu limit değer olarak tanımlarız. Bölüm 5.3'te bu şekildeki sonlu yaklaşımların limitlerini daha genel olarak çalışacağız. ■

Riemann Toplamları

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)

Sonlu yaklaşımların limitleri teorisi, Alman matematikçi Bernhard Riemann tarafından kesinleştirilmiştir. Şimdi, bir sonraki bölümde incelenecek olan belirli integral teorisinin altını çizen *Riemann toplamı* tanımını veriyoruz.

Bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı keyfi bir f fonksiyonu ile başlıyoruz. Şekil 5.8 de gösterilen fonksiyon gibi, f'nin pozitif değerleri olduğu gibi negatif değerleri de bulunabilir. $[a, b]$ kapalı aralığını eşit genişlikte (veya uzunlukta) olması gerekmeyen alt aralıklara ayırırız ve Bölüm 5.1'deki sonlu yaklaşımlar için yapıldığı gibi aynı yolla toplamlar oluştururuz. Bunu yapmak için a ve b arasında

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$$

olacak şekilde $n - 1$ tane $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}\}$ noktaları seçeriz. Notasyonu tutarlı yapmak için a'yı x_0 ile ve b'yi de x_n ile gösteririz:

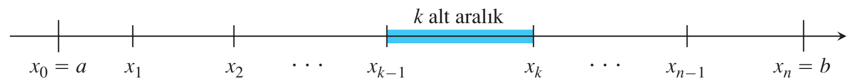
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ kümesine $[a, b]$'nin bir **bölünüşü** denir.

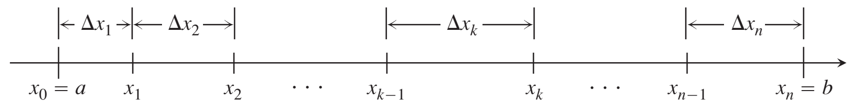
P bölünüşü $[a, b]$ kapalı aralığını n tane kapalı alt aralığa böler.

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

Bu alt aralıklardan birincisi $[x_0, x_1]$, ikincisi $[x_1, x_2]$ ve k 1 ile n arasında bir tam sayı olmak üzere, P'nin ***k*. alt aralığı** $[x_{k-1}, x_k]$, dır.



Birinci $[x_0, x_1]$ alt aralığının genişliği Δx_1 ile, ikinci $[x_1, x_2]$ aralığının genişliği Δx_2 ile gösterilir. k. alt aralığın uzunluğu $\Delta x_k = x_k - \Delta x_{k-1}$'dir. Bütün alt aralıkların genişlikleri eşitse ortak genişlik Δx, $(b - a)/n$ dir.



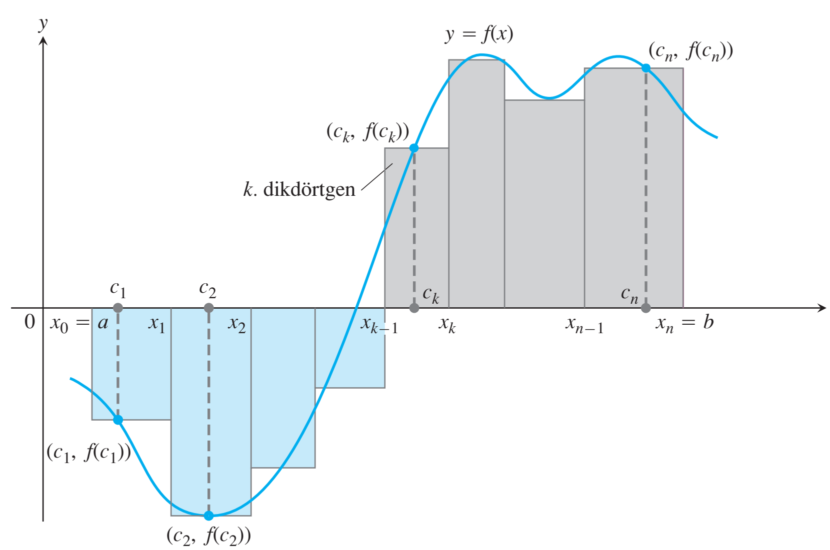
Her alt aralıkta bir nokta seçeriz. $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığından seçilen noktaya c_k denir. Sonra her alt aralık üzerinde, x-ekseninden eğriye $(c_k, f(c_k))$ noktasında değecek şekilde uzanan bir dikdörtgen kurarız. Bu dikdörtgenler, $f(c_k)$'nın pozitif veya negatif olmasına göre x-ekseninin üst tarafında veya alt tarafında bulunabilir veya $f(c_k) = 0$ ise x-ekseninde-dir. (Şekil 5.9).

Her alt aralık üzerinde $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ çarpımını oluştururuz. Bu çarpım, $f(c_k)$'nın işaretine bağlı olarak pozitif, negatif veya sıfırdır. $f(c_k) > 0$ ise $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ çarpımı, yüksekliği $f(c_k)$ ve genişliği Δx_k olan bir dikdörtgenin alanıdır. $f(c_k) < 0$ ise $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ çarpımı negatif bir sayıdır, genişliği Δx_k olan ve x-ekseninden negatif $f(c_k)$ sayısına kadar uzanan bir dikdörtgenin alanın negatifi.

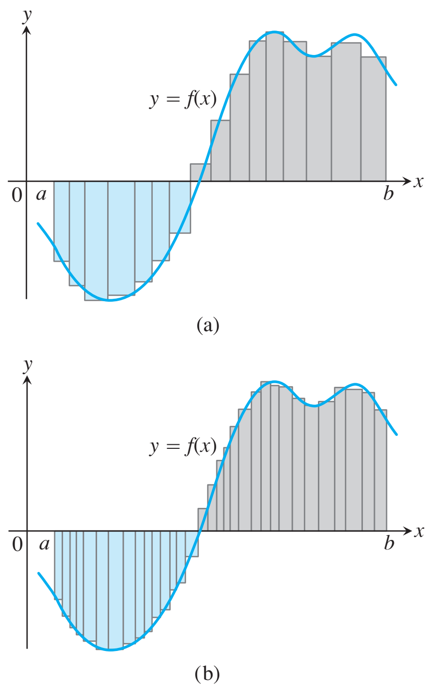
Son olarak, bütün bu çarpımları

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x_k$$

toplamını elde etmek üzere toplarız.



ŞEKİL 5.9 Dikdörtgenler, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile x-ekseni arasındaki alana yaklaşımda bulunurlar.



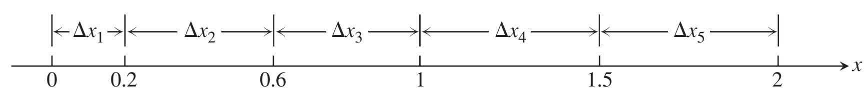
ŞEKİL 5.10 $[a, b]$'nin daha iyi bölünüşlerindeki dikdörtgenlerle Şekil 5.9'daki eğri. Daha iyi bölünüşler, artan bir doğrulukla f'nin grafiği ile x-ekseni arasındaki alana yaklaşan, daha kısa tabanlı dikdörtgen kümeleri oluştururlar.

S_P toplamına **$[a, b]$ aralığı üzerinde f fonksiyonu için bir Riemann toplamı** denir. Seçtiğimiz P bölünüşüne ve alt aralıklardan c_k noktalarının seçimine bağlı olarak bu şekilde birçok toplam vardır.

Bütün alt aralıkların genişliklerinin eşit ve $\Delta x = 1/n$ olduğu Örnek 5'te, basitçe dikdörtgenlerin sayısı n'yi arttırarak onları daha ince yapabildik. Bir bölünüş farklı genişlikli dikdörtgenlerden oluştuğunda, en geniş (en uzun) alt aralığın genişliğini kontrol ederek hepsinin ince olduğundan emin olabiliriz. Bir P bölünüşünün normu'nu, en geniş alt aralığın genişliği olarak tanımlarız ve $\|P\|$ ile gösteririz. $\|P\|$ küçük bir sayı ise P bölünüşündeki bütün alt aralıkların genişlikleri küçüktür. Bu fikirlerin bir örneğine bakalım.

ÖRNEK 6 Bir Kapalı Aralığın Bölünüşü

$P = \{0, 0.2, 0.6, 1, 1.5, 2\}$ kümesi $[0, 2]$ aralığının bir bölünüşüdür. P'nin 5 alt aralığı vardır $[0, 0.2]$, $[0.2, 0.6]$, $[0.6, 1]$, $[1, 1.5]$ ve $[1.5, 2]$:



Alt aralıkların uzunlukları $\Delta x_1 = 0.2$, $\Delta x_2 = 0.4$, $\Delta x_3 = 0.4$, $\Delta x_4 = 0.5$ ve $\Delta x_5 = 0.5$'tir. En uzun alt aralığın uzunluğu 0.5 olduğu için, bölünüşün normu $\|P\| = 0.5$'tir. Bu örnekte, bu uzunlukta iki alt aralık vardır. ■

Bir $[a, b]$ kapalı aralığının bir bölünüşüne karşı gelen herhangi bir Riemann toplamı, sürekli bir f fonksiyonunun grafiği ile x-ekseni arasındaki bölgeye yaklaşımda bulunan dikdörtgenler tanımlar. Şekil 5.10'dan edinilen izlenime göre normu sıfıra yaklaşan bölünüşler, artan bir doğrulukla bu bölgeye yaklaşımda bulunan birer dikdörtgenler topluluğu tanımlarlar. Takip eden bölümde, f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ise bir Riemann toplamı oluşturmak üzere P bölünüşü ve alt aralıklarındaki c_k noktaları nasıl seçilirlerse seçilsinler, P bölünüşünün normu tarafından kontrol edilen alt aralıkların genişlikleri sıfıra yaklaşırken, bir tek limit değerine yaklaşıldığını göreceğiz.

ALIŞTIRMALAR 5.2

Toplam Notasyonu

1–6 1-6 alıştırmalarındaki toplamları sigma gösterimi kullanmadan yazın. Sonra hesaplayın.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2} \frac{6k}{k+1}$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{k-1}{k}$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \cos k\pi$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \sin k\pi$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \sin \frac{\pi}{k}$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (-1)^{k} \cos k\pi$

7. Aşağıdakilerden hangisi 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 toplamını sigma gösteriminde ifade eder?

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} 2^{k-1}$ **b.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} 2^{k}$ **c.** $\displaystyle\sum_{k=-1}^{4} 2^{k+1}$

8. Aşağıdakilerden hangisi 1 – 2 + 4 – 8 + 16 – 32 toplamını sigma gösteriminde ifade eder?

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} (-2)^{k-1}$ **b.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} (-1)^{k} 2^{k}$ **c.** $\displaystyle\sum_{k=-2}^{3} (-1)^{k+1} 2^{k+2}$

9. Hangi formül diğer ikisine eşdeğer değildir?

a. $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}$ **b.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^{k}}{k+1}$ **c.** $\displaystyle\sum_{k=-1}^{1} \frac{(-1)^{k}}{k+2}$

10. Hangi formül diğer ikisine eşdeğer değildir?

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (k-1)^2$ **b.** $\displaystyle\sum_{k=-1}^{3} (k+1)^2$ **c.** $\displaystyle\sum_{k=-3}^{-1} k^2$

11–16 alıştırmalarındaki toplamları sigma gösteriminde ifade edin. Yanıtınızın şekli toplamın alt limitindeki seçiminize bağlı olacaktır.

11. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

12. $1 + 4 + 9 + 16$

13. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

14. $2 + 4 + 6 + 8 + 10$

15. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

16. $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{3}{5} + \frac{4}{5} - \frac{5}{5}$

Sonlu Toplamların Değerleri

17. $\sum_{k=1}^{n} a_k = -5$ ve $\sum_{k=1}^{n} b_k = ($. olduğunu varsayın. Aşağıdaki toplamları bulun.

a. $\sum_{k=1}^{n} 3a_k$ **b.** $\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{6}$ **c.** $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$

d. $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)$ **e.** $\sum_{'=1}^{n} (b_k - 2a_k)$

18. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ ve $\sum_{k=1}^{n} b_k = 1$. olduğunu varsayın. Aşağıdaki toplamları bulun.

a. $\sum_{k=1}^{n} 8a_k$ **b.** $\sum_{k=1}^{n} 250b_k$

c. $\sum_{k=1}^{n} (a_k + 1)$ **d.** $\sum_{k=1}^{n} (b_k - 1)$

19–28 alıştırmalarındaki toplamları hesaplayın.

19. a. $\sum_{k=1}^{10} k$ **b.** $\sum_{k=1}^{10} k^2$ **c.** $\sum_{k=1}^{10} k^3$

20. a. $\sum_{k=1}^{13} k$ **b.** $\sum_{k=1}^{13} k^2$ **c.** $\sum_{k=1}^{13} k^3$

21. $\sum_{k=1}^{7} (-2k)$

22. $\sum_{k=1}^{5} \frac{\pi k}{15}$

23. $\sum_{k=1}^{6} (3 - k^2)$

24. $\sum_{k=1}^{6} (k^2 - 5)$

25. $\sum_{k=1}^{5} k(3k + 5)$

26. $\sum_{k=1}^{7} k(2k + 1)$

27. $\sum_{k=1}^{5} \frac{k^3}{225} + \left(\sum_{k=1}^{5} k\right)^3$

28. $\left(\sum_{k=1}^{7} k\right)^2 - \sum_{k=1}^{7} \frac{k^3}{4}$

Riemann Toplamları İçin Dikdörtgenler

29–32 alıştırmalarında, her $f(x)$ fonksiyonunu verilen aralıkta çizin. Aralığı eşit uzunluklu dört alt aralığa bölün. Sonra çiziminize, c_k k. alt aralığın (a) sol uç noktası, (b) sağ uç noktası ve (c) orta noktası olmak üzere, $\Sigma_{k=1}^{4} f(c_k)\,\Delta x_k$, Riemann toplamıyla ilişkili dikdörtgenleri ekleyin. (Her dikdörtgen kümesi için ayrı bir resim çizin.)

29. $f(x) = x^2 - 1, \quad [0, 2]$

30. $f(x) = -x^2, \quad [0, 1]$

31. $f(x) = \sin x, \quad [-\pi, \pi]$

32. $f(x) = \sin x + 1, \quad [-\pi, \pi]$

33. $P = \{0, 1.2, 1.5, 2.3, 2.6, 3\}$ bölünüşünün normunu bulun.

34. $P = \{-2, -1.6, -0.5, 0, 0.8, 1\}$ bölünüşünün normunu bulun.

Üst Toplamların Limitleri

35–40 alıştırmalarındaki fonksiyonlar için, $[a, b]$ aralığını n tane eşit alt aralığa bölmekle elde edilen üst toplam için bir formül bulunuz. Sonra, aralığı üzerinde eğrinin altında kalan alanı hesaplamak için bu toplamların $n \to \infty$ iken limitlerini alınız.

35. $f(x) = 1 - x^2$, $[0, 1]$ üzerinde.

36. $f(x) = 2x$, $[0, 3]$ üzerinde.

37. $f(x) = x^2 + 1$, $[0, 3]$ üzerinde.

38. $f(x) = 3x^2$, $[0, 1]$ üzerinde.

39. $f(x) = x + x^2$, $[0, 1]$ üzerinde.

40. $f(x) = 3x + 2x^2$, $[0, 1]$ üzerinde.

5.3 Belirli İntegral

Bölüm 5.2 de, bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon için eşit $(b - a)/n$ genişlikli (veya uzunluklu) n tane alt aralık kullanarak oluşturulan bir sonlu toplamın limitini araştırdık. Bu bölümde, daha genel Riemann toplamlarının limitlerini, $[a, b]$'nin bölünüşlerinin normları sıfıra yaklaşırken ele alıyoruz. Genel Riemann toplamları için bölünüşlerin alt aralıklarının genişlikleri eşit olmak zorunda değildir. Bu durumda limit alma işlemi, bir fonksiyonun bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerindeki belirli integrali tanımına götürür.

Riemann Toplamlarının Limitleri

Belirli integralin tanımı, bazı fonksiyonlar için, $[a, b]$'nin bölünüşlerinin normları sıfıra yaklaşırken, karşı gelen Riemann toplamlarının bir I limit değerine yaklaştıkları fikrine

dayanmaktadır. Bu yakınsama fikriyle kastettiğimiz şey şudur: bir Riemann toplamı, bölünüşünün normunun yeteri kadar küçük olması koşuluyla (ki, bütün alt aralıklarının genişlikleri yeterince küçük olur), I sayısına yakın olacaktır. Riemann toplamının I sayısına ne kadar yakın olması gerektiğini belirleyen ϵ sembolünü küçük bir pozitif sayı olarak ve bunun gerçekleşmesi için, bir bölünüşün normunun ne kadar küçük olması gerektiğini belirleyen δ sembolünü de ikinci bir pozitif küçük sayı olarak tanıtıyoruz. Kesin formülasyon aşağıdadır.

TANIM Riemann Toplamlarının Limiti Olarak Belirli İntegral

$f(x)$ bir $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa, ***f*'nin [*a*, *b*] kapalı aralığı üzerindeki belirli integrali** I dır ve $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$ Riemann toplamlarının limiti I dır deriz:

Verilen her $\epsilon > 0$ sayısına bir $\delta > 0$ sayısı karşılık gelir öyle ki, $[a, b]$'nın, $\|P\| < \delta$ koşulunu sağlayan her $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ bölünüşü ve c_k'nın $[x_{k-1}, x_k]$ aralığından her seçimi için

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k - I \right| < \epsilon.$$

sağlanır.

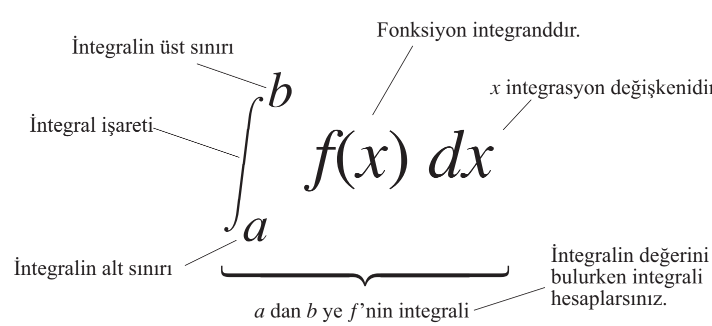
Leibniz, belirli integral için, Riemann toplamlarının bir limiti olarak oluşturulmasını ihtiva eden bir notasyon tanıtmıştır. O, $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$ Riemann toplamlarının, $f(x)$ fonksiyon değerleri ile alt aralıkların "sonsuz küçük" dx genişliklerinin çarpımlarının bir sonsuz toplamı haline dönüştüğünü düşünmüştür. $\sum$ sembolü limitte aslı "S" olan $\int$,integral sembolü ile değiştirilir. $f(c_k)$ fonksiyon değerleri $f(x)$ sürekli seçim değerleri ile değiştirilir. Alt aralıkların Δx_k genişlikleri dx diferansiyeli haline gelir. x, a dan b ye giderken bütün $f(x) \cdot dx$ çarpımlarını topluyoruz gibidir. Bu notasyon bir integralin oluşturulmasını ihtiva etmesine rağmen, belirli integrale tam anlamını veren, Riemann tanımıdır.

Notasyon ve Belirli İntegralin Varlığı

Belirli integralin tanımındaki I sayısının sembolü, "a dan b ye kadar $f(x)$ de x integrali" veya bazen "a dan b ye kadar $f(x)$'in x'e göre integrali' 'diye okunan

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

dir. Ayrıca integral sembolündeki bileşenlerin isimleri şöyledir:



Tanım sağlandığında, f'nin $[a, b]$ aralığı üzerindeki Riemann toplamları $I = \int_a^b f(x)\,dx$ belirli integraline **yakınsar** deriz. Ayrıca, f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde **integrallenebilir** deriz. Normu sıfıra giden bir P bölünüşü için ve her bölünüşün c_k noktaları için birçok seçenek vardır. Hangi seçim yapılırsa yapılsın, daima aynı I limitini elde ettiğimizde belirli integral vardır. Limit var olduğunda bunu belirli integral olarak yazarız:

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Her bölünüşün, genişliği $\Delta x = (b-a)/n$ olan n tane eşit alt aralığı var olduğunda ayrıca

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x = I = \int_a^b f(x)\,dx$$

yazarız. Limit, daima bölünüşlerin normları sıfıra giderken ve alt aralıkların sayısı sonsuza giderken alınır.

Bir fonksiyonun herhangi belirli bir aralık üzerindeki belirli integralinin değeri, bağımsız değişkeni göstermek için seçtiğimiz harfe değil, fonksiyonun kendisine bağlıdır. x yerine t veya u kullanmaya karar verirsek integrali basitçe

$$\int_a^b f(x)dx \text{ yerine } \int_a^b f(t)\,dt \quad \text{veya} \quad \int_a^b f(u)\,du$$

olarak yazarız. İntegrali nasıl yazarsak yazalım, hala Riemann toplamlarının limiti olarak tanımlanan aynı sayıdır. Hangi harfi kullandığımızın önemi olmadığından integralinin değişkenine **sessiz değişken** denir.

Bir Riemann toplamının limitini alırken yapılabilecek birçok seçenek bulunduğundan böyle bir limitin varlığını göstermek zor olabilir. Ancak, hangi seçim yapılırsa yapılsın, bir *sürekli* fonksiyona karşı gelen Riemann toplamları aynı limite yakınsar.

TEOREM 1 Belirli İntegrallerin Varlığı

Bir sürekli fonksiyon integre edilebilir. Yani, bir f fonksiyonu bir $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ise, $[a, b]$ aralığında belirli integrali vardır.

Ekstremum Değer Teoremine göre (Bölüm 4.1, Teorem 1), f sürekli olduğunda $[x_{k-1}, x_k]$ üzerinde c_k'yı $f(c_k)$ maksimum olacak ve bir **üst toplam** verecek şekilde seçebiliriz. c_k'yı, bir **alt toplam** veren, f'nin $[x_{k-1}, x_k]$ üzerindeki minimum değerini verecek şekilde seçebiliriz. c_k'yı $[x_{k-1}, x_k]$'nın orta noktası olarak, en sağdaki noktası x_k olarak veya rastgele olarak seçebiliriz. Bölünüşleri eşit genişlikli veya değişen genişlikli olarak seçebiliriz. Her durumda, $\|P\| \to 0$ iken $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$ limiti için aynı limiti elde ederiz. Teorem 1'in ardındaki fikir, bir bölünüşe karşı gelen bir Riemann toplamının bu bölünüşün üst toplamından daha büyük ve alt toplamından daha küçük olamayacağıdır. $\|P\| \to 0$ iken alt ve üst toplamlar aynı değere yakınsarlar. Bütün diğer Riemann toplamları alt toplam ile üst toplam arasına kalırlar ve aynı limiti yakınsarlar. Teorem 1'in bir ispatı, fonksiyonların, bölünüşlerin ve limitlerin bu düşünce doğrultusunda dikkatli bir analizini içerir ve daha ileri seviye derslere bırakılmıştır. Bu ispatın bir gösterimi Alıştırma 80 ve 81 de verilmiştir.

Teorem 1, belirli integralin nasıl *hesaplanacağı* hakkında bir şey söylememektedir. Ters türev alma işlemine bir bağlantı aracılığı ile Bölüm 5.4'te bir hesaplama yöntemi geliştirilecektir.

İntegrallenebilen ve İntegrallenemeyen Fonksiyonlar

Teorem 1, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli olan fonksiyonların burada integrallenebilir olduklarını söylemektedir. Sürekli olmayan fonksiyonlar integrallenebilen veya integrallenemeyen olabilirler. İntegrallenebilen süreksiz fonksiyonlar, $[a, b]$ aralığı üzerinde artan fonksiyonları (Alıştırma 77) ve bu bölümün sonundaki Ek-Alıştırmalarda tanımlanan *parçalı-sürekli fonksiyonları* içermektedir. (İkinciler, sonlu sayıda nokta hariç $[a, b]$ aralığı içinde süreklidirler.) İntegrallenemeyen fonksiyonların, grafikleri ile x-ekseni arasındaki alana, sayıca artan ince dikdörtgenlerle iyi bir yaklaşımda bulunulamayacak kadar çok süreksizliklerinin bulunması gerekir. İntegrallenemeyen bir fonksiyon örneği aşağıdadır.

ÖRNEK 1 [0, 1] Üzerinde İntegrallenemeyen Bir Fonksiyon

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ rasyonel ise} \\ 0 & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun $[0, 1]$ aralığı üzerinde Riemann integrali yoktur. Herhangi iki sayı arasında hem bir rasyonel sayı ve hem de bir irrasyonel sayı vardır. Böylece, fonksiyon $[0, 1]$ üzerinde çok istikrarsız bir şekilde yukarı aşağı sıçrama yapar. Dikdörtgenler ne kadar ince olursa olsun, grafiğin altında ve x-ekseninin üstünde kalan alana iyi bir yaklaşımda bulunulamaz. Aslında, üst toplam yaklaşımları ile alt toplam yaklaşımlarının farklı limitlere yakınsadığını göstereceğiz.

$[0, 1]$'in bir P bölünüşünü seçip c_k noktasını f'nin $[x_{k-1}, x_k]$ üzerindeki maksimum değerini verecek şekilde seçersek, her $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığı, $f(c_k) = 1$ olacak şekilde bir rasyonel sayı içerdiğinden karşı gelen Riemann toplamı

$$U = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (1)\,\Delta x_k = 1,$$

olur. Bölünüşteki alt aralıkların uzunlukları toplamının 1 olduğuna dikkat edin, $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1$. Dolayısıyla, bu şekildeki her Riemann toplamı 1'e eşittir ve bu seçimleri kullanan Riemann toplamlarının bir limiti 1 dir.

Diğer taraftan, c_k noktasını f'nin $[x_{k-1}, x_k]$ üzerindeki minimum değerini verecek şekilde seçersek, her $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığı, $f(c_k) = 0$ olacak şekilde bir irrasyonel sayı içerdiğinden Riemann toplamı

$$L = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (0)\,\Delta x_k = 0,$$

olur. Bu seçimleri kullanan Riemann toplamlarının limiti sıfırdır. Limit, c_k noktalarının seçimine bağlı olduğundan f integrallenemeyen bir fonksiyondur. ■

Belirli İntegrallerin Özellikleri

$\int_a^b f(x)\,dx$ belirli integralini $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$, toplamlarının bir limiti olarak tanımlarken $[a, b]$ aralığı üzerinde soldan sağa doğru hareket ettik. Bunun yerine, $x_0 = b$ ile başlayan ve $x_n = a$ da sona eren sağdan sola hareket etseydik ne olurdu? Riemann toplamındaki her işaret değiştirirdi, $x_k - x_{k-1}$ pozitif olmak yerine bu defa negatif olurdu. Her alt aralıktan aynı c_k noktalarını seçmekle herhangi bir Riemann toplamı işaret değiştirirdi. Dolayısıyla

limit ve $\int_b^a f(x)\,dx$ integrali işaret değiştirirdi. Daha önce geriye doğru integral almaya bir anlam vermiş olmadığımızdan şu tanımı veriyoruz:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

İntegralin başka bir genişlemesi $a = b$ ile sıfır uzunluğundaki bir aralığıdır. Aralık genişliği $\Delta x_k = 0$ olduğunda $f(c_k)\,\Delta x_k$ sıfır olacağından

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

olarak tanımlarız. Teorem 2, sağladıkları kurallar olarak verilen ve yukarıdaki iki özelliği de içeren integrallerin 7 özelliğini ifade eder. Bu kurallar integralleri hesaplama sürecinde çok yararlıdırlar. Hesaplamalarımızı basitleştirmek için bunlara tekrar tekrar başvuracağız.

2'den 7'ye kuralların, Şekil 5.11 de gösterilen geometrik yorumları vardır. Bu şekillerdeki grafikler pozitif fonksiyonlara aittir fakat kurallar genel olarak integrallenebilen fonksiyonlara uygulanabilir.

TEOREM 2

f ve g integrallenebilir ise belirli integral Tablo 5.3'teki 1'den 7'ye kadar kuralları sağlar.

TABLO 5.3 Belirli İntegrallerin Sağladığı Kurallar

1. *İntegrasyon Sırası:* $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ — Bir tanım

2. *Sıfır Genişliğinde Aralık:* $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ — Başka Bir Tanım

3. *Sabitle Çarpım:* $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ — k herhangi bir sayı

$\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ — $k = -1$

4. *Toplam ve Farklar:* $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

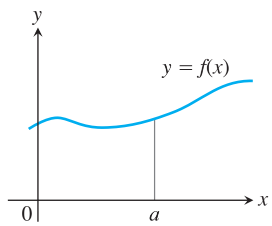
5. *Toplanabilirlik:* $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

6. *Max-Min eşitsizliği:* max f ve min f f'nin $[a, b]$ aralığındaki maksimum ve minimum değerleri ise,

$$\min f \cdot (b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \max f \cdot (b - a).$$

7. *Baskınlık:* $[a, b]$ üzerinde $f(x) \ge g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$

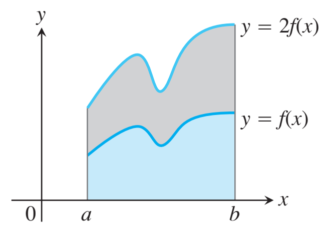
$[a, b]$ üzerinde $f(x) \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ (Özel durum)



(a) *Sıfır Genişliğinde Aralık:*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

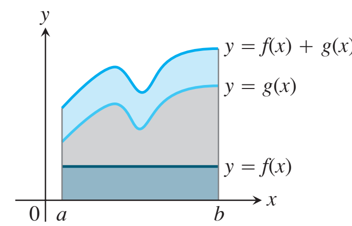
(Bir nokta üzerindeki alan 0 dır.)



(b) *Sabitle Çarpım:*

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

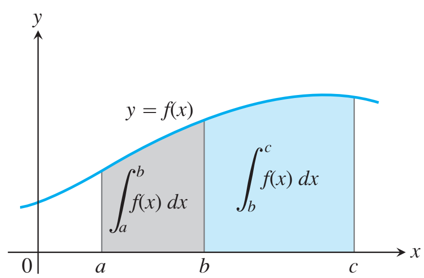
($k = 2$ için gösterilmiştir)



(c) *Toplam:*

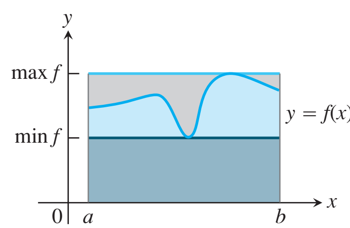
$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(Alanlar toplanır)



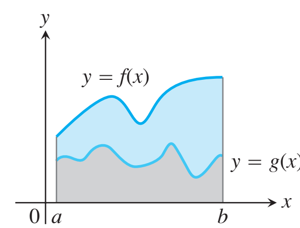
(d) *Belirli integraller için toplanabilirlik:*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$



(e) *Max-Min eşitsizliği*:

$$\min f \cdot (b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \max f \cdot (b - a)$$



(f) *Baskınlık:*

$[a, b]$ aralığında $f(x) \ge g(x)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$$

ŞEKİL 5.11

1 ve 2 kuralları tanımlar olduğu halde, 3'ten 7'ye kuralların ispatlanması gerekmektedir. İspatlar, Belirli integrallerin, Riemann toplamlarının bir limiti olarak tanımlanmasına dayanmaktadır. Bu kurallardan birinin ispatı aşağıdadır. Tablo 5.3'teki diğer özellikleri sağlamak için benzer ispatlar verilebilir.

Kural 6'nın İspatı Kural 6 f'nin $[a, b]$ aralığı üzerindeki integralinin hiçbir zaman f'nin minimum değeri ile aralığın uzunluğu çarpımından küçük ve f'nin maksimum değeri ile aralığın uzunluğu çarpımından büyük olamayacağını söyler. Bunun nedeni, $[a, b]$'nin her bölünüşünde ve c_k noktalarının herhangi bir seçiminde,

$$\begin{aligned}
\min f \cdot (b - a) &= \min f \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k && \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a \\
&= \sum_{k=1}^{n} \min f \cdot \Delta x_k && \text{Sabitle Çarpım Kuralı} \\
&\le \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k && \min f \le f(c_k) \\
&\le \sum_{k=1}^{n} \max f \cdot \Delta x_k && f(c_k) \le \max f \\
&= \max f \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k && \text{Sabitle Çarpım Kuralı} \\
&= \max f \cdot (b - a)
\end{aligned}$$

olmasıdır.

Kısaca, f'nin $[a, b]$ aralığındaki bütün Riemann toplamları

$$\min f \cdot (b - a) \leq \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k \leq \max f \cdot (b - a)$$

eşitsizliğini sağlarlar. Dolayısıyla limitleri, yani integral de bu eşitsizliği sağlar. ■

ÖRNEK 2 Belirli İntegral Kurallarını Kullanmak

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5, \qquad \int_{1}^{4} f(x)\,dx = -2, \qquad \int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 7$$

olduğunu varsayın.

1. $\displaystyle\int_{4}^{1} f(x)\,dx = -\int_{1}^{4} f(x)\,dx = -(-2) = 2$ Kural 1

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} [2f(x) + 3h(x)]\,dx = 2\int_{-1}^{1} f(x)\,dx + 3\int_{-1}^{1} h(x)\,dx$ Kural 3 ve 4

$$= 2(5) + 3(7) = 31$$

3. $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{4} f(x)\,dx = 5 + (-2) = 3$ Kural 5 ■

ÖRNEK 3 Bir İntegral İçin Sınır Bulmak

$\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x}\,dx$ integralinin değerinin $3/2$ den küçük olduğunu gösterin.

Çözüm Belirli integraller için Max-Min eşitsizliği (Kural 6), $\min f \cdot (b - a)$'nın $\int_a^b f(x)\,dx$ için bir *alt sınır* olduğunu ve $\max f \cdot (b - a)$ bir *üst sınır* olduğunu söyler $[0, 1]$ aralığında $\sqrt{1 + \cos x}$'in maksimum değeri $\sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$'dir, dolayısıyla

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x}\,dx \leq \sqrt{2} \cdot (1 - 0) = \sqrt{2}.$$

olur. $\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x}\,dx$, üstten $\sqrt{2}$ (1.414….) ile sınırlı olduğundan integral $3/2$ den küçüktür. ■

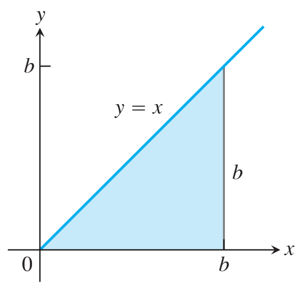
Negatif Olmayan Bir Fonksiyonun Grafiğinin Altındaki Alan

Şimdi, giderek artan sayıda dikdörtgenlerle bir bölgeye yaklaşım fikrini içeren, sınırı eğrisel olan bir bölgenin alanı kavramını kesinleştiriyoruz. Negatif olmayan sürekli bir fonksiyonun grafiği altındaki alan bir belirli integral olarak tanımlanır.

TANIM **Bir Belirli İntegral Olarak Bir Eğri Altındaki Alan**

$y = f(x)$ fonksiyonu negatif olmayan ve $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon ise **$[a, b]$ aralığı üzerinde $y = f(x)$ eğrisi altındaki alan**, f'nin a'dan b'ye kadar integralidir.

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$



ŞEKİL 5.12 Örnek 4'teki bölge bir üçgendir.

İlk defa olarak sınırları herhangi bir sürekli fonksiyonun grafiği olan bölgenin alanı için kuvvetli bir tanımımız vardır. Şimdi bunu, yeni tanımımızın önceki alan kavramımızla uyuştuğunu sağlayabileceğimiz basit bir örneğe, bir doğru altındaki alana uyguluyoruz.

ÖRNEK 4 $y = x$ Doğrusu Altındaki Alan

$\int_0^b x\,dx$ 'i hesaplayın ve $[0, b]$, $b > 0$ aralığı üzerinde $y = x$ altındaki A alanını bulun.

Çözüm Söz konusu bölge bir üçgendir (Şekil 5.12). Alanı iki yolla hesaplıyoruz.

(a) Belirli integrali Riemann toplamlarının limiti olarak hesaplamak üzere normları sıfıra giden bölünüşler için $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$'yı hesaplarız. Teorem 1'e göre normları sıfıra gittiği sürece bölünüşlerin veya c_k noktalarının seçiminin bir önemi yoktur. Bütün seçimler tam olarak aynı limiti verirler. Dolayısıyla, P bölünüşünün $[0, b]$ aralığını genişlikleri eşit ve $\Delta x = (b - 0)/n = b/n$ olan n alt aralığa böldüğünü düşünelim ve c_k noktalarını her alt aralıkta sağ uç nokta olarak seçelim. Bölünüş $P = \left\{0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}, \cdots, \frac{nb}{n}\right\}$ ve $c_k = \frac{kb}{n}$ dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x &= \sum_{k=1}^{n} \frac{kb}{n}\cdot\frac{b}{n} && f(c_k) = c_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{kb^2}{n^2} \\
&= \frac{b^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k && \text{Sabitle Çarpım Kuralı} \\
&= \frac{b^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} && \text{İlk } n \text{ Tamsayının Toplamı} \\
&= \frac{b^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$n \to \infty$ ve $\|P\| \to 0$ iken sağ taraftaki son ifadenin limiti $b^2/2$'dir. Bu nedenle

$$\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}.$$

dir.

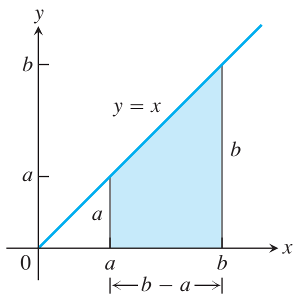
(b) Alan, negatif olmayan bir fonksiyonun belirli integraline eşit olduğundan, taban uzunluğu b ve yüksekliği $y = b$ olan bir üçgenin alanı için alan formülünü kullanarak belirli integrali hemen elde edebiliriz. Alan, $A = (1/2)\, b \cdot b = b^2/2$ dir. Yine, $\int_0^b x\,dx = b^2/2$ buluruz.

Örnek 4, $f(x) = x$'i herhangi bir $[a, b]$, $0 < a < b$ kapalı aralığı üzerinde integre edecek şekilde genelleştirilebilir.

$$\begin{aligned}
\int_a^b x\,dx &= \int_a^0 x\,dx + \int_0^b x\,dx && \text{Kural 5} \\
&= -\int_0^a x\,dx + \int_0^b x\,dx && \text{Kural 1} \\
&= -\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} && \text{Örnek 4}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak, $y = f(x)$'in integrali için şu kuralı buluruz:

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, \qquad a < b \tag{1}$$



ŞEKİL 5.13 Yamuğun alanı $A = (b^2 - a^2)/2$ dir.

Bu hesaplama bir yamuğun alanını verir (Şekil 5.13). (1) denklemi a ve b negatif iken de geçerlidir. $a < b < 0$ iken belirli integralin değeri $(b^2 - a^2)/2$ negatiftir, x-ekseninin altında $y = x$ doğrusuna kadar inen yamuğun alanının negatifidir. $a < 0$ ve $b > 0$ iken (1) denklemi hala geçerlidir ve belirli integral iki alan arasındaki farkı verir; $[0, b]$ üzerinde grafiğin altındaki alan eksi $[a, 0]$ altında ve grafiğin üstündeki alan.

Aşağıdaki sonuçlar da Örnek 4'tekine benzer bir Riemann toplamı hesabı kullanarak gerçeklenebilir (Alıştırma 75 ve 76).

$$\int_a^b c\,dx = c(b - a), \qquad c \text{ herhagi bir sabit} \tag{2}$$

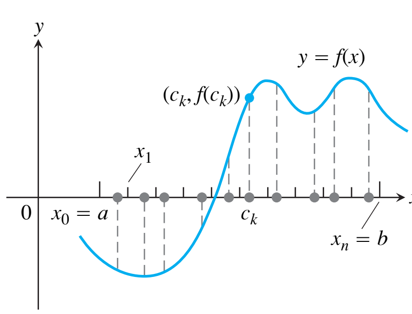
$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, \qquad a < b \tag{3}$$

Bir Sürekli Fonksiyonun Ortalama Değeri, Tekrar

Bölüm 5.1 de, bir $[a, b]$ aralığı üzerinde negatif olmayan sürekli bir f fonksiyonunun ortalama değerini tanıtmıştık ve bu ortalamayı $y = f(x)$'in grafiği altındaki alanın $b - a$ ile bölümü olarak tanımlamıştık. İntegral notasyonu ile bunu

$$\text{Ortalama} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

olarak yazarız. Bu formülü, herhangi pozitif, negatif veya ikiside olan sürekli (veya integrallenebilir) bir fonksiyonun ortalama değerinin tanımını kesin olarak vermek için kullanabiliriz.



ŞEKİL 5.14 Bir fonksiyonun bir $[a, b]$ aralığı üzerindeki değerlerinin bir örneği.

Sırasıyla, aşağıdaki fikir yürütmeyi kullanabiliriz. n tane sayının ortalamasının sayıların toplamının n ile bölünmesi olduğunu söyleyen aritmetik fikriyle başlayacağız. Bir $[a, b]$ aralığında sürekli bir f fonksiyonunun sonsuz tane değeri olabilir, fakat bunları sıralı bir şekilde örnekleyebiliriz. $[a, b]$'yi genişlikleri eşit ve $\Delta x = (b - a)/n$ olan n alt aralığa böler ve f'yi her alt aralıktaki bir c_k noktasında hesaplarız (Şekil 5.14). Örneklenen n değerin ortalaması

$$\begin{aligned}
\frac{f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k) \\
&= \frac{\Delta x}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k) \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}, \text{ dolayısıyla } \frac{1}{n} = \frac{\Delta x}{b-a} \\
&= \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x
\end{aligned}$$

dir.

Ortalama, f'nin $[a, b]$ üzerindeki bir Riemann toplamını $(b - a)$ ile bölmekle elde edilir. Örneklerin boyutunu arttırır ve bölünüşün normunun sıfıra gitmesine izin verirsek, ortalama $(1/(b-a))\int_a^b f(x)\,dx$ 'e yaklaşır. Her iki bakış açısı bizi aşağıdaki tanıma götürür.

TANIM Bir Fonksiyonun Ortalama Değeri

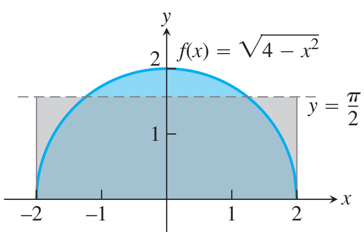
f, $[a, b]$ aralığında integre edilebilirse, $[a, b]$ üzerindeki ortalama değeri

$$\text{ort}\,(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

ile verilir.

ÖRNEK 5 Bir Ortalama Değer Bulmak

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ 'nin $[-2, 2]$ üzerindeki ortalama değerini bulun.



ŞEKİL 5.15 $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$'nin $[-2, 2]$ üzerindeki ortalama değeri $\pi/2$ dir (Örnek 5).

Çözüm $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ 'yi grafiği, merkezi orijinde ve 2 yarıçaplı üst yarı çember olan bir fonksiyon olarak tanıyoruz (Şekil 5.15).

–2 den 2'ye kadar yarı çember ile x-ekseni arasındaki alan

$$\text{Alan} = \frac{1}{2}\cdot \pi r^2 = \frac{1}{2}\cdot \pi(2)^2 = 2\pi$$

geometri formülünü kullanarak hesaplanabilir. f negatif olmayan bir fonksiyon olduğundan, alan aynı zamanda –2 den 2'ye f'nin integralidir;

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4 - x^2}\,dx = 2\pi$$

Bu nedenle, f'nin ortalama değeri

$$\text{ort}\,(f) = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}\sqrt{4 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}.$$ ■

dir.

ALIŞTIRMALAR 5.3

Limitleri İntegral Olarak İfade Etmek

1–8 alıştırmalarındaki limitleri belirli integral olarak yazın

1. $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} c_k^2\,\Delta x_k$, P $[0, 2]$'nin bir bölünüşü.

2. $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} 2c_k^3\,\Delta x_k$, P $[-1, 0]$'ın bir bölünüşü.

3. $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} (c_k^2 - 3c_k)\,\Delta x_k$, P $[-7, 5]$'in bir bölünüşü.

4. $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{c_k}\right)\Delta x_k$, P $[1, 4]$'ün bir bölünüşü.

5. $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-c_k}\,\Delta x_k$, P $[2, 3]$'ün bir bölünüşü.

6. $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{4 - c_k^2}\,\Delta x_k$, P $[0, 1]$'in bir bölünüşü.

7. $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} (\sec c_k)\,\Delta x_k$, P $[-\pi/4, 0]$'ın bir bölünüşü.

8. $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} (\tan c_k)\,\Delta x_k$, P $[0, \pi/4]$'ün bir bölünüşü.

Özellikleri ve Bilinen Değerleri Kullanarak Başka İntegralleri Bulmak

9. f ve g'nin integrallenebilir olduklarını ve

$$\int_1^2 f(x)\,dx = -4, \int_1^5 f(x)\,dx = 6, \int_1^5 g(x)\,dx = 8$$

olduğunu varsayın. Tablo 5.3'teki kuralları kullanarak aşağıdakileri bulun.

a. $\int_2^2 g(x)\,dx$ **b.** $\int_5^1 g(x)\,dx$

c. $\int_1^2 3f(x)\,dx$ **d.** $\int_2^5 f(x)\,dx$

e. $\int_1^5 [f(x) - g(x)]\,dx$ **f.** $\int_1^5 [4f(x) - g(x)]\,dx$

10. f ve h'nin sürekli olduklarını ve

$$\int_1^9 f(x)\,dx = -1, \quad \int_7^9 f(x)\,dx = 5, \quad \int_7^9 h(x)\,dx = 4.$$

olduğunu varsayın. Tablo 5.3'teki kuralları kullanarak aşağıdakileri bulun.

a. $\int_1^9 -2f(x)\,dx$ **b.** $\int_7^9 [f(x) + h(x)]\,dx$

c. $\int_7^9 [2f(x) - 3h(x)]\,dx$ **d.** $\int_9^1 f(x)\,dx$

e. $\int_1^7 f(x)\,dx$ **f.** $\int_9^7 [h(x) - f(x)]\,dx$

11. $\int_1^2 f(x)\,dx = 5$ olduğunu varsayarak aşağıdakileri bulun.

a. $\int_1^2 f(u)\,du$ **b.** $\int_1^2 \sqrt{3} f(z)\,dz$

c. $\int_2^1 f(t)\,dt$ **d.** $\int_1^2 [-f(x)]\,dx$

12. $\int_{-3}^0 g(t)\,dt = \sqrt{2}$ olduğunu varsayarak aşağıdakileri bulun.

a. $\int_0^{-3} g(t)\,dt$ **b.** $\int_{-3}^0 g(u)\,du$

c. $\int_{-3}^0 [-g(x)]\,dx$ **d.** $\int_{-3}^0 \frac{g(r)}{\sqrt{2}}\,dr$

13. f'nin integrallenebilir olduğunu ve $\int_0^3 f(z)\,dz = 3$ ve $\int_0^4 f(z)\,dz = 7$ olduğunu varsayarak aşağıdakileri bulun.

a. $\int_3^4 f(z)\,dz$ **b.** $\int_4^3 f(t)\,dt$

14. h'nin integrallenebilir olduğunu ve $\int_{-1}^1 h(r)\,dr = 0$ ve $\int_{-1}^3 h(r)\,dr = 6$ olduğunu varsayarak aşağıdakileri bulun.

a. $\int_1^3 h(r)\,dr$ **b.** $-\int_3^1 h(u)\,du$

İntegralleri Hesaplamak İçin Alan Kullanmak

15–22 alıştırmalarında integrandları çizin ve integralleri hesaplamak için alanları kullanın.

15. $\int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx$ **16.** $\int_{1/2}^{3/2} (-2x + 4)\,dx$

17. $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx$ **18.** $\int_{-4}^0 \sqrt{16 - x^2}\,dx$

19. $\int_{-2}^1 |x|\,dx$ **20.** $\int_{-1}^1 (1 - |x|)\,dx$

21. $\int_{-1}^1 (2 - |x|)\,dx$ **22.** $\int_{-1}^1 \left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right) dx$

23–26 alıştırmalarında integralleri hesaplamak için alanları kullanın.

23. $\int_0^b \frac{x}{2}\,dx, \quad b > 0$ **24.** $\int_0^b 4x\,dx, \quad b > 0$

25. $\int_a^b 2s\,ds, \quad 0 < a < b$ **26.** $\int_a^b 3t\,dt, \quad 0 < a < b$

Hesaplamalar

27–38. denklem (1) ve (3)'ün sonuçlarını kullanarak, 27–38 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

27. $\int_1^{\sqrt{2}} x\,dx$ **28.** $\int_{0.5}^{2.5} x\,dx$ **29.** $\int_\pi^{2\pi} \theta\,d\theta$

30. $\int_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} r\,dr$ **31.** $\int_0^{\sqrt[3]{7}} x^2\,dx$ **32.** $\int_0^{0.3} s^2\,ds$

33. $\int_0^{1/2} t^2\,dt$ **34.** $\int_0^{\pi/2} \theta^2\,d\theta$ **35.** $\int_a^{2a} x\,dx$

36. $\int_a^{\sqrt{3}a} x\,dx$ **37.** $\int_0^{\sqrt[3]{b}} x^2\,dx$ **38.** $\int_0^{3b} x^2\,dx$

39–50 alıştırmalarındaki integralleri hesaplamak için Tablo 5.3 'teki kuralları ve (1)–(3) Denklemlerini kullanın.

39. $\int_3^1 7\,dx$ **40.** $\int_0^{-2} \sqrt{2}\,dx$

41. $\int_0^2 5x\,dx$ **42.** $\int_3^5 \frac{x}{8}\,dx$

43. $\int_0^2 (2t - 3)\,dt$ **44.** $\int_0^{\sqrt{2}} \left(t - \sqrt{2}\right) dt$

45. $\int_2^1 \left(1 + \frac{z}{2}\right) dz$ **46.** $\int_3^0 (2z - 3)\,dz$

47. $\int_1^2 3u^2\,du$ **48.** $\int_{1/2}^1 24u^2\,du$

49. $\int_0^2 (3x^2 + x - 5)\,dx$ **50.** $\int_1^0 (3x^2 + x - 5)\,dx$

Alan Bulmak

51–54 alıştırmalarında, $[0, b]$ aralığında verilen eğri ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulmak için bir belirli integral kullanın.

51. $y = 3x^2$ **52.** $y = \pi x^2$

53. $y = 2x$ **54.** $y = \frac{x}{2} + 1$

Ortalama Değer

55–62 alıştırmalarında, verilen aralıkta fonksiyonun grafiğini çizin ve ortalama değerini bulun.

55. $f(x) = x^2 - 1, \quad [0, \sqrt{3}]$

56. $f(x) = -\dfrac{x^2}{2}, \quad [0, 3]$ **57.** $f(x) = -3x^2 - 1, \quad [0, 1]$

58. $f(x) = 3x^2 - 3, \; [0, 1]$

59. $f(t) = (t - 1)^2, \; [0, 3]$

60. $f(t) = t^2 - t, \quad [-2, 1]$

61. $g(x) = |x| - 1,$ **a.** $[-1, 1]$, **b.** $[1, 3]$, **c.** $[-1, 3]$

62. $h(x) = -|x|,$ **a.** $[-1, 0]$, **b.** $[0, 1]$, **c.** $[-1, 1]$

Teori ve Örnekler

63. Hangi a ve b değerleri

$$\int_a^b (x - x^2)\, dx$$

integralini maksimize eder? (*İpucu*: İntegrand nerede pozitiftir?)

64. Hangi a ve b değerleri

$$\int_a^b (x^4 - 2x^2)\, dx$$

integralini minimize eder?

65. Max-Min Eşitsizliğini kullanarak

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx$$

integralinin değerinin alt ve üst sınırlarını bulun.

66. (*Alıştırma 65'in devamı*) Max-Min Eşitsizliğini kullanarak

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1 + x^2}\, dx \quad \text{ve} \quad \int_{0.5}^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx$$

integrallerinin değerlerinin alt ve üst sınırlarını bulun. Bunları toplayarak

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx$$

integralinin değerini bulun.

67. $\int_0^1 \sin(x^2)\, dx$'in değerinin 2 olamayacağını gösterin.

68. $\int_1^0 \sqrt{x + 8}\, dx$'in değerinin $2\sqrt{2} \approx 2.8$ ile 3 arasında olduğunu gösterin.

69. Negatif olmayan fonksiyonların integralleri. f integre edilebilirse, Max-Min Eşitsizliğini kullanarak

$$[a, b]\text{'de } f(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\, dx \geq 0$$

olduğunu gösterin.

70. Pozitif olmayan fonksiyonların integralleri. f integre edilebilirse,

$$[a, b]\text{'de } f(x) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\, dx \leq 0$$

olduğunu gösterin.

71. $x \geq 0$ için geçerli olan $\sin x \leq x$ eşitsizliğini kullanarak, $\int_0^1 \sin x\, dx$ 'in değeri için bir üst sınır bulun.

72. $\sec x \geq 1 + (x^2/2)$ eşitsizliği $(-\pi/2, \pi/2)$'de geçerlidir. Bunu kullanarak, $\int_0^1 \sec x\, dx$ 'in değeri için bir alt sınır bulun.

73. ort (f) gerçekten [a, b] aralığında integre edilebilir $f(x)$ fonksiyonunun tipik bir değeriyse, ort (f) sayısının $[a, b]$ aralığındaki integralinin f'nin o aralıktaki integraliyle aynı olması gerekir. Öyle midir? Yani

$$\int_a^b \text{av}(f)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

olur mu? Yanıtınızı açıklayın.

74. İntegre edilebilir fonksiyonların bir $[a, b]$ aralığında aşağıdaki koşullara uyması hoş olurdu:

a. ort $(f + g)$ = ort (f) + ort (g)

b. ort $(kf) = k$ ort (f) (k herhangi bir sayı)

c. $[a, b]$ aralığında $f(x) \leq g(x)$ ise ort $(f) \leq$ ort (g)

Bu kurallar geçerli midir? Yanıtınızı açıklayın.

75. Denklem (2)'yi gerçeklemek için Örnek 4'teki gibi Riemann toplamlarının limitlerini kullanın.

76. Denklem (3)'ü gerçeklemek için Örnek 4'teki gibi Riemann toplamlarının limitlerini kullanın.

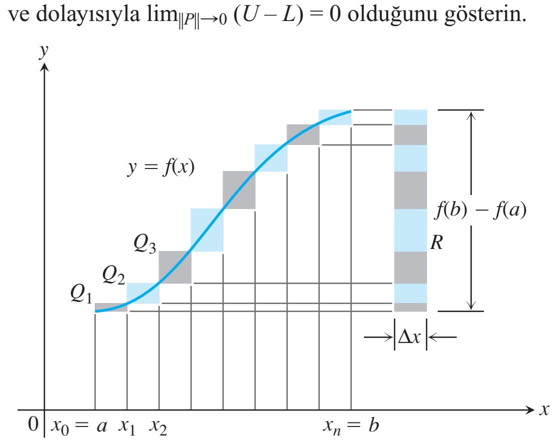
77. Artan fonksiyonlar için alt ve üst toplamlar

a. Sürekli bir $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin, x bir $[a, b]$ aralığı boyunca soldan sağa doğru artarken, düzgün olarak yükseldiğini varsayın. P $[a, b]$'nin $\Delta x = (b - a)/n$ uzunluklu n tane alt aralığa bölünüşü olsun. Aşağıdaki şekle bakarak, f'nin bu bölünüşteki alt ve üst toplamlarının arasındaki farkın boyutları $[f(b) - f(a)]$ ile Δx olan bir R dikdörtgeninin alanıyla grafik olarak temsil edilebileceğini gösterin. (*İpucu*: $U - L$ farkı, $Q_0Q_1, Q_1Q_2, \ldots, Q_{n-1}Q_n$ köşegenleri eğri üzerinde bulunan dikdörtgenlerin alanlarının toplamıdır. Bu dikdörtgenler yatay olarak R'ye kaydırılırsa, bir üst üste binme olmaz.)

b. $[a, b]$'nin bölünüşünün alt aralıklarının uzunlukları Δx_k'lerin eşit olmak yerine değiştiklerini varsayın. Δx_{max} P'nin normu olmak üzere

$$U - L \leq |f(b) - f(a)|\, \Delta x_{max}$$

ve dolayısıyla $\lim_{\|P\| \to 0} (U - L) = 0$ olduğunu gösterin.



78. Azalan fonksiyonlar için alt ve üst toplamlar (*Alıştırma 77'nin devamı*)

a. Değerleri, x bir $[a, b]$ aralığı boyunca soldan sağa doğru giderken, düzgün olarak azalan sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu için Alıştırma 77'deki gibi bir şekil çizin. P $[a, b]$'nin eşit uzunluklu alt aralıklara bölünüşü olsun. $U - L$ için Alıştırma 77(a)'da bulduğunuzdakine benzer bir ifade bulun.

b. $[a, b]$'nin bölünüşünün alt aralıklarının uzunlukları Δx_k 'lerin eşit olmak yerine değiştiklerini varsayın. Alıştırma 77(b)'deki

$$U - L \leq |f(b) - f(a)|\ \Delta x_{\max}$$

eşitsizliğinin doğru ve dolayısıyla $\lim_{\|P\|\to 0}(U - L) = 0$. olduğunu gösterin.

79. $x = 0$'dan $x = \pi/2$'ye kadar $y = \sin x$ eğrisinin altında kalan alanı

$$\sin h + \sin 2h + \sin 3h + \cdots + \sin mh = \frac{\cos(h/2) - \cos((m + (1/2))h)}{2\sin(h/2)}$$

formülünü kullanarak iki adımda bulun:

a. $[0, \pi/2]$ aralığını eşit uzunluklu n alt aralığa bölün ve bunlara karşılık gelen U üst toplamını bulun.

b. $n \to \infty$ ve $\Delta x = (b - a)/n \to 0$ iken U'nun limitini bulun.

80. f, sağdaki şekildeki gibi, $[a, b]$ üzerinde sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyon olsun.

$$x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_{n-1}$$

noktalarını gösterildiği gibi ekleyerek $[a, b]$ aralığını, $\Delta x_1 = x_1 - a, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_n = b - x_{n-1}$, uzunlukları eşit olması gerekmeyen n alt aralığa bölün.

a. $m_k = \min\ \{f(x): x\ k.$ alt aralıkta$\}$ ise

$$L = m_1\,\Delta x_1 + m_2\,\Delta x_2 + \cdots + m_n\,\Delta x_n$$

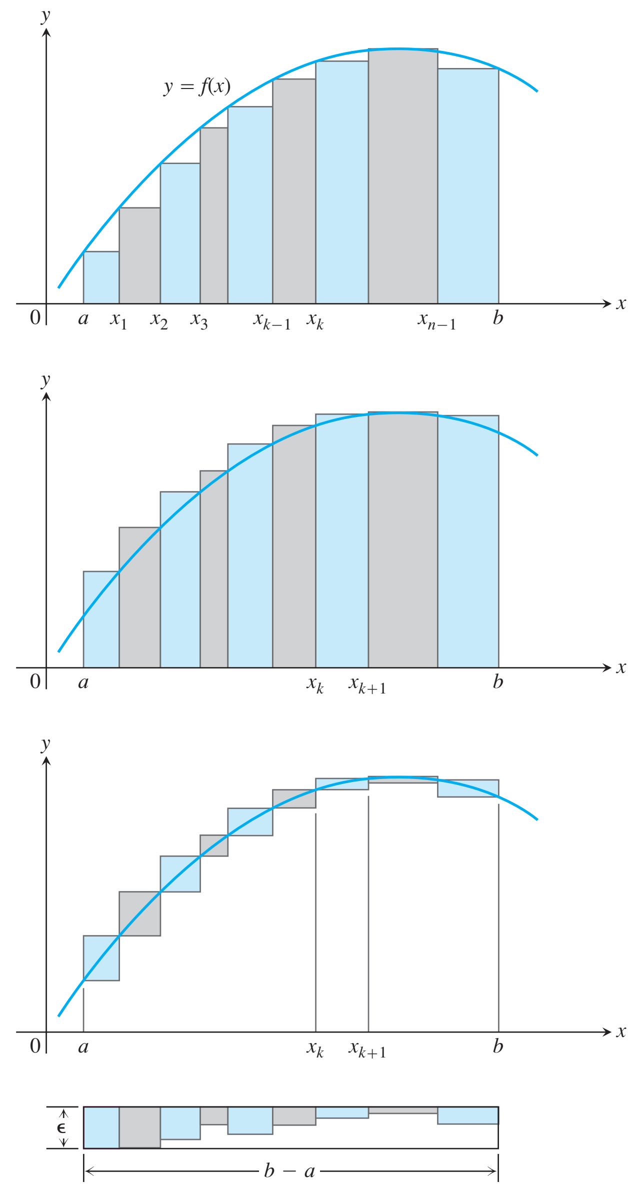
alt toplamı ile şeklin birinci bölümündeki renkli bölge arasındaki bağlantıyı açıklayın.

b. $M_k = \max\ \{f(x): x\ k.$ alt aralıkta$\}$ ise

$$U = M_1\,\Delta x_1 + M_2\,\Delta x_2 + \cdots + M_n\,\Delta x_n$$

üst toplamı ile şeklin ikinci bölümündeki renkli bölge arasındaki bağlantıyı açıklayın.

c. $U - L$ ile şeklin üçüncü bölümünde, eğri boyunca renkli bölgeler arasındaki bağlantıyı açıklayın.



81. Verilen her $\epsilon > 0$ için, $x_1, x_2 \in [a, b]$ ve $|x_1 - x_2| < \delta$ iken $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunabilirse f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde **düzgün süreklidir** denir. $[a, b]$ üzerinde sürekli olan bir fonksiyonun düzgün sürekli olduğu gösterilebilir. Bunu ve sağdaki şekli kullanarak, f sürekli ise ve $\epsilon > 0$ verilmişse, Δx_k'ların en büyüğünü yeterince küçük yaparak $U - L \leq \epsilon \cdot (b - a)$ yapılabileceğini gösterin.

82. 150 millik bir yolculukta ortalama 30 mil/sa hız yapar ve aynı 150 mili ortalama 50 mil/sa hızla geri dönerseniz, yolculuktaki ortalama hızınız ne olur? Yanıtınızı açıklayın. (Kaynak: David H. Pleacher, *The Mathematics Teacher,* Vol. 85. No.6, sayfa. 445–446, Eylül 1992.)

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Riemann Toplamlarını Bulmak

BCS'niz Riemann toplamlarıyla ilişkili dikdörtgenleri çizebiliyorsa, 83–88 alıştırmalarındaki integrallere yakınsayan Riemann toplamlarıyla ilişkili dikdörtgenleri çizin. Her durumda eşit uzunluklu $n = 4$, 10, 20 ve 50 alt aralık kullanın.

83. $\displaystyle\int_0^1 (1 - x)\,dx = \frac{1}{2}$

84. $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + 1)\,dx = \frac{4}{3}$

85. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx = 0$

86. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \sec^2 x \, dx = 1$

87. $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x| \, dx = 1$

88. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x} \, dx$ (İntegralin değeri yaklaşık 0.693'tür.)

Ortalama Değer

89–92 alıştırmalarında aşağıdaki adımları gerçekleştirmek için bir BCS kullanın.

a. Fonksiyonları verilen aralıkta çizin.

b. Aralığı, eşit uzunluklu 100, 200 ve 1000 alt aralığa bölün ve fonksiyonu her bir alt aralığın orta noktasında hesaplayın.

c. Fonksiyonun, (b) de elde edilen değerlerinin ortalama değerini bulun.

d. $n = 1000$ bölünüşü ile (c) de hesapladığınız ortalama değeri kullanarak $f(x)$ (ortalama değer) eşitliğinden x'i çözün.

89. $f(x) = \sin x$, $[0, \pi]$

90. $f(x) = \sin^2 x$, $[0, \pi]$

91. $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $\left[\dfrac{\pi}{4}, \pi\right]$

92. $f(x) = x \sin^2 \dfrac{1}{x}$, $\left[\dfrac{\pi}{4}, \pi\right]$

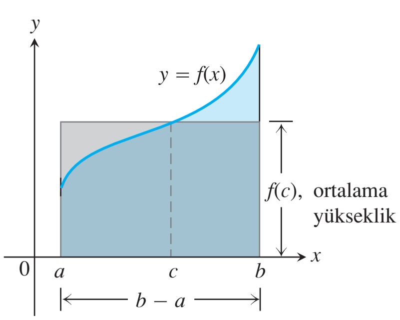
5.4 Analizin Temel Teoremi

Tarihsel Biyografi

Sir Isaac Newton
(1642–1727)

Bu bölümde integral hesabın ana teoremi olan Analizinin Temel Teoremini tanıtıyoruz. Teorem, integrasyon ile türev almayı birbirine bağlar ve bu bağlantı, integralleri Bölüm 5.3'te yaptığımız gibi Riemann toplamlarının limitlerini alarak hesaplamak yerine integrand fonksiyonun bir ters türevini kullanarak hesaplamamızı sağlar. Leibniz ve Newton bu bağlantıyı keşfettiler ve sonraki 200 yıl için bilimsel devrimi ateşleyen matematiksel gelişmeyi başlattılar.

Yolumuz boyunca, integral hesabın önemli bir başka teoremi olan ve Temel Teoremi ispat etmek için kullanılan Ortalama Değer Teoreminin integral versiyonunu tanıtıyoruz.



ŞEKİL 5.16 Ortalama Değer Teoremindeki $f(c)$ değeri, bir bakıma, f'nin $[a, b]$ üzerindeki ortalama yüksekliğidir. $f \geq 0$ iken, dikdörtgenin alanı a'dan b'ye kadar f'nin grafiği altındaki alandır,

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Belirli İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi

Önceki bölümde, bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli olan bir fonksiyonun ortalama değerini, $\int_a^b f(x)\,dx$ belirli integralinin aralığın $b - a$ uzunluğu veya genişliği ile bölümü olarak tanımlamıştık. Belirli integraller için Ortalama Değer Teoremi, bu ortalama değerin *daima* f fonksiyonu tarafından aralık içinde en az bir defa aldığını ileri sürer.

Şekil 5.16'daki grafik, $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı *pozitif* sürekli bir $y = f(x)$ fonksiyonunu göstermektedir. Geometrik olarak, Ortalama Değer Teoremi şunu söyler; $[a, b]$ aralığı içinde, yüksekliği fonksiyonun $f(c)$ ortalama değerine ve taban genişliği $b - a$'ya eşit olan dikdörtgenin alanı tam olarak a'dan b'ye kadar f'nin grafiği altındaki bölgenin alanına eşit olacak şekilde bir c sayısı vardır.

TEOREM 3 Belirli İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi

f, $[a, b]$ aralığında sürekli ise $[a, b]$ içindeki bir c noktasında

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

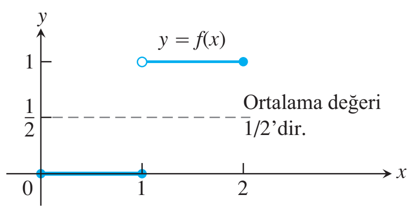
olur.

İspat Max-Min Eşitsizliğinin (Tablo 5.3, Kural 6) iki tarafını da $(b-a)$ ile bölersek,

$$\min f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \max f$$

elde ederiz. f sürekli olduğundan, Sürekli Fonksiyonlar İçin Ara Değer Teoremi (Bölüm 2.6) f'nin $\min f$ ile $\max f$ arasındaki her değeri alması gerektiğini söyler. Dolayısıyla, fonksiyon $[a, b]$ aralığındaki bir c noktasında $(1/(b-a))\int_a^b f(x)\,dx$ değerini almak zorundadır.

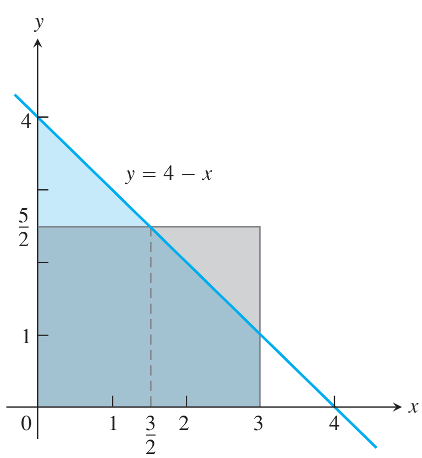
Burada f'nin sürekliliği önemlidir. Süreksiz bir fonksiyon ortalama değerine hiçbir zaman eşit olmayabilir (Şekil 5.17).



ŞEKİL 5.17 Sürekli olmayan bir fonksiyon ortalama değerini almak zorunda değildir.

ÖRNEK 1 İntegraller için Ortalama Değer Teoremini Uygulamak

$f(x) = 4 - x$ fonksiyonunun $[0, 3]$ aralığındaki ortalama değerini ve f'nin bu değeri aralıktaki hangi noktada aldığını bulun.



ŞEKİL 5.18 Tabanı $[0, 3]$ ve yüksekliği $5/2$ ($f(x) = 4 - x$ fonksiyonunun ortalama değeri) olan bir dikdörtgenin alanı 0'dan 3'e kadar f'nin grafiği ile x-ekseni arasındaki alana eşittir (Örnek 1).

Çözüm

ort (f)

$$\begin{aligned}
\text{av}(f) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{3-0}\int_0^3 (4-x)\,dx = \frac{1}{3}\left(\int_0^3 4\,dx - \int_0^3 x\,dx\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(4(3-0) - \left(\frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)\right) \qquad \text{Bölüm 5.3, Denk. (1) ve (2)} \\
&= 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

$f(x) = 4 - x$ fonksiyonunun $[0, 3]$ aralığındaki ortalama değeri $5/2$ dir. Fonksiyon bu değeri $4 - x = 5/2$ veya $x = 3/2$ iken alır. (Şekil 5.18) ■

Örnek 1'de $f(x)$'i hesaplanan ortalama değere eşitleyip x'i çözmekle gerçekten f'nin ortalama değerini aldığı bir c noktası bulduk. Her zaman c değerini bulmak kolay olmayabilir. İntegraller için Ortalama Değer Teoreminden başka neler öğrenebiliriz? Bir örnek aşağıdadır.

ÖRNEK 2 f, $[a, b]$ aralığında sürekli, $a \neq b$ ve

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

ise, $[a, b]$ aralığında en az bir kere $f(x) = 0$ olacağını gösterin.

Çözüm $[a, b]$ aralığında f'nin ortalama değeri

$$\text{ort}\,(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot 0 = 0$$

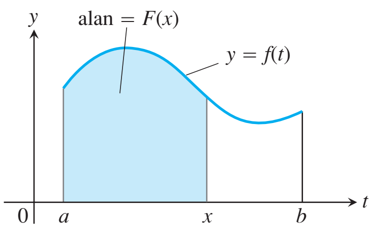
olur. Teorem 2 dolayısıyla, f bu değeri $[a, b]$'deki bir c noktasında alır. ■

Temel Teorem, Kısım 1

$f(t)$, sonlu bir I aralığı üzerinde integre edilebilir bir fonksiyon ise, herhangi sabit bir $a \in I$ sayısından başka bir $x \in I$ sayısına kadar integrali, x'teki değeri

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{1}$$

olan yeni bir F fonksiyonunu tanımlar. Örneğin f negatif olmuyorsa ve x a'nın sağında bulunuyorsa, $F(x)$ a'dan x'e kadar grafiğin altında kalan alanı verir (Şekil 5.19). x değişkeni bir integralin üst sınırıdır, fakat F reel değişkenli reel değerli başka bir fonksiyon gibidir. Verilen her x değerinde, iyi tanımlı bir sayısal değer bulunur; buradaki durumda f'nin a'dan x'e integralidir.



ŞEKİL 5.19 Denklem (1) tarafından tanımlanan $F(x)$ fonksiyonu, f negatif olmayan bir fonksiyon ve $x > a$ olduğunda a'dan x'e kadar f'nin grafiği altındaki alanı verir.

(1) denklemi yeni fonksiyonlar tanımlamanın bir yolunu verir, fakat buradaki önemi, integrallerle türevler arasında kurduğu ilişkidir. f herhangi bir sürekli fonksiyonsa, Temel Teorem şunu ileri sürer; F, x'in türevlenebilir bir fonksiyonudur ve türevi f'nin kendisidir. Her x değerinde,

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

olur. Bu sonucun neden sağlandığını anlamak için arkasındaki geometriye bakalım.

$[a, b]$ aralığı üzerinde $f \geq 0$ ise $F'(x)$'in türevin tanımından hesaplanması, $h \to 0$ iken

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

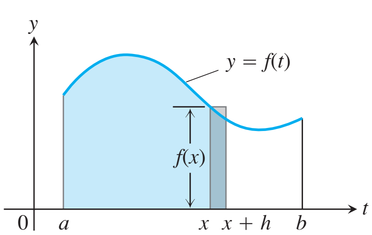
fark oranının limitini almak demektir. $h > 0$ için pay, iki alanın farkıdır. Dolayısıyla, x'ten $x + h$'ye kadar f'nin grafiği altındaki alandır (Şekil 5.20). Yani,

$$F(x+h) - F(x) \approx hf(x)$$

dir. Bu yaklaşımın her iki tarafını h ile bölmek ve $h \to 0$ iken

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

olmasını beklemek mantıklıdır. Bu sonuç, f fonksiyonu pozitif olmasa bile geçerlidir ve Analizin Temel Teoreminin birinci kısmını oluşturur.



ŞEKİL 5.20 Denklem (1) de $F(x)$ x'in solundaki alandır. Ayrıca, $F(x + h)$ $x + h$'nin solundaki alandır. Bu durumda $[F(x + h) - F(x)]/h$ fark denklemi yaklaşık olarak burada gösterilen dikdörtgenin yüksekliği $f(x)$'e eşittir.

TEOREM 4 Analizin Temel Teoremi, Kısım 1

f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ise, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde süreklidir ve (a, b)'de türevlenebilirdir ve türevi $f(x)$'dir;

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \tag{2}$$

Teorem 4'ü ispat etmeden önce ne söylediğini daha iyi anlamak için birkaç örneğe bakalım.

ÖRNEK 3 Temel Teoremi Uygulamak

Aşağıdakileri bulmak için Temel Teoremi Kullanın

(a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x \cos t\, dt$

(b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$

(c) $\dfrac{dy}{dx}$ if $y = \displaystyle\int_x^5 3t \sin t\, dt$

(d) $\dfrac{dy}{dx}$ if $y = \displaystyle\int_1^{x^2} \cos t\, dt$

Çözüm

(a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x \cos t\, dt = \cos x$ $\quad f(t) = \cos t$ ile Denklem (2)

(b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ ile Denklem (2)

(c) Bölüm 5.3, Tablo 5.3'teki integraller için Kural 1, Temel Teorem için bunu düzenler.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_x^5 3t \sin t\, dt &= \frac{d}{dx}\left(-\int_5^x 3t \sin t\, dt\right) \qquad \text{Kural 1}\\ &= -\frac{d}{dx}\int_5^x 3t \sin t\, dt\\ &= -3x \sin x\end{aligned}$$

(d) İntegrasyonun üst sınırı x değil, x^2 dir. Bu y'yi

$$y = \int_1^u \cos t\, dt \qquad \text{ve} \qquad u = x^2$$

fonksiyonlarının bileşkesi yapar. Bu nedenle dy/dx'i bulmak için Zincir Kuralını uygulamamız gerekir.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}\\ &= \left(\frac{d}{du}\int_1^u \cos t\, dt\right) \cdot \frac{du}{dx}\\ &= \cos u \cdot \frac{du}{dx}\\ &= \cos(x^2) \cdot 2x\\ &= 2x \cos x^2\end{aligned}$$

■

ÖRNEK 4 Verilen Türev ve Değer ile bir Fonksiyon Kurmak

$(-\pi/2, \pi/2)$ tanım kümesinde türevi

$$\frac{dy}{dx} = \tan x$$

olan ve $f(3) = 5$ koşulunu sağlayan bir $y = f(x)$ fonksiyonu bulun.

Çözüm Temel Teorem, türevi $\tan x$ ve $x = 3$'teki değeri 0 olan bir fonksiyon kurmayı kolaylıkla yapar:

$$y = \int_3^x \tan t \, dt$$

$y(3) = \int_3^3 \tan t \, dt = 0$ olduğundan, $x = 3$'teki değeri 5 olan bir fonksiyon kurmak için bu fonksiyona sadece 5 eklememiz gerekir:

$$f(x) = \int_3^x \tan t \, dt + 5$$

■

Örnek 4'teki problemin çözümü istenen iki koşulu sağlamasına rağmen, kullanışlı bir formda olup olmadığını sorabilirsiniz. Bu gün integrallere yakınsamada yetenekli bilgisayar ve hesap makinelerimiz bulunduğundan cevap evet'tir. Bölüm 7'de Örnek 4'teki çözümü tam olarak

$$y = \ln\left|\frac{\cos 3}{\cos x}\right| + 5$$

şeklinde yazmasını öğreneceğiz.

Şimdi, herhangi bir sürekli fonksiyon için Temel Teoremin bir ispatını verelim.

Teorem 4'ün İspatı Temel Teoremi, x ve $x + h$ noktaları (a, b)'de iken türev tanımını doğrudan $F(x)$ fonksiyonuna uygulayarak ispat edeceğiz. Bu

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} \tag{3}$$

farklar oranını yazmak ve (a, b)'deki her x için $h \to 0$ iken limitinin $f(x)$ sayısı olduğunu göstermek anlamına gelir.

Böylece

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] && \text{Tablo 5.3, Kural 5} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\int_a^{x+h} f(t)dt \end{aligned}$$

Belirli İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremine göre, (4) denkleminin son ifadesindeki değer, x ve $x + h$ arasındaki aralıkta f'nin aldığı değerlerden biridir. Yani, bu aralıktaki bir c sayısı için

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c) \tag{4}$$

olur. Dolayısıyla, $h \to 0$ iken $x + h$ değeri x'e gider ve c'yi de x'e yaklaşmaya zorlar (çünkü c, x ile $x + h$ arasında sıkıştırılmıştır). f fonksiyonu x'te sürekli olduğundan $f(c)$ de $f(x)$'e yaklaşır:

$$\lim_{h\to 0} f(c) = f(x) \tag{5}$$

Sonuç olarak

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_a^{x+h} f(t)\,d \\ &= \lim_{h\to 0} f(c) && \text{Denklem (4)} \\ &= f(x) && \text{Denklem (5)} \end{aligned}$$

buluruz. $x = a$ veya b ise (3) denkleminin limiti sırasıyla $h \to 0^+$ veya $h \to 0^-$ ile tek taraflı bir limit olarak yorumlanır. Bu durumda Bölüm 3.1 deki Teorem 1, F'nin $[a, b]$'deki her nokta için sürekli olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Temel Teorem, Kısım 2 (Hesaplama Teoremi)

Şimdi Analizin Temel Teoreminin ikinci kısmına geldik. Bu kısım, Riemann toplamlarının limitlerini hesaplamadan belirli integrallerin nasıl bulunacağını açıklamaktadır. Bir ters türev bulur ve integralin üst ve alt sınırlarında hesaplarız.

TEOREM 4 (Devam) **Analizin Temel Teoremi, Kısım 2**

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığının her noktasında sürekli ve F'de f'nin $[a, b]$ aralığındaki herhangi bir ters türevi ise

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

olur.

İspat Temel Teoremin 1. Kısmı, f'nin

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

gibi bir ters türevinin var olduğunu söyler. Dolayısıyla F, f'nin *herhangi* bir ters türevi ise bir C sabiti ve $a < x < b$ için $F(x) = G(x) + C$'dir (Bölüm 4.2, Türevler için Ortalama Değer Teoremi, Sonuç 2). F ve G'nin her ikisi $[a, b]$'de sürekli olduklarından, tek taraflı limitler alarak ($x \to a^+$ ve $x \to b^-$) $x = a$ ve $x = b$ iken de $F(x) = G(x) + C$'nin sağlandığını görürüz.

$F(b) - F(a)$'yı hesaplamakla,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [G(b) + C] - [G(a) + C] \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt \\ &= \int_a^b f(t)\,dt - 0 \\ &= \int_a^b f(t)\,dt \end{aligned}$$

buluruz. ■

Teorem şunu söyler: f'nin $[a, b]$ üzerindeki belirli integralini hesaplamak için bütün yapmamız gereken:

1. f'nin bir F ters türevini bulun ve
2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ sayısını hesaplayın.

$F(b) - F(a)$ için alışılmış notasyon, F'nin birden fazla teriminin olup olmamasına bağlı olarak

$$F(x)\Big]_a^b \qquad \text{veya} \qquad \Big[F(x)\Big]_a^b$$

dir.

ÖRNEK 5 İntegralleri Hesaplamak

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \sin x\Big]_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$

(b) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{0} \sec x \tan x\,dx = \sec x\Big]_{-\pi/4}^{0} = \sec 0 - \sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2}$

(c) $$\begin{aligned} \int_1^4 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{4}{x^2}\right)dx &= \left[x^{3/2} + \frac{4}{x}\right]_1^4 \\ &= \left[(4)^{3/2} + \frac{4}{4}\right] - \left[(1)^{3/2} + \frac{4}{1}\right] \\ &= [8 + 1] - [5] = 4. \end{aligned}$$ ■

Örnek 5'teki işlem, bir Riemann toplamının hesaplanmasından çok daha kolaydır.

Temel Teoremin sonuçları, bize birkaç şey söylerler. Denklem (2)

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{dF}{dx} = f(x)$$

olarak yazılabilir. Bu bize, f'nin önce integralini alıp sonra sonucun türevini alırsak tekrar f fonksiyonunu bulacağımızı söyler. Benzer şekilde

$$\int_a^x \frac{dF}{dt}\,dt = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

denklemi, F fonksiyonunu önce türetip sonra sonucun integralini alırsak tekrar F fonksiyonunu bulacağımızı söyler (bir intagrasyon sabiti ile). Bir anlamda, integrasyon ve türev

işlemleri birbirinin "tersi"dir. Temel Teorem ayrıca şunu da söyler; her sürekli f fonksiyonunun bir F ters türevi vardır. Ayrıca, $dy/dx = f(x)$ diferansiyel denkleminin her sürekli f fonksiyonu için bir ($y = F(x)$ ile verilen) çözümü vardır.

Toplam Alan

Riemann toplamları, $f(c_k)$ pozitif iken bir dikdörtgenin alanını veren $f(c_k)\,\Delta_k$ gibi terimler içerirler. $f(c_k)$ negatif olduğunda $f(c_k)\,\Delta_k$ çarpımı dikdörtgenin alanının negatifidir. Negatif bir fonksiyon için böyle terimleri toplarsak eğri ile x-ekseni arasındaki alanın negatifini elde ederiz. Sonra, mutlak değer alırsak gerçek pozitif alanı buluruz.

ÖRNEK 6 Ters Türevleri Kullanarak Alan Bulmak

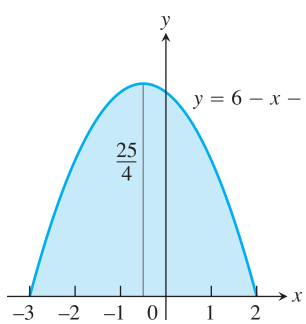
x-ekseni ve $y = 6 - x - x^2$ parabolü ile sınırlı bölgenin alanını bulun.

Çözüm

$$y = 0 = 6 - x - x^2 = (3 + x)(2 - x),$$

yazarak eğrinin x-eksenini nerede kestiğini buluruz;

$$x = -3 \quad \text{veya} \quad x = 2$$



ŞEKİL 5.21 Bu parabolik yayın alanı bir belirli integral ile hesaplanır (Örnek 6)

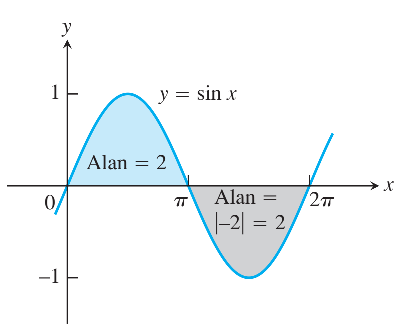
Eğri Şekil 5.21'de çizilmiştir ve [–3, 2] üzerinde negatif olmaz.
Alan

$$\int_{-3}^{2}(6 - x - x^2)\,dx = \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{2}$$
$$= \left(12 - 2 - \frac{8}{3}\right) - \left(-18 - \frac{9}{2} + \frac{27}{3}\right) = 20\tfrac{5}{6}$$

dır. Şekil 5.21'deki eğri bir parabol yayıdır ve böyle bir yayın altındaki alanın, tabanı kere yüksekliğinin tam olarak üçte ikisi olduğunu not etmek ilginçtir:

$$\frac{2}{3}(5)\left(\frac{25}{4}\right) = \frac{125}{6} = 20\tfrac{5}{6}$$ ■

Bir $y = f(x)$ fonksiyonu ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını hesaplamak, fonksiyon hem pozitif ve hem de negatif değerler alıyorsa daha çok dikkat gerektirir. $[a, b]$ aralığını, fonksiyonun üzerinde işaret değiştirmeyeceği alt aralıklara bölmekte dikkatli olmalıyız. Aksi halde pozitif ve negatif işaretli alanlar arasında kısalmalar meydana gelebilir ve bu yanlış bir toplam alana neden olabilir. Doğru toplam alan, $f(x)$'in işaret değiştirmediği her bir alt aralık üzerindeki belirli integrallerin mutlak değerleri toplamı ile elde edilir. "Alan" terimi *toplam alan* anlamında alınacaktır.



ŞEKİL 5.22 $0 \le x \le 2\pi$ için $y = \sin x$ ve x-ekseni arasındaki toplam alan, iki integralin mutlak değerleri toplamıdır (Örnek 7).

ÖRNEK 7 Alanları Kısaltmak

Şekil 5.22, $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun $x = 0$ ve $x = 2\pi$ arasındaki grafiğini göstermektedir. Aşağıdakileri hesaplayın.

(a) $f(x)$'in $[0, 2\pi]$ üzerindeki belirli integrali.

(b) $[0, 2\pi]$ üzerinde $f(x)$'in grafiği ve x-ekseni arasındaki alan.

Çözüm $f(x) = \sin x$ için belirli integral

$$\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big]_0^{2\pi} = -[\cos 2\pi - \cos 0] = -[1 - 1] = 0$$

ile verilir. Belirli integral sıfıra eşittir çünkü grafiğin x-ekseninin üzerindeki ve altındaki bölümleri birbirini götüren katkılar yaparlar.

$[0, 2\pi]$ üzerinde $f(x)$'in grafiği ile x-ekseni arsındaki alan, sin x'in tanım kümesini iki parçaya ayırarak hesaplanır: negatif değer almadığı $[0, \pi]$ aralığı ve pozitif değer almadığı $[\pi, 2\pi]$ aralığı.

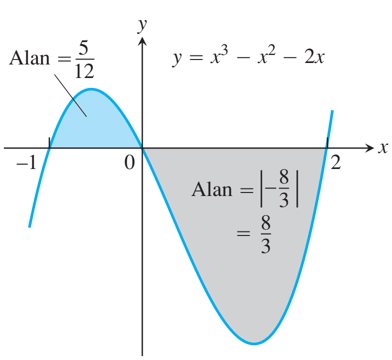
$$\int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big]_0^{\pi} = -[\cos \pi - \cos 0] = -[-1 - 1] = 2$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big]_{\pi}^{2\pi} = -[\cos 2\pi - \cos \pi] = -[1 - (-1)] = -2$$

İkinci integral negatif bir değer verir. Grafik ile x-ekseni arasındaki alan mutlak değerlerin toplamı ile bulunur

$$\text{Alan} = |2| + |-2| = 4$$

> **Özet:**
>
> $[a, b]$ üzerinde $y = f(x)$'in grafiği ile x-ekseni arasındaki alanı bulmak için aşağıdakileri yapın:
>
> **1.** $[a, b]$ aralığını f'nin sıfırlarından bölün.
>
> **2.** Her bir alt aralıkta f'yi integre edin.
>
> **3.** İntegrallerin mutlak değerlerini toplayın.



ŞEKİL 5.23 $y = x^3 - x^2 - 2x$ eğrisi ve x-ekseni arasındaki bölge (Örnek 8).

ÖRNEK 8 Ters Türevleri Kullanarak Alan Bulmak

x-ekseni ile $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$, $-1 \le x \le 2$ eğrisi arasında kalan bölgenin alanını bulun.

Çözüm Önce f'nin sıfırlarını bulun.

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x + 1)(x - 2)$$

olduğu için, sıfırlar $x = 0$, -1 ve 2'dir (Şekil 5.23). Sıfırlar $[-1, 2]$ aralığını iki alt aralığa böler: $f \ge 0$ olan $[-1, 0]$ ve $f \le 0$ olan $[0, 2]$ alt aralıkları. f fonksiyonunu her alt aralıkta integre eder ve hesaplanan değerlerin mutlak değerlerini toplarız.

$$\int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right] = \frac{5}{12}$$

$$\int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2} = \left[4 - \frac{8}{3} - 4\right] - 0 = -\frac{8}{3}$$

Sınırlanan toplam alan, hesaplanan integrallerin mutlak değerlerini toplamakla elde edilir,

$$\text{Sınırlanan toplam alan} = \frac{5}{12} + \left|-\frac{8}{3}\right| = \frac{37}{12}$$

ALIŞTIRMALAR 5.4

İntegralleri Hesaplamak

1–26 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

1. $\int_{-2}^{0}(2x+5)\,dx$

2. $\int_{-3}^{4}\left(5-\frac{x}{2}\right)dx$

3. $\int_{0}^{4}\left(3x-\frac{x^3}{4}\right)dx$

4. $\int_{-2}^{2}(x^3-2x+3)\,dx$

5. $\int_{0}^{1}\left(x^2+\sqrt{x}\right)dx$

6. $\int_{0}^{5}x^{3/2}\,dx$

7. $\int_{1}^{32}x^{-6/5}\,dx$

8. $\int_{-2}^{-1}\frac{2}{x^2}\,dx$

9. $\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx$

10. $\int_{0}^{\pi}(1+\cos x)\,dx$

11. $\int_{0}^{\pi/3}2\sec^2 x\,dx$

12. $\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\csc^2 x\,dx$

13. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\csc\theta\cot\theta\,d\theta$

14. $\int_{0}^{\pi/3}4\sec u\tan u\,du$

15. $\int_{\pi/2}^{0}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$

16. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt$

17. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(8y^2+\sin y)\,dy$

18. $\int_{-\pi/3}^{-\pi/4}\left(4\sec^2 t+\frac{\pi}{t^2}\right)dt$

19. $\int_{1}^{-1}(r+1)^2\,dr$

20. $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(t+1)(t^2+4)\,dt$

21. $\int_{\sqrt{2}}^{1}\left(\frac{u^7}{2}-\frac{1}{u^5}\right)du$

22. $\int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{v^3}-\frac{1}{v^4}\right)dv$

23. $\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{s^2+\sqrt{s}}{s^2}\,ds$

24. $\int_{9}^{4}\frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\,du$

25. $\int_{-4}^{4}|x|\,dx$

26. $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}(\cos x+|\cos x|)\,dx$

İntegrallerin Türevleri

27–30 alıştırmalarındaki türevleri bulun

a. integrali hesaplayıp, sonucun türevini alarak

b. integralin doğrudan türevini alarak bulun.

27. $\frac{d}{dx}\int_{0}^{\sqrt{x}}\cos t\,dt$

28. $\frac{d}{dx}\int_{1}^{\sin x}3t^2\,dt$

29. $\frac{d}{dt}\int_{0}^{t^4}\sqrt{u}\,du$

30. $\frac{d}{d\theta}\int_{0}^{\tan\theta}\sec^2 y\,dy$

31–36 alıştırmalarında dy/dx'i bulun.

31. $y=\int_{0}^{x}\sqrt{1+t^2}\,dt$

32. $y=\int_{1}^{x}\frac{1}{t}\,dt,\quad x>0$

33. $y=\int_{\sqrt{x}}^{0}\sin(t^2)\,dt$

34. $y=\int_{0}^{x^2}\cos\sqrt{t}\,dt$

35. $y=\int_{0}^{\sin x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\quad |x|<\frac{\pi}{2}$

36. $y=\int_{\tan x}^{0}\frac{dt}{1+t^2}$

Alan

37–42 alıştırmalarında, eğri ile x-ekseni arasındaki toplam alanını bulun.

37. $y=-x^2-2x,\quad -3\le x\le 2$

38. $y=3x^2-3,\quad -2\le x\le 2$

39. $y=x^3-3x^2+2x,\quad 0\le x\le 2$

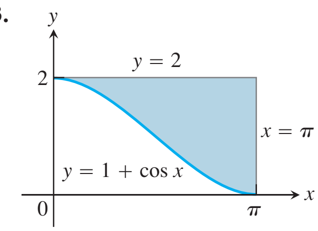
40. $y=x^3-4x,\quad -2\le x\le 2$

41. $y=x^{1/3},\quad -1\le x\le 8$

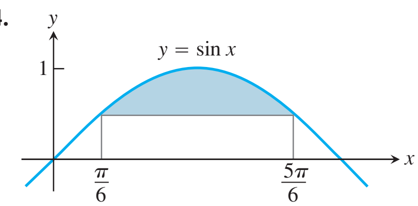
42. $y=x^{1/3}-x,\quad -1\le x\le 8$

43–46 alıştırmalarındaki renkli bölgelerin alanlarını bulun.

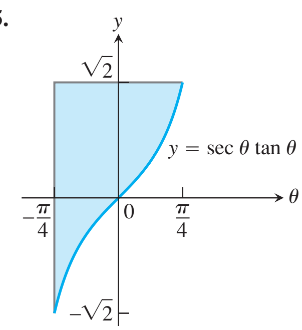
43.



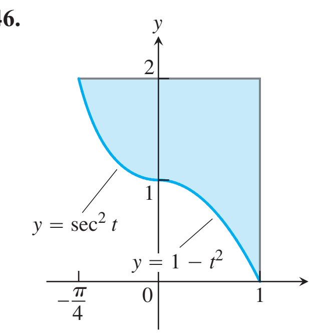
44.



45.



46.



Başlangıç Değer Problemleri

Aşağıdaki fonksiyonlardan her biri 47–50 alıştırmalarındaki başlangıç değer problemlerinden birinin çözümüdür. Hangi fonksiyon hangi problemin çözümüdür? Yanıtlarınızı kısaca açıklayın.

a. $y = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt - 3$ **b.** $y = \int_0^x \sec t\,dt + 4$

c. $y = \int_{-1}^x \sec t\,dt + 4$ **d.** $y = \int_\pi^x \frac{1}{t}\,dt - 3$

47. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \quad y(\pi) = -3$ **48.** $y' = \sec x, \quad y(-1) = 4$

49. $y' = \sec x, \quad y(0) = 4$ **50.** $y' = \frac{1}{x}, \quad y(1) = -3$

51–54 problemlerindeki başlangıç değer problemlerinin çözümlerini integral şeklinde yazın.

51. $\frac{dy}{dx} = \sec x, \quad y(2) = 3$

52. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + x^2}, \quad y(1) = -2$

53. $\frac{ds}{dt} = f(t), \quad s(t_0) = s_0$

54. $\frac{dv}{dt} = g(t), \quad v(t_0) = v_0$

Uygulamalar

55. Paraboller için Arşimed alan formülü Arşimed (M.Ö. 287-212), mucit, askeri mühendis, fizikçi ve batı dünyasının klasik zamanlarının en büyük matematikçisi, bir parabolik yayın altındaki alanın, taban kere yüksekliğin üçte ikisi olduğunu keşfetmiştir. h ve b'nin pozitif olduklarını varsayarak, $y = h - (4h/b^2)x^2$, $-b/2 \leq x \leq b/2$, parabolik yayını çizin. Sonra analiz kullanarak yay ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulun.

56. Marjinal gelirden gelir bulma Bir şirketin yumurta çırpıcı üretimi ve satışından marjinal kazancının, r bin dolar ve x bin birim olmak üzere

$$\frac{dr}{dx} = 2 - 2/(x + 1)^2$$

ile verildiğini varsayın. Şirket $x = 3$ bin tane yumurta çırpıcı üretiminden ne kadar para beklemelidir? Bulmak için, marjinal kazancı $x = 0$'dan $x = 3$'e kadar integre edin.

57. Marjinal masraftan masraf bulma x poster basılmışsa, bir poster daha basmanın marjinal masrafı

$$\frac{dc}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

dolardır. 2–100 tane poster basmanın masrafı $c(100) - c(1)$'i bulun.

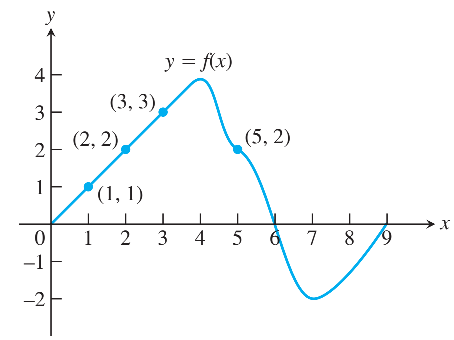
58. (*Alıştırma 57'nin devamı*) 101–400 tane poster basmanın masrafı $c(400) - c(100)$'ü bulun.

Grafikten Hareket Hakkında Sonuç Çıkarmak

59. f'nin aşağıdaki grafikte gösterilen türevlenebilir fonksiyon olduğunu ve bir koordinat ekseninde hareket eden bir parçacığın t (saniye) anındaki konumunun

$$s = \int_0^t f(x)\,dx$$

metre şeklinde verildiğini varsayın. Aşağıdaki soruları yanıtlamak için grafikten yararlanın. Yanıtlarınızı açıklayın.



a. $t = 5$ anında parçacığın hızı nedir?

b. Parçacığın ivmesi $t = 5$ anında pozitif mi, yoksa negatif midir?

c. $t = 3$ anında parçacığın konumu nedir?

d. İlk 9 sn içinde s en büyük değerini ne zaman alır?

e. Yaklaşık olarak ne zaman ivme sıfırdır?

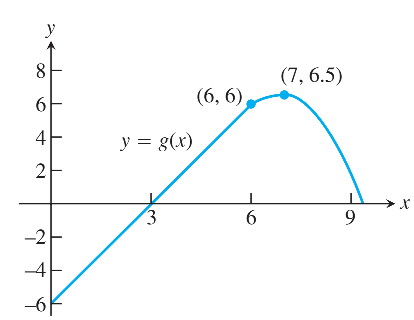
f. Parçacık ne zaman orijine doğru ilerlemekte, ne zaman orijinden uzaklaşmaktadır?

g. $t = 9$ anında parçacık orijinin hangi tarafında bulunmaktadır?

60. g'nin aşağıdaki grafikte gösterilen türevlenebilir fonksiyon olduğunu ve bir koordinat ekseninde hareket eden bir parçacığın t (saniye) anındaki konumunun

$$s = \int_0^t g(x)\,dx$$

metre şeklinde verildiğini varsayın. Aşağıdaki soruları yanıtlamak için grafikten yararlanın. Yanıtlarınızı açıklayın.



a. $t = 3$ anında parçacığın hızı nedir?

b. İvme $t = 3$ anında pozitif mi, yoksa negatif midir?

c. $t = 3$ anında parçacığın konumu nedir?

d. Parçacık orijinden ne zaman geçer?

e. İvme ne zaman sıfırdır?

f. Parçacık ne zaman orijinden uzaklaşmakta, ne zaman orijine doğru ilerlemektedir?

g. $t = 9$ anında parçacık orijinin hangi tarafında bulunmaktadır?

Teori ve Örnekler

61. k pozitif bir sabitse, x-ekseni ile $y = \sin kx$ eğrisinin bir yayı arasında kalan alanın $2/k$ olduğunu gösterin.

62.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}\,dt$$

limitini bulun.

63. $\int_1^x f(t)\,dt = x^2 - 2x + 1$ olsun. $f(x)$'i bulun.

64. $\int_0^x f(t)\,dt = x\cos \pi x$. ise $f(4)$'ü bulun.

65.

$$f(x) = 2 - \int_2^{x+1} \frac{9}{1+t}\,dt$$

fonksiyonunun $x = 1$'deki lineerizasyonunu bulun.

66.

$$g(x) = 3 + \int_1^{x^2} \sec(t-1)\,dt$$

fonksiyonunun $x = 1$'deki lineerizasyonunu bulun.

67. f'nin her x değerinde pozitif bir türevi bulunduğunu ve $f(1) = 0$ olduğunu varsayın.

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

fonksiyonu için aşağıda söylenenlerden hangileri doğrudur? Yanıtlarınızı açıklayın.

a. g x'in türevlenebilir bir fonksiyonudur.

b. g x'in sürekli bir fonksiyonudur.

c. g'nin grafiğinin $x = 1$'de yatay bir teğeti vardır.

d. g'nin $x = 1$'de yerel bir maksimumu vardır.

e. g'nin $x = 1$'de yerel bir minimumu vardır.

f. g'nin grafiğinin $x = 1$'de bir büküm noktası vardır.

g. dg/dx'in grafiği x-eksenini $x = 1$'de keser.

68. f'nin her x değerinde negatif bir türevi bulunduğunu ve $f(1) = 0$ olduğunu varsayın.

$$h(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

fonksiyonu için aşağıda söylenenlerden hangileri doğrudur? Yanıtlarınızı açıklayın.

a. h x'in iki kere türevlenebilir bir fonksiyonudur.

b. Hem h hem de dh/dx süreklidir.

c. h'nin grafiğinin $x = 1$'de yatay bir teğeti vardır.

d. h'nin $x = 1$'de yerel bir maksimumu vardır.

e. h'nin $x = 1$'de yerel bir minimumu vardır.

f. h'nin grafiğinin $x = 1$'de bir büküm noktası vardır.

g. dh/dx'in grafiği x-eksenini $x = 1$'de keser.

T **69. Temel Teorem.** f sürekli ise,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

limitinin, Temel teoremin birinci kısmının ispatındaki gibi, $f(x)$'e eşit olmasını bekleriz. Örneğin, $f(t) = \cos t$ ise,

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \cos t\,dt = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \tag{7}$$

olur. (7) denkleminin sağ tarafı sinüsün türevinin farklar oranıdır ve $h \to 0$ iken limitinin $\cos x$ olmasını bekleriz.

$-\pi \le x \le 2\pi$ aralığında $\cos x$'in grafiğini çizin. Sonra, mümkünse başka bir renkle, (7) denkleminin sağ tarafını $h = 2$, 1, 0.5 ve 0.1 değerleri için x'in bir fonksiyonu olarak çizin. $h \to 0$ iken bu eğrilerin kosinüs grafiğine nasıl yakınsadıklarına bakın.

T **70.** Alıştırma 69'u $f(t) = 3t^2$ için tekrarlayın.

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} 3t^2\,dt = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

nedir? $-1 \le x \le 1$ aralığında $f(x) = 3x^2$'nin grafiğini çizin. Sonra $((x+h)^3 - x^3)/h$ oranını $h = 1$, 0.5, 0.2 ve 0.1 değerleri için x'in bir fonksiyonu olarak çizin. $h \to 0$ iken bu eğrilerin $3x^2$'nin grafiğine nasıl yakınsadıklarına bakın.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

71–74 alıştırmalarında, belirlenmiş f fonksiyonu ve $[a, b]$ aralığı için $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ olsun. Bir BCS kullanarak, aşağıdaki adımları gerçekleştirin ve soruları yanıtlayın.

a. f ve F fonksiyonlarını $[a, b]$ aralığında birlikte çizin.

b. $F'(x) = 0$ denklemini çözün. $F'(x) = 0$ olduğu yerlerde f ve F'nin grafikleri hakkında doğru olan neler görüyorsunuz? Temel Teoremin birinci kısmından gözlemledikleriniz, birinci türevden edindiğiniz bilgilerle uyuşuyor mu? Yanıtınızı açıklayın.

c. Hangi aralıklarda (yaklaşık olarak) F fonksiyonu artmakta ve azalmaktadır? Bu aralıklarda f hakkında ne denebilir?

d. f' türevini hesaplayın ve bunu F ile birlikte çizin. $f'(x) = 0$ olduğu noktalarda, F hakkında doğru olan ne söyleyebilirsiniz? Temel Teoremin birinci kısmından gözlemledikleriniz, birinci türevden edindiğiniz bilgilerle uyuşuyor mu? Yanıtınızı açıklayın.

71. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x, \quad [0, 4]$

72. $f(x) = 2x^4 - 17x^3 + 46x^2 - 43x + 12, \quad \left[0, \frac{9}{2}\right]$

73. $f(x) = \sin 2x \cos \frac{x}{3}, \quad [0, 2\pi]$

74. $f(x) = x \cos \pi x, \quad [0, 2\pi]$

75–78 alıştırmalarında, belirlenmiş a değerleri ile u ve f fonksiyonları için $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\, dt$ olsun. Bir BCS kullanarak, aşağıdaki adımları gerçekleştirin ve soruları yanıtlayın.

a. F'nin tanım kümesini bulun.

b. $F'(x)$'i hesaplayın ve sıfırlarını belirleyin. Tanım kümesinin hangi aralıklarında F artar, hangi aralıklarında azalır?

c. $F''(x)$'i hesaplayın ve sıfırını belirleyin. F'nin yerel ekstremumlarını ve büküm noktalarını tanımlayın.

d. (a)–(c) şıklarındaki bilgileri kullanarak, $y = F(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi içinde elle grafiğini çizin. Sonra $F(x)$'i BCS kullanarak çizerek, grafikleri karşılaştırın.

75. $a = 1, \quad u(x) = x^2, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

76. $a = 0, \quad u(x) = x^2, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

77. $a = 0, \quad u(x) = 1 - x, \quad f(x) = x^2 - 2x - 3$

78. $a = 0, \quad u(x) = 1 - x^2, \quad f(x) = x^2 - 2x - 3$

79–80 Alıştırmalarında f'nin sürekli olduğunu ve $u(x)$'in iki kere türevlenebilir olduğunu kabul edin.

79. $\frac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)\, dt$ 'yi hesaplayın ve yanıtınızı bir BCS kullanarak doğrulayın.

80. $\frac{d^2}{dx^2}\int_a^{u(x)} f(t)\, dt$ 'yi hesaplayın ve yanıtınızı bir BCS kullanarak doğrulayın.

5.5 Belirsiz İntegraller ve Dönüşüm Kuralı

Bir belirli integral, normu sıfıra giden sonlu, kapalı bir aralığın bölünüşleri ile ilişkilendirilen Riemann toplamlarının limitini alarak tanımlanan bir sayıdır. Analizin Temel Teoremi, sürekli bir fonksiyonun belirli integralinin, fonksiyonun bir ters türevi bulunabilirse kolayca hesaplanabileceğini söyler. Ters türevleri bulmak, genelde türevleri bulmaktan daha zordur. Ancak, integralleri hesaplamak için teknikleri öğrenmek gayrete değerdir.

Bölüm 4.8'den f fonksiyonunun *bütün* ters türevlerinin kümesine f'nin x'e göre **belirsiz integrali** dendiğini ve

$$\int f(x)\, dx$$

ile sembolize edildiğini hatırlayın. Temel Teoremde ifade edilen, ters türevlerle belirli integral arasındaki bağıntı şimdi bu notasyonu açıklamaktadır. Bir f fonksiyonunun belirsiz integralini bulurken daima keyfi bir C sabitini içerdiğini hatırlayın.

Belirli ve belirsiz integralleri dikkatlice ayırmalıyız. Bir $\int_a^b f(x)\, dx$ belirli integrali bir *sayı* dır. Bir $\int f(x)\, dx$ belirsiz integrali bir fonksiyon artı keyfi bir C sabitidir.

Şimdiye kadar sadece türev olarak açıkça tanıyabildiğimiz fonksiyonların ters türevlerini bulabildik. Bu bölümde, ters türevleri bulmak için daha genel teknikler geliştirmeye başlayacağız. Geliştireceğimiz ilk integrasyon teknikleri, Kuvvet Kuralı ve Zincir Kuralı gibi türev alma kurallarının tersine çevrilmesiyle elde edilirler.

İntegral Formunda Kuvvet Kuralı

u x'in türevlenebilir bir fonksiyonu ve n, –1'den farklı bir rasyonel sayı ise Zincir Kuralı bize

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = u^n \frac{du}{dx}$$

olduğunu söyler. Bu aynı denklem, başka bir bakış açısıyla, $u^{n+1}/(n+1)$ fonksiyonunun ters türevlerinden birinin $u^n(du/dx)$ olduğunu söyler. Dolayısıyla,

$$\int \left(u^n \frac{du}{dx}\right) dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

olur. Bu denklemin sol tarafındaki integral genellikle daha basit olan ve dx'lere sadeleştirilebilen diferansiyeller gözüyle bakılarak elde edilen

$$\int u^n \, du$$

"diferansiyel" formunda yazılır. Böylece aşağıdaki kuralı elde ederiz.

> u türevlenebilir herhangi bir fonksiyonsa,
>
> $$\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1,\ n \text{ rasyonel}) \qquad (1)$$
>
> olur.

Bölüm 7'de göreceğimiz gibi, (1) denklemi aslında herhangi bir $n \neq -1$ reel kuvveti için sağlanır.

(1) denklemini türetirken, u'nun x'in türevlenebilir bir fonksiyonu olduğunu varsaydık, fakat değişkenin isminin önemi yoktur ve son formülde görünmez. Değişkeni θ, t, y veya herhangi başka bir harfle gösterebilirdik. (1) denklemi, bir integrali, u türevlenebilir bir fonksiyon ve du onun diferansiyeli olmak üzere

$$\int u^n \, du, \qquad (n \neq -1)$$

şeklinde yazabilirsek, integrali $[u^{n+1}/(n+1)] + C$ şeklinde hesaplayabileceğimizi söyler.

ÖRNEK 1 Kuvvet Kuralını Kullanmak

$$\int \sqrt{1+y^2} \cdot 2y \, dy = \int \sqrt{u} \cdot \left(\frac{du}{dy}\right) dy$$

$u = 1 + y^2$, $du/dy = 2y$ olsun.

$$= \int u^{1/2} \, du$$

$$= \frac{u^{(1/2)+1}}{(1/2)+1} + C$$

$n = 1/2$ ile (1) deklemini kullanarak integre edin.

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} + C$$

Daha basit şekil

$$= \frac{2}{3}(1+y^2)^{3/2} + C$$

u yerine $1 + y^2$ yazın ■

ÖRNEK 2 İntegrandı bir sabit ile ayarlamak

$$\int \sqrt{4t-1}\, dt = \int \frac{1}{4} \cdot \sqrt{4t-1} \cdot 4\, dt$$

$$= \frac{1}{4} \int \sqrt{u} \cdot \left(\frac{du}{dt}\right) dt$$ $u = 4t - 1$, ve $du/dt = 4$ olsun.

$$= \frac{1}{4} \int u^{1/2}\, du$$ 1/4 dışarı alındığında, integral standart şekline girer.

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C$$ $n = 1/2$ ile (1) denklemini kullanarak integre edin.

$$= \frac{1}{6} u^{3/2} + C$$ Daha basit şekil

$$= \frac{1}{6} (4t-1)^{3/2} + C$$ u yerine $4t - 1$ yazın. ■

Değişken Dönüşümü: Zincir Kuralını Tersine İşletmek

Örnek 1 ve 2 deki dönüşümler aşağıdaki daha genel kuralın örnekleridir.

TEOREM 5 Değişken Dönüşümü Kuralı

$u = g(x)$ değer kümesi bir I aralığı olan türevlenebilir bir fonksiyon ise ve f, I üzerinde sürekli ise

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

olur.

İspat Kural doğrudur çünkü, F f'nin bir ters türeviyse, $F(g(x))$ de $f(g(x)) \cdot g'(x)$ 'in bir ters türevidir:

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$ Zincir kuralı

$$= f(g(x)) \cdot g'(x).$$ $F' = f$ olduğu için

$u = g(x)$ dönüşümü yaparsak

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx = \int \frac{d}{dx} F(g(x))\, dx$$

$$= F(g(x)) + C$$ Temel Teorem

$$= F(u) + C$$ $u = g(x)$

$$= \int F'(u)\, du$$ Temel Teorem

$$= \int f(u)\, du$$ $F' = f$ ■

elde ederiz.

Değişken Dönüşümü Kuralı, f ve g' fonksiyonları sürekli iken

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx$$

integralini hesaplamak için aşağıdaki yöntemini verir.

1.

$$\int f(u)\,du$$

integralini elde etmek için $u = g(x)$ ve $du = g'(x)\,dx$ yazın.

2. u'ya göre integre edin.

3. Sonuçta u yerine $g(x)$ yazın.

ÖRNEK 3 Değişken Dönüşümü Kullanmak

$$\int \cos(7\theta + 5)\,d\theta = \int \cos u \cdot \frac{1}{7}\,du$$

$u = 7\theta + 5$, $du = 7\,d\theta$, $(1/7)\ du = d\theta$ olsun.

$$= \frac{1}{7}\int \cos u\,du$$

1/7 dışarı alındığında, integral standart şeklini alır.

$$= \frac{1}{7}\sin u + C$$

u'ya göre integre edin, Tablo 4.2.

$$= \frac{1}{7}\sin(7\theta + 5) + C$$

u yerine $7\theta + 5$ yazın.

Türev alarak ve $\cos(7\theta + 5)$ fonksiyonunu elde ettiğimizi kontrol ederek bu çözümü gerçekleyebiliriz. ■

ÖRNEK 4 Değişken Dönüşümü Kullanmak

$$\int x^2 \sin(x^3)\,dx = \int \sin(x^3) \cdot x^2\,dx$$

$$= \int \sin u \cdot \frac{1}{3}\,du$$

$u = x^3$, $du = 3x^2\,dx$, $(1/3)\ du = x^2\,dx$ olsun.

$$= \frac{1}{3}\int \sin u\,du$$

$$= \frac{1}{3}(-\cos u) + C$$

u'ya göre integre edin..

$$= -\frac{1}{3}\cos(x^3) + C$$

u yerine x^3 yazın. ■

ÖRNEK 5 Özdeşlik ve Değişken Dönüşümü Kullanmak

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos^2 2x}\,dx &= \int \sec^2 2x\,dx && \frac{1}{\cos 2x} = \sec 2x \\
&= \int \sec^2 u \cdot \frac{1}{2}\,du && u = 2x,\ du = 2\,dx,\ dx = (1/2)\,du \text{ olsun.} \\
&= \frac{1}{2}\int \sec^2 u\,du \\
&= \frac{1}{2}\tan u + C && \frac{d}{du}\tan u = \sec^2 u \\
&= \frac{1}{2}\tan 2x + C && u = 2x
\end{aligned}$$

Değişken dönüşümü yönteminin başarısı hesaplayamadığımız bir integrali hesaplayabileceğimiz bir integrale dönüştürecek bir dönüşüm bulunmasına dayanır. İlk değişken dönüşümü işe yaramazsa, bir veya iki değişken dönüşümü daha yaparak, integrandı en basit hale getirmeye çalışırız (Bkz. Alıştırma 49 ve 50). Ya da baştan başlarız. Aşağıdaki örnekte olduğu gibi başlangıç için birden fazla iyi yol olabilir.

ÖRNEK 6 Farklı Değişken Dönüşümleri Kullanmak

$$\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}}$$

integralini hesaplayın.

Çözüm Değişken dönüşümü yöntemini araştırıcı bir araç olarak kullanabiliriz: integrandın en karmaşık kısmı için bir değişken dönüşümü yapıp, işlerin nasıl gittiğine bakabiliriz. Buradaki integral için, $u = z^2 + 1$'i deneyebilir veya u'yu tüm küp kök olarak alabiliriz. Her iki durumda da neler olduğu aşağıdadır.

Çözüm 1: $u = z^2 + 1$ alın.

$$\begin{aligned}
\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}} &= \int \frac{du}{u^{1/3}} && u = z^2 + 1,\ du = 2z\,dz \text{ olsun.} \\
&= \int u^{-1/3}\,du && \int u^n\,du \text{ şeklinde} \\
&= \frac{u^{2/3}}{2/3} + C && u\text{'ya göre integre edin.} \\
&= \frac{3}{2}u^{2/3} + C \\
&= \frac{3}{2}(z^2+1)^{2/3} + C && u \text{ yerine } z^2 + 1 \text{ yazın.}
\end{aligned}$$

Çözüm 2: $u = \sqrt[3]{z^2 + 1}$ alın.

$$\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}} = \int \frac{3u^2\,du}{u}$$ $u = \sqrt[3]{z^2+1}$, $u^3 = z^2 + 1$, $3u^2 du = 2z\,dz$ olsun.

$$= 3\int u\,du$$

$$= 3 \cdot \frac{u^2}{2} + C$$ u'ya göre integre edin.

$$= \frac{3}{2}(z^2+1)^{2/3} + C$$ u yerine $(z^2+1)^{1/3}$ yazın. ■

$\sin^2 x$ ve $\cos^2 x$ İntegralleri

Nasıl hesaplayacağımızı bilmediğimiz integralleri, hesaplayabileceğimiz integrallere dönüştürmek için bazen trigonometrik özdeşlikleri kullanırız. $\sin^2 x$ ve $\cos^2 x$'in integral formülleri ile uygulamalarda çok sık karşılaşılır.

ÖRNEK 7

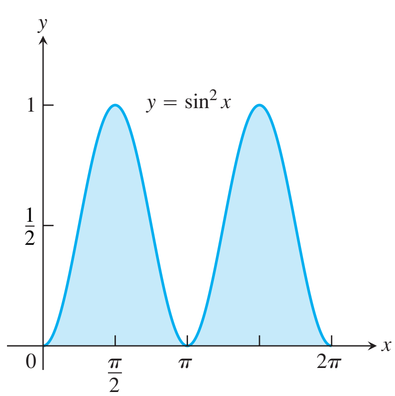
(a) $$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$ $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$$= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

(b) $$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$$ $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$ (a) şıkkındaki gibi, fakat işaret farkı var. ■



ŞEKİL 5.24 $[0, 2\pi]$ aralığında $y = \sin^2 x$ eğrisinin altındaki alan π birim karedir (Örnek 8)

ÖRNEK 8 $y = \sin^2 x$ Eğrisinin Altındaki Alan

Şekil 5.24, $g(x) = \sin^2 x$'in $[0, 2\pi]$ aralığındaki grafiğini göstermektedir. Aşağıdakileri bulun.

(a) $g(x)$'in $[0, 2\pi]$ aralığındaki belirli integrali.

(b) $[0, 2\pi]$ aralığında fonksiyonun grafiği ile x-ekseni arasındaki alan

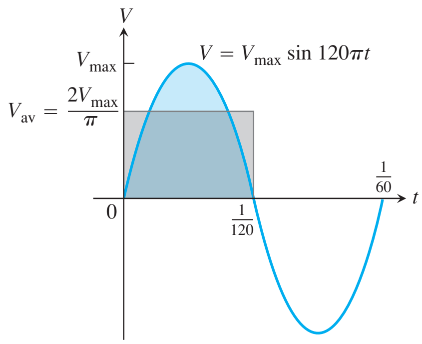
Çözüm

(a) Örnek 7(a) dan belirli integral

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{2\pi} = \left[\frac{2\pi}{2} - \frac{\sin 4\pi}{4}\right] - \left[\frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4}\right]$$

$$= [\pi - 0] - [0 - 0] = \pi$$

(b) $\sin^2 x$ fonksiyonu negatif olmaz dolayısıyla alan belirli integrale, π'ye eşittir ■



ŞEKİL 5.25 Ev gerilimi
$V = V_{max} \sin 120\pi t$'nin tam bir dönüşü. Yarım dönüşteki ortalama değeri $2V_{max}/\pi$'dir. Tam dönüşteki ortalaması ise sıfırdır (Örnek 9).

ÖRNEK 9 Ev elektriği

Ev kablolarımızdaki gerilimi saniye birimiyle t zamanının bir fonksiyonu olarak

$$V = V_{max} \sin 120\pi t,$$

şeklinde ifade edebiliriz. Fonksiyon her saniyede 60 dönüş tamamlar (frekansı 60 hertz veya 60 Hz'dir). Pozitif V_{max} sabiti **tepe gerilimi**dir.

V'nin, 0 dan $1/120$ sn'ye kadar olan bir yarım dönüşteki ortalama değeri (Şekil 5.25'e bakın) şöyle bulunur:

$$\begin{aligned} V_{ort} &= \frac{1}{(1/120) - 0}\int_0^{1/120} V_{max} \sin 120\pi t\, dt \\ &= 120V_{max}\left[-\frac{1}{120\pi}\cos 120\pi t\right]_0^{1/120} \\ &= \frac{V_{max}}{\pi}[-\cos \pi + \cos 0] \\ &= \frac{2V_{max}}{\pi} \end{aligned}$$

Tam bir dönüşte gerilimin ortalama değeri, Şekil 5.25'ten görebileceğimiz gibi, sıfırdır. (Ayrıca Alıştırma 63'e bakın). Gerilimi standart bir hareketli sarım galvanometresiyle ölçseydik, alet sıfır okurdu.

Gerilimi efektif olarak ölçmek için, geriliminin karesinin ortalama değerinin karekökünü, yani

$$V_{okk} = \sqrt{(V^2)_{ort}}$$

değerini ölçen bir alet kullanırız. "okk" alt indisi "ortalama karenin karekökü" anlamındadır. $V^2 = (V_{max})^2 \sin^2 120\pi t$'nin ortalama değeri

$$(V^2)_{ort} = \frac{1}{(1/60) - 0}\int_0^{1/60} (V_{max})^2 \sin^2 120\pi t\, dt = \frac{(V_{max})^2}{2}$$

olduğu için (Alıştırma 63 c), okk gerilim

$$V_{okk} = \sqrt{\frac{(V_{max})^2}{2}} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$$

olarak bulunur. Evlerde kullanılan akım ve gerilimler için verilen değerler her zaman okk değerleridir. Yani, "115 V AC" okk gerilimin 115 olduğu anlamına gelir. Son denklemden elde edilen tepe gerilimi,

$$V_{max} = \sqrt{2}\, V_{okk} = \sqrt{2} \cdot 115 \approx 163 \text{ volt}$$

oldukça yüksektir. ■

ALIŞTIRMALAR 5.5

İntegral Hesaplama

1-12 alıştırmalarındaki integralleri, verilen değişken dönüşümlerini kullanarak standart hale getirip hesaplayın.

1. $\int \sin 3x\, dx, \quad u = 3x$

2. $\int x \sin(2x^2)\, dx, \quad u = 2x^2$

3. $\int \sec 2t \tan 2t\, dt, \quad u = 2t$

4. $\int \left(1 - \cos\frac{t}{2}\right)^2 \sin\frac{t}{2}\, dt, \quad u = 1 - \cos\frac{t}{2}$

5. $\int 28(7x-2)^{-5}\,dx, \quad u = 7x - 2$

6. $\int x^3(x^4-1)^2\,dx, \quad u = x^4 - 1$

7. $\int \frac{9r^2\,dr}{\sqrt{1-r^3}}, \quad u = 1 - r^3$

8. $\int 12(y^4+4y^2+1)^2(y^3+2y)\,dy, \quad u = y^4 + 4y^2 + 1$

9. $\int \sqrt{x}\sin^2(x^{3/2}-1)\,dx, \quad u = x^{3/2} - 1$

10. $\int \frac{1}{x^2}\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)dx, \quad u = -\frac{1}{x}$

11. $\int \csc^2 2\theta \cot 2\theta\,d\theta$

a. $u = \cot 2\theta$ kullanarak, **b.** $u = \csc 2\theta$ kullanarak.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+8}}$

a. $u = 5x + 8$ kullanarak, **b.** $u = \sqrt{5x+8}$ kullanarak.

13–48 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

13. $\int \sqrt{3-2s}\,ds$

14. $\int (2x+1)^3\,dx$

15. $\int \frac{1}{\sqrt{5s+4}}\,ds$

16. $\int \frac{3\,dx}{(2-x)^2}$

17. $\int \theta\sqrt[4]{1-\theta^2}\,d\theta$

18. $\int 8\theta\sqrt[3]{\theta^2-1}\,d\theta$

19. $\int 3y\sqrt{7-3y^2}\,dy$

20. $\int \frac{4y\,dy}{\sqrt{2y^2+1}}$

21. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\,dx$

22. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,dx$

23. $\int \cos(3z+4)\,dz$

24. $\int \sin(8z-5)\,dz$

25. $\int \sec^2(3x+2)\,dx$

26. $\int \tan^2 x \sec^2 x\,dx$

27. $\int \sin^5\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}\,dx$

28. $\int \tan^7\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx$

29. $\int r^2\left(\frac{r^3}{18}-1\right)^5 dr$

30. $\int r^4\left(7-\frac{r^5}{10}\right)^3 dr$

31. $\int x^{1/2}\sin(x^{3/2}+1)\,dx$

32. $\int x^{1/3}\sin(x^{4/3}-8)\,dx$

33. $\int \sec\left(v+\frac{\pi}{2}\right)\tan\left(v+\frac{\pi}{2}\right)dv$

34. $\int \csc\left(\frac{v-\pi}{2}\right)\cot\left(\frac{v-\pi}{2}\right)dv$

35. $\int \frac{\sin(2t+1)}{\cos^2(2t+1)}\,dt$

36. $\int \frac{6\cos t}{(2+\sin t)^3}\,dt$

37. $\int \sqrt{\cot y}\csc^2 y\,dy$

38. $\int \frac{\sec z \tan z}{\sqrt{\sec z}}\,dz$

39. $\int \frac{1}{t^2}\cos\left(\frac{1}{t}-1\right)dt$

40. $\int \frac{1}{\sqrt{t}}\cos(\sqrt{t}+3)\,dt$

41. $\int \frac{1}{\theta^2}\sin\frac{1}{\theta}\cos\frac{1}{\theta}\,d\theta$

42. $\int \frac{\cos\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}\sin^2\sqrt{\theta}}\,d\theta$

43. $\int (s^3+2s^2-5s+5)(3s^2+4s-5)\,ds$

44. $\int (\theta^4-2\theta^2+8\theta-2)(\theta^3-\theta+2)\,d\theta$

45. $\int t^3(1+t^4)^3\,dt$

46. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}\,dx$

47. $\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

48. $\int 3x^5\sqrt{x^3+1}\,dx$

İntegralleri Adım Adım Basitleştirmek

Hangi değişken dönüşümünü yapmanız gerektiğini bilmiyorsanız, bir deneme dönüşümü kullanarak integrali biraz basitleştirmek, başka bir dönüşümle biraz daha basite indirgemek yoluyla integrali adım adım basitleştirmeyi deneyin. 49 ve 50 alıştırmalarındaki dönüşüm dizisini izlerseniz, ne demek istediğimizi anlayacaksınız.

49. $\int \frac{18\tan^2 x\sec^2 x}{(2+\tan^3 x)^2}\,dx$

a. $u = \tan x$, ardından $v = u^3$, sonra $w = 2 + v$

b. $u = \tan^3 x$, ardından $v = 2 + u$

c. $u = 2 + \tan^3 x$

50. $\int \sqrt{1+\sin^2(x-1)}\sin(x-1)\cos(x-1)\,dx$

a. $u = x - 1$, ardından $v = \sin u$, sonra $w = 1 + v^2$

b. $u = \sin(x-1)$, ardından $v = 1 + u^2$

c. $u = 1 + \sin^2(x-1)$

51 ve 52 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

51. $\int \frac{(2r-1)\cos\sqrt{3(2r-1)^2+6}}{\sqrt{3(2r-1)^2+6}}\,dr$

52. $\int \frac{\sin\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta\cos^3\sqrt{\theta}}}\,d\theta$

Başlangıç Değer Problemleri

53–58 alıştırmalarındaki başlangıç değer problemlerini çözün.

53. $\frac{ds}{dt} = 12t(3t^2-1)^3, \quad s(1) = 3$

54. $\frac{dy}{dx} = 4x(x^2+8)^{-1/3}, \quad y(0) = 0$

55. $\frac{ds}{dt} = 8\sin^2\left(t+\frac{\pi}{12}\right), \quad s(0) = 8$

56. $\dfrac{dr}{d\theta} = 3\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right), \quad r(0) = \dfrac{\pi}{8}$

57. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -4\sin\left(2t - \dfrac{\pi}{2}\right), \quad s'(0) = 100, \quad s(0) = 0$

58. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4\sec^2 2x \tan 2x, \quad y'(0) = 4, \quad y(0) = -1$

59. Bir doğru üzerinde ileri geri hareket eden bir parçacığın hızı her t için $v = ds/dt = 6 \sin 2t$ m/sn'dir. $t = 0$ iken $s = 0$ ise, $t = \pi/2$sn iken s'yi bulun.

60. Bir doğru üzerinde ileri geri hareket eden bir parçacığın ivmesi her t için $a = d^2s/dt^2 = \pi^2 \cos \pi t$ m/sn^2 dir. $t = 0$ iken $s = 0$ ve $v = 8$ m/sn ise, $t = 1$ sn iken s'yi bulun.

Teori ve Örnekler

61. 2 sin x cos x fonksiyonunun x'e göre integralini üç ayrı şekilde alabiliriz gibi görünmektedir:

a. $\displaystyle\int 2\sin x\cos x\,dx = \int 2u\,du \qquad u = \sin x,$

$= u^2 + C_1 = \sin^2 x + C_1$

b. $\displaystyle\int 2\sin x\cos x\,dx = \int -2u\,du \qquad u = \cos x,$

$= -u^2 + C_2 = -\cos^2 x + C_2$

c. $\displaystyle\int 2\sin x\cos x\,dx = \int \sin 2x\,dx \qquad 2\sin x\cos x = \sin 2x$

$= -\dfrac{\cos 2x}{2} + C_3$

Üç integrasyon da doğru olabilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

62. $u = \tan x$ dönüşümü

$$\int \sec^2 x \tan x\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\tan^2 x}{2} + C$$

verir. $u = \sec x$ dönüşümü ise

$$\int \sec^2 x \tan x\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sec^2 x}{2} + C$$

verir. Her iki integrasyon da doğru olabilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

63. (*Örnek 9'un devamı*)

a. $V = V_{max} \sin 120\,\pi t$'nin tam bir dönüşteki ortalama değerinin sıfır olduğunu

$$\frac{1}{(1/60) - 0}\int_0^{1/60} V_{max}\sin 120\,\pi t\,dt$$

ifadesindeki integrali hesaplayarak bulun.

b. Elektrikli fırınınızı çalıştıran devre 240 V okk'ye ayarlıdır. İzin verilebilir gerilimin tepe değeri nedir?

c.

$$\int_0^{1/60} (V_{max})^2 \sin^2 120\,\pi t\,dt = \frac{(V_{max})^2}{120}$$

olduğunu gösterin.

5.6 Değişken Dönüşümü ve Eğriler Arasındaki Alanlar

Bir belirli integrali değişken dönüşümü ile hesaplamanın iki yolu vardır. Birincisi değişken dönüşümü yaparak bir ters türev bulmak ve sonra Temel Teoremi uygulayarak belirli integrali hesaplamaktır. Bu yöntemi önceki bölümde Örnek 8 ve 9 da kullandık. İkinci yöntem, değişken dönüşümü işlemini doğrudan *belirli* integrallere genişletir. Burada tanıtılan bu yeni formülü iki eğri arasındaki alanı bulma problemine uygularız.

Değişken Dönüşümü Formülü

Aşağıdaki formülde, integrasyon değişkeni bir değişken dönüşümü ile değiştirildiğinde integrasyon sınırları değişir.

TEOREM 6 Belirli İntegrallerde Değişken Dönüşümü

g', $[a, b]$ aralığında sürekli ise ve f de g'nin değerler kümesinde sürekli ise

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

dir.

İspat F, f'nin herhangi bir ters türevi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx &= F(g(x))\Big]_{x=a}^{x=b} && \frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)\\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= F(u)\Big]_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du && \text{Temel Teorem 2. Kısım}\end{aligned}$$

■

Formülü kullanmak için, belirsiz integrali hesaplamakta kullanacağınız $u = g(x)$ ve $du = g'(x)$ dönüşümünün aynısını yapın. Sonra, dönüşmüş integrali $g(a)$ değerinden (u'nun $x = a$ daki değeri) $g(b)$ değerine (u'nun $x = b$ deki değeri) kadar u'ya göre integre edin.

ÖRNEK 1 İki Yöntemle Değişken Dönüşümü

$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ integralini hesaplayın.

Çözüm İki seçeneğimiz vardır.

Yöntem 1: İntegrali dönüştürün ve dönüştürülmüş integrali Teorem 6 da verilen dönüştürülmüş sınırlarla hesaplayın.

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx \\ &= \int_0^2 \sqrt{u}\,du && u = x^3+1,\ du = 3x^2\,dx \text{ olsun. } x=-1 \text{ iken, } u=(-1)^3+1=0 \text{ olur. } x=1 \text{ iken, } u=(1)^3+1=2 \text{ olur.}\\ &= \frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_0^2 && \text{Yeni belirli integrali hesaplayın.}\\ &= \frac{2}{3}\left[2^{3/2}-0^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\left[2\sqrt{2}\right] = \frac{4\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

Yöntem 2: İntegrali belirsiz bir integrale çevirin, integre edin, x'e geri dönün ve orijinal x sınırlarını kullanın.

$$\begin{aligned}\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx &= \int \sqrt{u}\,du && u = x^3+1,\ du = 3x^2\,d \text{ alın.}\\ &= \frac{2}{3}u^{3/2} + C && u\text{'ya göre integre edin.}\\ &= \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2} + C && u \text{ yerine } x^3+1 \text{ yazın.}\\ \int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx &= \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2}\Big]_{-1}^{1} && x\text{'in integrasyon sınırları ile bulduğunuz integrali kullanın.}\\ &= \frac{2}{3}\left[((1)^3+1)^{3/2} - ((-1)^3+1)^{3/2}\right]\\ &= \frac{2}{3}\left[2^{3/2}-0^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\left[2\sqrt{2}\right] = \frac{4\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

■

Hangi yöntem daha iyidir— Teorem 6'yı kullanarak, dönüştürülmüş belirli integrali dönüştürülmüş sınırlarla hesaplamak mı yoksa integrali dönüştürmek, integre etmek ve geri dönüştürüp esas integrasyon sınırlarını kullanmak mı? Örnek 1'de, birinci yöntem daha kolay gibidir, fakat durum her zaman böyle olmaz. Genel olarak, en iyisi iki yöntemi de bilmek ve hangisi uygunsa onu kullanmaktır.

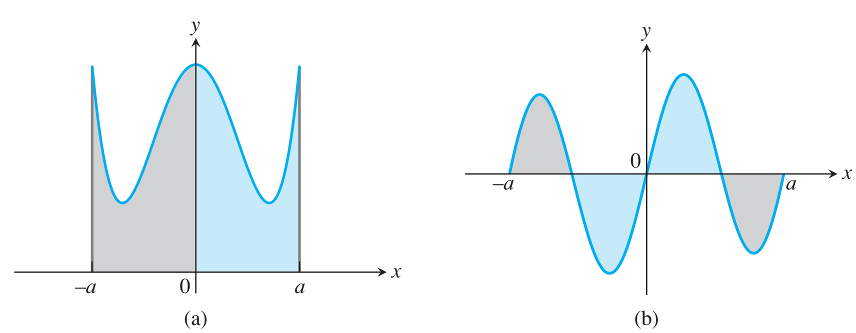
ÖRNEK 2 Dönüşüm Formülünü Kullanmak

$$\begin{aligned}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot\theta \csc^2\theta \, d\theta &= \int_1^0 u\cdot(-du) \\ &= -\int_1^0 u\,du \\ &= -\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^0 \\ &= -\left[\frac{(0)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right] = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$u = \cot\theta$, $du = -\csc^2\theta\, d\theta$, $-du = \csc^2\theta\, d\theta$.alın.
$\theta = \pi/4$ iken, $u = \cot(\pi/4) = 1$ olur.
$\theta = \pi/2$ iken, $u = \cot(\pi/2) = 0$ olur.

Simetrik Fonksiyonların Belirli İntegralleri

Teorem 6'daki Dönüşüm Formülü, çift ve tek fonksiyonların (Bölüm 1.4) simetrik bir $[-a, a]$ aralığı üzerindeki belirli integrallerini basitleştirir (Şekil 5.26).



ŞEKİL 5.26 (a) f çift, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ (b) f tek, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Teorem 7

f, $[-a, a]$ simetrik aralığı üzerinde sürekli olsun.

(a) f çift ise $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

(b) f tek ise $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

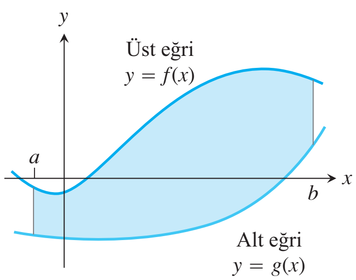
dir.

(a)'nın İspatı

$$
\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx && \text{Belirli İntegraller için Toplanabilirlik Kuralı}\\
&= -\int_{0}^{-a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx && \text{İntegrasyonun Sırası Kuralı}\\
&= -\int_{0}^{a} f(-u)(-du) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx && u=-x,\ du=-dx \text{ olsun. } x=0 \text{ iken } u=0,\ x=-a \text{ iken } u=a\\
&= \int_{0}^{a} f(-u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\
&= \int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx && f \text{ çifttir, dolayısıyla } f(-u)=f(u)\text{'dur.}\\
&= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx
\end{aligned}
$$

(b)'nin ispatı tamamen benzerdir ve Alıştırma 86 da sizden istenmektedir. ■

Teorem 7'nin iddiaları f'nin integre edilebilir bir fonksiyon (daha kuvvetli olan sürekli olmak yerine) olması durumunda da geçerlidir, fakat ispatı biraz daha zordur ve daha ileri seviyedeki derslere bırakmak daha iyidir.



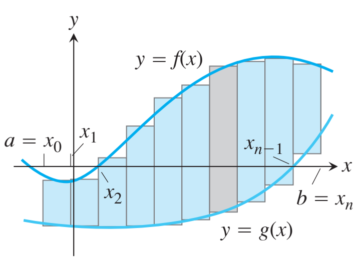
ŞEKİL 5.27 $y = f(x)$ ile $y = g(x)$ ve $x = a$ ile $x = b$ doğruları arasındaki bölge

ÖRNEK 3 Bir Çift Fonksiyonun İntegrali

$\int_{-2}^{2}(x^4 - 4x^2 + 6)\,dx$ integralini hesaplayın.

Çözüm $f(x) = x^4 - 4x^2 + 6$, $f(-x) = f(x)$ eşitliğini sağladığından $[-2, 2]$ simetrik aralığı üzerinde bir çift fonksiyondur, böylece

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{2}(x^4 - 4x^2 + 6)\,dx &= 2\int_{0}^{2}(x^4 - 4x^2 + 6)\,dx\\
&= 2\left[\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 6x\right]_0^2\\
&= 2\left(\frac{32}{5} - \frac{32}{3} + 12\right) = \frac{232}{15}.
\end{aligned}
$$
■

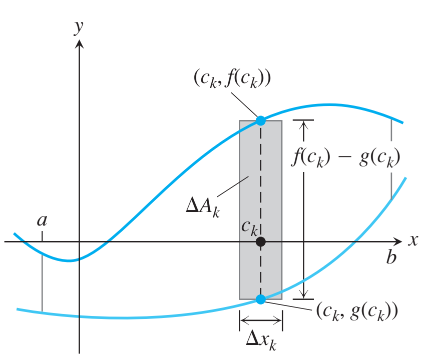


ŞEKİL 5.28 Bölgeye x-eksenine dik dikdörtgenlerle yaklaşımda bulunuruz.

Eğriler Arasındaki Alanlar

Üstten $y = f(x)$ eğrisi, alttan $y = g(x)$ eğrisi, soldan ve sağdan $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile sınırlı bir bölgenin alanını bulmak istediğimizi varsayın (Şekil 5.27). Bölge tesadüfen, alanını geometriyle bulabileceğimiz bir şekilde olabilir, fakat f ve g rasgele sürekli fonksiyonlarsa, genellikle alanı bir integralle bulmamız gerekir.

İntegralin ne olması gerektiğini görmek için, önce bölgeyi tabanları $[a, b]$ aralığının $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ bölüşünde bulunan n dikey dikdörtgenle böleriz (Şekil 5.28). k. dikdörtgenin alanı (Şekil 5.29)



ŞEKİL 5.29 k. dikdörtgenin ΔA_k alanı, $f(c_k) - g(c_k)$ yüksekliği ile Δx_k genişliğinin çarpımıdır.

$$\Delta A_k = \text{yükseklik} \times \text{genişlik} = [f(c_k) - g(c_k)]\,\Delta x_k$$

Bölgenin alanına n dikdörtgenin alanını toplayarak yaklaşımda bulunuruz:

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\, \Delta x_k. \qquad \text{Riemann Toplamı}$$

$\|P\| \to 0$ iken, sağ taraftaki toplamlar $\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$ limitine yaklaşırlar, çünkü f ve g süreklidirler. Bölgenin alanını bu integralin değeri olarak alırız. Yani,

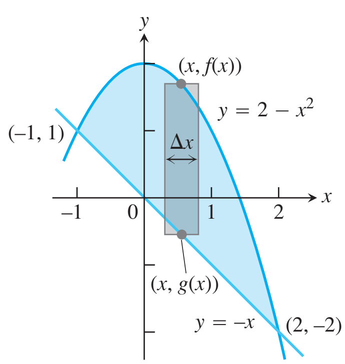
$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\, \Delta x_k = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

TANIM **Eğriler Arasındaki Alanlar**

f ve g, $[a, b]$ aralığı boyunca $f(x) \geq g(x)$ olmak üzere, sürekli iseler ***a*'dan *b*'ye kadar $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ eğrileri arasındaki bögenin alanı** $(f - g)$'nin a'dan b'ye kadar integralidir:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Bu tanımı uygularken eğrilerin grafiklerini çizmek faydalıdır. Grafik, hangi eğrinin üstteki f eğrisi ve hangi eğrinin alttaki g eğrisi olduğunu gösterir. Ayrıca, integral sınırları bilinmiyorsa integral sınırlarını bulmanıza yardımcı olur. İntegrasyon sınırlarını belirlemek için eğrilerin nerede kesiştiklerini bulmak isteyebilirsiniz ve bu, $f(x) = g(x)$ denkleminin çözümünü gerektirebilir. Daha sonra, kesişimleri arasındaki alanı bulmak için $f - g$ fonksiyonunu integre edebilirsiniz.



ŞEKİL 5.30 Tipik bir yaklaşım dikdörtgeni ile Örnek 4'deki bölge.

ÖRNEK 4 Kesişen Eğriler Arasındaki Alan

$y = 2 - x^2$ parabolü ve $y = -x$ doğrusuyla sınırlanan bölgenin alanını bulun.

Çözüm Önce iki eğriyi çizeriz (Şekil 5.30). İntegrasyon sınırları $y = 2 - x^2$ ve $y = -x$ denklemlerini birlikte çözerek bulunur:

$$\begin{aligned} 2 - x^2 &= -x && f(x) \text{ ve } g(x)\text{'i eşitleyin.} \\ x^2 - x - 2 &= 0 && \text{Yeniden yazın.} \\ (x + 1)(x - 2) &= 0 && \text{Çarpanlarına ayırın.} \\ x = -1, \quad x &= 2. && \text{Çözün.} \end{aligned}$$

Bölge $x = -1$'den $x = 2$'ye kadardır. İntegrasyon sınırları $a = -1$ ve $b = 2$'dir.

Eğriler arasındaki alan

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-1}^{2} [(2 - x^2) - (-x)]\, dx$$

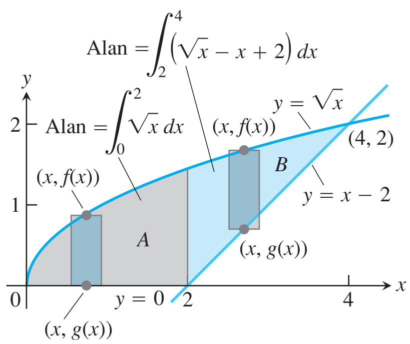
$$= \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)\, dx = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

Tarihsel Biyografi

Richard Dedekind
(1831–1916)

$$= \left(4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2}$$ ■

Çevreleyen bir eğrinin formülü bir veya daha fazla noktada değişiyorsa, bölgeyi formül değişikliklerine karşılık gelen alt bölgelere böler ve her alt bölgeye eğriler arasındaki alan formülünü uygularız.



ŞEKİL 5.31 Çevreleyen bir eğrinin formülü değiştiğinde, burada Örnek 5 için gösterildiği gibi alan integrali de buna uyacak şekilde integrallerin toplamı olarak değişir. Her renkli bölge için bir integral.

ÖRNEK 5 Sınır Değişikliğine Uydurmak İçin İntegrali Değiştirmek

Birinci dörtte bir bölgede, üstten $y = \sqrt{x}$, alttan ise x-ekseni ve $y = x - 2$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin alanını bulun.

Çözüm Çizim (Şekil 5.31) bölgenin üst sınırının $f(x) = \sqrt{x}$'in grafiği olduğunu göstermektedir. Alt sınır, $0 \le x \le 2$ için $g(x) = 0$'dan $2 \le x \le 4$ için $g(x) = x - 2$'e değişmektedir ($x = 2$'de bir uyuşma vardır). Bölgeyi $x = 2$'de, Şekil 5.31'de gösterilen A ve B alt bölgelerine böleriz.

A bölgesi için integrasyon sınırları $a = 0$ ve $b = 2$'dir. B bölgesi için sol sınır $a = 2$'dir. Sağ taraftaki sınırı bulmak için $y = \sqrt{x}$ ve $y = x - 2$ denklemlerini birlikte çözeriz:

$$\sqrt{x} = x - 2 \qquad f(x) \text{ ve } g(x) \text{ eşitleyin.}$$
$$x = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \qquad \text{İki tarafın karesini alın.}$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0 \qquad \text{Yeniden yazın.}$$
$$(x-1)(x-4) = 0 \qquad \text{Çarpanlara ayırın.}$$
$$x = 1, \quad x = 4 \qquad \text{Çözün.}$$

Sadece $x = 4$ değeri $\sqrt{x} = x - 2$. denklemini sağlar. $x = 1$ değeri ise kare almayla ortaya çıkan konu dışı bir köktür. Sağdan sınır 4'tür.

$$0 \le x \le 2 \text{ için} \qquad f(x) - g(x) = \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}$$
$$2 \le x \le 4 \text{ için} \qquad f(x) - g(x) = \sqrt{x} - (x - 2) = \sqrt{x} - x + 2$$

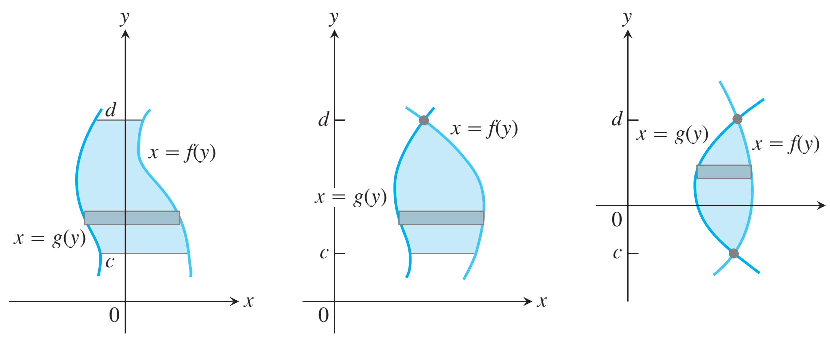
A ve B alt bölgelerinin alanlarını toplayarak toplam alanı buluruz:

$$\text{Toplam alan} = \underbrace{\int_0^2 \sqrt{x}\, dx}_{A\text{'nın alanı}} + \underbrace{\int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)\, dx}_{B\text{'nin alanı}}$$
$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^2 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_2^4$$
$$= \frac{2}{3}(2)^{3/2} - 0 + \left(\frac{2}{3}(4)^{3/2} - 8 + 8\right) - \left(\frac{2}{3}(2)^{3/2} - 2 + 4\right)$$
$$= \frac{2}{3}(8) - 2 = \frac{10}{3}.$$ ■

y'ye Göre İntegrasyon

Bir bölgenin sınır eğrileri y'nin fonksiyonlarıyla tanımlanmışsa, yaklaşım dikdörtgenleri dikey yerine yatay olur ve temel formülde x yerine y bulunur.

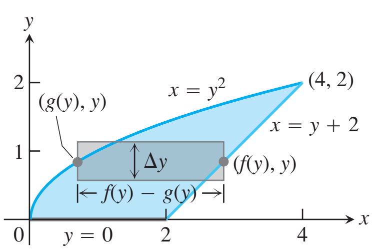
Bunlar gibi bölgeler için



aşağıdaki formülü kullanın:

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$$

Bu denklemde, f her zaman sağdaki eğriyi ve g de soldaki eğriyi temsil eder, dolayısıyla $f(y) - g(y)$ negatif değildir.



ŞEKİL 5.32 x'e göre integre edersek, bu bölgenin alanını bulmak için iki integrasyon gerekir. y'ye göre integre edersek, bir integrasyon yeterlidir (Örnek 6).

ÖRNEK 6 Örnek 5'teki bölgenin alanını y'ye göre integre ederek bulun.

Çözüm Bölgeyi ve tabanı y değerleri aralığının bir bölüşünün üzerinde bulunan tipik bir *yatay* dikdörtgen çizeriz (Şekil 5.32). Bölgenin sağ sınırı $x = y + 2$ doğrusudur, bu yüzden $f(y) = y + 2$ olur. Sol sınır ise $x = y^2$ eğrisidir, dolayısıyla $g(y) = y^2$ olur. İntegrasyonun alt sınırı $y = 0$'dır. Üst sınırı $x = y + 2$ ve $x = y^2$denklemlerini birlikte çözerek buluruz:

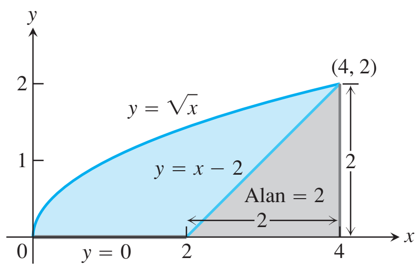
$$\begin{aligned} y + 2 &= y^2 && f(y) = y + 2 \text{ ve } g(y) = y^2 \text{.eşitleyin} \\ y^2 - y - 2 &= 0 && \text{Yeniden yazın.} \\ (y + 1)(y - 2) &= 0 && \text{Çarpanlarına ayırın.} \\ y = -1, \qquad y &= 2 && \text{Çözün.} \end{aligned}$$

Üst integrasyon limiti $b = 2$'dir ($y = -1$ değeri x-ekseninin *altında* bir kesişim noktası verir).

Bölgenin alanı

$$\begin{aligned} A = \int_a^b [f(y) - g(y)]\, dy &= \int_0^2 [y + 2 - y^2]\, dy \\ &= \int_0^2 [2 + y - y^2]\, dy \\ &= \left[2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 \\ &= 4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

dir. Daha az çabayla, Örnek 5'teki sonucu bulduk. ■



ŞEKİL 5.33 Mavi bölgenin alanı $y = \sqrt{x}$ parabolünün altındaki alan eksi üçgenin alanıdır (Örnek 7).

İntegralleri Geometri Formülleriyle Birleştirmek

Bir alanı bulmanın en kısa yolu analizle geometriyi birleştirmek olabilir.

ÖRNEK 7 Örnek 5'teki Bölgenin Alanının En Hızlı Şekilde Bulunması

Örnek 5'teki bölgenin alanını bulun.

Çözüm İstediğimiz alan, $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$, eğrisi ile x-ekseni arasındaki alan eksi tabanı 2 ve yüksekliği 2 olan bir üçgenin alanıdır (Şekil 5.33):

$$\begin{aligned}\text{Alan} &= \int_0^4 \sqrt{x}\,dx - \frac{1}{2}(2)(2)\\ &= \frac{2}{3}x^{3/2}\bigg]_0^4 - 2\\ &= \frac{2}{3}(8) - 0 - 2 = \frac{10}{3}.\end{aligned}$$

5–7 Örneklerinin Sonuçları Bazen iki eğri arasında kalan alan x yerine y'ye göre integral alınarak daha kolay bulunur. Ayrıca, analizle geometriyi birleştirmek de yararlı olabilir. Bölgeyi çizdikten sonra, hangi yolun daha iyi olacağını bir düşünün.

ALIŞTIRMALAR 5.6

Belirli İntegralleri Hesaplama

1–24 alıştırmalarındaki integralleri hesaplamak için Teorem 6'daki Dönüşüm Formülünü kullanın.

1. a. $\int_0^3 \sqrt{y+1}\,dy$ b. $\int_{-1}^0 \sqrt{y+1}\,dy$

2. a. $\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$ b. $\int_{-1}^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$

3. a. $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x\,dx$ b. $\int_{-\pi/4}^0 \tan x \sec^2 x\,dx$

4. a. $\int_0^{\pi} 3\cos^2 x \sin x\,dx$ b. $\int_{2\pi}^{3\pi} 3\cos^2 x \sin x\,dx$

5. a. $\int_0^1 t^3(1+t^4)^3\,dt$ b. $\int_{-1}^1 t^3(1+t^4)^3\,dt$

6. a. $\int_0^{\sqrt{7}} t(t^2+1)^{1/3}\,dt$ b. $\int_{-\sqrt{7}}^0 t(t^2+1)^{1/3}\,dt$

7. a. $\int_{-1}^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2}\,dr$ b. $\int_0^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2}\,dr$

8. a. $\int_0^1 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}\,dv$ b. $\int_1^4 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}\,dv$

9. a. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ b. $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

10. a. $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\,dx$ b. $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\,dx$

11. a. $\int_0^{\pi/6} (1-\cos 3t)\sin 3t\,dt$ b. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1-\cos 3t)\sin 3t\,dt$

12. a. $\int_{-\pi/2}^0 \left(2+\tan\frac{t}{2}\right)\sec^2\frac{t}{2}\,dt$ b. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2+\tan\frac{t}{2}\right)\sec^2\frac{t}{2}\,dt$

13. a. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\sin z}}\,dz$ b. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\sin z}}\,dz$

14. a. $\int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin w}{(3+2\cos w)^2}\,dw$ b. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin w}{(3+2\cos w)^2}\,dw$

15. $\int_0^1 \sqrt{t^5+2t}\,(5t^4+2)\,dt$

16. $\int_1^4 \frac{dy}{2\sqrt{y}\,(1+\sqrt{y})^2}$

17. $\int_0^{\pi/6} \cos^{-3} 2\theta \sin 2\theta\,d\theta$

18. $\int_{\pi}^{3\pi/2} \cot^5\left(\frac{\theta}{6}\right)\sec^2\left(\frac{\theta}{6}\right)d\theta$

19. $\int_0^{\pi} 5(5-4\cos t)^{1/4}\sin t\,dt$

20. $\int_0^{\pi/4} (1-\sin 2t)^{3/2}\cos 2t\,dt$

21. $\int_0^1 (4y-y^2+4y^3+1)^{-2/3}(12y^2-2y+4)\,dy$

22. $\int_0^1 (y^3+6y^2-12y+9)^{-1/2}(y^2+4y-4)\,dy$

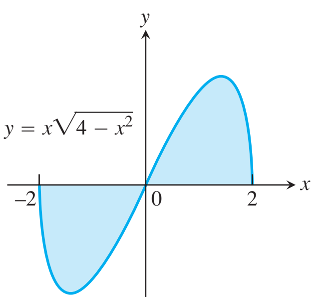
23. $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sqrt{\theta}\cos^2(\theta^{3/2})\,d\theta$

24. $\displaystyle\int_{-1}^{-1/2} t^{-2}\sin^2\left(1+\frac{1}{t}\right)dt$

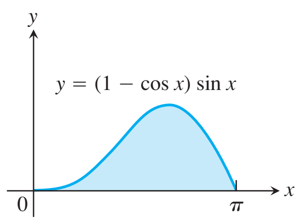
Alan

25–40 alıştırmalarında renkli bölgelerin toplam alanını bulun.

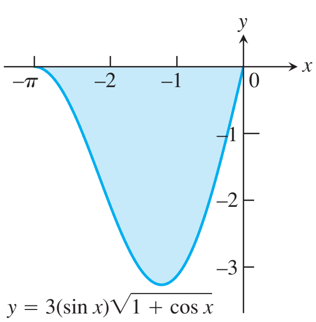
25.



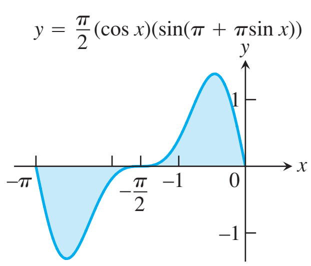
26.



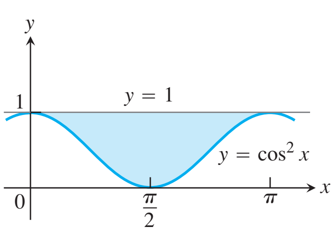
27.



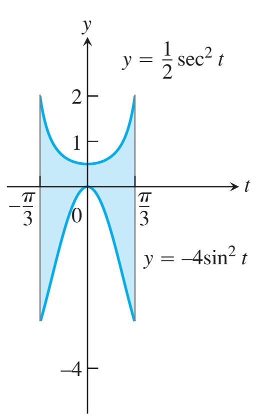
28.



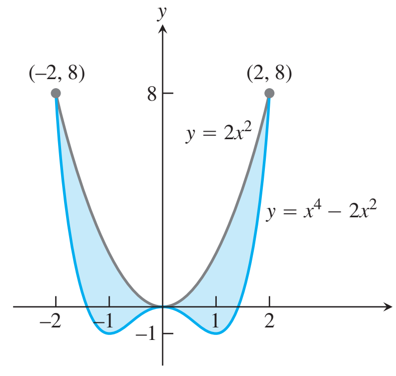
29.



30.

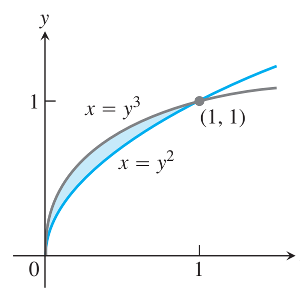


31.

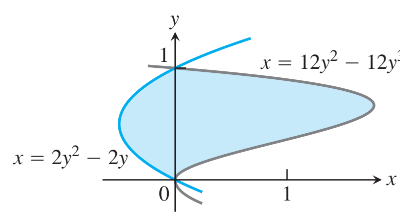


ÖLÇEKLİ DEĞİL

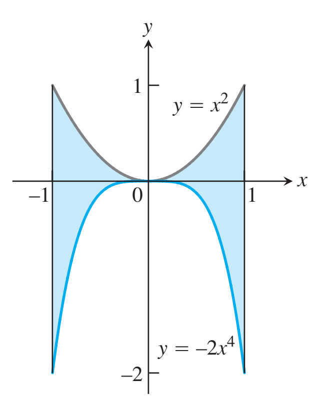
32.



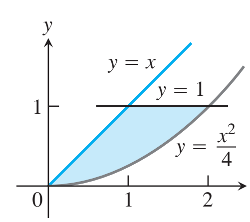
33.



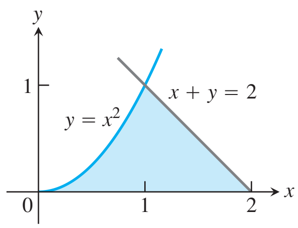
34.



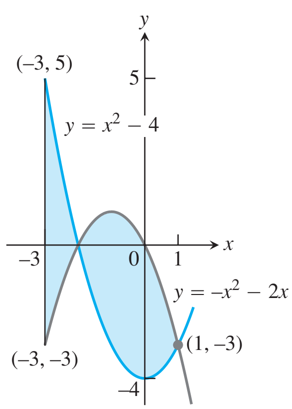
35.



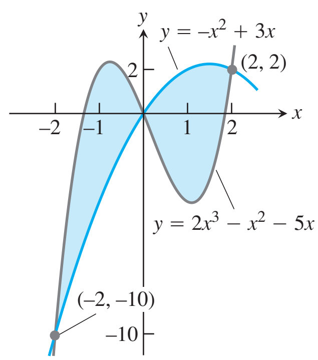
36.



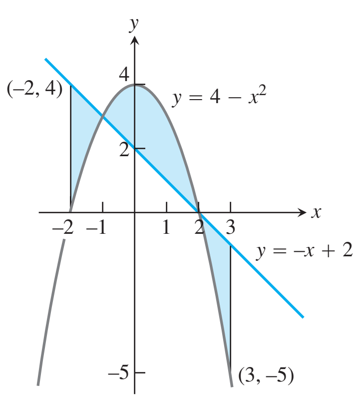
37.



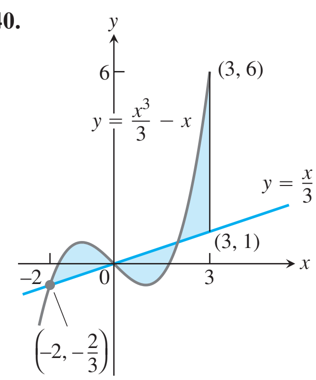
38.



39.



40.



41–50 alıştırmalarında doğrular ve eğrilerle sınırlı bölgelerin alanlarını bulun.

41. $y = x^2 - 2$ ve $y = 2$

42. $y = 2x - x^2$ ve $y = -3$

43. $y = x^4$ ve $y = 8x$

44. $y = x^2 - 2x$ ve $y = x$

45. $y = x^2$ ve $y = -x^2 - 4x$

46. $y = 7 - 2x^2$ ve $y = x^2 + 4$

47. $y = x^4 - 4x^2 + 4$ ve $y = x^2$

48. $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$, ve $y = 0$

49. $y = \sqrt{|x|}$ ve $5y = x + 6$ (Kaç tane kesişim noktası vardır?)

50. $y = |x^2 - 4|$ ve $y = (x^2/2) + 4$

51–58 alıştırmalarında doğrular ve eğrilerle sınırlı bölgelerin alanlarını bulun.

51. $x = 2y^2$, $x = 0$, ve $y = 3$

52. $x = y^2$ ve $x = y + 2$

53. $y^2 - 4x = 4$ ve $4x - y = 16$

54. $x - y^2 = 0$ ve $x + 2y^2 = 3$

55. $x + y^2 = 0$ ve $x + 3y^2 = 2$

56. $x - y^{2/3} = 0$ ve $x + y^4 = 2$

57. $x = y^2 - 1$ ve $x = |y|\sqrt{1 - y^2}$

58. $x = y^3 - y^2$ ve $x = 2y$

59–62 alıştırmalarında eğrilerle çevrili bölgelerin alanlarını bulun.

59. $4x^2 + y = 4$ ve $x^4 - y = 1$

60. $x^3 - y = 0$ ve $3x^2 - y = 4$

61. $x + 4y^2 = 4$ ve $x + y^4 = 1$, $x \geq 0$ için

62. $x + y^2 = 3$ ve $4x + y^2 = 0$

63–70 alıştırmalarında doğrular ve eğrilerle sınırlı bölgelerin alanlarını bulun.

63. $y = 2\sin x$ ve $y = \sin 2x$, $0 \leq x \leq \pi$

64. $y = 8\cos x$ ve $y = \sec^2 x$, $-\pi/3 \leq x \leq \pi/3$

65. $y = \cos(\pi x/2)$ ve $y = 1 - x^2$

66. $y = \sin(\pi x/2)$ ve $y = x$

67. $y = \sec^2 x$, $y = \tan^2 x$, $x = -\pi/4$, ve $x = \pi/4$

68. $x = \tan^2 y$ ve $x = -\tan^2 y$, $-\pi/4 \leq y \leq \pi/4$

69. $x = 3\sin y\sqrt{\cos y}$ ve $x = 0$, $0 \leq y \leq \pi/2$

70. $y = \sec^2(\pi x/3)$ ve $y = x^{1/3}$, $-1 \leq x \leq 1$

71. $x - y^3 = 0$ eğrisi ve $x - y = 0$ doğrusu ile çevrelenen pervane şeklindeki bölgenin alanını bulun.

72. $x - y^{1/3} = 0$ ve $x - y^{1/5} = 0$ eğrileri ile çevrelenen pervane şeklindeki bölgenin alanını bulun.

73. Birinci dörtte bir bölgede $y = x$ doğrusu, $x = 2$ doğrusu, $y = 1/x^2$ eğrisi ve x-ekseniyle sınırlı alanını bulun.

74. Birinci dörtte bir bölgede soldan y-ekseni ile sağdan $y = \sin x$ ve $y = \cos x$ eğrileriyle sınırlanan "üçgensel" bölgenin alanını bulun.

75. Alttan $y = x^2$ parabolü ve üstten $y = 4$ doğrusu ile sınırlanan bölge $y = c$ doğrusu ile kesilerek eşit alanlı iki bölgeye ayrılmak isteniyor.

a. Bölgeyi çizin ve uygun gibi görünen bir $y = c$ doğrusu ekleyin. c cinsinden, parabolle doğru nerde kesişirler? Bu noktaları da şeklinize ekleyin.

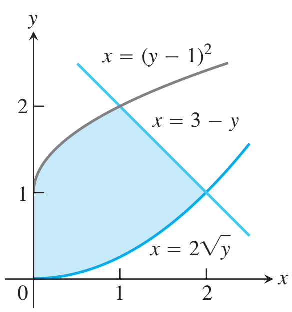
b. y'ye göre integral alarak c'yi bulun. (Bu c'yi integrasyon sınırlarına koyar.)

c. x'e göre integral alarak c'yi bulun. (Bu c'yi integranda da koyar.)

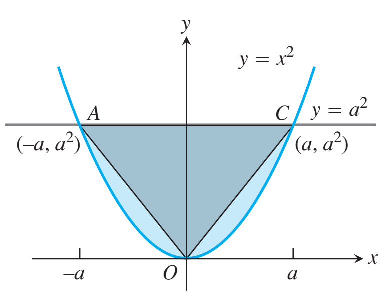
76. $y = 3 - x^2$ eğrisi ile $y = -1$ doğrusu arasındaki bölgenin alanını **a.** x'e, ***b.*** y'ye göre integre ederek bulun.

77. Birinci dörtte bir bölgede soldan y-ekseni, alttan $y = x/4$, doğrusu, üstte soldan $y = 1 + \sqrt{x}$, eğrisi ve üstte sağdan $y = 2/\sqrt{x}$. eğrisiyle sınırlanan bölgenin alanını bulun.

78. Birinci dörtte bir bölgede soldan y-ekseni, alttan $x = 2\sqrt{y}$, üstte soldan $x = (y-1)^2$ eğrisi ve üstte sağdan $x = 3 - y$ doğrusuyla sınırlanan bölgenin alanını bulun.



79. Aşağıdaki şekil $y = x^2$ parabolünden $y = a^2$ doğrusu ile kesilen parçanının içine oturtulan AOC üçgenini göstermektedir. a sıfıra yaklaşırken üçgenin alanının parabolik bölgenin alanına oranının limitini bulun.

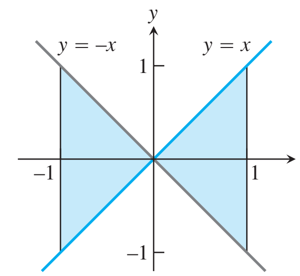


80. Pozitif sürekli bir f fonksiyonunun grafiği ile x-ekseni arasında $x = a$'dan $x = b$'ye kadar kalan bölgenin 4 birim kare olduğunu varsayın. $x = a$'dan $x = b$'ye kadar $y = f(x)$ ve $y = 2f(x)$ eğrileri arasında olan bölgenin alanını bulun.

81. Aşağıdaki integrallerden hangisi, eğer varsa, aşağıda verilen renkli bölgenin alanını hesaplar? Yanıtınızı açıklayın.

a. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x - (-x))\,dx = \int_{-1}^{1} 2x\,dx$

b. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (-x - (x))\,dx = \int_{-1}^{1} -2x\,dx$



82. $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ sürekli fonksiyonlarının grafikleri ile $x = a$ ve $x = b$ dikey doğruları ($a < b$) arasındaki bölgenin alanı

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

ile verilir. Doğru, bazen doğru ya da asla doğru değil? Yanıtınızı açıklayın.

Teori ve Örnekler

83. $f(x) = (\sin x)/x,\ x > 0$ fonksiyonunun bir ters türevinin $F(x)$ olduğunu varsayın.

$$\int_1^3 \frac{\sin 2x}{x}\,dx$$

integralini F cinsinden ifade edin.

84. f sürekli ise,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(1-x)\,dx.$$

olduğunu gösterin.

85.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 3.$$

olduğunu varsayın. **a.** f tek ve **b.** f çift ise

$$\int_{-1}^0 f(x)\,dx$$

integralini bulun.

86. **a.** f fonksiyonu $[-a, a]$ üzerinde tek ise

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$$

olduğunu gösterin.

b. (a)'daki sonucu $f(x) = \sin x$ ve $a = \pi/2$ ile test edin.

87. f sürekli bir fonksiyonsa, $u = a - x$ dönüşümünü yaparak ve ortaya çıkan integrali I'ya ekleyerek

$$I = \int_0^a \frac{f(x)\,dx}{f(x) + f(a-x)}$$

integralini hesaplayın.

88. Bir dönüşüm kullanarak, tüm pozitif x ve y sayıları için,

$$\int_x^{xy} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{y} \frac{1}{t}\,dt.$$

olduğunu gösterin.

Belirli İntegrallerin Kayma Özelliği

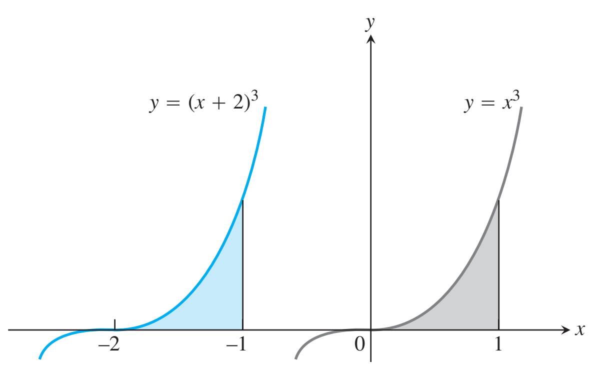
Belirli integrallerin temel bir özelliği

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x+c)\,dx. \qquad (1)$$

denkleminin de gösterdiği gibi öteleme altında değişmezlikleridir. Denklem, f integre edilebilir ve gerekli x değerlerinde tanımlı olduğu sürece geçerlidir. Örneğin aşağıdaki şekil

$$\int_{-2}^{-1} (x+2)^3\,dx = \int_0^1 x^3\,dx$$

olduğunu göstermektedir. Renkli bölgelerin alanları aynıdır.



89. Bir dönüşüm kullanarak (1) denklemini doğrulayın.

90. Aşağıdaki fonksiyonların her biri için, $f(x)$'in $[a, b]$'de ve $f(x+c)$'nin $[a-c, b-c]$'de grafiklerini çizerek (1) Denkleminin mantıklı olduğuna kendinizi ikna edin.

a. $f(x) = x^2, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad c = 1$

b. $f(x) = \sin x, \quad a = 0, \quad b = \pi, \quad c = \pi/2$

c. $f(x) = \sqrt{x-4}, \quad a = 4, \quad b = 8, \quad c = 5$

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

91–94 alıştırmalarında, düzlemde kesişim noktalarını basit cebirle bulamadığınız eğrilerin arasındaki alanı bulacaksınız. Aşağıdaki adımları gerçekleştirmek için bir BCS kullanın.

a. Neye benzediklerini ve kaç tane kesişim noktaları olduğunu görmek için eğrileri birlikte çizin.

b. Bütün kesişim noktalarını bulmak için BCS'nizdeki sayısal denklem çözücüyü kullanın.

c. $|f(x) - g(x)|$'i birbirini izleyen kesişim değeri çiftleri üzerinden integre edin.

d. (c) şıkkında bulduğunuz integralleri toplayın.

91. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}, \quad g(x) = x - 1$

92. $f(x) = \frac{x^4}{2} - 3x^3 + 10, \quad g(x) = 8 - 12x$

93. $f(x) = x + \sin(2x), \quad g(x) = x^3$

94. $f(x) = x^2 \cos x, \quad g(x) = x^3 - x$

Bölüm 5 Tekrar Soruları

1. Alınan yol, alan, hacim ve ortalama değer gibi büyüklükleri bazen sonlu toplamlarla nasıl tahmin edebilirsiniz? Neden böyle bir şey yapmak isteyesiniz?

2. Sigma gösterimi nedir? Ne gibi avantajlar sağlar? Örnek verin.

3. Bir Riemann toplamı nedir? Neden böyle bir toplamı ele almak isteyesiniz?

4. Kapalı bir aralığın bölünüşünün normu nedir?

5. Kapalı bir $[a, b]$ aralığında bir f fonksiyonunun belirli integrali nedir? Var olduğundan ne zaman emin olabilirsiniz?

6. Belirli integraller ile alan arasındaki ilişki nedir? Belirli integrallerin başka bazı yorumlarını tanımlayın.

7. Kapalı bir aralıkta integre edilebilen bir fonksiyonun ortalama değeri nedir? Fonksiyonun ortalama değerini alması gerekir mi? Açıklayın.

8. Belirli integrallerle çalışma kurallarını tanımlayın (Tablo 5.3) Örnekler verin.

9. Analizin Temel Teoremi nedir? Niye bu kadar önemlidir? Teoremin her kısmını bir örnekle açıklayın.

10. f sürekliyse, Temel Teorem $dy/dx = f(x)$, $y(x_0) = y_0$ başlangıç değer problemine nasıl bir çözüm sağlar?

11. Değişken dönüşümü ile integrasyon Zincir Kuralına nasıl bağlıdır?

12. Bazen belirsiz integralleri değişken dönüşümüyle nasıl çözersiniz? Örnekler verin.

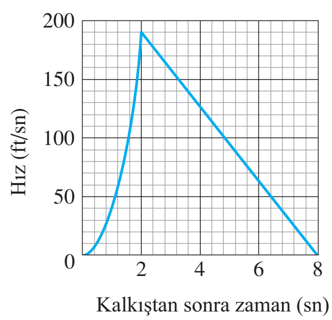
13. Değişken dönüşümü yöntemi belirli integraller için nasıl çalışır? Örnekler verin.

14. İki sürekli fonksiyonun grafikleri arasındaki alanı nasıl tanımlarsınız ve hesaplarsınız? Bir örnek verin.

Bölüm 5 Problemler

Sonlu Toplamlar ve Tahminler

1. Aşağıdaki şekil bir model roketin kalkıştan sonra ilk 8 saniyedeki hız (ft/sn) grafiğini vermektedir. Roket ilk 2 saniyede yukarı doğru ivmelenmiş ve $t = 8$ sn anında maksimum yüksekliğine erişmiştir.

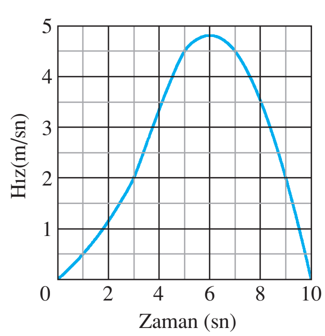


a. Roketin yer seviyesinden fırlatıldığını varsayılırsa, ne kadar yükseğe çıkmıştır? (Bu, Bölüm 3.3, Alıştırma 17'deki rokettir, fakat buradaki alıştırmayı yapmak için Alıştırma 17'yi yapmaya gerek yoktur.)

b. $0 \le t \le 8$ için, roketin yerden yüksekliğinin grafiğini zamanın bir fonksiyonu olarak çizin.

2. **a.** Aşağıdaki grafikte s-ekseninde ilerleyen bir cismin $t = 0$'dan $t = 10$ sn'ye kadar olan aralıkta hızı (m/sn) gösterilmektedir. Bu 10 saniye boyunca cisim ne kadar yol almıştır?

b. $0 \le t \le 10$ aralığında $s(0) = 0$ olduğunu varsayarak, s'nin grafiğini t'nin bir fonksiyonu olarak çizin.



3. $\sum_{k=1}^{10} a_k = -2$ ve $\sum_{k=1}^{10} b_k = 25$ ise aşağıdakileri bulun.

a. $\sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{4}$ **b.** $\sum_{k=1}^{10} (b_k - 3a_k)$

c. $\sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k - 1)$ **d.** $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{5}{2} - b_k\right)$

4. $\sum_{k=1}^{20} a_k = 0$ ve $\sum_{k=1}^{20} b_k = 7$ ise aşağıdakileri bulun.

a. $\sum_{k=1}^{20} 3a_k$ **b.** $\sum_{k=1}^{20} (a_k + b_k)$

c. $\sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{2} - \frac{2b_k}{7}\right)$ **d.** $\sum_{k=1}^{20} (a_k - 2)$

Belirli İntegraller

5–8 problemlerindeki her limiti belirli bir integral olarak ifade edin. Sonra limitin değerini bulmak için integrali hesaplayın. Her durumda, P verilen aralığın bir bölünüşüdür ve c_k sayıları P'nin alt aralıklarından seçilmişlerdir.

5. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (2c_k - 1)^{-1/2} \Delta x_k$, P $[1, 5]$'in bir bölünüşü

6. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k(c_k^2 - 1)^{1/3} \Delta x_k$, P $[1, 3]$'in bir bölünüşü

7. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\left(\frac{c_k}{2}\right)\right) \Delta x_k$, P $[-\pi, 0]$'ın bir bölünüşü

8. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\sin c_k)(\cos c_k) \Delta x_k$, P $[0, \pi/2]$'nin bir bölünüşü

9. $\int_{-2}^{2} 3f(x)\,dx = 12$, $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = 6$, ve $\int_{-2}^{5} g(x)\,dx = 2$, ise, aşağıdakileri bulun.

a. $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ **b.** $\int_{2}^{5} f(x)\,dx$

c. $\int_{5}^{-2} g(x)\,dx$ **d.** $\int_{-2}^{5} (-\pi g(x))\,dx$

e. $\int_{-2}^{5} \left(\frac{f(x) + g(x)}{5}\right) dx$

10. If $\int_{0}^{2} f(x)\,dx = \pi$, $\int_{0}^{2} 7g(x)\,dx = 7$, ve $\int_{0}^{1} g(x)\,dx = 2$ ise, aşağıdakilerin değerlerini bulun.

a. $\int_{0}^{2} g(x)\,dx$ **b.** $\int_{1}^{2} g(x)\,dx$

c. $\int_{2}^{0} f(x)\,dx$ **d.** $\int_{0}^{2} \sqrt{2}\, f(x)\,dx$

e. $\int_{0}^{2} (g(x) - 3f(x))\,dx$

Alan

11–14 problemlerinde, f'nin grafiği ile x-ekseni arasında kalan bölgenin toplam alanını bulun.

11. $f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad 0 \le x \le 3$

12. $f(x) = 1 - (x^2/4), \quad -2 \le x \le 3$

13. $f(x) = 5 - 5x^{2/3}, \quad -1 \le x \le 8$

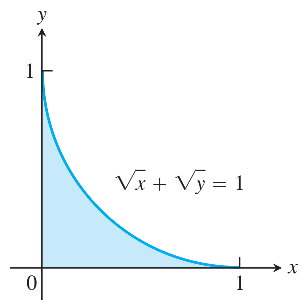
14. $f(x) = 1 - \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 4$

15–26 problemlerindeki eğriler ve doğrularla çevrelenen bölgelerin alanlarını bulun.

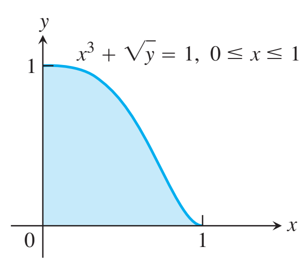
15. $y = x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 2$

16. $y = x, \quad y = 1/\sqrt{x}, \quad x = 2$

17. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0$



18. $x^3 + \sqrt{y} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad 0 \le x \le 1$0 için



19. $x = 2y^2, \quad x = 0, \quad y = 3$ **20.** $x = 4 - y^2, \quad x = 0$

21. $y^2 = 4x, \quad y = 4x - 2$

22. $y^2 = 4x + 4, \quad y = 4x - 16$

23. $y = \sin x, \quad y = x, \quad 0 \le x \le \pi/4$

24. $y = |\sin x|, \quad y = 1, \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2$

25. $y = 2\sin x, \quad y = \sin 2x, \quad 0 \le x \le \pi$

26. $y = 8\cos x, \quad y = \sec^2 x, \quad -\pi/3 \le x \le \pi/3$

27. Soldan $x + y = 2$, sağdan $y = x^2$ ve üstten $y = 2$ ile çevrelenen "üçgen" bölgenin alanını bulun.

28. Soldan $y = \sqrt{x}$ sağdan $y = 6 - x$ ve alttan $y = 1$ ile çevrelenen "üçgen" bölgenin alanını bulun.

29. $f(x) = x^3 - 3x^2$'nin ekstremum değerlerini bulun ve f'nin grafiği ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanının bulun.

30. Birinci dörtte bir bölgeden $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ eğrisiyle kesilen bölgenin alanını bulun.

31. $x = y^{2/3}$ eğrisi ile $x = y$ ve $y = -1$ doğruları arasında kalan bölgenin toplam alanını bulun.

32. $0 \le x \le 3\pi/2$ aralığında $y = \sin x$ ve $y = \cos x$ eğrileri arasında kalan bölgenin toplam alanını bulun.

Başlangıç Değer Problemleri

33. $y = x^2 + \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$'nin

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - \frac{1}{x^2}; \quad y'(1) = 3, \quad y(1) = 1$$

başlangıç değer problemini çözdüğünü gösterin.

34. $y = \int_0^x \left(1 + 2\sqrt{\sec t}\right) dt$'nin

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{\sec x}\tan x; \quad y'(0) = 3, \quad y(0) = 0.$$

başlangıç değer problemini çözdüğünü gösterin.

35 ve 36 problemlerindeki başlangıç değer problemlerinin çözümlerini integral olarak ifade edin.

35. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{x}, \quad y(5) = -3$

36. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2 - \sin^2 x}, \quad y(-1) = 2$

Belirsiz İntegralleri Hesaplama

37–44 problemlerindeki integralleri hesaplayın.

37. $\int 2(\cos x)^{-1/2}\sin x\,dx$ **38.** $\int (\tan x)^{-3/2}\sec^2 x\,dx$

39. $\int (2\theta + 1 + 2\cos(2\theta + 1))\,d\theta$

40. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{2\theta - \pi}} + 2\sec^2(2\theta - \pi)\right) d\theta$

41. $\int \left(t - \frac{2}{t}\right)\left(t + \frac{2}{t}\right) dt$ **42.** $\int \frac{(t+1)^2 - 1}{t^4}\,dt$

43. $\int \sqrt{t}\sin(2t^{3/2})\,dt$ **44.** $\int \sec\theta\tan\theta\sqrt{1 + \sec\theta}\,d\theta$

Belirli İntegralleri Hesaplama

45–70 problemlerindeki integralleri hesaplayın.

45. $\int_{-1}^{1} (3x^2 - 4x + 7)\,dx$ **46.** $\int_0^1 (8s^3 - 12s^2 + 5)\,ds$

47. $\int_1^2 \frac{4}{v^2}\,dv$ **48.** $\int_1^{27} x^{-4/3}\,dx$

49. $\int_1^4 \frac{dt}{t\sqrt{t}}$ **50.** $\int_1^4 \frac{\left(1 + \sqrt{u}\right)^{1/2}}{\sqrt{u}}\,du$

51. $\int_0^1 \frac{36\,dx}{(2x+1)^3}$ **52.** $\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt[3]{(7 - 5r)^2}}$

53. $\int_{1/8}^{1} x^{-1/3}(1 - x^{2/3})^{3/2}\,dx$ **54.** $\int_0^{1/2} x^3(1 + 9x^4)^{-3/2}\,dx$

55. $\int_0^{\pi} \sin^2 5r\,dr$ **56.** $\int_0^{\pi/4} \cos^2\left(4t - \frac{\pi}{4}\right) dt$

57. $\int_0^{\pi/3} \sec^2 \theta \, d\theta$

58. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc^2 x \, dx$

59. $\int_{\pi}^{3\pi} \cot^2 \frac{x}{6} \, dx$

60. $\int_0^{\pi} \tan^2 \frac{\theta}{3} \, d\theta$

61. $\int_{-\pi/3}^{0} \sec x \tan x \, dx$

62. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc z \cot z \, dz$

63. $\int_0^{\pi/2} 5(\sin x)^{3/2} \cos x \, dx$

64. $\int_{-1}^{1} 2x \sin(1 - x^2) \, dx$

65. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 15 \sin^4 3x \cos 3x \, dx$

66. $\int_0^{2\pi/3} \cos^{-4}\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$

67. $\int_0^{\pi/2} \frac{3 \sin x \cos x}{\sqrt{1 + 3\sin^2 x}} \, dx$

68. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 x}{(1 + 7\tan x)^{2/3}} \, dx$

69. $\int_0^{\pi/3} \frac{\tan \theta}{\sqrt{2 \sec \theta}} \, d\theta$

70. $\int_{\pi^2/36}^{\pi^2/4} \frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t \sin \sqrt{t}}} \, dt$

Ortalama Değerler

71. $f(x) = mx + b$'nin ortalama değerini verilen aralıkta bulun.

a. $[-1, 1]$

b. $[-k, k]$

72. Verilen aralıkta fonksiyonların ortalama değerini bulun.

a. $[0, 3]$ aralığında $y = \sqrt{3x}$

b. $[0, a]$ aralığında $y = \sqrt{ax}$

73. f $[a, b]$ aralığında türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bölüm 2'de f'nin $[a, b]$'deki ortalama değişim oranını

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ve f'nin x'teki anlık değişim oranını ise $f'(x)$ olarak tanımlamıştık. Bu bölümde ise bir fonksiyonun ortalama değerini tanımladık. Yeni ortalama tanımının eskisiyle tutarlı olması için,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f' \text{'nün } [a, b]\text{'deki ortalama değeri}$$

olması gerekir. Bu doğru mudur? Yanıtınızı açıklayın.

74. İntegre edilebilir bir fonksiyonun 2 uzunluğunda bir aralıktaki ortalama değerinin fonksiyonun o aralıktaki integralinin yarısı olduğu doğru mudur? Yanıtınızı açıklayın.

T **75.** 365 günlük bir yıl için

$$f(x) = 37 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right) + 25$$

sıcaklık fonksiyonunun ortalama değerini hesaplayın. Bu Fairbanks, Alaska'daki yıllık ortalama hava sıcaklığını bulmanın bir yoludur. Ulusal Hava Servisi'nin resmi rakamı, günlük normal ortalama hava sıcaklıklarının sayısal ortalaması, $f(x)$'in ortalama değerinden biraz daha yüksek olan 25.7 °F'dir. Şekil 3.33 nedenini göstermektedir.

T **76.** **Bir gazın özgül ısısı** cal/°-mol (kalori bölü derece gram molekül) birimiyle ölçülen özgül ısı C_v, verilen bir miktar sabit hacimli gazın sıcaklığını 1°C arttırmak için gerekli ısı miktarıdır. Oksijenin özgül ısısı T'ye bağlıdır ve

$$C_v = 8.27 + 10^{-5}(26T - 1.87T^2).$$

formülünü sağlar. $20° \le T \le 675$°C için C_v'nin ortalama değerini ve bu değerin hangi sıcaklıkta alındığını bulun.

İntegralleri Türetmek

77–80 alıştırmalarında dy/dx'i bulun.

77. $y = \int_2^x \sqrt{2 + \cos^3 t} \, dt$

78. $y = \int_2^{7x^2} \sqrt{2 + \cos^3 t} \, dt$

79. $y = \int_x^1 \frac{6}{3 + t^4} \, dt$

80. $y = \int_{\sec x}^{2} \frac{1}{t^2 + 1} \, dt$

Teori ve Örnekler

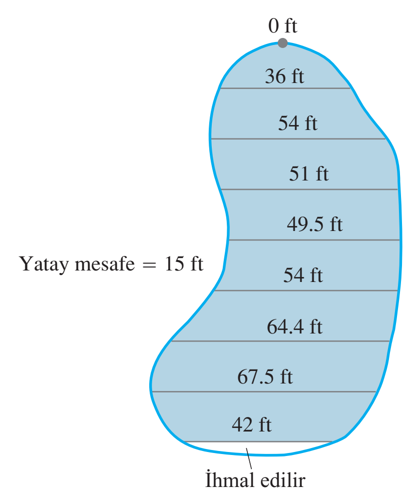
81. $[a, b]$ aralığında türevlenebilen her $y = f(x)$ fonksiyonunun kendisinin $[a, b]$'de bir fonksiyonun türevi olduğu doğru mudur? Yanıtınızı açıklayın.

82. $F(x)$'in $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$ fonksiyonunun bir ters türevi olduğunu varsayın. $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4} \, dx$ integralini F cinsinden ifade edin ve yanıtınızı açıklayın.

83. $y = \int_x^1 \sqrt{1 + t^2} \, dt$ ise dy/dx'i bulun. Hesaplarınızdaki ana adımları açıklayın.

84. $y = \int_{\cos x}^{0} (1/(1 - t^2)) \, dt$ ise dy/dx'i bulun. Hesaplarınızdaki ana adımları açıklayın.

85. **Yeni bir park yeri** Park yeri ihtiyacını karşılamak için, kasabanız burada görülen alanı ayırmıştır. Kasaba mühendisi olarak, kasaba konseyi sizden park yerinin 11.000\$'a yapılıp yapılamayacağını bulmanızı istemektedir. Alanı temizlemenin masrafı ft² başına 0.10\$'dır ve park yerinin inşaatı ft² başına 2.00\$ tutacaktır. İşin tamamı 11.000\$'a yapılabilir mi?



86. A ve B paraşütçüleri 6400 ft yükseklikte bulunan bir helikopterdedirler. A paraşütçüsü atlar ve paraşütünü açmadan önce 4 sn düşer. Helikopter bu sırada 7000 ft'e çıkar ve orada kalır. A helikopterden ayrıldıktan 45 sn sonra, B atlar ve paraşütünü açmadan önce 13 s düşer. Paraşütleri açıkken, iki paraşütçü de 16 ft/sn hızla düşerler. Paraşütleri açılmadan önce paraşütçülerin serbset düştüklerini (etkin hava direnci yok) varsayın.

a. A'nın paraşütü hangi yükseklikte açılır?

b. B'nin paraşütü hangi yükseklikte açılır?

c. Yere önce hangi paraşütçü iner?

Ortalama Günlük Envanter

Ekonomide ortalama değer ortalama günlük envanter gibi şeyleri incelemek için kullanılır. $I(t)$ radyo, lastik, ayakkabı veya bir firmanın t gününde elinde hangi ürün varsa onun sayısı ise (I'ya **envanter fonksiyonu** deriz), I'nın bir $[0, T]$ zaman aralığındaki ortalama değerine firmanın o aralıktaki ortalama günlük envanteri denir.

$$\textbf{Ortalama günlük envanter} = \text{ort}(I) = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)\,dt.$$

h bir birim malı bir gün tutmanın masrafıysa, $\text{ort}(I)\cdot h$ o sürede **ortalama günlük tutma masrafı**dır.

87. Bir toptancı olarak, Tracey Burr Distributors her 30 günde bir 1200 paket çikolata sevkiyatı teslim almaktadır. TBD çikolataları alıcılara düzenli bir şekilde dağıtmaktadır ve bir sevkiyat geldikten t gün sonra, eldeki paketlerin envanteri $I(t) = 1200 - 40t$, $0 \le t \le 30$ ile verilir. 30 günlük sürede TBD'nin ortalama günlük envanteri nedir? Bir paketi bir gün tutmanın masrafı 3¢ ise, günlük ortalama tutma masrafı nedir?

88. Bir kurabiye üreticisi olan Rich Wholesale Foods kurabiye kutularını her 14 günde bir olan sevkiyata kadar havalandırmalı bir depoda tutmaktadır. Rich talepte zaman zaman görülen fırlamaları karşılamak için yedekte 600 kutu bulundurmaya çalışır, dolayısıyla tipik bir 14 günlük envanter fonksiyonu $I(t) = 600 + 600t$, $0 \le t \le 14$ olarak verilir. Her kutunun günlük tutma masrafı 4¢'tir. Rich'in ortalama günlük envanterini ve ortalama günlük tutma masrafını bulun.

89. Solon Container'a her 30 günde bir 450 silindirlik plastik saçma sevk edilmektedir. Envanter fonksiyonu (günün bir fonksiyonu olarak eldeki silindirler) $I(t) = 450 - t^2/2$'dir. Ortalama günlük envanteri bulun. Bir silindiri tutma masrafı günde 2¢ ise, ortalama günlük tutma masrafını bulun.

90. Mitchell Mailorder'a her 60 günde bir 600 kutu atlet çorabı sevk edilmektedir. Sevkiyat geldikten t gün sonra eldeki kutu sayısı $I(t) = 600 - 20\sqrt{15t}$. 'dir. Ortalama günlük envanteri bulun. Bir kutuyu tutma masrafı günde 1/2¢ ise, ortalama günlük tutma masrafını bulun.

Bölüm 5 Ek ve İleri Alıştırmalar

Teori ve Örnekler

1. a. $\int_0^1 7f(x)\,dx = 7,$ ise $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$?

b. $\int_0^1 f(x)\,dx = 4$ ve $f(x) \ge 0$ ise,

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)}\,dx = \sqrt{4} = 2 \quad \text{midir?}$$

Yanıtlarınızı açıklayın.

2. $\int_{-2}^2 f(x)\,dx = 4, \int_2^5 f(x)\,dx = 3, \int_{-2}^5 g(x)\,dx = 2$ olsun.

Aşağıdaki ifadelerden, varsa, hangileri doğrudur?

a. $\int_5^2 f(x)\,dx = -3$ **b.** $\int_{-2}^5 (f(x) + g(x)) = 9$

c. $-2 \le x \le 5$ aralığında $f(x) \le g(x)$.

3. Başlangıç değer problemi

$$y = \frac{1}{a}\int_0^x f(t)\sin a(x - t)\,dt$$

fonksiyonunun

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = f(x),\quad x = 0 \text{ iken } \frac{dy}{dx} = 0 \text{ ve } y = 0 \qquad = 0.$$

başlangıç değer probleminin çözdüğünü gösterin. (*İpucu*: $\sin(ax - at) = \sin ax \cos at - \cos ax \sin at$)

4. Orantılılık x ve y'nin

$$x = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}\,dt.$$

denklemiyle birbirine bağlı olduklarını varsayın. d^2y/dx^2'nin y'ye orantılı olduğunu gösterin ve orantı sabitini bulun.

5. Aşağıdaki durumlarda $f(4)$'ü bulun.

a. $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x\cos \pi x$ **b.** $\int_0^{f(x)} t^2\,dt = x\cos \pi x$

6. Aşağıdaki bilgilerle $f(\pi/2)$'yi bulun.

i. f pozitif ve süreklidir.

ii. $x = 0$'dan $x = a$'ya kadar $y = f(x)$ eğrisinin altında kalan alan şöyledir:

$$\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2}\sin a + \frac{\pi}{2}\cos a.$$

7. xy-düzleminde x-ekseni, $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$ eğrisi, $x = 1$ ve $x = b$ doğruları ile sınırlanan bölgenin alanı her $b > 1$ değerinde $\sqrt{b^2 + 1} - \sqrt{2}$'ye eşittir. $f(x)$'i bulun.

8.
$$\int_0^x \left(\int_0^u f(t)\, dt \right) du = \int_0^x f(u)(x - u)\, du$$

olduğunu ispatlayın (*İpucu*: Sağ taraftaki integrali iki integralin farkı olarak ifade edin. Sonra denklemin iki tarafının da x'e göre türevinin aynı olduğunu gösterin).

9. **Bir eğri bulmak** x'teki türevi her zaman $3x^2 + 2$ ise, $(1, -1)$ noktasından geçen xy-düzlemindeki eğrinin denklemini bulun.

10. **Shoveling dirt** Bir çukurun dibinden yukarı 32 ft/sn ilk hızıyla bir kürek dolusu çöp atıyorsunuz. Çöpün çukurun dışına çıkabilmesi için 17 ft yukarı çıkması gerekmektedir? İlk hız bunun için yeterli midir, yoksa kafanızı saklamanız mı gerekir?

Parçalı Olarak Sürekli Fonksiyonlar

Esas olarak sürekli fonksiyonlarla ilgilendiğimiz halde, uygulamalardaki fonksiyonların çoğu parçalı olarak süreklidir. Bir $f(x)$ fonksiyonunun bir I kapalı aralığında sonlu sayıda süreksizliği varsa, I'nın her iç noktasında

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to c^+} f(x)$$

limitleri var ve sonlu ise ve I'nın uç noktalarında uygun tek taraflı limitler var ve sonlu ise f fonksiyonu ***I* kapalı aralığında parçalı olarak süreklidir.** Bütün parçalı olarak sürekli fonksiyonlar integre edilebilirdir. Süreksizlik noktaları I aralığını f'nin sürekli olduğu açık ve yarı açık alt aralıklara böler. Yukarıdaki limit kriterleri, her alt aralığın kapanışına f'nin sürekli olarak genişlemesini garanti eder. Parçalı olarak sürekli bir fonksiyonu integre etmek için tek tek genişlemeleri integre eder ve sonuçları toplarız.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & -1 \leq x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 2 \\ -1, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

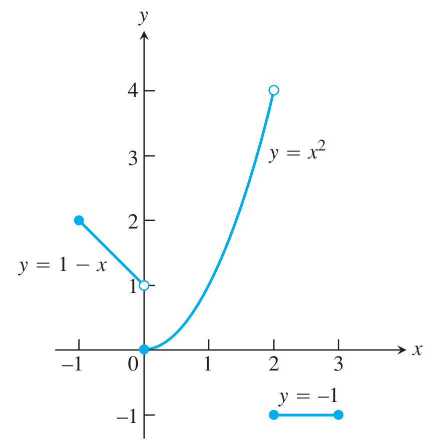
fonksiyonunun (Şekil 5.34) [–1, 3] aralığındaki integrali

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{3} f(x)\, dx &= \int_{-1}^{0} (1 - x)\, dx + \int_0^2 x^2\, dx + \int_2^3 (-1)\, dx \\ &= \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \Big[-x \Big]_2^3 \\ &= \frac{3}{2} + \frac{8}{3} - 1 = \frac{19}{6} \end{aligned}$$

olur.

Temel Teorem parçalı olarak sürekli fonksiyonlara $(d/dx)\int_a^x f(t)\, dt$'nin sadece f'nin sürekli olduğu x değerlerinde $f(x)$'e eşit olacağı kısıtlamasıyla uygulanır. Aşağıdaki Leibnitz kuralında da benzer bir kısıtlama vardır.

11–16 alıştırmalarındaki fonksiyonların grafiklerini çizin ve tanım kümelerinde integre edin.



ŞEKİL 5.34 Bunun gibi parçalı olarak sürekli fonksiyonlar parça parça integre edilir.

11. $f(x) = \begin{cases} x^{2/3}, & -8 \leq x < 0 \\ -4, & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & -4 \leq x < 0 \\ x^2 - 4, & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

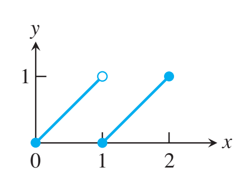
13. $g(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ \sin \pi t, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$

14. $h(z) = \begin{cases} \sqrt{1 - z}, & 0 \leq z < 1 \\ (7z - 6)^{-1/3}, & 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$

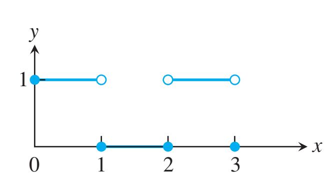
15. $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < -1 \\ 1 - x^2, & -1 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

16. $h(r) = \begin{cases} r, & -1 \leq r < 0 \\ 1 - r^2, & 0 \leq r < 1 \\ 1, & 1 \leq r \leq 2 \end{cases}$

17. Şekildeki fonksiyonun ortalama değerini bulun.



18. Şekildeki fonksiyonun ortalama değerini bulun.



Leibniz Kuralı

Uygulamalarda, bazen hem alt hem de üst integrasyon sınırları değişken olan integrallerle tanımlanan

$$f(x) = \int_{\sin x}^{x^2} (1 + t)\, dt \qquad \text{ve} \qquad g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sin t^2\, dt$$

şeklinde fonksiyonlarla karşılaşırız. Birinci integral doğrudan hesaplanabilirken ikincisi hesaplanamaz. Ama iki integralin de türevini **Leibniz Kuralı** denilen bir formülle hesaplayabiliriz:

Leibniz Kuralı

f, $[a, b]$'de sürekliyse ve $u(x)$ ile $v(x)$ x'in değerleri $[a, b]$'de olan türevlenebilir fonksiyonlarıysa,

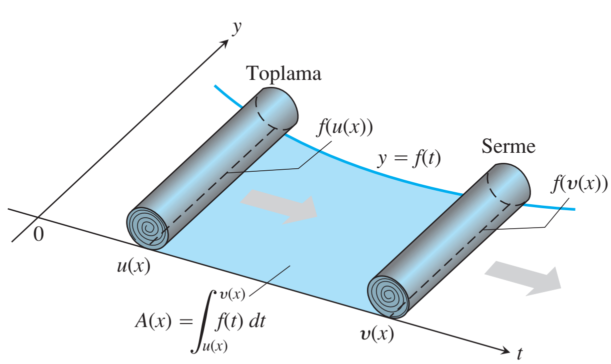
$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}$$

olur.

Şekil 5.35 Leibniz Kuralının geometrik bir yorumunu vermektedir. Soldan toplanmasıyla aynı x anında sağdan serilen değişken $f(t)$ genişlikli bir halı görülmektedir (Bu yorumda zaman t değil x'tir). x anında, yer $u(x)$'ten $v(x)$'e kadar kaplanmaktadır. Halının toplanma hızı du/dx, serilme hızı dv/d ile eşit olmak zorunda değildir. Verilen herhangi bir x anında, halının kapladığı alan

$$A(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt$$

ile verilir.



ŞEKİL 5.35 Bir halıyı sermek ve toplamak: Leibnitz kuralının bir geometrik yorumu:

$$\frac{dA}{dx} = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}.$$

Kaplanan alan hangi oranda değişmektedir? x anında, $A(x)$ serilen halının genişliği $f(v(x))$ kere halının serilme hızı dv/dx ile artmaktadır. Yani, $A(x)$

$$f(v(x))\frac{dv}{dx}.$$

hızıyla artmaktadır. Aynı zamanda $A(x)$ toplanan halının genişliği kere du/dx hızı olan

$$f(u(x))\frac{du}{dx}$$

hızıyla azalmaktadır. A'daki net değişim oranı

$$\frac{dA}{dx} = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}.$$

olarak bulunur ki, bu da Leibniz kuralıdır.

Kuralı ispatlamak için, F'yi f'nin $[a, b]$'deki bir ters türevi olarak alalım. Bu durumda,

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt = F(v(x)) - F(u(x))$$

olur. Bu denklemin iki tarafının da x'e göre türevinin alınması bize istediğimiz denklemi verir:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt &= \frac{d}{dx}\Big[F(v(x)) - F(u(x))\Big]\\ &= F'(v(x))\frac{dv}{dx} - F'(u(x))\frac{du}{dx} \qquad \text{Zincir Kuralı}\\ &= f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}.\end{aligned}$$

Leibniz kuralını kullanarak, 19–21 alıştırmalarındaki fonksiyonların türevini bulun.

19. $f(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{1}{t}\, dt$

20. $f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \frac{1}{1 - t^2}\, dt$

21. $g(y) = \int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} \sin t^2\, dt$

22. Leibniz kuralını kullanarak,

$$\int_{x}^{x+3} t(5 - t)\, dt$$

integralini maksimize eden x değerini bulun. Bu gibi problemler politik seçimlerin matematiksel teorisinde geçer. "The Entry Problem in a Political Race", Steven J. Brams ve Philip D. Straffin, "*Political Equilibrium*"da, Peter Ordeshook ve Kenneth Shepfle, editörler. Kluwer-Nijhoff, Boston, 1982, sayfa 181–195'e bakın.

Sonlu Toplamlara İntegrallerle Yaklaşmak

Analizin çoğu uygulamasında, sonlu toplamalara yaklaşımda bulummak için integraller kullanılır—alışıldık şekilde integrallere sonlu toplamlarla yaklaşımda bulunmanın tersine olarak.

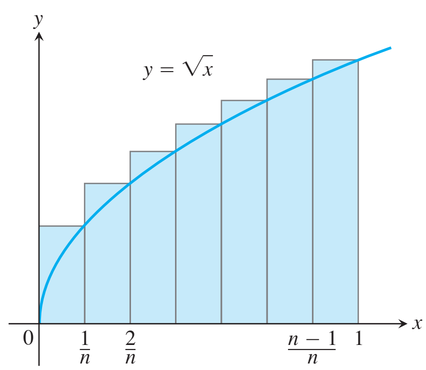
Örneğin, İlk n pozitif sayının kareköklerinin toplamı, $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}$ 'i bulun.

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}$$

integrali

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{n} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$
$$= \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^{3/2}}.$$

üst toplamlarının limitidir.



Dolayısıyla, n büyük olduğunda, S_n 2/3'e yaklaşır ve

$$\text{Karekök toplamı} = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} = S_n \cdot n^{3/2} \approx \frac{2}{3}n^{3/2}.$$

elde ederiz. Aşağıdaki tablo yaklaşımın ne kadar iyi olabileceğini göstermektedir.

n	**Kökler toplamı**	$(2/3)n^{3/2}$	**Bağıl hata**
10	22.468	21.082	$1.386/22.468 \approx 6\%$
50	239.04	235.70	1.4%
100	671.46	666.67	0.7%
1000	21,097	21,082	0.07%

23.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5}{n^6}$$
ifadesini, limitin
$$\int_0^1 x^5\,dx$$
olduğunu göstererek ve integrali hesaplayarak bulun.

24. Alıştırma 23'e bakın ve aşağıdaki ifadeyi hesaplayın.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3).$$

25. $f(x)$ sürekli bir fonksiyon olsun.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$
ifadesini belirli bir integral olarak ifade edin.

26. Alıştırma 25'in sonucuyla aşağıdakileri hesaplayın

a. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(2 + 4 + 6 + \cdots + 2n)$,

b. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{16}}(1^{15} + 2^{15} + 3^{15} + \cdots + n^{15})$,

c. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{n}\right)$.

Aşağıdaki limitler hakkında ne söylenebilir?

d. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{17}}(1^{15} + 2^{15} + 3^{15} + \cdots + n^{15})$

e. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{15}}(1^{15} + 2^{15} + 3^{15} + \cdots + n^{15})$

27. a. r yarıçaplı bir daire içindeki n kenarlı düzgün bir çokgenin alanı A_n'nin
$$A_n = \frac{nr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}.$$
olduğunu gösterin.

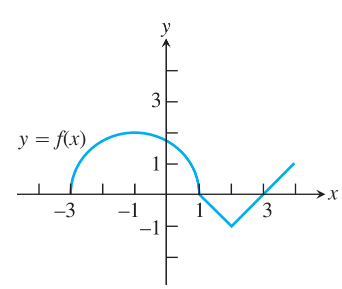
b. $n \to \infty$ iken A_n'nin limitini bulun. Bu bir dairenin alanı hakkında bildiklerinizle uyuşmakta mıdır?

28. Bir diferansiyel denklem $y = \sin x + \int_x^{\pi} \cos 2t\,dt + 1$' in aşağıdaki iki koşulu da sağladığını gösteriniz.

i. $y'' = -\sin x + 2\sin 2x$

ii. $x = \pi$ iken $y = 1$ ve $y' = -2$

29. Bir integralle tanımlanan fonksiyon Bir fonksiyonun grafiği, gösterildiği gibi, bir yarım çember ve iki doğru parçasından oluşmaktadır. $g(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ olsun.



a. $g(1)$'i bulun. **b.** $g(3)$'ü bulun. **c.** $g(-1)$'i bulun.

d. $(-3, 4)$ açık aralığında g'nin bir yerel maksimumunun bulunduğu bütün x değerlerini bulun.

e. $x = -1$ de g'nin grafiğine teğet olan doğru için bir denklem yazın.

f. $(-3, 4)$ açık aralığında g'nin grafiğinin her büküm noktasının x-koordinatını bulun.

g. g'nin değerler kümesini bulun.

Bölüm 5 Teknoloji Uygulama Projeleri

Mathematica/Maple Module

Alanları, Hacimleri ve Eğrilerin Uzunluklarını Bulmak için Riemann Toplamlarını Kullanmak

Bölüm I de Alanları ve hacimleri göz önüne getirir ve yaklaşımda bulunur.

Mathematica/Maple Module

Riemann Toplamları, Belirli İntegraller ve Analizin Temel Teoremi

Bölümler I, II ve III Riemann toplamlarını ve belirli integralleri geliştirir. Bölüm IV, daha önce incelenen problemleri çözmek için, Temel Teoremi kullanarak Riemann toplamlarını ve belirli integrali geliştirmeye devam eder.

Mathematica/Maple Module

Yamur Tutucular, Asansörler ve Roketler

Bölüm I, bir eğri altındaki alanın, bölümden alınan örnekler için bir dikdörtgen yaklaşımının alanı ile aynı olduğunu gösterir. Değişik şekillerdeki havuzlarda toplanan suyun, havuz dolarken ve boşalırken, miktarını hesaplayacaksınız.

Mathematica/Maple Module

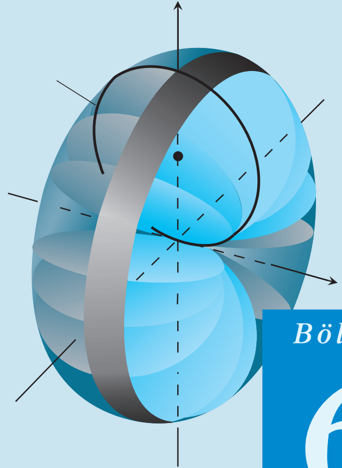
Bir Doğru Boyunca Haraket, Bölüm II

Konum, hız ve ivme arasındaki türev ilişkilerinin göz önünde canlandırılmasıyla bir grafiğin şeklini gözleyeceksiniz. Bu yazılım kullanılarak metindeki şekiller canlandırılabilir.

Mathematica/Maple Module

Kirişleri Eğmek

Kirişlerin eğilmiş şekillerini inceler, maksimum sapmalarını, konkavlıklarını ve büküm noktalarını belirler ve sonuçları bir kirişin sıkışması ve gerilmesi cinsinden yorumlar.



Bölüm 6

Belirli İntegrallerin Uygulamaları

GİRİŞ Bölüm 5'te sonlu bir $[a, b]$ kapalı aralığının bir P bölünüşüne karşı gelen

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$$

Riemann toplamları ile integrasyon işlemi arasındaki bağıntıyı keşfettik. $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon için, bölünüşün normu $\|P\|$ sıfıra yaklaşırken S_p'nin limitinin, f'nin bir ters türevi F olmak üzere

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

sayısı olduğunu bulduk. Bunu, x-ekseni ile $a \le x \le b$ için $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği arasındaki alanı hesaplama ve iki eğri arasındaki alanı bulma problemlerine uyguladık.

Bu bölümde uygulamaları, hacimleri, düzlem eğrilerin uzunluklarını, ağırlık merkezlerini, dönel yüzeylerin alanlarını, iş ve sıvıların düzlemsel duvarlara karşı kuvvetlerini bulmaya genişletiyoruz. Bütün bunları kapalı aralıklarda sürekli fonksiyonların Riemann toplamlarının limitleri olarak – yani Analizin Temel Teoremini kullanarak hesaplanabilen belirli integraller olarak tanımlıyoruz.

6.1 Dilimleyerek Hacim Bulmak ve Bir Eksen Etrafında Döndürme

Bu bölümde dik-kesitleri düzlemsel bölgeler olan katı cisimlerin hacimlerini tanımlıyoruz. Bir S katı cisminin bir **dik-kesiti**, S'nin bir düzlemle arakesiti tarafından oluşturulan düzlemsel bölgedir (Şekil 6.1).

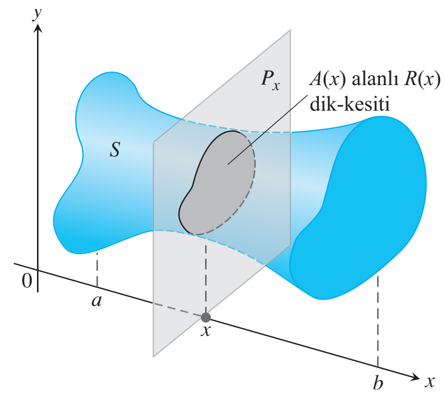
Şekil 6.1'deki gibi bir S katı cisminin hacmini bulmak istediğimizi varsayın. Bir silindirin klasik geometrideki tanımını keyfi tabanlı silindirik katı cisimlere (Şekil 6.2) genişleterek başlıyoruz. Silindirik katı cismin bilinen bir A taban alanı ve h yüksekliği varsa silindirik katı cismin hacmi

$$\text{Hacim} = \text{alan} \times \text{yükseklik} = A \cdot h$$

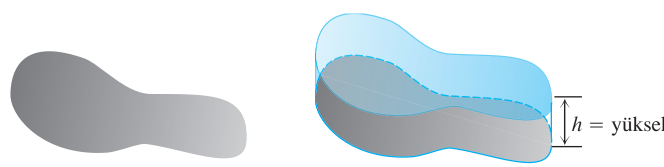
olur.

Bu denklem, silindirik olmayan birçok katı cismin hacimlerini, *dilimleme yöntemiyle* tanımlamanın temelini oluşturur.

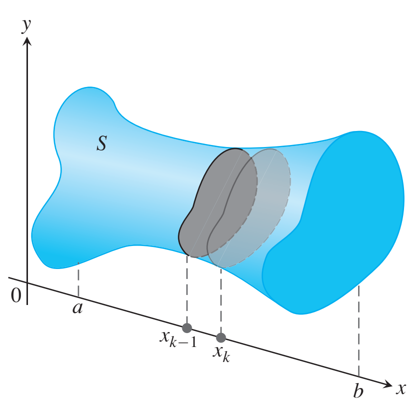
$[a, b]$ aralığındaki her x S katı cisminin dik-kesiti, alanı $A(x)$ olan bir $R(x)$ bölgesi ise ve $A(x)$, x'in sürekli bir fonksiyonu ise S katı cisminin hacmini bir belirli integral olarak aşağıdaki yolla hesaplayabiliriz.



ŞEKİL 6.1 S katı cisminin, $[a, b]$ aralığındaki bir x noktasında x-eksenine dik olan bir P_x düzlemi ve S'nin kesişimiyle oluşan dik-kesiti.



ŞEKİL 6.2 Silindirik bir katı cismin hacmi daima taban alanı kere yüksekliği olarak tanımlanır.



ŞEKİL 6.3 S katı cisminde tipik bir ince dilim.

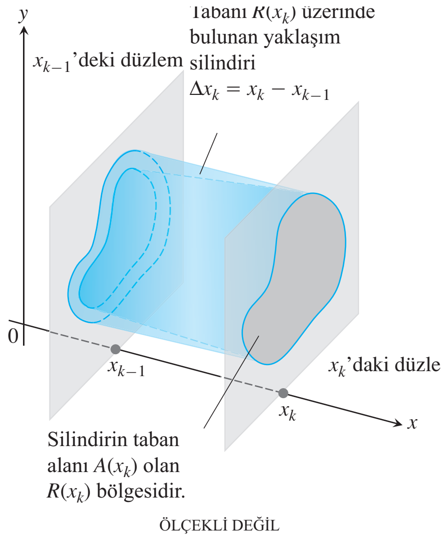
$[a, b]$ aralığını, genişlikleri (uzunlukları) Δx_k olan alt aralıklara böleriz ve katı cismi, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ bölünüş noktalarında x-eksenine dik düzlemlerle, bir ekmeği dilimler gibi, dilimleriz. Bölünüş noktalarında x-eksenine dik olan P_{x_k} düzlemleri, S'yi ince "dilimlere" ayırır (ince ekmek dilimleri gibi). Tipik bir dilim Şekil 6.3'te gösterilmiştir. x_{k-1}'deki düzlem ile x_k'deki düzlem arasındaki dilime taban alanı $A(x_k)$ ve yüksekliği $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (Şekil 6.4) olan silindirik katı cisimle yaklaşımda bulunuruz. Bu silindirik katı cismin V_k hacmi, yaklaşık olarak dilimin hacmi ile aynı olan $A(x_k) \cdot \Delta x_k$ dır:

$$k\text{. dilimin hacmi} \approx V_k = A(x_k)\,\Delta x_k.$$

Bu nedenle bütün S katı cisminin V hacmine bu silindirik hacimlerin toplamı ile yaklaşımda bulunulur.

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\,\Delta x_k.$$

Bu, $[a, b]$ aralığı üzerinde $A(x)$ fonksiyonu için bir Riemann toplamıdır. $[a, b]$'nin bölünüşünün normu sıfıra yaklaşırken bu toplamların yaklaşımlarının iyileşmesini bekleriz. Dolayısıyla, bunların limit halindeki belirli integrallerini S katı cisminin hacmi olarak tanımlarız.



ŞEKİL 6.4 Şekil 6.3'teki ince dilime alanı $A(x_k)$ ve yüksekliği $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ olan $R(x_k)$ tabanlı silindirik cisim ile yaklaşılmıştır.

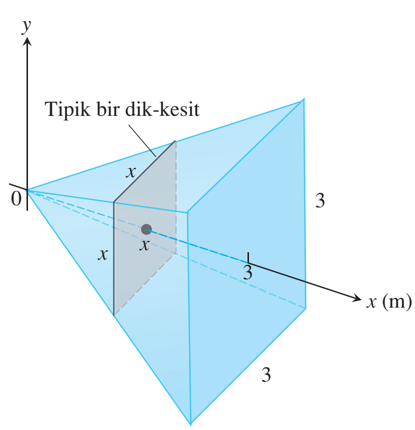
TANIM Hacim
Bilinen integre edilebilir $A(x)$ dik-kesitli bir katı cismin $x= a$'dan $x = b$'ye kadar **hacmi** A'nın a'dan b'ye integralidir:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

Bu tanım, $A(x)$ sürekli iken veya daha genel olarak, integrallenebilir iken uygulanır. Tanımdaki formülü bir katı cismin hacmini hesaplamakta kullanmak için aşağıdaki adımları izleyin:

Bir Katı Cismin Hacmini Hesaplama

1. *Katı cismi ve tipik bir dik-kesit çizin.*
2. Tipik bir dik-kesitin alanı *$A(x)$ için bir formül bulun.*
3. *İntegrasyon sınırlarını bulun.*
4. Temel Teoremi kullanarak *$A(x)$'i integre edin*.



ŞEKİL 6.5 Örnek 1'deki piramidin dik-kesitleri karelerdir.

ÖRNEK 1 Bir Piramidin Hacmi

3 m yüksekliğinde bir piramitin tabanı, bir kenarı 3 m olan bir karedir. Piramidin uçtan x m aşağıda yüksekliğe dik olan dik-kesiti bir kenarı x m olan bir karedir. Piramidin hacmini bulun.

Çözüm

1. *Bir resim*. Piramidi, yüksekliği x-ekseninde ve ucu orijinde olarak çizer ve tipik bir dik-kesit ekleriz (Şekil 6.5).
2. *A(x) için bir formül.* x'teki dik-kesit bir kenarı x m olan bir karedir, dolayısıyla alanı şöyle olur:

$$A(x) = x^2$$

3. *İntegrasyon sınırları.* Kareler $x = 0$'dan $x = 3$'e kadar giderler.
4. *Hacmi bulmak için integre edin.*

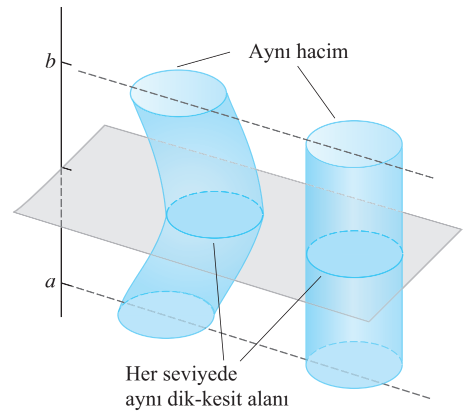
$$V = \int_0^3 A(x)\,dx = \int_0^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^3 = 9 \text{ m}^3$$ ■

TARIHSEL BIYOGRAFI

Bonaventura Cavalieri
(1598–1647)

ÖRNEK 2 Cavalieri Prensibi

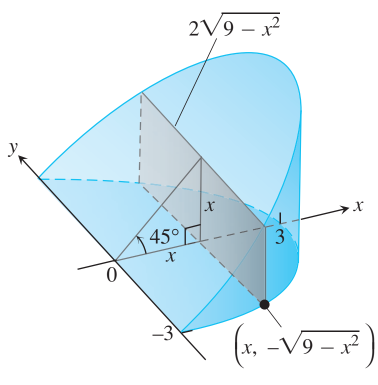
Cavalieri Prensibi, yükseklikleri eşit ve her yükseklikteki dik-kesitleri aynı olan katı cisimlerin hacimlerinin eşit olacağını söylemektedir (Şekil 6.6). Bu, hacim tanımından hemen elde edilir. Çünkü, dik-kesit alan fonksiyonu $A(x)$ ve $[a, b]$ aralığı her iki cisim için aynıdır. ■



ŞEKİL 6.6 *Cavalieri Prensibi:* Bu katı cisimlerin hacimleri aynıdır. Bunu bozuk paralarla kendi kendinize görebilirsiniz (Örnek 2).

ÖRNEK 3 Bir Takozun Hacmi

3 yarıçaplı bir silindirden iki düzlemle eğri bir takoz kesilmiştir. Bir düzlem silindirin eksenine diktir. İkinci düzlem birinci düzlemi silindirin merkezinde 45°'lik açıyla kesmektedir. Takozun hacmini bulun.



ŞEKİL 6.7 x-eksenine dik olarak dilimlenmiş Örnek 2'deki takoz. Dik-kesitler dikdörtgendir.

Çözüm Takozu çizer ve x-eksenine dik tipik bir dik-kesit ekleriz (Şekil 6.7). x'teki dik-kesit alanı aşağıda verilen dikdörtgendir:

$$A(x)\ (\text{yükseklik})(\text{genişlik}) = (x)\left(2\sqrt{9-x^2}\right) = 2x\sqrt{9-x^2}\ .$$

Dikdörtgenler $x = 0$'dan $x = 3$'e kadar gider. Dolayısıyla,

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\,dx$$

$$= -\frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2}\Big]_0^3$$

$u = 9 - x^2$, $du = -2x\,dx$ olsun, integre edin ve geriye dönüştürün.

$$= 0 + \frac{2}{3}(9)^{3/2}$$

$$= 18.$$

dir. ■

Dönel Cisimler: Disk Yöntemi

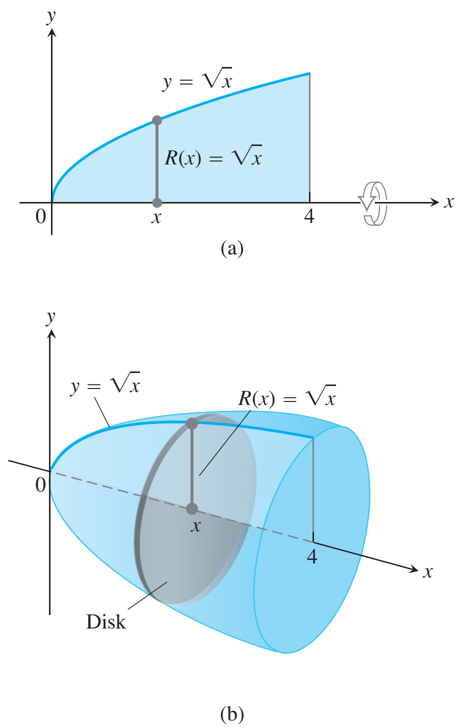
Düzlemsel bir bölgenin düzlem içindeki bir eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilen katı cisme **dönel cisim** denir. Şekil 6.8'deki gibi cisimlerin hacimlerini bulmak için, sadece $A(x)$ dik-kesit alanının, $R(x)$ yarıçaplı diskin alanı olduğunu gözlemeliyiz. Burada $R(x)$ düzlemsel bölgenin sınırının dönme eksenine uzaklığıdır. Böylece, alan

$$A(x) = \pi(\text{yarıçap})^2 = \pi[R(x)]^2 \quad \text{dir.}$$

Dolayısıyla hacim tanımı

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi[R(x)]^2\,dx}$$

verir.



ŞEKİL 6.8 Örnek 4'teki bölge (a) ve dönel cisim (b).

Bir dönel cismin hacmini hesaplamanın bu yöntemine, bir dik-kesit $R(x)$ yarıçaplı bir dairesel disk olduğundan, çoğunlukla **disk yöntemi** denir.

ÖRNEK 4 Bir Dönel Cisim (x-Ekseni Etrafında Dönme)

$y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$ eğrisi ile x-ekseni arasındaki bölge bir dönel cisim elde etmek üzere x-ekseni etrafında döndürülüyor. Dönel cismin hacmini bulun.

Çözüm Bölgeyi, tipik bir yarıçapı ve üretilen dönel cismi gösteren bir şekil çizeriz (Şekil 6.8). Hacim

$$V = \int_a^b \pi[R(x)]^2\,dx$$

$$= \int_0^4 \pi\left[\sqrt{x}\right]^2 dx \qquad R(x) = \sqrt{x}$$

$$= \pi\int_0^4 x\,dx = \pi\,\frac{x^2}{2}\bigg]_0^4 = \pi\,\frac{(4)^2}{2} = 8\pi$$

olarak bulunur. ■

ÖRNEK 5 Bir Kürenin Hacmi

$$x^2 + y^2 = a^2$$

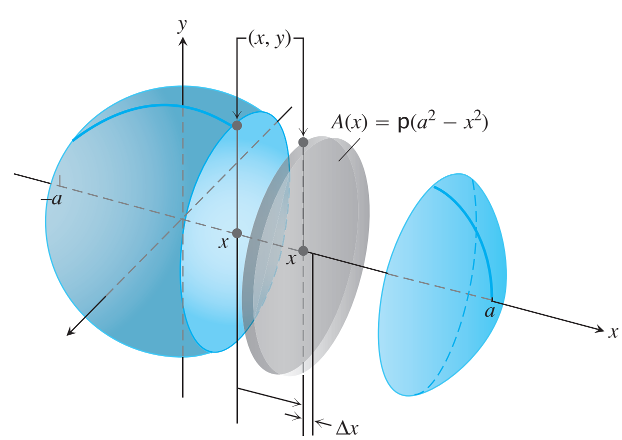
çemberi bir küre elde etmek üzere x-ekseni etrafında döndürülüyor. Hacmini bulun.

Çözüm Bölgenin x-eksenine dik düzlemlerle ince dilimlere kesildiğini düşünelim (Şekil 6.9). $-a$ ile a arasında tipik bir x noktasındaki dik-kesit alanı

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(a^2 - x^2)$$

dir. Bu nedenle hacim

$$V = \int_{-a}^{a} A(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \pi(a^2 - x^2)\,dx = \pi\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a^3 \quad \text{olur.}$$



ŞEKİL 6.9 $x^2 + y^2 = a^2$ çemberini x-ekseni etrafında döndürerek elde edilen küre. Yarıçap, $R(x) = y = \sqrt{a^2 - x^2}$ dir (Örnek 5) ■

Takip eden örnekteki dönme ekseni x-ekseni değildir, fakat hacmi hesaplama kuralı aynıdır: Uygun sınırlar arasında $\pi(\text{yarıçap})^2$'yi integre edin.

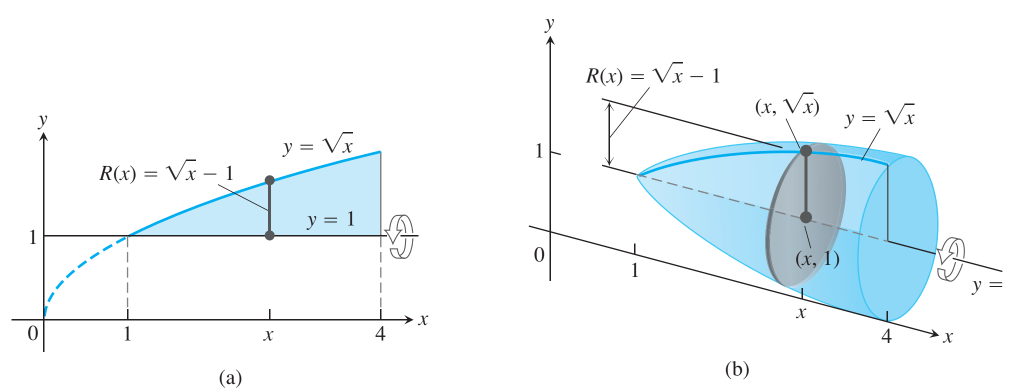
ÖRNEK 6 Bir Dönel Cisim (y-Ekseni Etrafında Dönme)

$y = \sqrt{x}$ eğrisi ile $y = 1$ ve $x = 4$ doğruları arasındaki bölgenin $y = 1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen dönel cismin hacmini bulun.

Çözüm Bölgeyi, tipik bir yarıçapı ve üretilen dönel cismi gösteren bir şekil çizeriz (Şekil 6.10). Hacim

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 \pi[R(x)]^2\,dx \\ &= \int_1^4 \pi\left[\sqrt{x} - 1\right]^2 dx \\ &= \pi\int_1^4 \left[x - 2\sqrt{x} + 1\right] dx \\ &= \pi\left[\frac{x^2}{2} - 2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} + x\right]_1^4 = \frac{7\pi}{6} \end{aligned}$$

olarak bulunur.



ŞEKİL 6.10 Örnek 6'teki bölge (a) ve dönel cisim (b). ■

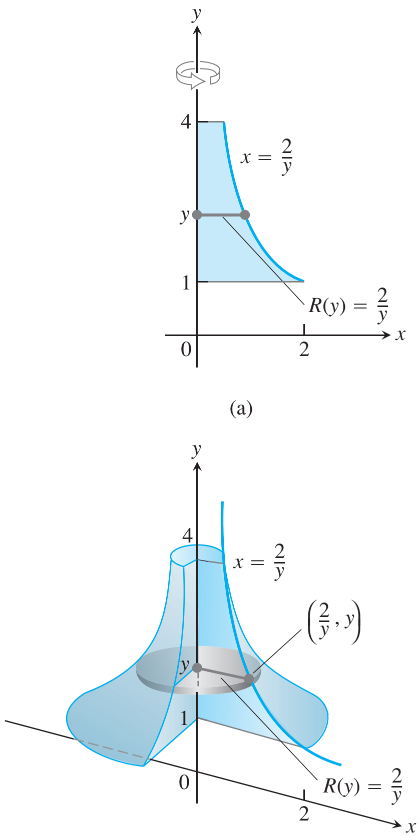
y-ekseni ile bir $x = R(y)$, $c \le y \le d$ eğrisi arasındaki bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen bir dönel cismin hacmini bulmak için x yerine y yazarak aynı yöntemi kullanırız. Bu durumda, dairesel dik-kesit alanı

$$A(y) = \pi(\text{yarıçap})^2 = \pi[R(y)]^2$$

dir.

ÖRNEK 7 y-Ekseni Etrafında Dönme

y-ekseni ile $x = 2/y$, $1 \le y \le 4$ eğrisi arasındaki bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen dönel cismin hacmini bulun.



ŞEKİL 6.11 Örnek 7'deki bölge (a) ve dönel cisim bir kısmı (b).

Çözüm Bölgeyi, tipik bir yarıçapı ve üretilen dönel cismi gösteren bir şekil çizeriz (Şekil 6.11). Hacim

$$
\begin{aligned}
V &= \int_1^4 \pi [R(y)]^2 \, dy \\
&= \int_1^4 \pi \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy \\
&= \pi \int_1^4 \frac{4}{y^2} \, dy = 4\pi \left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 = 4\pi \left[\frac{3}{4}\right] \\
&= 3\pi
\end{aligned}
$$

dir. ■

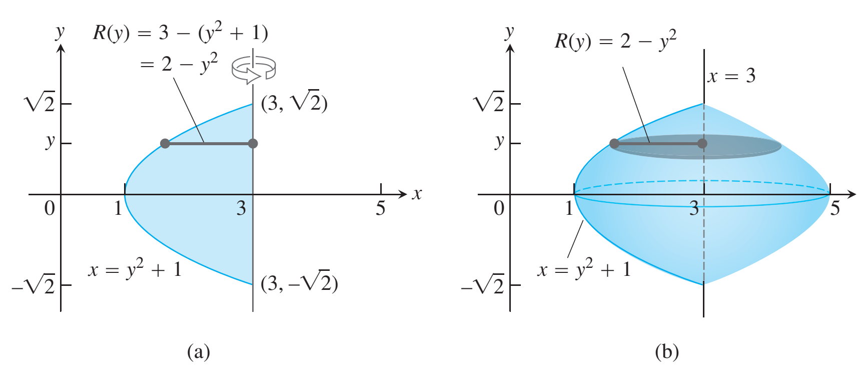
ÖRNEK 8 Dikey Bir Eksen Etrafında Dönme

$x = y^2 + 1$ parabolü ile $x = 3$ doğrusu arasındaki bölgenin $x = 3$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen dönel cismin hacmini bulun.

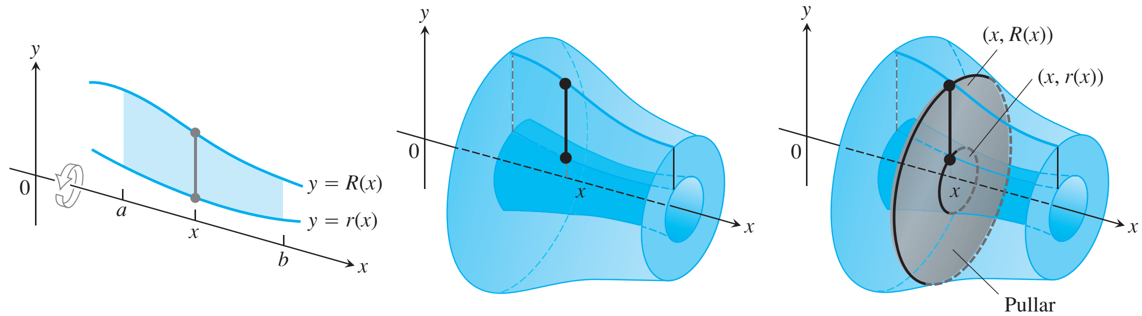
Çözüm Bölgeyi, tipik bir yarıçapı ve üretilen dönel cismi gösteren bir şekil çizeriz (Şekil 6.12). Hacim

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi [R(y)]^2 \, dy \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi [2 - y^2]^2 \, dy \qquad R(y) = 3 - (y^2 + 1) = 2 - y^2 \\
&= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4 - 4y^2 + y^4] \, dy \\
&= \pi \left[4y - \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}
\end{aligned}
$$

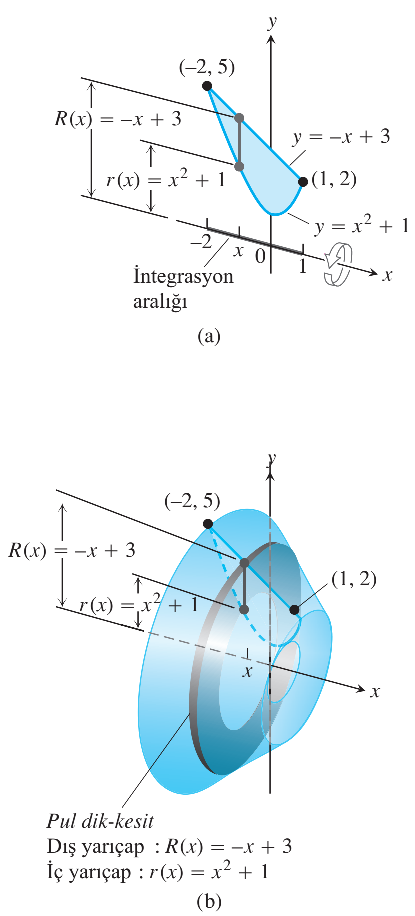
olarak bulunur.



ŞEKİL 6.12 Örnek 8'deki bölge (a) ve dönel cisim (b). ■



ŞEKİL 6.13 Burada üretilen dönel cisimlerin dik-kesitleri diskler değil pullar (rondela) dır dolayısıyla $\int_a^b A(x)\,dx$ integrali biraz değişik bir formüle yol açar.



ŞEKİL 6.14 (a) Örnek 9'da dönme eksenine dik bir doğru parçası tarafından gerilen bölge. (b) Bölge x-ekseni etrafında döndürüldüğünde, doğru parçası bir pul (rondela) üretir.

Dönel Cisimler: Pul Yöntemi

Bir dönel cisim oluşturmak için döndürdüğümüz bölge dönme ekseninde bitmez veya dönme eksenini kesmezse, dönel cismin içinde bir boşluk olur (Şekil 6.13). Dönme eksenine dik-kesitler disk yerine pullardır. Tipik bir pulun boyutları

Dış yarıçap: $R(x)$

İç Yarıçap: $r(x)$

ve pulun alanı

$$A(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2 = \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)$$

olur. Sonuç olarak, hacim tanımı aşağıdaki belirli integrali verir

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx.$$

Bir dilim, dış yarıçapı $R(x)$ ve iç yarıçapı $r(x)$ olan dairesel bir pul olduğundan bir dönel cismin hacminin hesaplanması için kullanılan bu yönteme **pul yöntemi** denir.

ÖRNEK 9 Bir Pul Dik-Kesit (x-Ekseni Etrafında Dönme)

$y = x^2 + 1$ eğrisi ve $y = -x + 3$ doğrusu ile sınırlanan bölge x-ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim oluşturuluyor. Dönel cismin hacmini bulun.

Çözüm

1. Bölgeyi çizin ve üzerine dönme eksenine dik bir doğru parçası ekleyin (Şekil 6.14'deki lacivert doğru parçası).
2. Bölgeyle birlikte x-ekseni etrafında döndürülseydi doğru parçasının tarayacağı pulun iç ve dış yarıçaplarını bulun.

Bu yarıçaplar doğru parçasının uçlarının dönme eksenine uzaklıklarıdır (Şekil 6.14)

Dış yarıçap: $R(x) = -x + 3$

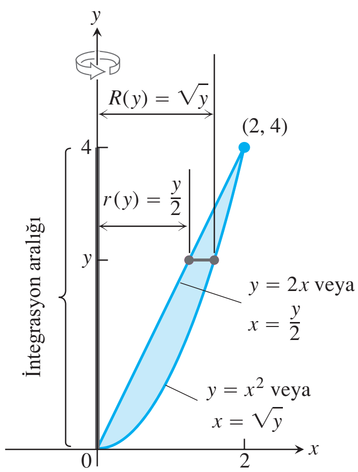
İç Yarıçap: $r(x) = x^2 + 1$

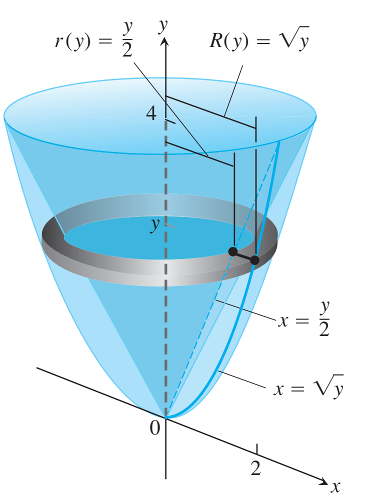
3. Şekil 6.14(a)'daki eğri ve doğrunun kesişim noktalarının x-koordinatlarını bularak integrasyon sınırlarını belirleyin.

$$x^2 + 1 = -x + 3$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$(x + 2)(x - 1) = 0$$
$$x = -2, \quad x = 1$$

4. Hacim integralini hesaplayın.

$$V = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx$$
$$= \int_{-2}^{1} \pi((-x + 3)^2 - (x^2 + 1)^2)\,dx \qquad \text{2 ve 3 adımlarındaki değerler}$$
$$= \int_{-2}^{1} \pi(8 - 6x - x^2 - x^4)\,dx$$
$$= \pi\left[8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1} = \frac{117\pi}{5}$$





ŞEKİL 6.15 (a) Örnek 10'daki y-ekseni etrafında döndürülen bölge, pul yarıçapları, integrasyon sınırları. (b) (a)'daki doğru parçasının taradığı pul.

Bir bölgenin y-ekseni etrafında çevrilmesi ile oluşturulan bir cismin hacmini bulmak için Örnek 9'daki aynı prosedürü kullanırız fakat x yerine y'ye göre integral alırız. Bu durumda tipik bir pul tarayan doğru parçası y-eksenine (dönme ekseni) diktir ve pulun dış ve iç yarıçapları y'nin fonksiyonlarıdır.

ÖRNEK 10 Bir Pul Dik-Kesit (y-Ekseni Etrafında Dönme)

Birinci dörtte bir bölgede $y = x^2$ parabolü ve $y = 2x$ doğrusuyla sınırlanan alan y-ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim oluşturuluyor. Dönel cismin hacmini bulun.

Çözüm Önce bölgeyi çizin ve bölge boyunca dönme eksenine (y-ekseni) dik bir doğru parçası çizin. Şekil 6.15(a)'ya bakın .

Doğru parçasının taradığı pulun yarıçapları $R(y) = \sqrt{y}$, $r(y) = y/2$'dir. (Şekil 6.15).

Doğru ve parabol $y = 0$ ve $y = 4$'te kesişirler, dolayısıyla ,integrasyon sınırları $c = 0$ ve $d = 4$'tür. hacmi bulmak için integral alırız:

$$V = \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\,dy$$
$$= \int_0^4 \pi\left(\left[\sqrt{y}\right]^2 - \left[\frac{y}{2}\right]^2\right)dy$$
$$= \pi\int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right)dy = \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{8}{3}\pi$$

Özet

Bütün hacim örneklerimizde, tipik bir dilimin dik-kesit alanı $A(x)$ nasıl tanımlanırsa tanımlansın, hacmin $V = \int_a^b A(x)\,dx$ belirli integrali olarak tanımlanması yaptığımız hesaplamaların kalbidir.

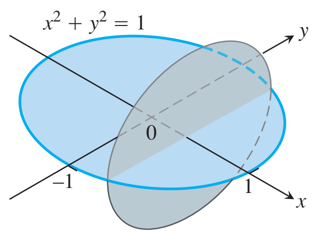
ALIŞTIRMALAR 6.1

Dik-Kesit Alanları

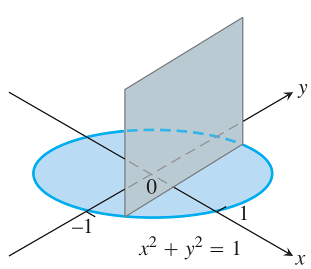
1 ve 2 alıştırmalarında katı cismin x-eksenine dik olan dik- kesitlerinin $A(x)$ alanları için formül bulunuz.

1. Cisim, $x = -1$ ve $x = 1$'de x-eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. Her durumda, bu düzlemler arasında x-eksenine dik olan kesitler $y = -\sqrt{1 - x^2}$ yarı çemberinden $y = \sqrt{1 - x^2}$ yarı çemberine kadar gider.

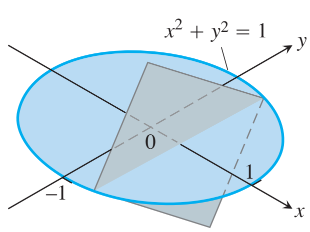
a. Dik-kesitler çapları xy-düzleminde olan disklerdir.



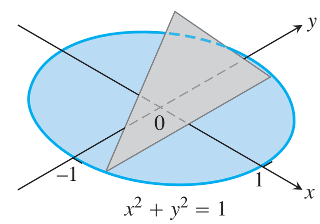
b. Dik-kesitler tabanları xy-düzleminde olan karelerdir.



c. Dik-kesitler köşegenleri x-düzleminde olan karelerdir. (Bir karenin köşegeninin uzunluğu kenarlarının uzunluğunun $\sqrt{2}$ katıdır.)

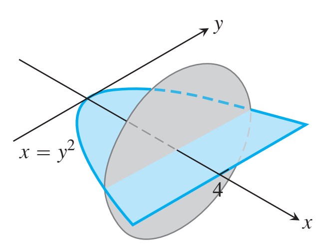


d. Dik-kesitler tabanları xy-düzleminde olan eşkenar üçgenlerdir.

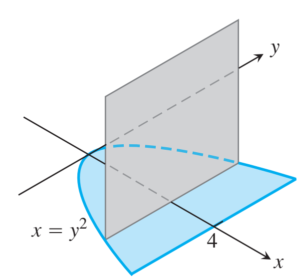


2. Cisim, $x = 0$ ve $x = 4$'te x-eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. Bu düzlemler arasında x-eksenine dik olan kesitler $y = -\sqrt{x}$ parabolünden $y = \sqrt{x}$ parabolüne kadar gitmektedir.

a. Dik-kesitler çapları xy-düzleminde olan disklerdir.



b. Dik-kesitler tabanları xy-düzleminde olan karelerdir.



c. Dik-kesitler köşegenleri xy-düxleminde olan karelerdir.

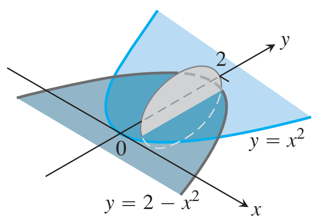
d. Dik-kesitler tabanları xy-düzleminde olan eşkenar üçgenlerdir.

Dilimleyerek Hacim Bulma

3-10 alıştırmalarındaki cisimlerin hacimlerini bulun.

3. Cisim, $x = 0$ ve $x = 4$'te x-eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. $0 \leq x \leq 4$ aralığında x-eksenine dik olan kesitler köşegenleri $y = -\sqrt{x}$ parabolünden $y = \sqrt{x}$ parabolüne kadar giden karelerdir.

4. Cisim, $x = -1$ ve $x = 1$'de x-eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. x-eksenine dik olan kesitler çapları $y = x^2$ parabolünden $y = 2 - x^2$ parabolüne kadar giden disklerdir.

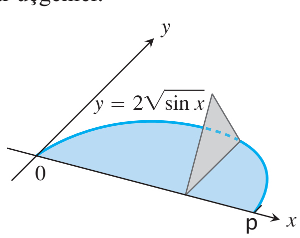


5. Cisim, $x = -1$ ve $x = 1$'de x-eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. Her durumda, bu düzlemler arasında x-eksenine dik olan kesitler tabanları $y = -\sqrt{1 - x^2}$ yarı çemberinden $y = \sqrt{1 - x^2}$ yarı çemberine kadar giden dikey karelerdir.

6. Cisim, $x = -1$ ve $x = 1$'de x-eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. Her durumda, bu düzlemler arasında x-eksenine dik olan kesitler köşegenleri $y = -\sqrt{1 - x^2}$ yarı çemberinden $y = \sqrt{1 - x^2}$ yarı çemberine kadar giden ka-relerdir.

7. Bir cisimin tabanı $y = 2\sqrt{\sin x}$ eğrisi ile x-ekseni üzerindeki $[0, \pi]$ aralığı arasında kalan bölgedir. x-eksenine dik olan kesitler aşağıdadır.

a. Tabanları, şekilde gösterildiği gibi, x-ekseninden eğriye kadar giden eşkenar üçgenler.



b. Tabanları x-ekseninden eğriye kadar giden kareler.

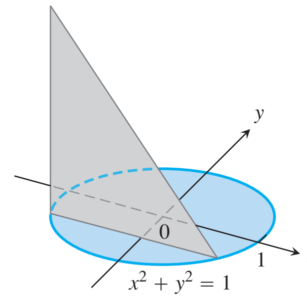
8. Cisim, $x = -\pi/3$ ve $x = \pi/3$'de x-eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. x-eksenine dik kesitler şöyledir:

a. Çapları $y = \tan x$ eğrisinden $y = \sec x$ eğrisine kadar giden diskler.

b. Tabanları $y = \tan x$ eğrisinden $y = \sec x$ eğrisine kadar giden kareler.

9. Cisim, $y = 0$ ve $y = 2$'de y-eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. y-eksenine dik kesitler çapları y-ekseninden $x = \sqrt{5}y^2$ parabolüne giden disklerdir.

10. Cisimin tabanı $x^2 + y^2 \leq 1$ diskidir. y-eksenine $y = -1$ ile $y = 1$ arasında dik düzlemlerden oluşan kesitler bir ayakları diskin üzerinde olan ikizkenar dik üçgenlerdir.

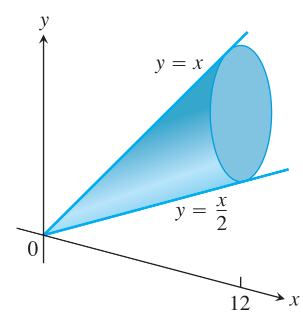


11. Bükülmüş bir cisim Kenar uzunluğu s olan bir kare bir L doğrusuna dik bir düzlemde bulunmaktadır. Karenin bir köşesi L üzerindedir. Bu kare L boyunca h kadar ilerlerken, kare L'nin etrafında dönerek kare dik-kesitli tirbüşon benzeri bir sütun oluşturur.

a. Sütunun hacmini bulun.

b. Kare bir yerine iki kere dönerse hacim ne olur? Yanıtınızı açıklayın.

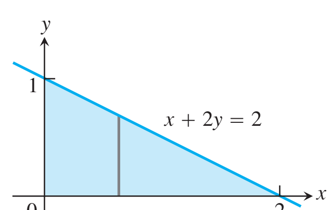
12. Cavalieri Prensibi Bir cisim $x = 0$ ve $x = 12$'de x-eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. x-eksenine dik düzlemlerden oluşan kesitler, şekilde gösterildiği gibi $y = x/2$ eğrisinden $y = x$ doğrusuna giden disklerdir. Cismin hacminin neden taban yarıçapı 3 ve yüksekliği 12 olan bir koniyle aynı olduğunu açıklayın.



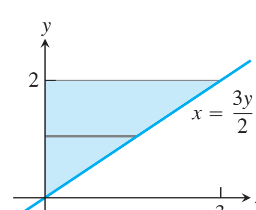
Disk Yöntemiyle Hacim Bulmak

13–16 alıştırmalarında, renkli bölgenin verilen eksen etrafında döndürülmesiyle üretilen dönel cismin hacmini bulun.

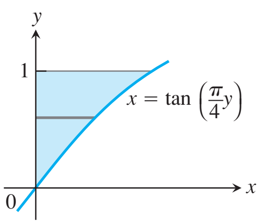
13. x-ekseni etrafında



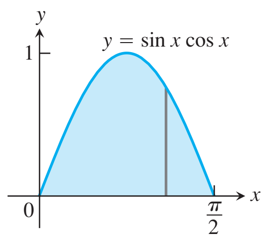
14. y-ekseni etrafında



15. y-ekseni etrafında



16. x-ekseni etrafında



17–22 Alıştırmalarındaki doğru ve eğrilerle sınırlı bölgeleri x-ekseni etrafında döndürerek üretilen cisimlerin hacmini bulun.

17. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 2$

18. $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 2$

19. $y = \sqrt{9 - x^2}, \quad y = 0$

20. $y = x - x^2, \quad y = 0$

21. $y = \sqrt{\cos x}, \quad 0 \le x \le \pi/2, \quad y = 0, \quad x = 0$

22. $y = \sec x, \quad y = 0, \quad x = -\pi/4, \quad x = \pi/4$

23 ve 24 alıştırmalarında bölgenin verilen doğru etrafında döndürülmesi ile üretilen cismin hacmini bulun.

23. Birinci dörtte bir bölgede, üstten $y = \sqrt{2}$ doğrusu, alttan $y = \sec x \tan x$ eğrisi ve soldan y-ekseniyle sınırlı bölgenin $y = \sqrt{2}$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cisim.

24. Birinci dörtte bir bölgede, üstten $y = 2$ doğrusu, alttan $y = 2 \sin x$, $0 \le x \le \pi/2$ eğrisi ve soldan y-ekseniyle sınırlı bölgenin $y = 2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cisim.

25-30 alıştırmalarındaki doğru ve eğrilerle sınırlı bölgelerin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen dönel cisimlerin hacmini bulun.

25. $x = \sqrt{5}y^2, \quad x = 0, \quad y = -1, \quad y = 1$ ile sınırlı bölge

26. $x = y^{3/2}, \quad x = 0, \quad y = 2$ ile sınırlı bölge

27. $x = \sqrt{2 \sin 2y}, \quad 0 \le y \le \pi/2, \quad x = 0$ ile sınırlı bölge

28. $x = \sqrt{\cos(\pi y/4)}, \quad -2 \le y \le 0, \quad x = 0$ ile sınırlı bölge

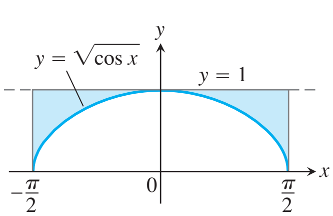
29. $x = 2/(y + 1), \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 3$

30. $x = \sqrt{2y}/(y^2 + 1), \quad x = 0, \quad y = 1$

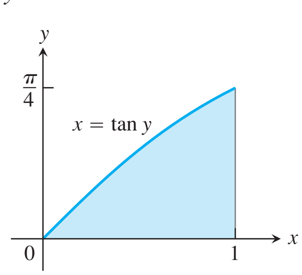
Pul Yöntemiyle Hacim Bulma

31 ve 32 alıştırmalarındaki renkli bölgelerin belirtilen eksenler etrafında döndürülmesiyle üretilen cisimlerin hacimlerini bulun.

31. x-ekseni etrafında



32. y-ekseni etrafında



33–38 alıştırmalarındaki doğru ve eğrilerle sınırlı bölgelerin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen cisimlerin hacimlerini bulun.

33. $y = x, \quad y = 1, \quad x = 0$

34. $y = 2\sqrt{x}, \quad y = 2, \quad x = 0$

35. $y = x^2 + 1, \quad y = x + 3$

36. $y = 4 - x^2, \quad y = 2 - x$

37. $y = \sec x, \quad y = \sqrt{2}, \quad -\pi/4 \le x \le \pi/4$

38. $y = \sec x, \quad y = \tan x, \quad x = 0, \quad x = 1$

39–42 alıştırmalarında, her bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulun.

39. Köşeleri (1, 0), (2, 1) ve (1, 1)'de bulunan üçgenle sınırlanan bölge.

40. Köşeleri (0, 1), (1, 0) ve (1, 1)'de bulunan üçgenle sınırlanan bölge.

41. Birinci dörtte bir bölgede üstten $y = x^2$, alttan x-ekseni ve sağdan $x = 2$ doğrusuyla sınırlanan bölge.

42. Birinci dörtte bir bölgede soldan $x^2 + y^2 = 3$ çemberi, sağdan $x = \sqrt{3}$,doğrusu ve alttan $y = \sqrt{3}$ doğrusuyla sınırlanan bölge.

43 ve 44 alıştırmalarında, her bölgenin verilen eksen etrafında döndürülmesiyle üretilen dönel cismin hacmini bulun.

43. Birinci dörtte bir bölgede üstten $y = x^2$ eğrisi, alttan x-ekseni ve sağdan $x = 1$ doğrusuyla sınırlanan bölge, $x = –1$ doğrusu etrafında.

44. İkinci dörtte bir bölgede üstten $y = –x^3$ eğrisi, alttan x-ekseni ve soldan $x = –1$ doğrusuyla sınırlanan bölge, $x = –2$ doğrusu etrafında.

Dönel Cisimlerin Hacimleri

45. $y = \sqrt{x}$ eğrisi ile $y = 2$ ve $x = 0$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin aşağıdaki eksenler etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulun.

a. x-ekseni **b.** y-ekseni

c. $y = 2$ doğrusu **d.** $x = 4$ doğrusu

46. $y = 2x$, $y = 0$ ve $x = 0$ doğrularıyla sınırlı üçgen bölgenin aşağıdaki eksenler etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulun.

a. $x = 1$ doğrusu **b.** $x = 2$ doğrusu

47. $y = x^2$ parabolü ve $y = 1$ doğrusuyla sınırlı bölgenin aşağıdaki eksenler etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulun.

a. $y = 1$ doğrusu **b.** $y = 2$ doğrusu

c. $y = –1$ doğrusu

48. Köşeleri (0, 0), (b, 0) ve (0, h)'de bulunan üçgen bölgenin aşağıdaki eksenler etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini integrasyonla bulun.

a. x-ekseni **b.** y-ekseni

Teori ve Uygulamalar

49. Bir torusun hacmi. $x^2 + y^2 \le a^2$ diski $x = b\ (b > a)$ doğrusu etrafında döndürülerek, torus adı verilen simit şeklinde bir

dönel cisim oluşturuluyor. Hacmini bulun. (*İpucu*: a yarıçaplı bir yarım çemberin alanı olduğu için, $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\,dy = \pi a^2/2$'dir.)

50. Bir kâsenin hacmi Bir kâsenin şekli, $y = x^2/2$'nin grafiğinin $y = 0$ ve $y = 5$ doğruları arasındaki kısmının y-ekseni etrafında çevrilmesi ile elde edilecek şekildedir.

a. kâsenin hacmini bulun

b. İlişkili oranlar Kâseye, 3 birim küp/sn oranı ile su doldurursak, su 4 birim derinlikte iken su seviyesi ne hızla yükselmektedir?

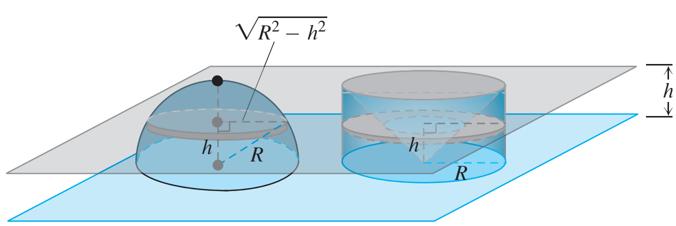
51. Bir kâsenin hacmi

a. a yarıçaplı yarım küre şeklindeki bir kâse h derinliğinde su içermektedir. kâsenin içindeki suyun hacmini bulun.

b. İlişkili oranlar 5 m yarıçaplı yarım küre şeklindeki bir beton kâseye 0.2 m^3/sn oranı ile su akmaktadır. Su 4 m derinlikte iken su seviyesi ne hızla yükselmektedir?

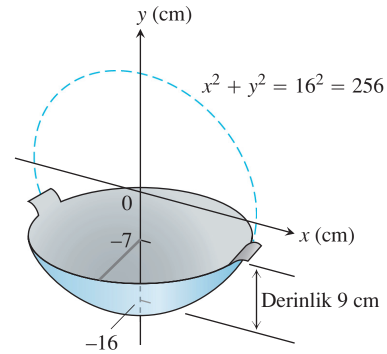
52. Bir cismin tam üzerindeki bir ışığın oluşturduğu cisim gölgesinin dönme eksenine paralel uzunluğunu ölçerek bir dönel cismin hacmini nasıl tahmin edebileceğinizi açıklayın.

53. Bir yarıkürenin hacmi Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi, R yarıçaplı bir yarıkürenin dik-kesitlerini, R yarıçaplı ve yüksekliği R olan bir dik dairesel içi dolu silindirden taban yarıçapı R ve yüksekliği R olan bir dik koni çıkararak elde edilen cismin dik-kesitleri ile karşılaştırarak, yarıkürenin hacmini veren $V = (2/3)\pi R^3$ formülünü elde edin.

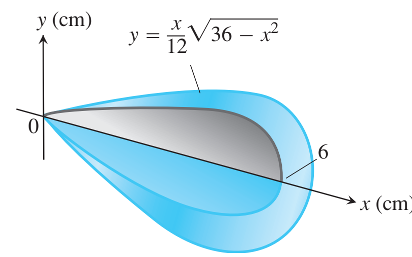


54. Bir koninin hacmi Yüksekliği h ve yarıçapı r olan dik bir koninin hacmini bulmak için analiz kullanın.

55. Bir tava tasarlamak Kulpları olan küresel bir kap şeklinde bir kızartma tavası tasarlıyorsunuz. Evde yaptığınız deneyler sizi, derinliği 9 cm yapar ve küreye 16 cm'lik bir yarıçap verirseniz onun 3 L civarında sıvı tutacağı konusunda ikna ediyor. Emin olmak için tavayı aşağıda gösterildiği gibi bir dönel cisim olarak gözünüzde canlandırıyor ve hacmini bir integralle hesaplıyorsunuz. Bulduğunuz hacim santimetre küp olarak nedir? (1 L = 1000 cm^3)



56. Bir çekül tasarlamak Sizden 190 gr civarında bir ağırlığı olan saç bir çekül tasarlanmanız istendiğinde, aşağıda gösterilen dönel cisim gibi tasarlamaya karar veriyorsunuz. Çekülün hacmini bulun. Yoğunluğu 8.5 gr/cm^3 olan bir saç belirlerseniz, çekülün ağırlığı ne olur?

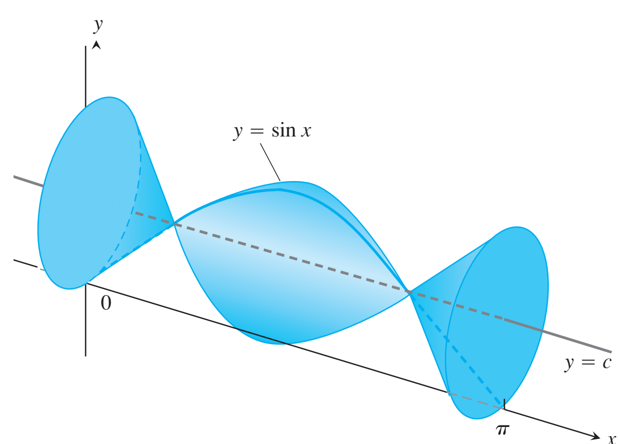


57. Maks - Min $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$, yayı $y = c$, $0 \le c \le 1$ doğrusu etrafında döndürülerek Şekil 6.16'daki cisim elde ediliyor.

a. Cismin hacmini minimize eden c değerini bulun. Minimum değer nedir?

b. [0, 1]'deki hangi c değeri cismin hacmini maksimize eder?

T **c.** Cismin hacminin grafiğini c'nin bir fonksiyonu olarak önce $0 \le c \le 1$ aralığında, sonra daha geniş bir tanım aralığında çizin. c [0, 1]'den uzaklaştıkça, cismin hacmine ne olur? Bunun fiziksel bir anlamı var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.



ŞEKİL 6.16

58. Yedek yakıt tankı Bir helikopterin uçuş mesafesini arttırmak için gövdesinin altına sığacak yedek bir yakıt tankı tasarlıyorsunuz. Çizim tahtanızda gerçekleştirdiğiniz deneylerden sonra, tankı $y = 1 - (x^2/16)$, $-4 \le x \le 4$ eğrisinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilecek yüzey gibi şekillendirmeye karar veriyorsunuz (boyutlar ft'tir).

a. Tank kaç ft^3 yakıt alacaktır?

b. Bir ft^3 7.481 galondur. Eğer helikopter bir galonla 32 mil gidiyorsa, tank yerleştirildiğinde helikopter ne kadar ekstra yol alabilecektir?

6.2 Silindirik Kabuklarla Hacim Bulmak

Bölüm 6.1 de, $A(x)$ bir S cisminin $x = a$'dan $x = b$'ye kadar integrallenebilir dik-kesit alanı olmak üzere S cisminin hacmini,

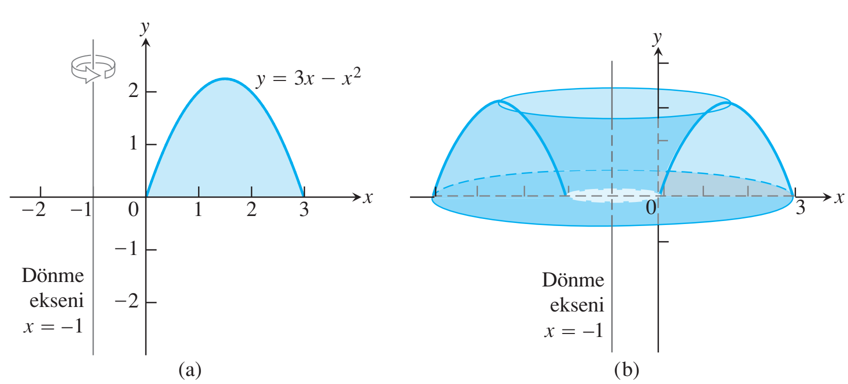
$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

belirli integrali olarak tanımladık. $A(x)$ alanı, cismi x-eksenine dik bir düzlemle dilimleyerek elde edilmişti. Bu bölümde, hacim için aynı integral tanımını kullanıyoruz, fakat alanı cismi farklı bir şekilde dilimleyerek elde ediyoruz. Bu defa cismi, kurabiye kalıpları gibi giderek artan yarıçaplı dairesel silindirlerle dilimliyoruz. Cismi, silindirin ekseni y-eksenine paralel olacak şekilde, yukarıdan aşağıya x-eksenine dik olarak dilimleriz. Her silindirin dikey ekseni aynı doğrudur fakat silindirlerin yarıçapları her dilimde artar. Bu yöntemle S cismi, ağaçlardaki yaş halkaları gibi, kalınlıkları eşit olan ve ortak eksenden dışarıya doğru gittikçe büyüyen ince silindirik kabuklara dilimlenir. Bir silindirik kabuğu açarsak, hacminin yaklaşık olarak alanı $A(x)$ ve kalınlığı Δx olan dikdörtgensel bir dilimin hacmine eşit olduğunu görürüz. Bu, önceden olduğu gibi, hacim için aynı integral tanımını uygulamamızı sağlar. Yöntemi genel olarak tanımlamadan önce biraz daha tecrübe kazanmak için bir örneğe bakalım.

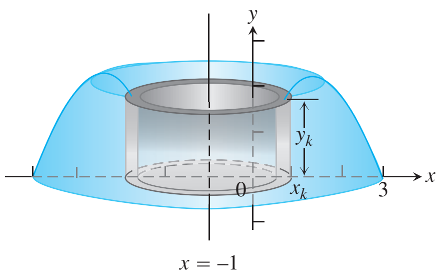
ÖRNEK 1 Kabuklar Kullanarak Bir Hacim Bulmak

x-ekseni ve $y = f(x) = 3x - x^2$ parabolü ile sınırlanan bölge $x = -1$ dikey doğrusu etrafında döndürülerek bir dönel cisim oluşturuluyor (Şekil 6.17). Dönel cismin hacmini bulun.

Çözüm Bölüm 6.1'deki pul yöntemini burada kullanmak zor olacaktır, çünkü parabolün sol ve sağ kollarının x-değerlerini y cinsinden ifade etmemiz gerekecektir.



ŞEKİL 6.17 (a) Örnek 1'deki bölgenin grafiği, döndürülmeden önce. (a)'daki bölgenin $x = -1$ dönme ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cisim.

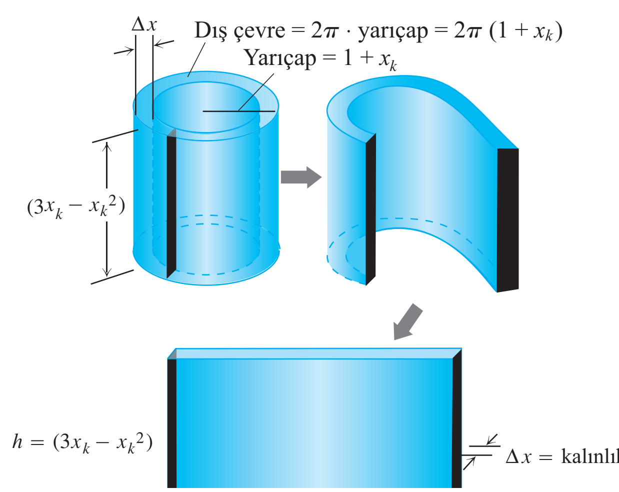


ŞEKİL 6.18 Δx kalınlığındaki bir dikey şeridin $x = -1$ etrafında döndürülmesiyle elde edilen y_k yüksekliğinde bir silindirik kabuk. Silindirin dış yarıçapı x_k'dır ve bu noktada parabolün yüksekliği $y_k = 3x_k - x_k^2$ dir (Örnek 1).

(Bu x-değerleri tipik bir pulun, karmaşık formüllere yol açan iç ve dış yarıçaplarıdır.) Δy kalınlığında yatay bir şerit döndürmek yerine Δx kalınlığında dikey bir şerit döndürürüz. Bu döndürme, dikey şeridin tabanı içindeki bir x_k noktasının üzerinde y_k yüksekliğinde ve Δx kalınlığında bir *silindirik kabuk* oluşturur. Bir silindirik kabuk örneği Şekil 6.18 de renkli bölge olarak gösterilmiştir. Şekilde gösterilen silindirik kabuğun, cisim boyunca yukarıdan aşağıya doğru dönme eksenine paralel ve bütün çevre boyunca içteki deliğe yakın olarak kesilen bir dilime yaklaşımda bulunduğunu düşünebiliriz. Daha sonra genişlemiş deliğin çevresi boyunca başka bir silindirik dilim keseriz ve sonra bir daha ve böyle devam ederek n tane silindir elde ederiz. Silindirlerin yarıçapları aşamalı olarak artar. Silindirlerin yükseklikleri parabolün şeklini takip ederler: kısadan uzuna ve sonra geri kısaya (Şekil 6.17a).

Her dilim, x-ekseninin uzunluğundaki (genişliğinde) bir alt aralığı üzerinde oturmaktadır. Yarıçapı yaklaşık olarak $(1 + x_k)$ve yüksekliği yaklaşık olarak $3x_k - x_k^2$ dir. x_k'daki silindiri açar ve düzleştirirsek kalınlığı Δx olan dikdörtgensel bir dilim haline (yaklaşık olarak) gelir (Şekil 6.19). k. silindirin dış çevresi $2\pi \cdot$ yarıçap $= 2\pi(1 + x_k)$ dir ve bu da açılan dikdörtgensel dilimin uzunluğudur. Hacmi ise yaklaşık olarak dikdörtgensel cismin hacmidir,

$$\begin{aligned}\Delta V_x &= \text{çevre} \times \text{yükseklik} \times \text{kalınlık}\\ &= 2\pi(1 + x_k) \cdot \left(3x_k - x_k^2\right) \cdot \Delta x\end{aligned}$$



ŞEKİL 6.19 Bir silindirik kabuğu, (yaklaşık olarak) dikdörtgensel düz bir cisim elde etmek için kesip açtığınızı hayal edin (Örnek 1)

$[0, 3]$ aralığı üzerindeki silindirik kabukların ΔV_k hacimlerini toplamak

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi(x_k + 1)\left(3x_k - x_k^2\right) \Delta x.$$

Riemann toplamını verir.

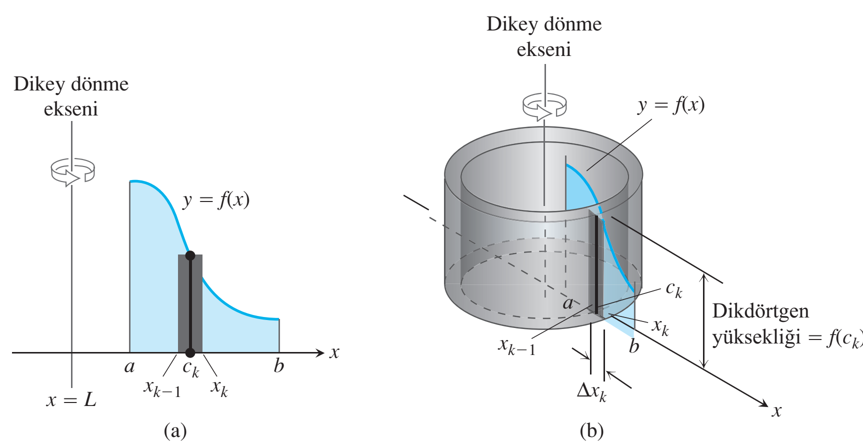
$\Delta x \to 0$ için limit almak hacim integralini verir:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 2\pi(x+1)(3x-x^2)\,dx \\ &= \int_0^3 2\pi(3x^2+3x-x^3-x^2)\,dx \\ &= 2\pi\int_0^3 (2x^2+3x-x^3)\,dx \\ &= 2\pi\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^3 \\ &= \frac{45\pi}{2}. \end{aligned}$$

Şimdi Örnek 1'deki prosedürü genelleştirelim.

Kabuk Yöntemi

Negatif olmayan sürekli bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ve x-ekseni tarafından, sonlu $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde sınırlanan bölgenin, $x = L$ dikey doğrusunun sağında kaldığını varsayalım (Şekil 6.20a). $a \geq L$ olduğunu kabul ediyoruz. Dolayısıyla, dikey doğru bölgeye dokunabilir fakat bölgenin içinden geçmez. Bu bölgeyi dikey L doğrusu etrafında döndürerek bir S cismi üretiriz.



ŞEKİL 6.20 (a) da gösterilen bölge $x = L$ dikey doğrusu etrafında döndürüldüğünde, silindirik kabuklara dilimlenebilen bir cisim üretilir. Tipik bir kabuk (b) de gösterilmiştir.

$[a, b]$ aralığının $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ noktaları ile bir bölünüşü P ve $[x_{k-1}, x_k]$ aralığının orta noktası c_k olsun. Şekil 6.20a'daki bölgeye $[a, b]$ aralığının bu bölünüşü üzerine oturtulan dikdörtgenlerle yaklaşımda bulunuruz. Tipik bir yaklaşım dikdörtgeninin yüksekliği $f(c_k)$ ve genişliği $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$'dir. Bu dikdörtgen $x = L$ dikey doğrusu etrafında döndürülürse Şekil 6.20b'deki gibi bir kabuk süpürür. Geometriden bir formül, dikdörtgen tarafından süpürülen kabuğun hacminin

$$\begin{aligned} \Delta V_x &= 2\pi \times \text{ortalama kabuk yarıçapı} \times \text{kabuk yüksekliği} \times \text{kalınlık} \\ &= 2\pi \cdot (c_k - L) \cdot f(c_k) \cdot \Delta x_k \end{aligned}$$

olduğunu söyler.

S cisminin hacmine, P üzerine oturtulan n tane dikdörtgenin süpürdüğü kabukların hacimlerini toplayarak yaklaşırız:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k$$

$\|P\| \to 0$ iken bu Riemann toplamının limiti, cismin hacmini bir belirli integral olarak verir:

$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{kabuk}\\ \text{yarıçapı}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\text{kabuk}\\ \text{yüksekliği}\end{pmatrix} dx$$

$$= \int_a^b 2\pi(x - L)f(x)\, dx$$

İntegrasyon değişkenine, burada x, **kalınlık değişkeni** olarak bakarız. İntegrand için bir formül içeren ikinci integralden çok, kabuk yönteminin işleyişini vurgulamak için birinci integrali kullanırız. Bu, yatay bir L doğrusu etrafında döndürmelere de izin verir.

Dikey Bir Doğru Etrafında Dönme İçin Kabuk Formülü

x-ekseni ile sürekli bir $y = f(x) \geq 0,\ L \leq a \leq x \leq b$ fonksiyonunun grafiği arasındaki bölgenin $x = L$ dikey doğrusu etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel cismin hacmi

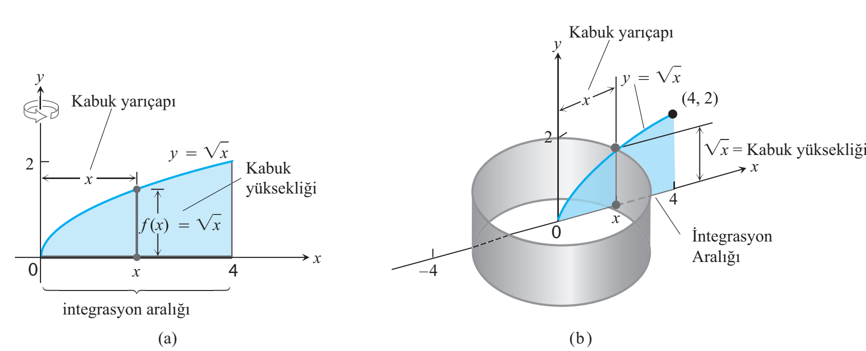
$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{kabuk}\\ \text{yarıçapı}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\text{kabuk}\\ \text{yüksekliği}\end{pmatrix} dx$$

dir.

ÖRNEK 2 y-Ekseni Etrafında Döndürme İle Silindirik Kabuklar

$y = \sqrt{x}$, eğrisi, x-ekseni ve $x = 4$ doğrusu ile çevrelenen bölge y-ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretiliyor. Dönel cismin hacmini bulun.

Çözüm Bölgeyi çizin ve bölge boyunca dönme eksenine *paralel* bir doğru parçası ekleyin (Şekil 6.21a). Doğru parçasının uzunluğunu (kabuk yüksekliği) ve dönme eksenine uzaklığını (kabuk yarıçapı) belirleyin. (Şekil 6.21b'de kabuğu çizdik, fakat sizin bunu yapmanıza gerek yoktur.)



ŞEKİL 6.21 (a) Örnek 2'deki bölge, kabuk boyutları ve integrasyon aralığı. (b) (a)'daki dikey doğru parçasının süpürdüğü Δx genişliğindeki kabuk.

Kabuk kalınlığı değişkeni x'dir, dolayısıyla kabuk formülünün integrasyon sınırları $a = 0$ ve $b = 4$ tür (Şekil 6.20). Bu durumda hacim

$$V = \int_a^b 2\pi \left(\begin{matrix}\text{kabuk}\\ \text{yarıçapı}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{kabuk}\\ \text{yüksekliği}\end{matrix}\right) dx$$

$$= \int_0^4 2\pi(x)\left(\sqrt{x}\right) dx$$

$$= 2\pi \int_0^4 x^{3/2}\, dx = 2\pi\left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^4 = \frac{128\pi}{5}. \qquad \blacksquare$$

olur.

ÖRNEK 3 x-Ekseni Etrafında Döndürme İle Silindirik Kabuklar

$y = \sqrt{x}$, eğrisi, x-ekseni ve $x = 4$ doğrusu ile çevrelenen bölge x-ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretiliyor. Dönel cismin hacmini bulun.

Çözüm Bölgeyi çizin ve bölge boyunca dönme eksenine *paralel* bir doğru parçası ekleyin (Şekil 6.22a). Doğru parçasının uzunluğunu (kabuk yüksekliği) ve dönme eksenine uzaklığını (kabuk yarıçapı) belirleyin. (Şekil 6.22'de kabuğu çizdik, fakat sizin bunu yapmanıza gerek yoktur.)

Bu durumda kabuk kalınlığı değişkeni y dir. Dolayısıyla kabuk formülünün integrasyon sınırları $a = 0$ ve $b = 2$ dir (Şekil 6.22'de y-ekseni üzerinde). Dönel cismin hacmi

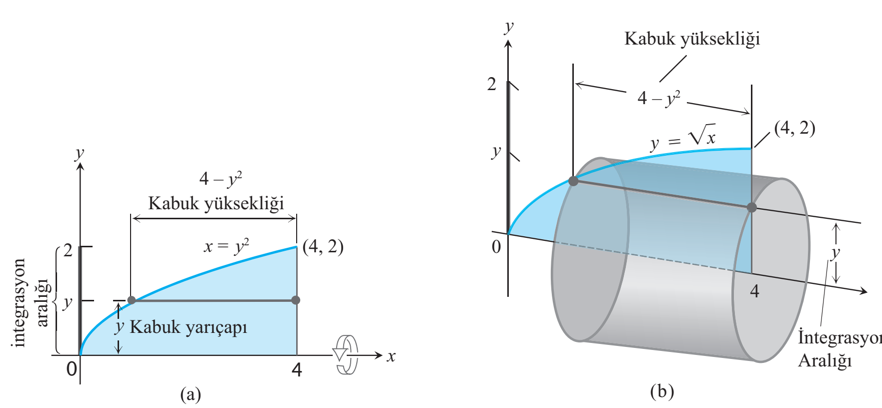
$$V = \int_a^b 2\pi \left(\begin{matrix}\text{kabuk}\\ \text{yarıçapı}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{kabuk}\\ \text{yüksekliği}\end{matrix}\right) dy$$

$$= \int_0^2 2\pi(y)(4 - y^2)\, dy$$

$$= \int_0^2 2\pi(4y - y^3)\, dy$$

$$= 2\pi\left[2y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi \qquad \blacksquare$$

dir.



ŞEKİL 6.22 (a) Örnek 3'teki bölge, kabuk boyutları ve integrasyon aralığı. (b) (a)'daki yatay doğru parçasının süpürdüğü Δy genişliğindeki kabuk.

Kabuk Yönteminin Özeti

Dönme ekseninin konumuna bakılmadan (yatay veya dikey), kabuk yöntemini uygulamanın adımları şunlardır

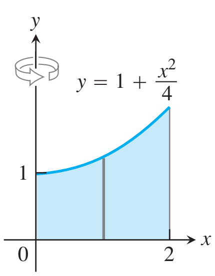
1. *Bölgeyi çizin* ve bölge boyunca dönme eksenine *paralel bir doğru parçası ekleyin.* Doğru parçasının yüksekliğini veya uzunluğunu (kabuk yüksekliği) ve dönme eksenine uzaklığını (kabuk yarıçapı) *belirleyin.*
2. Kalınlık değişkeninin integrasyon sınırlarını *bulun*.
3. Hacmi bulmak için 2π (kabuk yarıçapı)(kabuk yüksekliği) çarpımını uygun değişkene göre (x veya y) *integre edin*.

Bir dönel cismin hacmini hesaplamada kabuk ve pul yöntemleri aynı sonucu verirler. Bu sonucu burada ispat etmeyeceğiz fakat 33 ve 34 Alıştırmalarında gösterilmektedir. Her iki hacim formülü, Bölüm 15'te çalışacağımız iki ve üç katlı integrallerdeki genel bir hacim formülünün birer özel halidir. Oradaki genel formül, bölgelerin döndürülmesiyle elde edilen cisimlerden başka cisimlerin de hacimlerini hesaplamamızı sağlar.

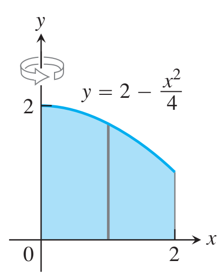
ALIŞTIRMALAR 6.2

1–6 alıştırmalarında, renkli bölgenin belirtilen eksen etrafında döndürülmesiyle üretilen dönel cisimlerin hacimlerini bulmak için kabuk yöntemini kullanın.

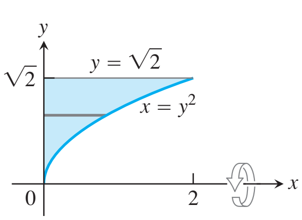
1.



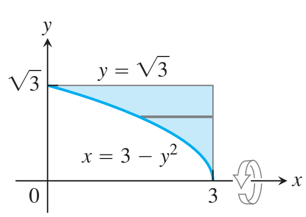
2.



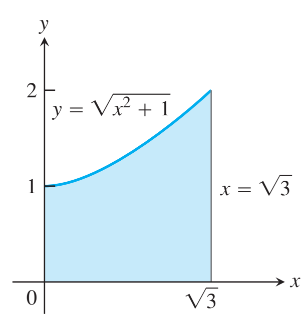
3.



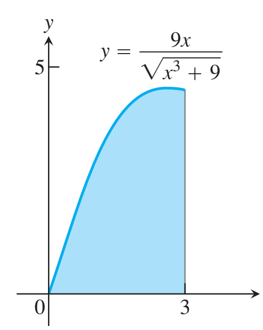
4.



5. y-ekseni



6. y-ekseni



y-Ekseni Etrafında Döndürme

7–14 alıştırmalarındaki eğri ve doğrularla sınırlı bölgelerin y-ekseni etrafında döndürülmeleri ile üretilen bölgelerin hacimlerini bulmak için kabuk yöntemini kullanın.

7. $y = x, \quad y = -x/2, \quad x = 2$

8. $y = 2x, \quad y = x/2, \quad x = 1$

9. $y = x^2, \; y = 2 - x, \; x = 0 \;\; x \geq 0$ için

10. $y = 2 - x^2, \quad y = x^2, \quad x = 0$

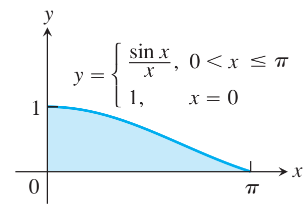
11. $y = 2x - 1, \quad y = \sqrt{x}, \quad x = 0$

12. $y = 3/(2\sqrt{x}), \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$

13. $f(x) = \begin{cases} (\sin x)/x, & 0 < x \le \pi \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ olsun.

a. $x\,f(x) = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$ olduğunu gösterin.

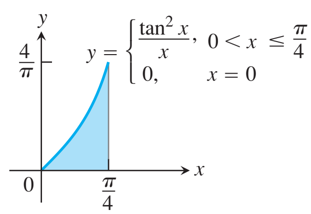
b. Renkli bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen bölgenin hacmini bulun.



14. $g(x) = \begin{cases} (\tan x)^2/x, & 0 < x \le \pi/4 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ olsun.

a. $x\,g(x) = (\tan x)^2,\ 0 \le x \le \pi/4$ olduğunu gösterin.

b. Renkli bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen bölgenin hacmini bulun.



x-Ekseni Etrafında Dönme

15–22 alıştırmalarındaki eğri ve doğrularla sınırlı bölgelerin x-ekseni etrafında döndürülmeleri ile üretilen dönel cisimlerin hacimlerini bulmak için kabuk yöntemini kullanın.

15. $x = \sqrt{y}, \quad x = -y, \quad y = 2$

16. $x = y^2, \quad x = -y, \quad y = 2, \quad y \ge 0$

17. $x = 2y - y^2, \quad x = 0$

18. $x = 2y - y^2, \quad x = y$

19. $y = |x|, \quad y = 1$

20. $y = x, \quad y = 2x, \quad y = 2$

21. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad y = x - 2$

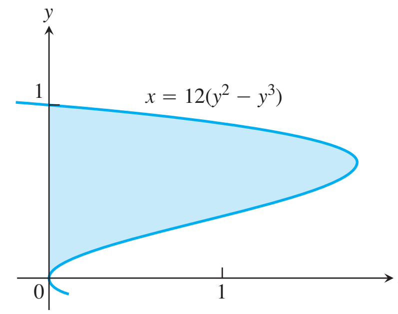
22. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad y = 2 - x$

Yatay Bir Eksen Etrafında Dönme

23 ve 24 alıştırmalarında, renkli bölgelerin belirtilen eksenler etrafında döndürülmeleri ile üretilen dönel cisimlerin hacimlerini bulmak için kabuk yöntemini kullanın.

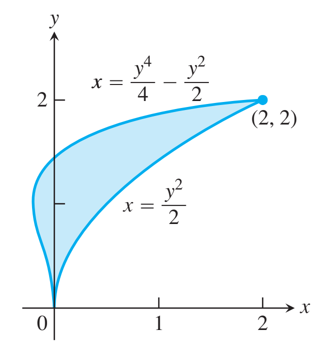
23. **a.** x-ekseni **b.** $y = 1$ doğrusu

c. $y = 8/5$ doğrusu **d.** $y = -2/5$ doğrusu



24. **a.** x-ekseni **b.** $y = 2$ doğrusu

c. $y = 5$ doğrusu **d.** $y = -5/8$ doğrusu



Pul ve Kabuk Yöntemlerini Karşılaştırmak

Bazı bölgeler için, bölgenin koordinat eksenleri etrafında döndürülmeleri ile elde edilen dönel cisimler için hem pul yöntemi hem kabuk yöntemi kolaylıkla kullanılabilir, fakat durum her zaman böyle değildir. Örneğin, bir bölge y-ekseni etrafında döndürüldüğünde ve pullar kullanıldığında y'ye göre integral almamız gerekir. Halbuki, integrandı y cinsinden ifade etmemiz mümkün olmayabilir. Böyle bir durumda kabuk yöntemi y yerine x'e göre integral almamızı sağlar. 25 ve 26 alıştırmaları biraz öngörüş sağlar.

25. $y = x$ ve $y = x^2$ ile sınırlı bölgenin her bir koordinat ekseni etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel cismin hacmini

a. kabuk yöntemini **b.** pul yöntemini

kullanarak hesaplayın.

26. $2y = x + 4$, $y = x$ ve $x = 0$ doğrularıyla sınırlı üçgensel bölgenin verilen eksen etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel cismin hacmini belirtilen yöntemle hesaplayın

a. x-ekseni, pul yöntemi

b. y-ekseni, kabul yöntemi

c. $x = 4$ doğrusu, kabul yöntemi

d. $y = 8$ doğrusu, pul yöntemi

Pul veya Kabuk Yöntemini Seçmek

27–32 alıştırmalarında, bölgelerin verilen eksenler etrafında döndürülmesiyle üretilen dönel cisimlerin hacimlerini bulun. Verilen bir durumda pullar kullanmanın daha iyi olduğunu düşünürseniz, istediğiniz yöntemi uygulayın.

27. Köşeleri (1, 1), (1, 2) ve (2, 2)'deki üçgen,

a. x-ekseni **b.** y-ekseni

c. $x = 10/3$ doğrusu **d.** $y = 1$ doğrusu

28. $y = \sqrt{x}, y = 2, x = 0$ ile sınırlı bölge,

a. x-ekseni **b.** y-ekseni

c. $x = 4$ doğrusu **d.** $y = 2$ doğrusu

29. Birinci dörtte bir bölgede $x = y - y^3$ eğrisi ve y-ekseniyle sınırlı bölge,

a. x-ekseni **b.** $y = 1$ doğrusu

30. Birinci dörtte bir bölgede $x = y - y^3$, $x = 1$ ve $y = 1$ ile sınırlı bölge,

a. x-ekseni **b.** y-ekseni

c. $x = 1$ doğrusu **d.** $y = 1$ doğrusu

31. $y = \sqrt{x}, y = x^2/8$ ile sınırlanan bölge

a. x-ekseni **b.** y-ekseni

32. $y = 2x - x^2$ ve $y = x$ ile sınırlı bölge,

a. y-ekseni **b.** $x = 1$ doğrusu

33. Birinci dörtte bir bölgede, üstten $y = 1/x^{1/4}$ eğrisi, soldan $x = 1/16$ doğrusu ve alttan $y = 1$ doğrusuyla sınırlanan bölge x-ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretiliyor. Dönel cismin hacmini

a. pul yöntemi **b.** kabuk yöntemi

ile bulun.

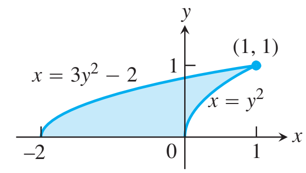
34. Birinci dörtte bir bölgede üstten $y = 1/\sqrt{x}$, eğrisi, soldan $x = 1/4$ doğrusu ve alttan $y = 1$ doğrusuyla sınırlı bölge y-ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretiliyor. Dönel cismin hacmini

a. pul yöntemi **b.** kabuk yöntemi

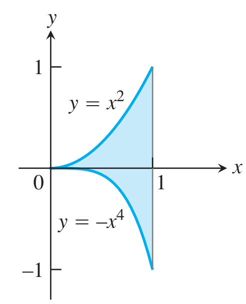
ile bulun.

Disk, Pul veya Kabuk Yöntemini Seçmek

35. Aşağıda gösterilen bölge x-ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretilecektir. Dönel cismin hacmini bulmak için hangi yöntemi (disk, pul, kabuk) kullanırdınız? Her durumda kaç integral gerekir? Açıklayın.



36. Aşağıda gösterilen bölge y-ekseni etrafında döndürülerek bir Dönel cisim üretilecektir. Dönel cismin hacmini bulmak için hangi yöntemi (disk, pul, kabuk) kullanırdınız? Her durumda kaç integral gerekir? Cevabınızı açıklayın.

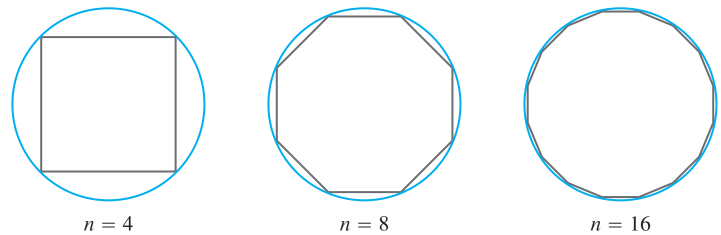


6.3 Düzlem Eğrilerin Uzunlukları

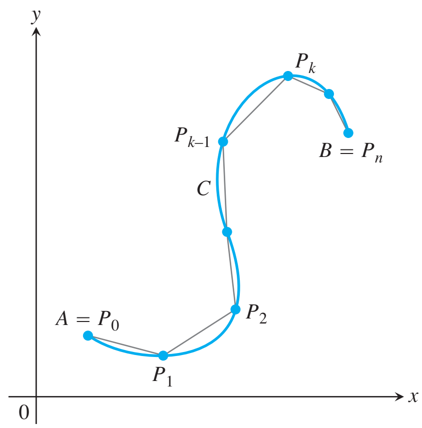
Bir doğru parçasının uzunluğu ile ne demek istendiğini biliyoruz, fakat analiz olmadan, genel bir eğrinin uzunluğu hakkında elimizde kesin bir kavram yoktur. Bir A noktasından bir B noktasına giden bir eğrinin uzunluğuna, eğriyi birçok parçaya ayırıp ardışık ayırma noktalarını doğru parçaları ile birleştirerek, yaklaşımda bulunma fikri eski Yunanlılara dayanır. Archimedes bu yöntemi, içine n kenarlı bir çokgen çizdiği ve sonra çevresini hesaplamak için geometri kullandığı, bir çemberin çevresine yaklaşımda bulunmak için kullanmıştır.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Archimedes
(287–212 B.C.)



ŞEKİL 6.23 Archimedes, bir çemberin çevresine yaklaşımda bulunmak için çemberin içine yerleştirdiği çokgenin çevresini kullanmıştır. $n = 96$ için yaklaşım yöntemi birim çemberin çevresi olarak $\pi \approx 3.14103$ verir.



ŞEKİL 6.24 $x = f(t)$ ve $y = g(t)$, $a \le t \le b$ denklemleri ile parametrik olarak tanımlanmış C eğrisi. Eğrinin A' dan B'ye kadar uzunluğuna, $A = P_0$ dan başlayıp P_1'e giden ve bu şekilde devam edip $B = P_n$ de biten çokgensel bir yol ile (doğru parçaları) yaklaşımda bulunulmaktadır.

(Şekil 6.23). Bu fikrin daha genel bir eğriye genişletilmesi Şekil 6.24'te gösterilmiştir. Şimdi yöntemin nasıl çalıştığını açıklayacağız.

Parametrik Olarak Tanımlanmış Bir Eğrinin Uzunluğu

C eğrisi

$$x = f(t) \quad \text{ve} \quad y = g(t), \quad a \le t \le b$$

denklemleri ile parametrik olarak tanımlanmış olsun. f ve g fonksiyonlarının $[a, b]$ aralığı üzerinde aynı anda sıfır olmayan sürekli türevlerinin var olduğunu kabul ediyoruz. Böyle fonksiyonlara **sürekli olarak türevlenebilir** fonksiyonlar ve bunlarla tanımlı C eğrisine **düzgün eğri** denir. Eğriyi, $t = a$ anında bulunduğu Şekil 6.24' teki $A = f(b), g(b))$ noktasından $B = f(b), g(b))$ giden bir parçacığın yolu olarak düşünmek faydalı olabilir. AB yolunu (yayını) $A = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n = B$ noktalarından n parçaya böleriz. Bu noktalar, $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ ile $[a, b]$ aralığının $P_k = (f(t_k), g(t_k))$ olduğu bir bölünüşüne karşı gelirler. Bu bölünüşün ardışık noktalarını doğru parçaları ile birleştirin (Şekil 6.24). Temsili bir doğru parçasının uzunluğu

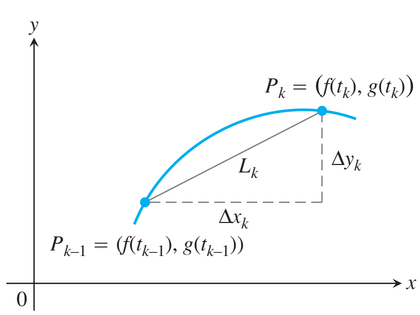
$$\begin{aligned} L_k &= \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\ &= \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2} \end{aligned}$$

dir (Şekil 6.25). Δt_k küçük ise L_k uzunluğu yaklaşık olarak $P_{k-1}P_k$ yayının uzunluğuna eşittir. Ortalama Değer Teoremine göre $[t_{k-1}, t_k]$ içinde

$$\begin{aligned} \Delta x_k &= f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(t_k^*)\, \Delta t_k, \\ \Delta y_k &= g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(t_k^{**})\, \Delta t_k. \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan t_k^* ve t_k^{**} noktaları vardır. A'dan B'ye giden yol, t değeri $t = a$'dan $t = b$'ye artarken, geriye gidilmeden veya tekrar aynı yoldan geçmeden tam olarak bir defa kat ediliyorsa, AB eğrisinin uzunluğuna sezgisel bir yaklaşım bütün L_k uzunluklarının toplamıdır:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} L_k &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(t_k^*)]^2 + [g'(t_k^{**})]^2}\,\Delta t_k. \end{aligned}$$



ŞEKİL 6.25 Yukarıda gösterilen ve uzunluğu $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$ olan doğru parçası ile $P_{k-1}P_k$ yayına, yaklaşımda bulunulmaktadır.

Sağ taraftaki bu son toplam tam olarak bir Riemann toplamı olmasa da (f' ve g' farklı noktalarda hesaplandıkları için), ileri analizden bir teorem, bölünüşün normunun sıfıra gitmesi durumunda limitinin

$$\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

belirli integrali olarak varlığını garanti eder. Bu nedenle, A'dan B'ye kadar eğrinin uzunluğunu bu integral olarak tanımlamak anlamlıdır.

TANIM Parametrik Bir Eğrinin Uzunluğu

Bir C eğrisi, f' ve g' türevleri $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve aynı anda sıfır olmamak üzere $x = f(t)$ ve $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$ denklemleri ile parametrik olarak tanımlanmış ise ve t değeri $t = a$'dan $t = b$'ye artarken, C eğrisi tam olarak bir defa kat ediliyorsa, C eğrisinin uzunluğu

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

belirli integralidir.

$[a, b]$ zaman aralığı boyunca $(f')^2 + (g')^2 > 0$ olduğundan, düzgün bir C eğrisi aralık üzerinde geriye dönmez veya yön değiştirmez.

$x = f(t)$ ve $y = g(t)$ ise Leibniz notasyonunu kullanarak yay uzunluğu için aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{1}$$

Uzunluğunu bulmak istediğimiz C eğrisinin farklı iki parametrizasyonu varsa ne olur; hangisini kullandığımız fark eder mi? Cevap, ileri analizden, seçtiğimiz parametrizasyon C eğrisinin uzunluğunun tanımında ifade edilen koşulları sağladığı sürece, hayır (Bkz. Alıştırma 29).

ÖRNEK 1 Bir Çemberin Çevresi

$$x = r\cos t \quad \text{ve} \quad y = r\sin t, \ \ 0 \leq t \leq 2\pi$$

denklemleri ile parametrik olarak tanımlanan r yarıçaplı çemberin çevresini bulun.

Çözüm t, 0'dan 2π'ye değişirken çember tam olarak bir defa kat edilir, dolayısıyla çevre

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

dir.

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = r\cos t$$

ve

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = r^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = r^2$$

buluruz.

Şu halde,

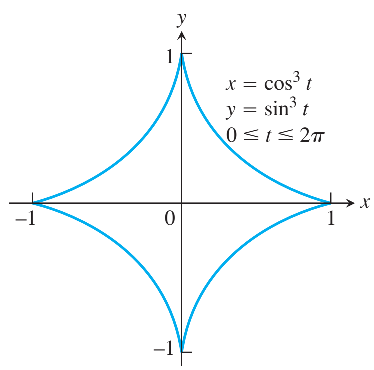
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}\, dt = r\left[t\right]_0^{2\pi} = 2\pi r$$

bulunur.

ÖRNEK 2 Bir Eğrinin Uzunluğu İçin Parametrik Formülü Uygulamak

astroidinin uzunluğunu bulun (Şekil 6.26).

$$x = \cos^3 t \quad \text{ve} \quad y = \sin^3 t, \;\; 0 \le t \le 2\pi$$



ŞEKİL 6.26 Örnek 2'deki astroid.

Çözüm Eğrinin, koordinat eksenlerine göre simetrisinden dolayı, uzunluğu birinci dörtte bir bölgedeki uzunluğunun dört katıdır. Buradan,

$$x = \cos^3 t, \qquad y = \sin^3 t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = [3\cos^2 t(-\sin t)]^2 = 9\cos^4 t \sin^2 t$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = [3\sin^2 t(\cos t)]^2 = 9\sin^4 t \cos^2 t$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1}}$$

$$= \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t}$$

$$= 3|\cos t \sin t| \qquad 0 \le t \le \pi/2 \text{ için } \cos t \sin t \ge 0$$

$$= 3\cos t \sin t.$$

bulunur. Bu nedenle

$$\text{Birinci bölgedeki parçanın uzunluğu} = \int_0^{\pi/2} 3\cos t \sin t\, dt$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2t\, dt \qquad \cos t \sin t = (1/2)\sin 2t$$

$$= -\frac{3}{4}\cos 2t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}$$

olur. Astroidin uzunluğu bunun dört katıdır: $4(3/2) = 6$

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Gregory St. Vincent
(1584–1667)

Bir $y = f(x)$ Eğrisinin Uzunluğu

Sürekli olarak türevlenebilen bir $y = f(x)$, $a \le x \le b$ eğrisi veriliyor, $x = t$ parametre değerini atayabiliriz. Bu durumda f fonksiyonunun grafiği, daha önce göz önüne aldığımızın bir özel hali olan ve

$$x = t \quad \text{ve} \quad y = f(t), \;\; a \le t \le b$$

denklemleri ile parametrik olarak tanımlanan C eğrisidir. Şu halde,

$$\frac{dx}{dt} = 1 \qquad \text{ve} \qquad \frac{dy}{dt} = f'(t)$$

dir.

Bölüm 3.5'teki hesaplamalarımızdan,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = f'(t)$$

elde ederiz ve bu da,

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= 1 + [f'(t)]^2 \\ &= 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\ &= 1 + [f'(x)]^2\end{aligned}$$

verir. (1) Denkleminde yerine yazmak, $y = f(x)$'in grafiği için yay uzunluğu formülünü verir.

$y = f(x)$, $a \le x \le b$' nin Uzunluğu İçin Formül

f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli olarak türevlenebiliyorsa, $y = f(x)$ eğrisinin (grafiğinin) $x = a$'dan $x = b$'ye kadar uzunluğu şöyledir:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \qquad (2)$$

ÖRNEK 3 Bir Grafik İçin Yay Uzunluğu Formülünü Uygulamak

Aşağıdaki eğrinin uzunluğunu bulun.

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1, \qquad 0 \le x \le 1.$$

Çözüm (2) denklemini $a = 0$, $b = 1$ ve

$$\begin{aligned} y &= \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = 2\sqrt{2}x^{1/2} \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= \left(2\sqrt{2}x^{1/2}\right)^2 = 8x \end{aligned}$$

alarak kullanırız. Eğrinin $x = 0$'dan $x = 1$'e kadar uzunluğu

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 8x}\, dx \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}(1 + 8x)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{13}{6} \end{aligned}$$

$a = 0$, $b = 1$ ile (2) denklemi

$u = 1 + 8x$, alın, nitegre edin ve u yerine $1 + 8x$.yazın. ■

olur.

dy/dx'teki Süreksizliklerle Uğraşmak

Eğri üzerinde dy/dx'in bulunmadığı bir noktada, dx/dy bulunabilir ve eğrinin uzunluğunu x'i y cinsinden ifade ederek ve (2) denkleminin aşağıda verilen dengini uygulayarak bulabiliriz:

$x = g(y), \quad c \le y \le d$ 'nin Uzunluğu İçin Formül
g fonksiyonu $[c, d]$ aralığı üzerinde sürekli olarak türevlenebiliyorsa, $x = g(y)$ eğrisinin $y = c$'den $y = d$'ye kadar uzunluğu şöyledir:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy \qquad (3)$$

ÖRNEK 4 ***dy/dx*** Türevinde Bir Süreksizliği Bulunan Bir Grafiğin Uzunluğu

$y = (x/2)^{2/3}$ 'ün $x = 0$'dan $x = 2$'ye kadar uzunluğunu bulun.

Çözüm

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}$$

türevi $x = 0$'da tanımlı değildir, dolayısıyla eğrinin uzunluğunu (2) denklemi ile bulamayız.

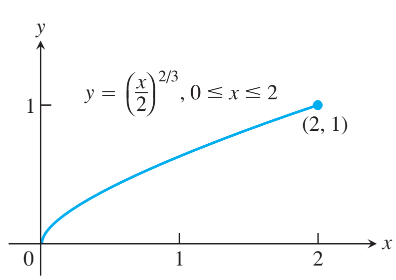
Bu nedenle eşitliği, x'i y cinsinden ifade edecek şekilde tekrar yazarız:

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$$

$$y^{3/2} = \frac{x}{2} \qquad \text{İki tarafında 3/2. kuvvetini alın.}$$

$$x = 2y^{3/2}. \qquad x\text{'i çözün}$$

Buradan uzunluğunu bulmak istediğimiz eğrinin aynı zamanda $x = 2y^{3/2}$'nin $y = 0$'dan $y = 1$'e kadar grafiği olduğunu görürüz (Şekil 6.27).



ŞEKİL 6.27 $y = (x/2)^{2/3}$'ün $x = 0$'dan $x = 2$'ye kadar grafiği aynı zamanda $x = 2y^{3/2}$'nin $y = 0$'dan $y = 1$'e kadar grafiğidir. (Örnek 4).

$$\frac{dx}{dy} = 2\left(\frac{3}{2}\right)y^{1/2} = 3y^{1/2}$$

türevi $[0, 1]$ aralığında süreklidir. Dolayısıyla eğrinin uzunluğunu bulmak için (3) denklemini kullanabiliriz:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 9y}\, dy \qquad c = 0,\ d = 1 \text{ ile (3) denklemi}$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}(1 + 9y)^{3/2}\Big]_0^1 \qquad u = 1 + 9y,\ du/9 = dy \text{ alın, integre edin ve değerleri yerine koyun.}$$

$$= \frac{2}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \approx 2.27.$$

■

TARİHSEL BİYOGRAFİ

James Gregory
(1638–1675)

Kısa Diferansiyel Formül

(1) denklemi genellikle türevler yerine diferansiyellerle yazılır. Bu, formel olarak karekök dışına dt yazmak yerine karekök içine $(dt)^2$ yazmakla ve sonrada

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2(dt)^2 = \left(\frac{dx}{dt}dt\right)^2 = (dx)^2$$

ve

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2(dt)^2 = \left(\frac{dy}{dt}dt\right)^2 = (dy)^2$$

yazmakla yapılır. Ayrıca $(dx)^2$ ve $(dy)^2$ deki parantezleri kaldırmakta gelenek haline gelmiştir. Bu nedenle (1) denklemi

$$L = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{4}$$

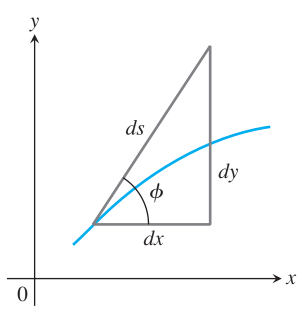
olarak yazılır. İntegrallerin özelliklerini özetlemenin ve basitleştirmenin bir yolunun bu diferansiyeller olduğunu düşünebiliriz. Diferansiyellerin kesin matematiksel tanımları daha ileri seviyedeki kitaplarda verilmektedir.

Bir integral hesabı yapmak için, dx ve dy'nin her ikisi birden bir ve aynı değişken cinsinden ifade edilmeli ve (4) denkleminde uygun integrasyon sınırları bulunmalıdır.

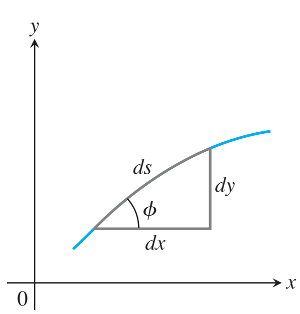
(4) denklemini hatırlamanın kullanışlı bir yolu

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{5}$$

yazmak ve ds'ye, uygun sınırlar arasında bir eğrinin toplam uzunluğunu vermek üzere integre edilebilen bir yay uzunluğu diferansiyeli olarak bakmaktır. Şekil 6.28a, ds'nin (5) denklemine karşı gelen tam bir yorumunu vermektedir. Şekil 6.28b tam olarak doğru değildir fakat Şekil 6.28a'nın basitleştirilmiş bir yaklaşımı olarak düşünülebilir.



(a)



(b)

ŞEKİL 6.28 $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ denklemini hatırlamak için diyagram.

Aklımızda (5) denklemi varken, yay uzunluğu formüllerini hatırlamanın en kısa yolu

$$\text{Yay uzunluğu} = \int ds$$

eşitliğini hatırlamaktır. $L = \int ds$ yazarsak ve $y = f(x)$ grafiğimiz varsa (5) denklemini tekrar yazarak (2) denklemindeki sonucu elde ederiz:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{dy^2}{dx^2}dx^2} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\,dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Elimizde $x = g(y)$ varsa (5) denklemini tekrar yazarak (3) denklemini elde ederiz.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dy^2 + \frac{dx^2}{dy^2}dy^2} = \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}\,dy = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

ALIŞTIRMALAR 6.3

Parametrize Eğrilerin Uzunlukları

1–6 alıştırmalarındaki eğrilerin uzunluklarını bulun.

1. $x = 1 - t, \quad y = 2 + 3t, \quad -2/3 \le t \le 1$

2. $x = \cos t, \quad y = t + \sin t, \quad 0 \le t \le \pi$

3. $x = t^3, \quad y = 3t^2/2, \quad 0 \le t \le \sqrt{3}$

4. $x = t^2/2, \quad y = (2t + 1)^{3/2}/3, \quad 0 \le t \le 4$

5. $x = (2t + 3)^{3/2}/3, \quad y = t + t^2/2, \quad 0 \le t \le 3$

6. $x = 8\cos t + 8t\sin t, \quad y = 8\sin t - 8t\cos t, \quad 0 \le t \le \pi/2$

Eğrilerin Uzunluklarını Bulmak

7–16 alıştırmalarındaki eğrilerin uzunluklarını bulun. Bir grafik çiziciniz varsa, neye benzediklerini görmek için grafiklerini çizmek isteyebilirsiniz

7. $y = (1/3)(x^2 + 2)^{3/2}$ $x = 0$'dan $x = 3$'e kadar

8. $y = x^{3/2}$, $x = 0$'dan $x = 4$'e kadar

9. $x = (y^3/3) + 1/(4y)$, $y = 1$'den $y = 3$'e kadar
(*İpucu:* $1 + (dx/dy)^2$ bir tam karedir)

10. $x = (y^{3/2}/3) - y^{1/2}$, $y = 1$'den $y = 9$'a kadar
(*İpucu:* $1 + (dx/dy)^2$ bir tam karedir)

11. $x = (y^4/4) + 1/(8y^2)$ $y = 1$'den $y = 2$'ye kadar
(*İpucu:* $1 + (dx/dy)^2$ bir tam karedir)

12. $x = (y^3/6) + 1/(2y)$, $y = 2$'den $y = 3$'e kadar
(*İpucu:* $1 + (dx/dy)^2$ bir tam karedir)

13. $y = (3/4)x^{4/3} - (3/8)x^{2/3} + 5, \quad 1 \le x \le 8$

14. $y = (x^3/3) + x^2 + x + 1/(4x + 4), \quad 0 \le x \le 2$

15. $x = \int_0^y \sqrt{\sec^4 t - 1}\, dt, \quad -\pi/4 \le y \le \pi/4$

16. $y = \int_{-2}^x \sqrt{3t^4 - 1}\, dt, \quad -2 \le x \le -1$

T Eğrilerin Uzunlukları İçin İntegral Bulmak

17-24 alıştırmalarında:

a. Eğrinin uzunluğu için bir integral kurun.

b. Eğriyi çizerek neye benzediğine bakın.

c. Grafik programınızın veya bilgisayarınızın integral hesaplayıcısıyla eğrinin uzunluğunu sayısal olarak bulun.

17. $y = x^2, \quad -1 \le x \le 2$

18. $y = \tan x, \quad -\pi/3 \le x \le 0$

19. $x = \sin y, \quad 0 \le y \le \pi$

20. $x = \sqrt{1 - y^2}, \quad -1/2 \le y \le 1/2$

21. $y^2 + 2y = 2x + 1 \quad (-1, -1)$'den $(7, 3)$'e kadar

22. $y = \sin x - x\cos x, \quad 0 \le x \le \pi$

23. $y = \int_0^x \tan t\, dt, \quad 0 \le x \le \pi/6$

24. $x = \int_0^y \sqrt{\sec^2 t - 1}\, dt, \quad -\pi/3 \le y \le \pi/4$

Teori ve Uygulamalar

25. $0 \le x \le a$ aralığında uzunluğu her zaman $\sqrt{2}a$ olan düzgün (sürekli olarak türevlenebilen) bir $y = f(x)$ eğrisi var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

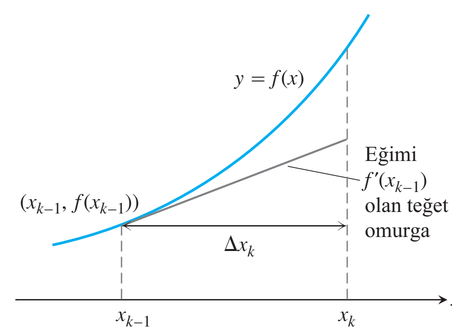
26. Eğrilerin uzunluk formülünü çıkarmak için teğet omurgalar kullanmak f'nin $[a, b]$'de düzgün olduğunu varsayın ve $[a, b]$ aralığını her zamanki gibi bölün. Her $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığında $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ noktasında şekide gösterilen *teğet omurgayı* kurun.

a. $[x_{k-1}, x_k]$ aralığındaki k. teğet omurganın uzunluğunun $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(x_{k-1})\,\Delta x_k)^2}$ olduğunu gösterin.

b. $y = f(x)$ eğrisinin a'dan b'ye uzunluğunun

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (k.\text{ teğet omurga uzunluğu}) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

olduğunu gösterin.



27. a. Uzunluk integrali

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx$$

olan ve (1, 1) noktasından geçen bir eğri bulun.

b. Kaç tane böyle eğri vardır? Yanıtınızı açıklayın.

28. a. Uzunluk integrali

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{y^4}}\, dy$$

olan ve (0, 1) noktasından geçen bir eğri bulun.

b. Kaç tane böyle eğri vardır? Yanıtınızı açıklayın.

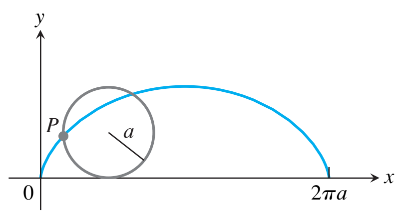
29. Uzunluk parametrizasyondan bağımsızdır Uzunluk için bulduğumuz sayıların eğrilerimizi nasıl parametrize ettiğimize bağlı olmadığını (daha önce bahsedilen hafif kısıtlamalar dışında)

göstermek için, $y = \sqrt{1 - x^2}$ yarım çemberinin uzunluğunu aşağıdaki iki farklı parametrizasyonla bulun.

a. $x = \cos 2t, \quad y = \sin 2t, \quad 0 \le t \le \pi/2$

b. $x = \sin \pi t, \quad y = \cos \pi t, \quad -1/2 \le t \le 1/2$

30. Aşağıdaki şekilde gösterilen $x = a(\theta - \sin \theta)$ $y = a(1 - \cos \theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$ sikloidinin bir yayının uzunluğunu bulun. **Sikloid**, bir çemberi x-ekseni gibi bir doğru boyunca yuvarlarken çevresi üzerindeki bir noktanın takip ettiği yoldur.



BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

31–36 alıştırmalarında kapalı aralık üzerinde verilen eğrilere aşağıdaki adımları uygulamak için bir BCS kullanın.

a. Eğriyi, aralık üzerinde $n = 2, 4, 8$ bölünüş noktaları için çokgensel bir yol yaklaşımı ile birlikte çizin. (Bkz. Şekil 6.24).

b. Doğru parçalarının uzunluklarını toplayarak, eğrinin uzunluğuna karşı gelen yaklaşımı bulun.

c. Eğrinin uzunluğunu bir integral kullanarak hesaplayın. $n = 2, 4, 8$ için bulduğunuz yaklaşımlarınızı integralle elde ettiğiniz gerçek uzunlukla karşılaştırın. n arttıkça gerçek uzunlukla yaklaşımlarınızın uyumu nasıldır? Cevabınızı açıklayın.

31. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \le x \le 1$

32. $f(x) = x^{1/3} + x^{2/3}, \quad 0 \le x \le 2$

33. $f(x) = \sin(\pi x^2), \quad 0 \le x \le \sqrt{2}$

34. $f(x) = x^2 \cos x, \quad 0 \le x \le \pi$

35. $f(x) = \dfrac{x - 1}{4x^2 + 1}, \quad -\dfrac{1}{2} \le x \le 1$

36. $f(x) = x^3 - x^2, \quad -1 \le x \le 1$

37. $x = \dfrac{1}{3}t^3, \quad y = \dfrac{1}{2}t^2, \quad 0 \le t \le 1$

38. $x = 2t^3 - 16t^2 + 25t + 5, \quad y = t^2 + t - 3,$ $0 \le t \le 6$

39. $x = t - \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad -\pi \le t \le \pi$

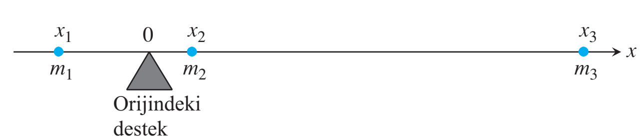
40. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad 0 \le t \le \pi$

6.4 Momentler ve Ağırlık Merkezleri

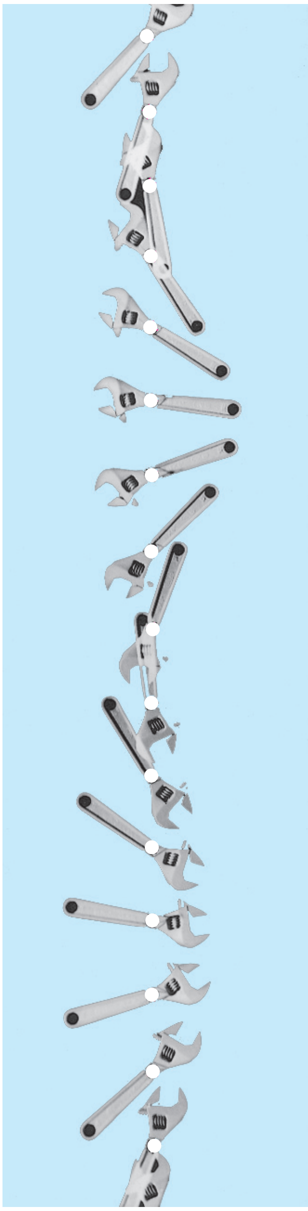
Çoğu yapı ve mekanik sistem, kütleleri *kütle merkezi* adı verilen tek bir noktada yoğunlaşmış gibi hareket ederler (Şekil 6.29). Bu noktanın yerini nasıl bulunacağını bilmek önemlidir ve bunu bulmak temelde matematiksel bir olgudur. Şu anda bir ve iki boyutlu cisimlerle uğraşmaktayız. Üç boyutlu cisimler en iyi olarak Bölüm 15'teki çok katlı integrallerle çalışılır.

Bir Doğru Üzerindeki Kütleler

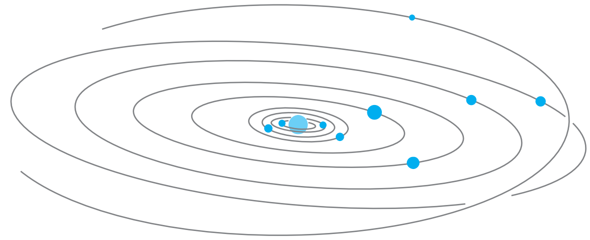
Matematiksel modelimizi aşamalarla geliştireceğiz. İlk aşamamız orijindeki bir destekle desteklenen ve bükülmeyen bir x-ekseni üzerindeki m_1, m_2 ve m_3 kütlelerini hayal etmektir.



Ortaya çıkan sistem dengede olabilir veya olmayabilir. Bu kütlelerin ne kadar büyük olduklarına ve nasıl yerleştirildiklerine bağlıdır.



(a)



(b)

ŞEKİL 6.29 (a) Buzda kayan bu anahtarın hareketi, kütle merkezi düz bir çizgi üzerinde ilerlerken, anahtarın merkezi etrafında döndüğünü farkedene kadar garip görünebilir. (b) Güneş sistemimizdeki gezegenler, asteroidler ve kuyruklu yıldızlar toplu kütle merkezlerinin çevresinde dönerler. (Bu merkez güneşin içindedir.)

Her m_k kütlesi aşağı doğru kütle kere yerçekimi ivmesine eşit bir $m_k g$ kuvveti (m_k'nın ağırlığı) uygular. Bu kuvvetlerden her birinin, bir testereyi kullanırken yaptığınız gibi, ekseni orijin etrafında döndürmeye eğilimi vardır. **Tork** denilen bu döndürme etkisini, $m_k g$ kuvvetini, orijinden uygulama noktasına uzaklık (işaretiyle birlikte) olan x_k ile çarparak ölçeriz. Orijinin solundaki kütleler negatif (saat yönünün tersine) tork uygularlar. Orijinin sağındaki kütleler ise pozitif (saat yönünde) tork uygularlar.

Torkların toplamı sistemin orijin etrafında dönme eğilimini ölçer. Bu toplama **sistem torku** denir.

$$\text{Sistem torku} = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 \tag{1}$$

Ancak ve ancak tork sıfır ise sistem dengeye gelir.

(1) denklemindeki g'yi dışarı çekersek, sistem torkunun

$$\underbrace{g}_{\substack{\text{ortamın}\\ \text{bir özelliği}}} \cdot \underbrace{(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)}_{\substack{\text{sistemin}\\ \text{bir özelliği}}}$$

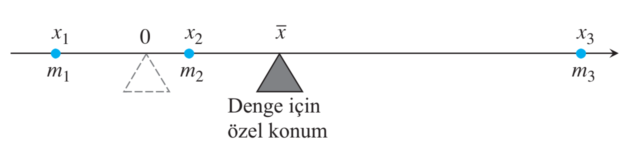
olduğunu görürüz. Yani tork, sistemin içinde bulunduğu ortamın bir özelliği olan g ile sistemin kendisinin bir özelliğini oluşturan ve sistem nerede olursa olsun aynı kalan bir sabit olan $(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$ sayısının çarpımıdır.

$(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$ sayısına **sistemin orijin etrafındaki momenti** denir. Tek tek $m_1 x_1$, $m_2 x_2$, $m_3 x_3$ kütlelerin **momentlerinin** toplamıdır.

$$M_0 = \text{Sistemin orijin etrafında momenti} = \sum m_k x_k .$$

(Daha fazla terim içeren toplamları da hesaba katmak için sigma gösterimi kullanıyoruz.)

Genelde sistemi dengeye getirmek için desteği nereye koyacağımızı, yani hangi $\bar{x}$ noktasına yerleştirirsek torku sıfır yapacağını bilmek isteriz.



Bu özel konumda destek civarındaki her kütlenin torku

$$\bar{x} \text{ civarındaki } m_k\text{'lerin torku} = \begin{pmatrix} m_k\text{'nin } \bar{x}\text{'den} \\ \text{uzaklığı (işaretiyle)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{aşağı yönde} \\ \text{kuvvet} \end{pmatrix}$$

$$= (x_k - \bar{x})m_k g$$

Bu torkların toplamının sıfır olduğunu söyleyen denklemi yazarsak, $\bar{x}$'yi çözebileceğimiz bir denklem elde ederiz:

$$\sum (x_k - \bar{x})m_k g = 0 \qquad \text{Torkların toplamı sıfıra eşittir.}$$

$$g \sum (x_k - \bar{x})m_k = 0 \qquad \text{Toplamlar için Sabitle Çarpım kuralı}$$

$$\sum (m_k x_k - \bar{x} m_k) = 0 \qquad g \text{ ile bölünmüş, } m_k \text{ dağıtılmış durumda.}$$

$$\sum m_k x_k - \sum \bar{x} m_k = 0 \qquad \text{Toplamlar için fark kuralı}$$

$$\sum m_k x_k = \bar{x} \sum m_k \qquad \text{Yeniden düzenlemiş, yine Sabitle Çapım kuralı}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} \qquad \bar{x} \text{ çözülmüş.}$$

Bu son denklem bize $\bar{x}$ 'yi sistemin orijin etrafındaki momentini sistemin toplam kütlesine bölerek bulmamızı söyler:

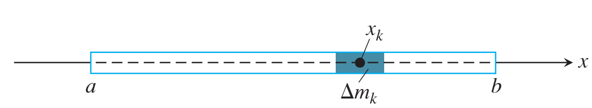
$$\bar{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{\text{orijin etrafında sistem momenti}}{\text{sistemin kütlesi}}$$

$\bar{x}$ noktasına sistemin **kütle merkezi** denir.

Teller ve İnce Çubuklar

Çoğu uygulamada, bir çubuğun veya ince bir metal şeridin kütle merkezini bulmak isteriz. Kütle dağılımını sürekli bir fonksiyon olarak modelleyebileceğimiz böyle durumlarda, formüllerimizdeki toplam işaretleri, şimdi tanımlayacağımız şekilde integrallere dönüşürler.

x-ekseninde $x = a$'dan $x = b$'ye kadar uzanan uzun ince bir şerit düşünün ve $[a, b]$ aralığının bir bölünüşünü kullanarak bunu küçük Δm_k kütlelerine ayırın. k. alt aralıktan herhangi bir x_k noktası seçin.



k.inci parça Δx_k birim uzunluğundadır ve orijinden yaklaşık x_k birim uzaklıkta bulunur. Şimdi üç şey gözlemleyin.

İlk olarak, şeridin kütle merkezi $\bar{x}$, her Δm_k kütlesini x_k noktasına bağlarsak bulacağımız nokta kütle sisteminin kütle merkeziyle neredeyse aynıdır:

$$\bar{x} \approx \frac{\text{sistem momenti}}{\text{sistem kütlesi}}$$

Yoğunluk
Bir malzemenin yoğunluğu birim hacimdeki kütlesidir. Ancak, pratikte, ölçebileceğimiz birimler kullanmayı tercih ederiz. Teller, çubuklar, ince şeritler için birim uzunlukta kütle olarak alırız. Düz plakalar ve tabakalar içinse birim alanda kütle kullanırız.

İkinci olarak, orijin etrafında her şerit parçasının momenti neredeyse $x_k\ \Delta m_k$'dir, dolayısıyla sistem momenti yaklaşık olarak $x_k\ \Delta m_k$'ların toplamıdır:

$$\text{Sistem momenti} \approx \sum x_k\ \Delta m_k.$$

Üçüncü olarak, şeridin x_k'deki yoğunluğu, birimi birim uzunluktaki kütle olarak ifade edilen $\delta(x_k)$ ise ve δ sürekli ise Δm_k yaklaşık olarak $\delta(x_k)\ \Delta x_k$'dir (birim uzunluktaki kütle kere uzunluk):

$$\Delta m_k \approx \delta(x_k)\ \Delta x_k$$

Bu üç gözlemi birleştirirsek aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$\bar{x} \approx \frac{\text{sistem momenti}}{\text{sistem kütlesi}} \approx \frac{\sum x_k\ \Delta m_k}{\sum \Delta m_k} \approx \frac{\sum x_k\ \delta(x_k)\ \Delta x_k}{\sum \delta(x_k)\ \Delta x_k} \qquad (2)$$

(2) denkleminin son pay'ındaki toplam $x\delta(x)$ sürekli fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığında bir Riemann toplamıdır. Paydadaki toplam ise bu aralıkta $\delta(x)$ fonksiyonunun bir Rieman toplamıdır. Şerit daha ince bölündüğünde, (2) denklemindeki yaklaşımların iyileşmesini bekleriz ve bunun sonucu olarak

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\delta(x)\ dx}{\int_a^b \delta(x)\ dx}$$

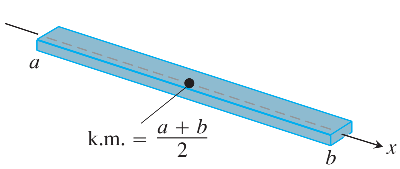
denklemini elde ederiz. $\bar{x}$'yi bulmak için kullanacağımız formül budur.

x- Ekseni Boyunca $\delta(x)$ Yoğunluk Fonksiyonlu İnce Bir Çubuk veya Şeridin Momenti, Kütlesi ve Kütle Merkezi

Orijin etrafında moment: $$M_0 = \int_a^b x\delta(x)\ dx \qquad (3a)$$

Kütle: $$M = \int_a^b \delta(x)\ dx \qquad (3b)$$

Kütle merkezi: $$\bar{x} = \frac{M_0}{M} \qquad (3c)$$



ŞEKİL 6.30 Sabit yoğunluklu düz, ince bir çubuk veya şeridin kütle merkezi uçlarının ortasında bulunur. (Örnek 1)

ÖRNEK 1 Sabit Yoğunluklu Şeritler ve Çubuklar

Sabit yoğunluklu düz, ince bir şerit veya çubuğun ağırlık merkezinin tam orta noktasında olduğunu gösterin.

Çözüm Şeridi x-ekseninin $x = a$'dan $x = b$'ye kadar ki kısmı olarak modelleriz (Şekil 6.30). Amacımız $\bar{x} = (a + b)/2$, yani a ile b arasındaki orta nokta olduğunu göstermektir.

Anahtar yoğunluğun değerinin sabit olmasıdır. Bu, (3) denklemlerindeki integrallerde $\delta(x)$ fonksiyonuna bir sabit olarak bakmamızı (δ adını verin) sağlar ve

$$M_0 = \int_a^b \delta x\, dx = \delta \int_a^b x\, dx = \delta\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b = \frac{\delta}{2}(b^2 - a^2)$$

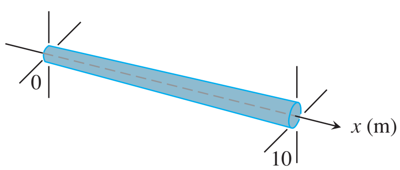
$$M = \int_a^b \delta\, dx = \delta \int_a^b dx = \delta\left[x\right]_a^b = \delta(b - a)$$

$$\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{\frac{\delta}{2}(b^2 - a^2)}{\delta(b - a)}$$

$$= \frac{a + b}{2}$$

$\bar{x}$ formülünde δ'lar sadeleşir.

sonucunu buluruz. ■



ŞEKİL 6.31 Değişken kalınlıklı bir çubuğa değişken yoğunluklu bir çubuk gibi davranabiliriz (Örnek 2).

ÖRNEK 2 Değişken Yoğunluklu Çubuk

Şekil 6.31'de 10 m uzunluğundaki çubuk soldan sağa doğru, yoğunluğu sabit olmak yerine $\delta(x) = 1 + (x/10)$ kg/m olacak şekilde kalınlaşmaktadır. Çubuğun kütle merkezini bulun.

Çözüm Orijin etrafında çubuğun momenti (3a denklemi)

$$M_0 = \int_0^{10} x\delta(x)\, dx = \int_0^{10} x\left(1 + \frac{x}{10}\right) dx = \int_0^{10} \left(x + \frac{x^2}{10}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{30}\right]_0^{10} = 50 + \frac{100}{3} = \frac{250}{3}\ \text{kg}\cdot\text{m}.$$

Moment birimi kütle × uzunluktur.

olarak bulunur. Çubuğun kütlesi ise (3b denklemi)

$$M = \int_0^{10} \delta(x)\, dx = \int_0^{10} \left(1 + \frac{x}{10}\right) dx = \left[x + \frac{x^2}{20}\right]_0^{10} = 10 + 5 = 15\ \text{kg}.$$

olarak elde edilir. Kütle merkezi (3c denklemi)

$$\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{250}{3}\cdot\frac{1}{15} = \frac{50}{9} \approx 5.56\ \text{m}.$$ ■

noktasında bulunmaktadır.

Düzlemdeki Bir Bölgeye Dağılmış Kütleler

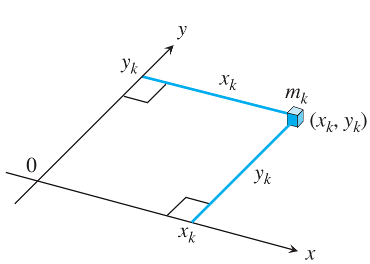
Kütleleri m_k olan ve (x_k, y_k) noktalarına yerleştirilmiş sonlu bir kütle dizisi bulunduğunu varsayalım (Şekil 6.32). Sistemin kütlesi

$$\text{Sistem kütlesi: } M = \sum m_k$$

ile verilir. Her m_k kütlesinin her eksen etrafında bir momenti vardır. x-ekseni etrafındaki momenti $m_k y_k$, y-ekseni etrafındaki momenti $m_k x_k$'dir. İki eksen etrafında tüm sistemin momenti şöyledir:

$$x\text{-ekseni etrafında moment:} \quad M_x = \sum m_k y_k,$$

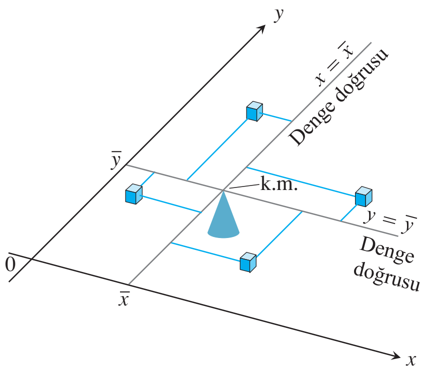
$$y\text{-ekseni etrafında moment:} \quad M_y = \sum m_k x_k.$$



ŞEKİL 6.32 Her m_k kütlesinin her eksen etrafında bir momenti vardır.

Sistemin kütle merkezinin x-koordinatı

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} \qquad (4)$$



ŞEKİL 6.33 İki boyutlu bir kütle dizisi kütle merkezi üzerinde dengelenir.

olarak tanımlanır. $\bar{x}$'nin, tek boyutlu durumda olduğu gibi, bu şekilde seçimiyle sistem $x = \bar{x}$ doğrusu etrafında dengelenir (Şekil 6.33).

Sistemin kütle merkezinin y koordinatı

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k} \qquad (5)$$

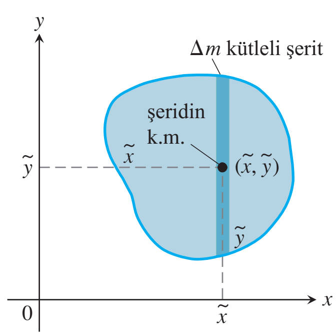
ile tanımlanır. $\bar{y}$'nin bu şekilde seçimiyle sistem $y = \bar{y}$ doğrusu etrafında da dengelenir. Kütlelerin $y = \bar{y}$ doğrusu etrafında uyguladıkları torklar birbirini götürür. Yani, denge söz konusu olduğu sürece, sistem bütün kütlesi tek bir $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasında gibi davranır. Bu noktaya sistemin **kütle merkezi** deriz.

İnce, Düz Plakalar

Çoğu uygulamada, ince, düz bir plakanın kütle merkezini bulmamız gerekir: örneğin bir alüminyum disk veya üçgen bir çelik plakası. Bu gibi durumlarda, kütle dağılımının sürekli olduğunu varsayarız ve $\bar{x}$ ile $\bar{y}$'yi hesaplamada kullandığımız formüllerde sonlu toplamlar yerine integraller bulunur. İntegraller aşağıdaki şekilde ortaya çıkarlar.

xy-düzleminde bir yer kaplayan ve eksenlerden birine paralel inçe şeritlere ayrılmış bir plaka düşünün (Şekil 6.34'teki *y*-ekseni). Tipik bir şeridin kütle merkezi $(\tilde{x}, \tilde{y})$'dadır. Şeridin kütlesi Δm'ye sanki $(\tilde{x}, \tilde{y})$'da yoğunlaşmış gibi bakarız. Bu durumda şeridin *y*-ekseni etrafındaki momenti $\tilde{x}\,\Delta m$ olur. Şeridin *x*-ekseni etrafındaki momenti $\tilde{y}\,\Delta m$'dir. (4) ve (5) denklemleri

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum \tilde{x}\,\Delta m}{\sum \Delta m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum \tilde{y}\,\Delta m}{\sum \Delta m}$$



ŞEKİL 6.34 *y*-eksenine paralel şeritlere ayrılmış bir plaka. Tipik bir şeridin her eksen boyunca uyguladığı moment, kütlesi Δm şeridin kütle merkezi $(\tilde{x}, \tilde{y})$'da toplanmış olsaydı uygulayacağı momenttir.

halini alır. Tek boyutlu durumda olduğu gibi, toplamlar integrallerin Riemann toplamlarıdır ve plakanın ayrıldığı şeritler darlaştıkça limit değer olarak bu integrallere yaklaşırlar. Bu integralleri sembolik olarak şöyle yazarız:

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\,dm}{\int dm} \qquad \text{ve} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\,dm}{\int dm}$$

xy-Düzleminde Bir Bölge Kaplayan İnce bir Plakanın Momentleri, Kütlesi ve Kütle Merkezi

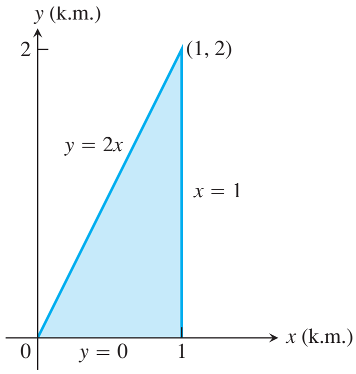
x-ekseni etrafında moment: $M_x = \int \tilde{y}\,dm$

y-ekseni etrafında moment: $M_y = \int \tilde{x}\,dm$ (6)

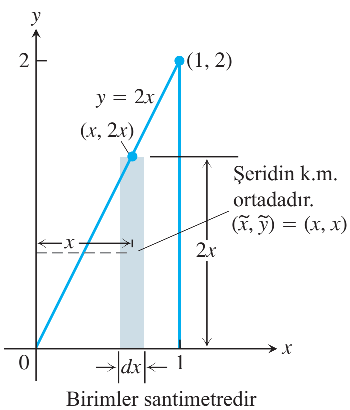
Kütle: $M = \int dm$

Kütle merkezi: $\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$

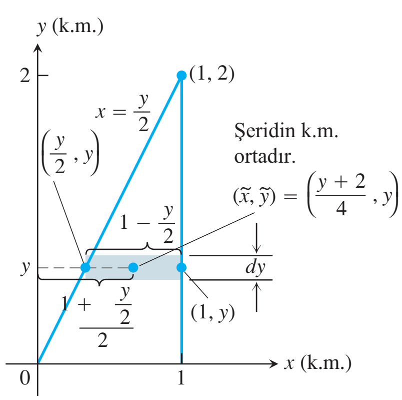
Bu integralleri hesaplamak için, plakayı koordinat düzleminde düşünür ve koordinat eksenlerinden birine paralel bir kütle şeridi çizeriz. Sonra, şeridin kütlesi *dm* ve şeridin kütle merkezinin $(\tilde{x}, \tilde{y})$ koordinatlarını *x* veya *y* cinsinden ifade ederiz. Son olarak, $\tilde{y}\,dm$, $\tilde{x}\,dm$ ve *dm*'yi plakanın düzlemdeki konumunun belirlediği integrasyon sınırları arasında integre ederiz.



ŞEKİL 6.35 Örnek 3'teki plaka.



ŞEKİL 6.36 Örnek 3'teki plakayı dikey şeritlerle modellemek.



ŞEKİL 6.37 Örnek 3'teki plakayı yatay şeritlerle modellemek.

ÖRNEK 3 Sabit-Yoğunluklu Plaka

Şekil 6.35'te gösterilen üçgen plakanın $\delta = 3\ \text{g}/\text{cm}^2$'lik sabit bir yoğunluğu vardır.

(a) Plakanın y-ekseni etrafındaki momenti M_y'yi,

(b) plakanın kütlesi M'yi ve

(c) plakanın kütle merkezinin (k.m.) x-koordinatını bulun.

Çözüm

Yöntem 1: Dikey şeritler (Şekil 6.36)

(a) M_y momenti: Tipik dikey şeridin özellikleri şunlardır:

kütle merkezi (k.m.) : $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, x)$

uzunluk: $2x$

genişlik: dx

alan: $dA = 2x\, dx$

kütle: $dm = \delta\, dA = 3 \cdot 2x\, dx = 6x\, dx$

k.m.'nin y-ekseninden uzaklığı: $\tilde{x} = x$

Şeridin y-ekseni etrafındaki momenti şudur:

$$\tilde{x}\, dm = x \cdot 6x\, dx = 6x^2\, dx.$$

Dolayısıyla plakanın y-ekseni etrafındaki momenti şöyle bulunur:

$$M_y = \int \tilde{x}\, dm = \int_0^1 6x^2\, dx = 2x^3\Big]_0^1 = 2\ \text{g} \cdot \text{cm}$$

(b) Plakanın kütlesi:

$$M = \int dm = \int_0^1 6x\, dx = 3x^2\Big]_0^1 = 3\ \text{g}$$

(c) Plakanın kütle merkezinin x-koordinatı:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2\ \text{g} \cdot \text{cm}}{3\ \text{g}} = \frac{2}{3}\ \text{cm}$$

Benzer bir hesapla, M_x ve $\bar{y} = M_x/M$'yi bulabiliriz.

Yöntem 2: Yatay şeritler (Şekil 6.37)

(a) M_y momenti: Tipik bir yatay şeridin kütle merkezinin y-koordinatı y'dir (şekle bakın), dolayısıyla

$$\tilde{y} = y.$$

olur. x-koordinatı üçgenin ortasındaki noktanın x-koordinatıdır. Bu onu $y/2$ (şeridin soldaki x-değeri) ile 1'in (şeridin sağdaki x-değeri) ortalaması yapar:

$$\tilde{x} = \frac{(y/2) + 1}{2} = \frac{y}{4} + \frac{1}{2} = \frac{y + 2}{4}.$$

Ayrıca elimizde şunlar vardır:

uzunluk: $1 - \frac{y}{2} = \frac{2-y}{2}$

genişlik: dy

alan: $dA = \frac{2-y}{2}\,dy$

kütle: $dm = \delta\, dA = 3 \cdot \frac{2-y}{2}\,dy$

k.m.'nin y-ekseninden uzaklığı: $\tilde{x} = \frac{y+2}{4}$

Şeridin y-ekseni etrafındaki momenti şöyledir:

$$\tilde{x}\,dm = \frac{y+2}{4} \cdot 3 \cdot \frac{2-y}{2}\,dy = \frac{3}{8}(4-y^2)\,dy$$

Plakanın y-ekseni etrafındaki momenti ise şudur:

$$M_y = \int \tilde{x}\,dm = \int_0^2 \frac{3}{8}(4-y^2)\,dy = \frac{3}{8}\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{3}{8}\left(\frac{16}{3}\right) = 2\ \text{g} \cdot \text{cm}$$

(b) Plakanın kütlesi:

$$M = \int dm = \int_0^2 \frac{3}{2}(2-y)\,dy = \frac{3}{2}\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \frac{3}{2}(4-2) = 3\ \text{g}$$

(c) Plakanın kütle merkezinin x-koordinatı:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2\ \text{g} \cdot \text{cm}}{3\ \text{g}} = \frac{2}{3}\ \text{cm}$$

Benzer bir hesaplamayla, M_x'i ve $\bar{y}$'yi bulabiliriz. ■

Bir Tabanın Kütle Merkezi Nasıl Bulunur?

1. Plakanın xy-düzleminde resmini çizin.
2. Koordinat eksenlerinden birine paralel bir kütle şeridi çizin ve boyutlarını bulun.
3. Şeridin kütlesi dm'yi ve kütle merkezi $(\tilde{x}, \tilde{y})$'yi bulun.
4. $\tilde{y}\,dm$, $\tilde{x}\,dm$ ve dm'yi integre ederek, M_x, M_y, ve M'yi bulun.
5. Momentleri kütleye bölerek $\bar{x}$ ve $\bar{y}$'yi bulun.

İnce, düz bir plakanın kütle dağılımının bir simetri ekseni varsa, kütle merkezi bu eksen üzerinde olacaktır. İki simetri ekseni bulunuyorsa, kütle merkezi ikisinin kesişimindedir. Bunlar işimizi basitleştiren bilgilerdir.

ÖRNEK 4 Sabit-Yoğunluklu Plaka

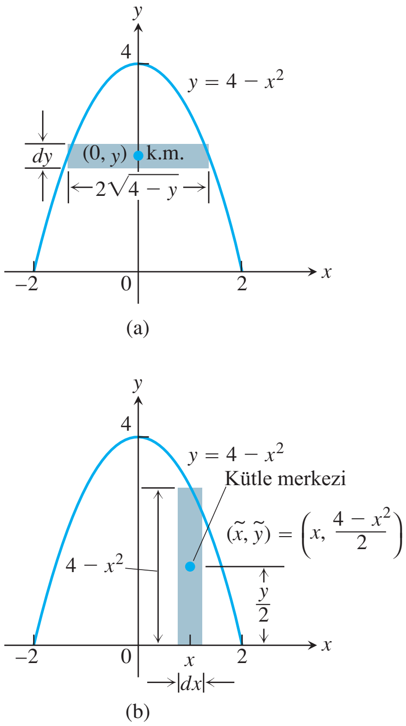
Sabit δ yoğunluklu, üstten $y = 4 - x^2$ parabolü ve alttan x-ekseniyle sınırlı bölgeyi kaplayan ince bir plakanın kütle merkezini bulun (Şekil 6.38).

Çözüm Plaka y-ekseni etrafında simetrik ve yoğunluğu sabit olduğu için, kütle dağılımı y-ekseni etrafında simetriktir ve kütle merkezi y-ekseninde bulunur. Bu $\bar{x} = 0$ anlamına gelir. Geriye $\bar{y} = M_x/M$'yi bulmak kalır.

Yatay şeritlerlerle bir deneme hesabı (Şekil 6.38a) aşağıdaki elverişsiz integrali verir:

$$M_x = \int_0^4 2\delta y\sqrt{4-y}\,dy.$$

Bundan dolayı, kütle dağılımını dikey şeritlerle modelleriz (Şekil 6.38b).



ŞEKİL 6.38 Örnek 4'teki plakayı dikey şeritlerle (a) modellemek zahmetli bir integrasyona neden olur, dolayısıyla yatay şeritlerle (b) modelleriz.

Tipik bir yatay şeridin özellikleri şöyledir:

kütle merkezi (k.m.) : $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(x, \dfrac{4 - x^2}{2}\right)$

uzunluk: $4 - x^2$

genişlik: dx

alan: $dA = (4 - x^2)\, dx$

kütle: $dm = \delta\, dA = \delta(4 - x^2)\, dx$

k.m.'nin x-ekseninden uzaklığı: $\tilde{y} = \dfrac{4 - x^2}{2}$

Şeridin x-ekseni etrafındaki momenti şöyledir:

$$\tilde{y}\, dm = \frac{4 - x^2}{2} \cdot \delta(4 - x^2)\, dx = \frac{\delta}{2}(4 - x^2)^2\, dx$$

Dolayısıyla plakanın x-ekseni etrafındaki momenti şöyle bulunur:

$$M_x = \int \tilde{y}\, dm = \int_{-2}^{2} \frac{\delta}{2}(4 - x^2)^2\, dx$$

$$= \frac{\delta}{2}\int_{-2}^{2}(16 - 8x^2 + x^4)\, dx = \frac{256}{15}\delta \qquad (7)$$

Plakanın kütlesi şudur:

$$M = \int dm = \int_{-2}^{2} \delta(4 - x^2)\, dx = \frac{32}{3}\delta \qquad (8)$$

Dolayısıyla,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{(256/15)\,\delta}{(32/3)\,\delta} = \frac{8}{5}$$

olur. Plakanın kütle merkezi

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{5}\right)$$

noktasındadır. ■

ÖRNEK 5 Değişken Yoğunluklu Plaka

Örnek 4'teki plakanın kütle merkezini (x, y)'deki yoğunluk $\delta = 2x^2$ yani noktanın y-eksenine uzaklığının karesinin iki katı olması durumunda bulun.

Çözüm Kütle dağılımı hala y-ekseni etrafında simetriktir, dolayısıyla $\bar{x} = 0$ olur. $\delta = 2x^2$ ile, (7) ve (8) denklemleri

$$M_x = \int \tilde{y}\, dm = \int_{-2}^{2} \frac{\delta}{2}(4 - x^2)^2\, dx = \int_{-2}^{2} x^2(4 - x^2)^2\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (16x^2 - 8x^4 + x^6)\, dx = \frac{2048}{105} \tag{7'}$$

$$M = \int dm = \int_{-2}^{2} \delta(4 - x^2)\, dx = \int_{-2}^{2} 2x^2(4 - x^2)\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (8x^2 - 2x^4)\, dx = \frac{256}{15} \tag{8'}$$

halini alırlar. Dolayısıyla,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{2048}{105} \cdot \frac{15}{256} = \frac{8}{7}$$

olur. Plakanın yeni kütle merkezi

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{7}\right)$$ ■

noktasındadır.

ÖRNEK 6 Sabit Yoğunluklu Tel

Sabit δ yoğunluklu a yarıçaplı bir yarım çember şeklindeki telin kütle merkezini bulun.

Çözüm Teli $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yarım çemberiyle modelleriz (Şekil 6.39). Kütle dağılımı y-ekseni etrafında simetriktir, dolayısıyla $\bar{x} = 0$ olur. $\bar{y}$'yi bulmak için, teli kısa parçalara böldüğümüzü düşünürüz. Tipik bir parçanın özellikleri şöyledir (Şekil 6.39a):

uzunluk: $ds = a\, d\theta$

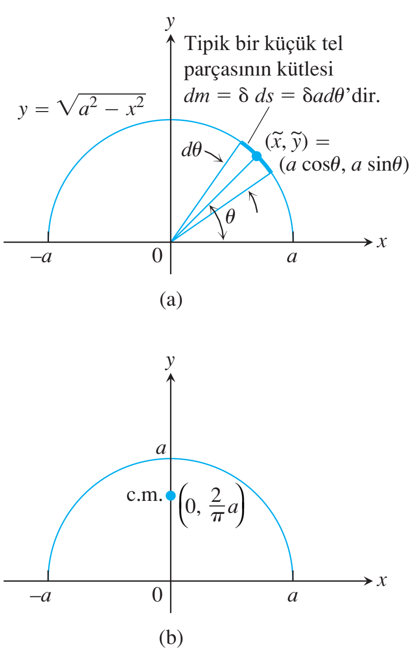
kütle: $dm = \delta\, ds = \delta a\, d\theta$ — birim uzunluktaki kütle kere uzunluk

k.m.'nin x-eksenine uzaklığı: $\tilde{y} = a \sin\theta$.

Dolayısıyla,

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dm}{\int dm} = \frac{\int_0^{\pi} a \sin\theta \cdot \delta a\, d\theta}{\int_0^{\pi} \delta a\, d\theta} = \frac{\delta a^2\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}}{\delta a \pi} = \frac{2}{\pi} a$$

buluruz. Kütle merkezi simetri ekseni üzerinde $(0, 2a/\pi)$, noktasında, orijinden tele olan uzaklığın yaklaşık üçte ikisinde bulunmaktadır (Şekil 6.39b).



ŞEKİL 6.39 Örnek 6'teki yarım çember şeklindeki tel. (a) Kütle merkezini bulmakta kullanılan boyut ve değişkenler. (b) Kütle merkezi tel üzerinde değildir.

Merkezler

Yoğunluk fonksiyonu sabitken, $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ formüllerinin pay ve paydalarından sadeleşir. Bu bölümdeki neredeyse tüm örneklerde durum böyleydi. $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ söz konusu olduğu sürece, $\delta = 1$ bile olabilirdi. Yani, yoğunluk sabitken, kütle merkezinin konumu cismin yapıldığı malzemenin değil, cismin geometrisinin bir özelliğidir. Böyle durumlarda, mühendisler kütle merkezine, "Bir üçgenin veya katı koninin merkezini bulun" derken olduğu gibi, şeklin **merkezi** diyebilirler. Bunun için δ'yı bire eşitleyin ve $\bar{x}$ ve $\bar{y}$'yi daha önceki gibi, momentleri kütleye bölerek, hesaplayın.

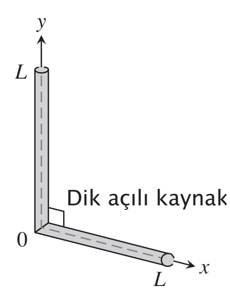
ALIŞTIRMALAR 6.4

İnce Çubuklar

1. 80 lb'lik bir çocukla 100 lb'lik bir çocuk bir tahtıravellide dengede durmaktadırlar. 80 lb'lik çocuk destekten 5 ft uzaklıktadır. 100 lb'lik çocuğun destekten uzaklığı nedir?

2. Bir kütüğün uçları iki teraziye konulmuştur. Bir terazi 100 kg, diğeri 200 kg okumaktadır. Kütüğün kütle merkezi nerededir?

3. Uzunlukları eşit iki ince çelik çubuğun uçları kaynakla birleştirilerek, dik açılı bir çerçeve yapılmıştır. Çerçevenin kütle merkezinin yerini bulun. (*İpucu*: Her çubuğun kütle merkezi nerededir?)



4. İki çelik çubuğun uçalarını kaynaklayarak dik açılı bir çerçeve yapıyorsunuz. Çubuklardan birinin uzunluğu diğerinin iki katıdır. Çerçevenin kütle merkezi nerededir? (*İpucu*: Her çubuğun kütle merkezi nerededir?)

5-12 alıştırmalarında x-ekseninde değişik aralıklarda bulunan ince çubukların yoğunluk fonksiyonları verilmektedir. (3a-c) denklemlerini kullanarak, her çubuğun orijin etrafındaki momentini, kütlesini ve kütle merkezini bulun.

5. $\delta(x) = 4, \quad 0 \le x \le 2$

6. $\delta(x) = 4, \quad 1 \le x \le 3$

7. $\delta(x) = 1 + (x/3), \quad 0 \le x \le 3$

8. $\delta(x) = 2 - (x/4), \quad 0 \le x \le 4$

9. $\delta(x) = 1 + \left(1/\sqrt{x}\right), \quad 1 \le x \le 4$

10. $\delta(x) = 3(x^{-3/2} + x^{-5/2}), \quad 0.25 \le x \le 1$

11. $\delta(x) = \begin{cases} 2 - x, & 0 \le x < 1 \\ x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

12. $\delta(x) = \begin{cases} x + 1, & 0 \le x < 1 \\ 2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Sabit Yoğunluklu İnce Plakalar

13–24 alıştırmalarında, verilen bölgede bulunan sabit δ yoğunluklu ince plakanın kütle merkezini bulun.

13. $y = x^2$ parabalü ve $y = 4$ doğrusu ile sınırlanmış bölge.

14. $y = 25 - x^2$ parabolü ve x-ekseni ile sınırlanmış bölge.

15. $y = x - x^2$ parabolü ve $y = -x$ doğrusu ile sınırlanmış bölge.

16. $y = x^2 - 3$ ve $y = -2x^2$ parabolleriyle sınırlanmış bölge.

17. y-ekseni ve $x = y - y^3,\ 0 \le y \le 1$ eğrisiyle sınırlanmış bölge.

18. $x = y^2 - y$ eğrisi ve $y = x$ doğrusuyla sınırlanmış bölge.

19. x-ekseni ve $y = \cos x, \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2$ parabolleriyle sınırlanmış bölge.

20. x-ekseni ve $y = \sec^2 x$, $-\pi/4 \le x \le \pi/4$ eğrisiyle sınırlanmış bölge.

21. $y = 2x^2 - 4x$ ve $y = 2x - x^2$ parabolleriyle sınırlanmış bölge.

22. **a.** Birinci dörtte bir bölgeden $x^2 + y^2 = 9$ çemberi ile kesilmiş bölge.

b. x-ekseni ve $y = \sqrt{9 - x^2}$ yarım çemberiyle sınırlanmış bölge.

Yanıtınızı (a) şıkkındaki yanıtla karşılaştırın.

23. Birinci dörtte bir dölgede $x^2 + y^2 = 9$ çemberi ve $x = 3$ ve $y = 3$ doğruları arasında kalan "üçgen" şeklindeki bölge. (*İpucu*: Alanı bulmak için geometri kullanın.)

24. Üstten $y = 1/x^3$ eğrisi, alttan $y = -1/x^3$ eğrisi ve soldan ve sağdan $x = 1$ ve $x = a > 1$ doğrularıyla sınırlanmış bölge. Ayrıca $\lim_{a\to\infty} \bar{x}$'yi de bulun.

Değişken Yoğunluklu İnce Plakalar

25. Plakanın (x, y) noktasındaki yoğunluğu $\delta(x) = x^2$ ise, x-ekseni ile $y = 2/x^2$, $1 \le x \le 2$, eğrisi arasında kalan ince plakanın kütle merkezini bulun.

26. Plakanın (x, y) noktasındaki yoğunluğu $\delta(x) = 12x$ ise, alttan $y = x^2$ parabolü ve üstten $y = x$ doğrusuyla sınırlı bölgeyi kaplayan ince plakanın kütle merkezini bulun.

27. $y = \pm 4/\sqrt{x}$ eğrileri ve $x = 1$ ve $x = 4$ doğrularıyla sınırlı bölge y-ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretiliyor.

a. Dönel cismin hacmini bulun.

b. Bölgeyi kaplayan ince plakanın (x, y) noktasındaki yoğunluğu $\delta(x) = 1/x$ ise plakanın kütle merkezini bulun.

c. Plakayı çizin ve çiziminizde kütle merkezini belirtin.

28. $y = 2/x$ eğrisi ve $x = 1$'den $x = 4$'e kadar x-ekseni ile sınırlı bölge x-ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretiliyor.

a. Dönel cismin hacmini bulun.

b. Bölgeyi kaplayan ince plakanın (x, y) noktasındaki yoğunluğu $\delta(x) = \sqrt{x}$ ise plakanın kütle merkezini bulun.

c. Plakayı çizin ve çiziminizde kütle merkezini belirtin.

Üçgenlerin Merkezleri

29. **Bir üçgenin merkezi üçgenin kenar ortaylarının kesişim noktasındadır** (*Şekil 6.40a*) Bir üçgenin her kenarından karşısındaki köşeye olan uzaklığın üçte birinde bulunan noktanın üçgenin üç kenarortayının kesiştiği nokta olduğunu hatırlayabilirsiniz. Üçgenin merkezinin de kenar ortayların kesişim noktasında olduğu-

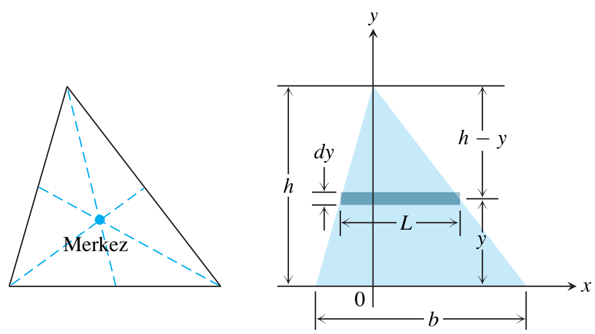
nu, merkezin de kenarlardan köşelere olan uzaklığın üçte birinde olduğunu göstererek ispatlayın. Bunu yapmak için, aşağıdaki adımları izleyin.

i. Üçgenin bir kenarını Şekil 6.40b'deki gibi x-eksenine yerleştirin. dm'yi L ve dy cimsinden ifade edin.

ii. Benzer üçgenler kullanarak $L = (b/h)(h - y)$ olduğunu gösterin. L'nin bu ifadesini dm formülünde yerine koyun.

iii. $\bar{y} = h/3$ olduğunu gösterin.

iv. Diğer kenarlar için de aynısını uygulayın.



(a) (b)

ŞEKİL 6.40 Alıştırma 29'daki üçgen. (a) Kütle merkezi. (b) Kütle merkezini bulmak için kullanılacak boyut ve değişkenler.

Alıştırma 29'un sonuçlarını kullanarak 30–34 alıştırmalarında köşeleri verilen üçgenlerin kütle merkezlerini bulun. (*İpucu*: Önce her üçgeni çizin.)

30. $(-1, 0), (1, 0), (0, 3)$

31. $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$

32. $(0, 0), (a, 0), (0, a)$

33. $(0, 0), (a, 0), (0, b)$

34. $(0, 0), (a, 0), (a/2, b)$

İnce Teller

35. Sabit yoğunluk $x = 0$'dan $x = 2$'ye kadar $y = \sqrt{x}$ eğrisi üzerinde bulunan sabit yoğunluklu telin x-ekseni etrafındaki momentini bulun.

36. Sabit yoğunluk $x = 0$'dan $x = 1$'e kadar $y = x^3$ eğrisi üzerinde bulunan sabit yoğunluklu telin x-ekseni etrafındaki momentini bulun.

37. Değişken yoğunluk Örnek 6'daki telin yoğunluğunun $\delta = k \sin\theta$ olduğunu varsayın (k sabit). Kütle merkezini bulun.

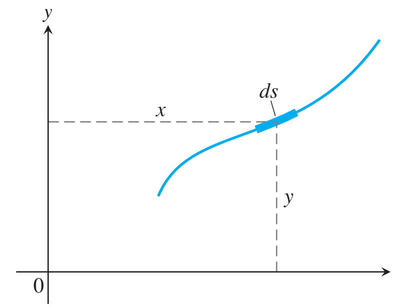
38. Değişken yoğunluk Örnek 6'daki telin yoğunluğunun $\delta = 1 + k|\cos\theta|$ olduğunu varsayın (k sabit). Kütle merkezini bulun.

Mühendislik Formülleri

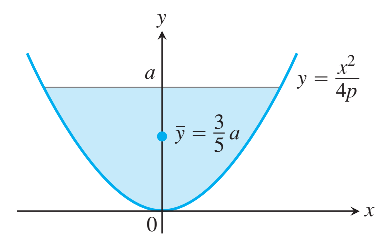
39–42 alıştırmalarındaki ifadeleri ve formülleri doğrulayın.

39. Düzlemde türevlenebilir bir eğrinin merkezinin koordinatları şunlardır:

$$\bar{x} = \frac{\int x\,ds}{\text{uzunluk}}, \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,ds}{\text{uzunluk}}$$

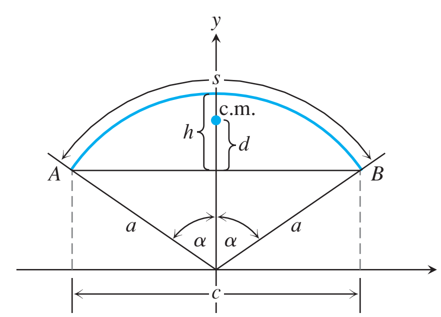


40. $y = x^2/(4p)$ denkleminde $p > 0$'ın değeri ne olursa olsun, aşağıda gösterilen parabolik parçanın merkezinin y-koordinatı $\bar{y} = (3/5)a$'dır.



41. Merkezleri orijinde bulunan ve y-ekseni etrafında simetrik olan çembersel yaylar şeklindeki sabit yoğunluklu teller ve ince çubukların kütle merkezlerinin y-koordinatı şöyledir:

$$\bar{y} = \frac{a \sin\alpha}{\alpha} = \frac{ac}{s}.$$



42. (*Alıştırma 41'in devamı*)

a. α küçük olduğunda, merkezden AB kirişine olan d uzaklığının yaklaşık olarak $2h/3$ olduğunu (şekildeki gösterimle) aşağıdaki adımları izleyerek gösterin.

i.

$$\frac{d}{h} = \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \alpha\cos\alpha} \qquad (9)$$

olduğunu gösterin.

T **ii.**

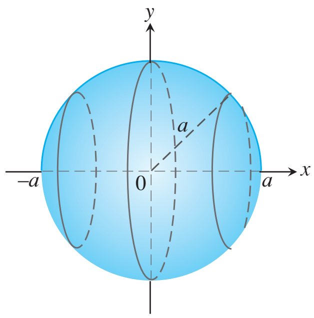
$$f(\alpha) = \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \alpha\cos\alpha}$$

fonksiyonunun grafiğini çizin ve trace özelliğini kullanarak $\lim_{\alpha\to 0^+} f(\alpha) \approx 2/3$ olduğunu gösterin.

b. Hata (d ile $2h/3$ arasındaki fark) 45°'den büyük açılar için bile küçüktür. Bunu (9) denkleminin sağ tarafını $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ ve 1.0 radyan için hesaplayarak kendiniz görün.

6.5 Dönel Yüzeylerin Alanları ve Pappus Teoremleri

İp atlarken, ip çevrenizde bir yüzey tarar, dönel yüzey olarak adlandırılan bir yüzey. Tahmin edebileceğiniz gibi, bu yüzeyin alanı ipin uzunluğuna ve ipin her parçasının dönme ekseninden ne kadar uzağa gittiğine bağlıdır. Bu bölümde dönel yüzeylerin alanlarını tanımlıyoruz. Daha karmaşık yüzeylerin alanları Bölüm 16'da verilecektir.

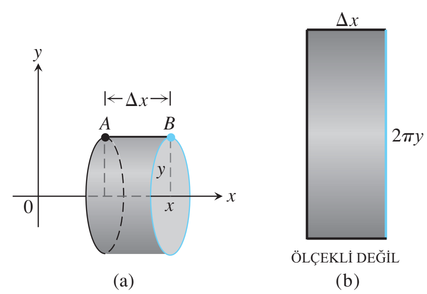


ŞEKİL 6.41 Merkezi orijinde olan a yarıçaplı $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yarı çemberini döndürmek alanı $4\pi a^2$ olan küresel bir yüzey üretir.

Yüzey Alanı Tanımlamak

Dönel yüzeyin alanı tanımının klasik geometrideki kürelerin, dairesel silindirlerin ve konilerin yüzey alanları için bilinen sonuçlarla uyumlu olmasını isteriz. Dolayısıyla, yukarıdaki atlama ipi, x-ekseni etrafında döndürülen a yarıçaplı bir yarı çember şeklini alırsa (Şekil 6.41), yüzey alanı $4\pi a^2$ olan bir küre üretir.

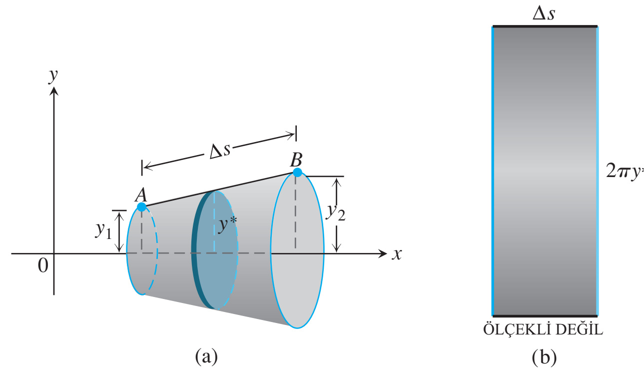
Genel eğrileri ele almadan önce, yatay ve eğimli doğru parçalarının x-ekseni etrafında döndürülmeleri ile başlıyoruz. Uzunluğu Δx olan AB doğru parçasını (Şekil 6.42a) x-ekseni etrafında döndürürsek yüzey alanı $2\pi y\Delta x$ olan bir silindir üretiriz. Bu alan, kenar uzunlukları Δx ve $2\pi y$ olan bir dikdörtgenin alanı ile aynıdır (Şekil 6.42b). $2\pi y$ uzunluğu AB doğrusu üzerindeki (x, y) noktasının x-ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen y yarıçaplı çemberin çevresidir.



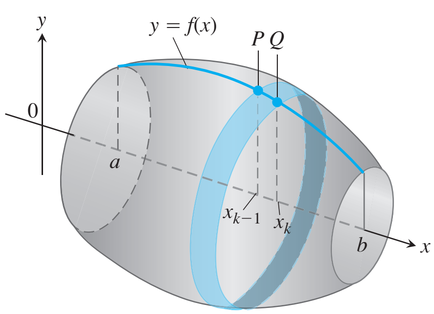
ŞEKİL 6.42 (a) Uzunluğu Δx olan yatay AB doğru parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen silindirik yüzeyin alanı $2\pi y\Delta x$ dir. (b) Silindirik yüzeyin kesilip açılmış hali, bir dikdörtgen.

AB doğru parçasının uzunluğunun Δs olduğunu ve yatay olmak yerine eğimli olduğunu varsayın. Bu defa AB doğru parçası x-ekseni etrafında döndürüldüğünde bir kesik koni elde edilir Şekil (6.43a). Klasik geometriden, bu kesik koninin yüzey alanı, eğimli AB doğru parçasının x-ekseninden ortalama yüksekliği $y^* = (y_1 + y_2)/2$ olmak üzere, $2\pi y^* \Delta s$'dir. Bu yüzey alanı, kenar uzunlukları Δs ve $2\pi y^*$ olan bir dikdörtgenin alanı ile aynıdır (Şekil 6.43b).

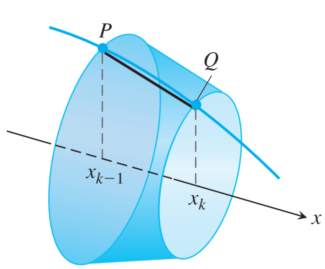
Daha genel eğrilerin x-ekseni etrafında döndürülmeleri ile süpürülen yüzeylerin alanlarını tanımlamak için bu geometrik prensipleri kullanalım. Negatif olmayan ve sürekli bir $y = f(x)$, $a \le x \le b$ fonksiyonunun grafiğinin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile süpürülen yüzeyin alanını bulmak istediğimizi varsayalım. Her zamanki gibi, $[a, b]$ kapalı aralığının bir bölünüşünü alırız ve bölünüş noktaları yardımıyla grafiği kısa yaylara ayırırız. Şekil 6.44'te tipik bir PQ yayı ve f'nin grafiğinin bir parçası olarak süpürdüğü bant görülmektedir.



ŞEKİL 6.43 (a) Uzunluğu Δs olan eğimli AB doğru parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen kesik koninin alanı $2\pi y^* \Delta s$ dir. (b) AB doğru parçasının x-ekseninden ortalama yüksekliği $y^* = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, için, dikdörtgenin alanı.



ŞEKİL 6.44 Negatif olmayan bir $y = f(x)$, $a \le x \le b$, fonksiyonunun grafiğinin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen yüzey. Yüzey, PQ yayının süpürdüğü bant gibi bantların bir birleşimidir.



ŞEKİL 6.45 P ve Q noktalarını birleştiren doğru parçası bir kesik koni süpürür.

PQ yayı x-ekseni etrafında dönerken, P ve Q noktalarını birleştiren doğru parçası ekseni x-ekseninde bulunan bir kesik koni süpürür (Şekil 6.45). Bu kesik koninin yüzey alanı, PQ yayı tarafından süpürülen bant'ın yüzey alanına yaklaşır. Şekil 6.45'te gösterilen kesik koninin yüzey alanı, P ve Q noktalarını birleştiren doğru parçasının x-ekseninden ortalama yüksekliği y^* ve uzunluğu L (önceki gibi) olmak üzere, $2\pi y^* L$'dir. $f \ge 0$ olduğundan, Şekil 6.46'dan, doğru parçasının ortalama yüksekliğinin $y^* = (f(x_{k-1}) + f(x_k))/2$ olduğunu ve uzunluğun $L = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$ olduğunu görürüz. Bu nedenle,

$$\text{Kesik koni yüzey alanı} = 2\pi \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$$= \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

dir.

PQ yayı gibi yayların süpürdükleri bantların alanlarının toplamı olan orijinal yüzey alanına, kesik konilerin alanlarının toplamı olan

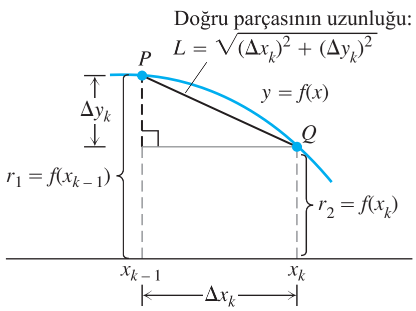
$$\sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \tag{1}$$

ile yaklaşımda bulunulur. $[a, b]$'nin bölünüşünün noktaları arttıkça yaklaşımın iyileşmesini bekleriz. Üstelik, f fonksiyonu türevlenebilir ise, Ortalama Değer Teoremine göre eğri üzerinde P ve Q noktaları arasında teğetin PQ doğru parçasına paralel olduğu bir $(c_k, f(c_k))$ noktası vardır (Şekil 6.47). Bu noktada

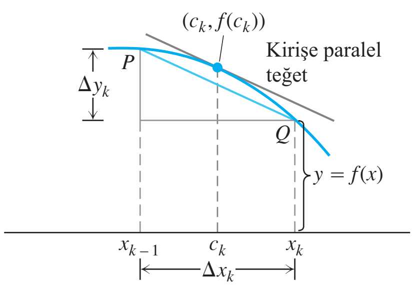
$$f'(c_k) = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}$$

$$\Delta y_k = f'(c_k)\,\Delta x_k$$

dir.



ŞEKİL 6.46 PQ yayı ve doğru parçası ile eşlenen boyutlar.



ŞEKİL 6.47 f düzgün ise, Ortalama Değer Teoremi, teğetin PQ doğru parçasına paralel olduğu bir c_k noktasının varlığını garanti eder.

Δy_k yerine bu dönüşümü yapmakla (1) Denklemi

$$\sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k)\,\Delta x_k)^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\,\Delta x_k \qquad (2)$$

halini alır. Bu toplamlar herhangi bir fonksiyonun Riemann toplamları değildir çünkü, x_{k-1}, x_k ve c_k noktaları aynı değildir. Ancak, ileri analizden bir teorem şunu garanti eder: $[a, b]$'nin bölünüşünün normu sıfıra giderken (2) Denklemindeki toplamlar

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

integraline yakınsarlar. Bu nedenle bu integrali, f fonksiyonunun a'dan b'ye kadar grafiğinin süpürdüğü yüzeyin alanı olarak tanımlarız.

TANIM ***x*-Ekseni Etrafında Dönme İçin Yüzey Alanı**

$f(x) \geq 0$ fonksiyonu $[a, b]$'de sürekli olarak türevlenebilirse, $y = f(x)$ eğrisini x-ekseni etrafında döndürerek üretilen yüzeyin **alanı**

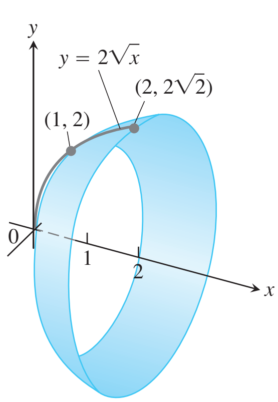
$$S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \qquad (3)$$

dir.

(3) Denklemindeki karekök, Bölüm 6.3 Denklem (2)'de, yüzeyi üreten eğrinin uzunluğu formülünde gözüken karekökle aynıdır.

ÖRNEK 1 Yüzey Alanı Formülünü Uygulamak

$y = 2\sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 2$, eğrisinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin alanını bulun (Şekil 6.48).



ŞEKİL 6.48 Örnek 1'de bu yüzeyin alanını hesaplıyoruz

Çözüm

$$S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad \text{Denk. (3)}$$

formülünü

$$a = 1, \qquad b = 2, \qquad y = 2\sqrt{x}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

alarak hesaplarız. Bu değerlerle, alan şu şekilde bulunur:

$$S = \int_1^2 2\pi \cdot 2\sqrt{x}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\,dx = 4\pi\int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx$$

$$= 4\pi \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big]_1^2 = \frac{8\pi}{3}\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right).$$ ■

y-Ekseni Etrafında Dönme

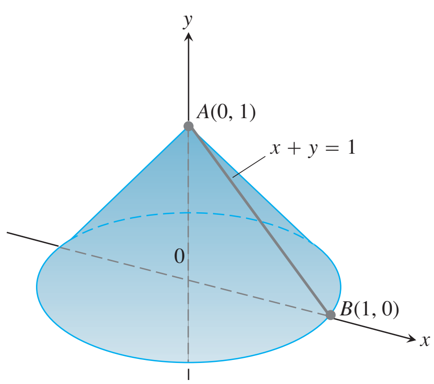
y-ekseni etrafında dönme için, (3) denkleminde *x* yerine *y* yazarız.

y-Ekseni Etrafında Dönme İçin Yüzey Alanı

$x = g(y) \geq 0$, $[c, d]$'de sürekli olarak türevlenebilirse, $x = g(y)$ eğrisini *y*-ekseni etrafında döndürerek üretilen yüzeyin alanı

$$S = \int_c^d 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1 + (g'(y))^2}\,dy \qquad (4)$$

dir.



ŞEKİL 6.49 *AB* doğru parçasını *y*-ekseni etrafında döndürmek yanal yüzey alanını iki farklı şekilde hesaplayabileceğimiz bir koni oluşturur (Örnek 2).

ÖRNEK 2 y-Ekseni Etrafında Dönme İçin Alan Bulmak

$x = 1 - y$, $0 \leq y \leq 1$, doğru parçası *y*-ekseni etrafında döndürülerek Şekil 6.49'daki koni üretiliyor. Yanal yüzey alanını bulun (taban alanı hariç).

Çözüm Bu bir geometri formülüyle kontrol edebileceğimiz bir hesaptır.

$$\text{Yanal yüzey alanı} = \frac{\text{taban çevresi}}{2} \times \text{yanal ayırt uzunluğu} = \pi\sqrt{2}.$$

(4) denkleminin nasıl aynı sonucu verdiğini görmek için

$$c = 0, \qquad d = 1, \qquad x = 1 - y, \qquad \frac{dx}{dy} = -1,$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

alır ve denklemi hesaplarız:

$$S = \int_c^d 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_0^1 2\pi(1-y)\sqrt{2}\,dy$$

$$= 2\pi\sqrt{2}\left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \pi\sqrt{2}$$

Sonuçlar, olması gerektiği gibi, birbirini tutmaktadır. ■

Parametrize Eğriler

Döndürme hangi koordinat ekseni etrafında yapılırsa yapılsın, (3) ve (4) denklemlerinde gözüken karekökler, Bölüm 6.3'te yay uzunluğu formüllerinde gözükenlerle aynıdır. f ve g $[a, b]$ üzerinde sürekli olarak türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere, eğri $x = f(t)$ ve $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$ denklemleri ile parametrelenmişse yay uzunluğu formülünde karşı gelen karekök

$$\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

dir. Bu gözlem, düzgün parametrize eğrilerin döndürülmesi ile elde edilen yüzey alanları için aşağıdaki formüllere yol açar.

Parametrize Eğriler İçin Dönel Yüzey Alanı

Düzgün bir $x = f(t), y = g(t), a \leq t \leq b$, eğrisi, t a'dan b'ye doğru artarken sadece bir defa katediliyorsa, eğriyi koordinat eksenleri etrafında döndürerek üretilecek dönel yüzeylerin alanları aşağıdaki gibidir.

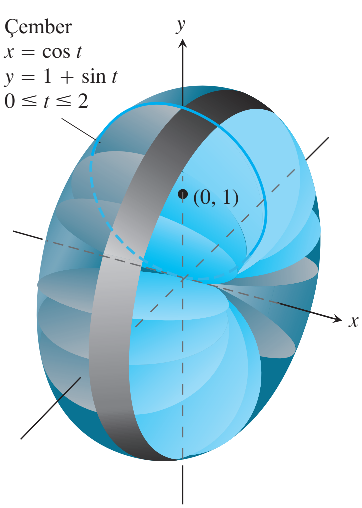
1. x-ekseni etrafında dönme $(y \geq 0)$:

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (5)$$

2. y-ekseni etrafında dönme $(x \geq 0)$:

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (6)$$

Uzunlukta olduğu gibi, belirtilen kriteri karşılayan herhangi uygun bir parametrizasyonla yüzey alanını hesaplayabiliriz.



ŞEKİL 6.50 Örnek 3'te bu parametrize eğri tarafından süpürülen dönel yüzeyin alanını hesaplıyoruz.

ÖRNEK 3 Yüzey Alanı Formülünü Uygulamak

xy-düzleminde merkezi (0, 1) noktasında olan 1 yarıçaplı çemberin standart parametrizasyonu

$$x = \cos t, \qquad y = 1 + \sin t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

ile verilir. Bu parametrizasyonu kullanarak, çemberin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle süpürülen yüzeyin alanını bulun (Şekil 6.50).

Çözüm Formülü hesaplarız:

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2\pi(1 + \sin t)\underbrace{\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}}_{1}\, dt \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} (1 + \sin t)\, dt \\ &= 2\pi\Big[t - \cos t\Big]_0^{2\pi} = 4\pi^2 \end{aligned}$$

x-ekseni etrafında dönme için (5) denklemi $y = 1 + \sin t > 0$

■

Kısa Diferansiyel Form

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad \text{ve} \qquad S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

denklemleri çoğunlukla $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ yay uzunluk diferansiyeli cinsinden

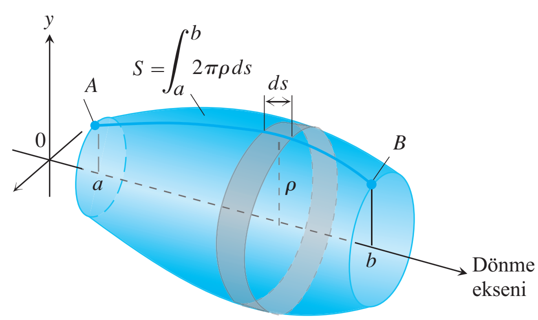
$$S = \int_a^b 2\pi y\, ds \qquad \text{ve} \qquad S = \int_c^d 2\pi x\, ds$$

şeklinde yazılır. Bunların birincisinde, y x-ekseninden ds yay uzunluğu elemanına olan uzaklıktır. İkincisinde ise, x y-ekseninden ds yay uzunluğu elemanına olan uzaklıktır İki integral de, ρ dönme ekseninden bir ds yay uzunluğu elemanına kadar yarıçap olmak üzere

$$S = \int 2\pi(\text{yarıçap})(\text{bant genişliği}) = \int 2\pi\rho\, ds \tag{7}$$

şeklindedir (Şekil 6.51).

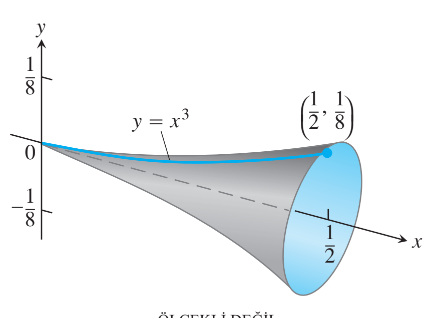
Herhangi belirli bir problemde, ρ yarıçap fonksiyonunu ve ds yay uzunluğu diferansiyelini ortak bir değişken cinsinden ifade eder ve bu değişken için integrasyon sınırlarını bulursunuz.



ŞEKİL 6.51 AB yayının burada gösterilen eksen etrafında döndürülmesiyle taranan yüzeyin alanı $\int_a^b 2\pi\rho\, ds$ 'tir. Kesin ifade ρ'nun ve ds'nin formüllerine bağlıdır.

ÖRNEK 4 Diferansiyel Formu Yüzey Alanı İçin Kullanmak

$y = x^3$, $0 \le x \le 1/2$ eğrisinin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen yüzeyin alanını bulun (Şekil 6.52).



ŞEKİL 6.52 $y = x^3$, $0 \le x \le 1/2$ eğrisini x-ekseni etrafında döndürerek üretilen yüzey bir şampanya kadehi tasarımı olabilir (Örnek 4).

Çözüm İşe kısa diferansiyel formla başlarız:

$$S = \int 2\pi\rho\, ds$$

$$= \int 2\pi y\, ds \qquad \text{x-ekseni etrafında dönme için, $0 \le x \le 1/2$ üzerinde yarıçap fonksiyonu $\rho = y > 0$ on $0 \le x \le 1/2$.}$$

$$= \int 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2}. \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Şimdi *dy*'yi mi *dx* cinsinden, yoksa *dx*'i mi *dy* cinsinden ifade edeceğimize karar veririz. Denklemin orijinal hali, $y = x^3$, *dy*'yi *dx* cinsinden ifade etmemizi kolaylaştırır, dolayısıyla hesabımıza

$$y = x^3, \qquad dy = 3x^2\,dx, \qquad \text{ve} \qquad \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + (3x^2\,dx)^2}$$
$$= \sqrt{1 + 9x^4}\,dx.$$

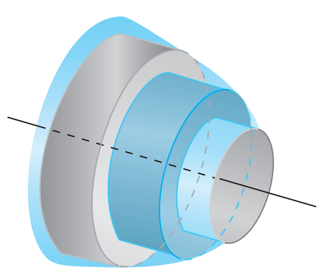
ile devam ederiz. Bu değişiklikleri yaptığımızda, *x* integrasyon değişkeni olur ve

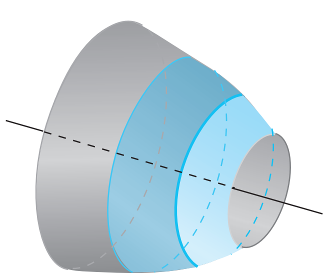
$$\begin{aligned} S &= \int_{x=0}^{x=1/2} 2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \int_0^{1/2} 2\pi x^3\sqrt{1 + 9x^4}\,dx \\ &= 2\pi\left(\frac{1}{36}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(1 + 9x^4)^{3/2}\Big]_0^{1/2} \\ &= \frac{\pi}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{16}\right)^{3/2} - 1\right] \\ &= \frac{\pi}{27}\left[\left(\frac{25}{16}\right)^{3/2} - 1\right] = \frac{\pi}{27}\left(\frac{125}{64} - 1\right) \\ &= \frac{61\pi}{1728}. \end{aligned}$$

$u = 1 + 9x^4$, $du/36 = x^3\,dx$; alın, integre edin ve değerleri yerine koyun.

bulunur.

Konik Bantlara Karşı Silindirik Bantlar


(a)


(b)

ŞEKİL 6.53 Yüzey alanına yaklaşımda bulunmak için (b) konik bantlar yerine neden (a) silindirik bantlar kullanılmasın?

Şekil 6.53'te önerildiği gibi, yüzey alanını neden konik bantlar yerine silindirik bantlarla yaklaşım yaparak bulmayalım? Bu şekilde elde edeceğimiz Riemann toplamları da konik bantlardan elde edilenler kadar iyi yakınsarlar ve ortaya çıkan integral daha basittir. Bu durumda *x*-ekseni etrafında dönme için, (7) denkleminde yarıçap $\rho = y$ ve bant genişliği $ds = dx$'dir. Bu, (3) tanım denklemi yerine

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\,dx \tag{8}$$

integral formülüne yol açar. Bu yeni formüldeki problem, klasik geometrinin yüzey alanı formülleri ile ve başlangıçta belirttiğimiz amaçlarımızla uyumlu sonuçlar vermemesidir. Sadece hoş görünüşlü bir integral bulmamız bunun istediğimizi yapacağı anlamına gelmez (Bkz. Alıştırma 40).

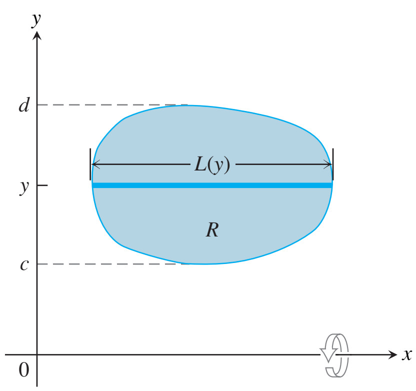
UYARI Yüzey alanı hesaplamak için (8) denklemini kullanmayın. Doğru sonucu *vermez.*

Pappus Teoremleri

Üçüncü asırda, Pappus isminde İskenderiyeli bir Yunan kütle merkezlerini dönel yüzeyler ve dönel cisimler ile ilişkilendiren iki formül keşfetti. Bu formüller başka türlü çok uzun sürecek hesaplamalar için kestirme yollar sağlar.

TEOREM 1 Hacimler İçin Pappus Teoremi
Düzlemdeki bir bölge düzlemdeki bölgenin içiyle kesişmeyen bir doğru etrafında bir kere döndürülürse, üreteceği dönel cismin hacmi bölgenin alanı kere dönme sırasında bölgenin merkezinin aldığı yola eşittir. ρ dönme ekseninden merkeze olan uzaklıksa, hacim şu şekilde ifade edilir.

$$V = 2\pi\rho A. \tag{9}$$



ŞEKİL 6.54 R bölgesi x-ekseni etrafında (bir defa) döndürülerek bir dönel cisim üretilecektir. 1700 yaşındaki bir teorem dönel cismin hacminin, bölgenin alanıyla kütle merkezinin dönüş sırasında aldığı yol çarpılarak hesaplanabileceğini söyler.

İspat R bölgesi birinci dörtte bir bölgede olmak üzere, dönme eksenini x-ekseni olarak seçeriz (Şekil 6.54). y noktasında R'nin y-eksenine dik olan kesitinin uzunluğu L (y) olsun. $L(y)$'nin sürekli olduğunu varsayıyoruz.

Silindirik kabuklar yöntemiyle, bölgeyi x-eksen etrafında döndürerek üretilen dönel cismin hacmi şöyle bulunur:

$$V = \int_c^d 2\pi \begin{pmatrix}\text{kabuk}\\ \text{yarıçapı}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\text{kabuk}\\ \text{yüksekliği}\end{pmatrix} dy = 2\pi \int_c^d y\,L(y)\,dy. \tag{10}$$

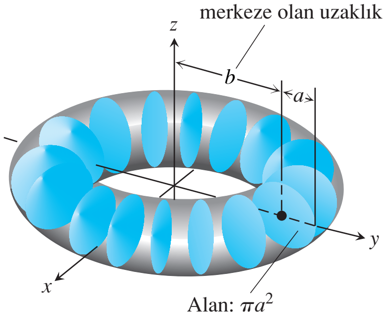
R'nin merkezinin y-koordinatı

$$\bar{y} = \frac{\int_c^d \tilde{y}\,dA}{A} = \frac{\int_c^d y\,L(y)\,dy}{A} \qquad \tilde{y} = y,\ dA = L(y)dy$$

olarak bulunur, dolayısıyla

$$\int_c^d y\,L(y)\,dy = A\bar{y}.$$

olur. (10) denklemindeki son integral yerine $A\bar{y}$ yazmak $V = 2\pi\bar{y}A$ verir. ρ yarıçapı $\bar{y}$'ye eşit olduğundan, $V = 2\pi\rho A$ buluruz. ■



ŞEKİL 6.55 Pappus'un birinci teoremiyle, bir torusun hacmini integral almamız gerekmeden bulabiliriz (Örnek 5).

ÖRNEK 5 Bir Torus'un Hacmi

a yarıçaplı dairesel bir diski, merkezinden $b \geq a$ kadar uzakta bir eksen etrafında döndürülmesiyle üretilen bir torusun (simit) hacmi

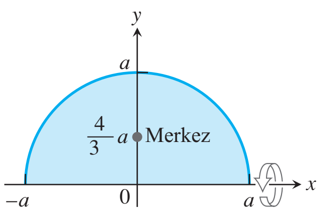
$$V = 2\pi(b)(\pi a^2) = 2\pi^2 ba^2$$ ■

ÖRNEK 6 Yarım Daire Şeklinde Bir Bölgenin Merkezini Bulun

Çözüm Bölgeyi, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yarım dairesi (Şekil 6.56) ile x-ekseni arasındaki bölge olarak alırız ve bölgeyi x-ekseni etrafında döndürerek içi dolu bir küre ürettiğimizi varsayarız. Simetriden dolayı, merkezin x koordinatı $\bar{x} = 0$'dır. (9) denkleminde ρ yerine $\bar{y}$ koyarak

$$\bar{y} = \frac{V}{2\pi A} = \frac{(4/3)\pi a^3}{2\pi(1/2)\pi a^2} = \frac{4}{3\pi}a$$ ■

buluruz.

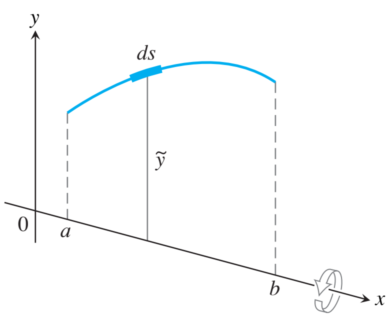


ŞEKİL 6.56 Pappus'un birinci teoremiyle, yarım daire şeklinde bir bölgenin merkezini integral almadan bulabiliriz (Örnek 6).

TEOREM 2 Yüzey Alanları İçin Pappus Teoremi
Bir düzgün düzlemsel eğri yayı, aynı düzlemde yayın içiyle kesişmeyen bir doğru etrafında bir kere döndürülürse, yayın ürettiği yüzeyin alanı yayın uzunluğu kere yayın merkezinin dönme sırasında aldığı yoldur. ρ dönme ekseninden merkeze olan uzaklıksa, yüzey şu şekilde bulunur:

$$S = 2\pi\rho L \tag{11}$$

Vereceğimiz ispat dönme eksenini x-ekseni olarak ve yayı x'in düzgün bir fonksiyonu olarak modelleyebileceğimiz varsayımına dayanmaktadır.



ŞEKİL 6.57 Pappus'un alan teoreminin ispatı için şekil

İspat Yay, birinci dörtte bir bölgede $x = a$'dan $x = b$'ye kadar uzanmak üzere, dönme eksenini x-eksenini olarak seçeriz (Şekil 6.57). Yayın ürettiği yüzeyin alanı şöyle verilir:

$$S = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi y\, ds = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} y\, ds \tag{12}$$

Yayın merkezinin y-koordinatı

$$\bar{y} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} \tilde{y}\, ds}{\int_{x=a}^{x=b} ds} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} y\, ds}{L}$$

$L = \int ds$ yay uzunluğudur ve $\tilde{y} = y$'dir.

olarak bulunur, dolayısıyla

$$\int_{x=a}^{x=b} y\, ds = \bar{y}L$$

olur. (12) denklemindeki son integral yerine $\bar{y}L$ yazmak $S = 2\pi\bar{y}L$ verir. ρ yarıçapı $\bar{y}$'ye eşit olduğundan, $S = 2\pi\rho L$ buluruz. ■

ÖRNEK 7 Bir Torusun Yüzey Alanı

Örnek 5'teki torusun yüzey alanı

$$S = 2\pi(b)(2\pi a) = 4\pi^2 ba$$ ■

olarak bulunur.

ALIŞTIRMALAR 6.5

Yüzey Alanı İçin İntegral Bulma

1–8 alıştırmalarında

a. Verilen eğrinin belirtilen eksen etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin alanı için bir integral kurun.

T **b.** Eğriyi çizerek neye benzediğine bakın. Yapabiliyorsanız, yüzeyi de çizin

T **c.** Grafik programınızın veya bilgisayarınızın integral hesaplayıcısıyla yüzeyin alanını sayısal olarak bulun.

1. $y = \tan x,\ 0 \le x \le \pi/4$ x-ekseni etrafında

2. $y = x^2,\ 0 \le x \le 2;$ x-ekseni etrafında

3. $xy = 1,\ 1 \le y \le 2$ y-ekseni etrafında

4. $x = \sin y,\ 0 \le y \le \pi$ y-ekseni etrafında

5. $x^{1/2} + y^{1/2} = 3$, (4, 1)'den (1, 4)'e, x-ekseni etrafında

6. $y + 2\sqrt{y} = x,\quad 1 \le y \le 2;$ y-ekseni etrafında

7. $x = \int_0^y \tan t\, dt,\quad 0 \le y \le \pi/3;$ y-ekseni etrafında

8. $y = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1}\, dt,\quad 1 \le x \le \sqrt{5};$ x-ekseni etrafında

Yüzey Alanlarını Bulmak

9. $y = x/2, 0 \leq x \leq 4$, doğru parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen koninin yanal yüzey alanını bulun. Yanıtınızı şu geometri formülüyle karşılaştırın:

Yanal yüzey alanı = $\frac{1}{2}$ taban çevresi × yanal ayrıt uzunluğu

10. $y = x/2, 0 \leq x \leq 4$ doğru parçasının y-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen koninin yanal yüzey alanını bulun. Yanıtınızı şu geometri formülüyle karşılaştırın:

Yanal yüzey alanı = $\frac{1}{2}$ taban çevresi × yanal ayrıt uzunluğu

11. $y = (x/2) + (1/2), 1 \leq x \leq 3$, doğru parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen kesik koninin yüzey alanını bulun. Yanıtınızı aşağıdaki formülle karşılaştırın:

Kesik koni yüzey alanı = $\pi (r_1 + r_2)$ × yanal ayrıt uzunluğu

12. $y = (x/2) + (1/2), 1 \leq x \leq 3$, doğru parçasının y-ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen kesik koninin yüzey alanını bulun. Yanıtınızı aşağıdaki formülle karşılaştırın:

Kesik koni yüzey alanı = $\pi (r_1 + r_2)$ × yanal ayrıt uzunluğu

13–22 alıştırmalarındaki eğrilerin belirtilen eksenler etrafında döndürülmeleriyle elde edilen yüzeylerin alanlarını bulun. Bir grafik programınız varsa, eğrileri çizebilirsiniz.

13. $y = x^3/9, \quad 0 \leq x \leq 2;$ x-ekseni etrafında

14. $y = \sqrt{x}, \quad 3/4 \leq x \leq 15/4;$ x-ekseni etrafında

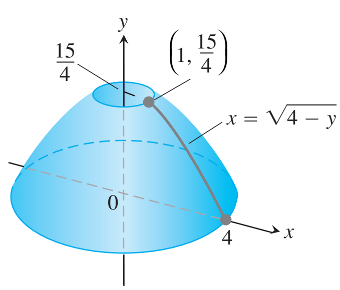
15. $y = \sqrt{2x - x^2}, \quad 0.5 \leq x \leq 1.5;$ x-ekseni etrafında

16. $y = \sqrt{x + 1}, \quad 1 \leq x \leq 5;$ x-ekseni etrafında

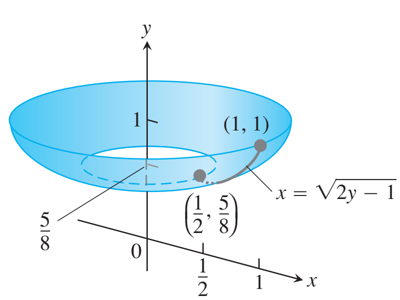
17. $x = y^3/3, \quad 0 \leq y \leq 1;$ y-ekseni etrafında

18. $x = (1/3)y^{3/2} - y^{1/2}, \quad 1 \leq y \leq 3;$ y-ekseni etrafında

19. $x = 2\sqrt{4 - y}, \quad 0 \leq y \leq 15/4;$ y-ekseni etrafında



20. $x = \sqrt{2y - 1}, \quad 5/8 \leq y \leq 1;$ y-ekseni etrafında



21. $x = (y^4/4 + 1/(8y^2)), \quad 1 \leq y \leq 2;$ x-ekseni etrafında (*İpucu*: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$'yi dy cinsinden ifade edin ve $S = \int 2\pi y \, ds$ integralini uygun sınırlarla hesaplayın.)

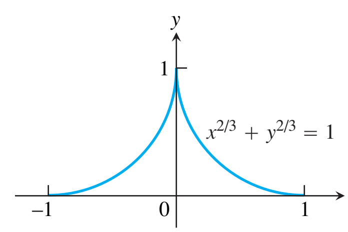
22. $y = (1/3)(x^2 + 2)^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{2};$ y-ekseni etrafında (*İpucu* $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$'yi dx cinsinden ifade edin ve $S = \int 2\pi x \, ds$ integralini uygun sınırlarla hesaplayın.)

23. Yeni tanımı test etmek $y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad -a \leq x \leq a$, eğrisinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin alanını (3) denklemiyle hesaplayarak a yarıçaplı bir kürenin yüzey alanının hala $4\pi a^2$ olduğunu gösterin.

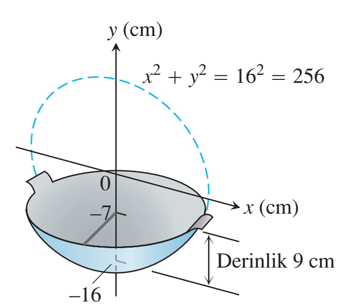
24. Yeni tanımı test etmek Yüksekliği h ve yarıçapı r olan bir koninin yanal yüzey alanı $\pi r \sqrt{r^2 + h^2}$, taban yarıçevresi kere yanal ayrıt uzunluğu, olmalıdır. $y = (r/h)x, 0 \leq x \leq h$, eğrisinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin alanını bularak bunun hala böyle olduğunu gösterin.

25. $y = \cos x, -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, eğrisinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanı için bir integral bulun. Bu tip inegrallerin nasıl hesaplanacağını Bölüm 8.5'te göreceğiz.

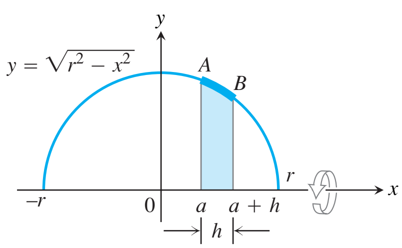
26. Bir astroidin yüzeyi $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ astroidinin aşağıda verilen kısmı x-ekseni etrafında döndürülerek üretilen yüzeyin alanını bulun. (*İpucu*: Önce birinci bölgedeki kısmını, $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 1$, x-ekseni etrafında döndürün ve sonra sonucunuzu iki ile çarpın.)



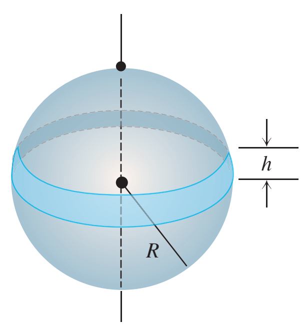
T **27. Tavaları minelemek** Şirketiniz Bölüm 6.1, Alıştırma 55' te tasarladığınız tavanın lüks şeklini piyasaya sürmeye karar vermiştir. Planları tavanın içini beyaz mineyle, dışını kahverengi mineyle kaplamaktır. Her mine fırınlanmadan önce 0.5 mm kalınlığında kaplanacaktır (aşağıdaki diyagrama bakın). Üretim bölümünüz 5000 tava için ellerinde ne kadar mine bulunması gerektiğini merak ediyor. Onlara ne dersiniz? (Atıkları ve kullanılmayan malzemeyi ihmal edin ve yanıtınızı litre olarak verin. $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$, dolayısıyla $1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$ olduğun hatırlayın.)



28. Ekmek kesmek Eğer küresel bir ekmek somununu eşit genişlikli parçalara bölerseniz, her dilimde aynı miktarda kabuk bulunacağını biliyor muydunuz? Nedenini anlamak için, aşağıda gösterilen $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ yarıçamberini bir küre oluşturacak şekilde x-ekseni etrafında döndürdüğümüzü varsayın. AB, x-ekseninde h uzunluklu bir aralığın karşısındaki yay olsun. AB yayının taradığı alanın, aralığın bulunduğu yere bağlı olmadığını gösterin. (Aralığın uzunluğuna bağlıdır.)



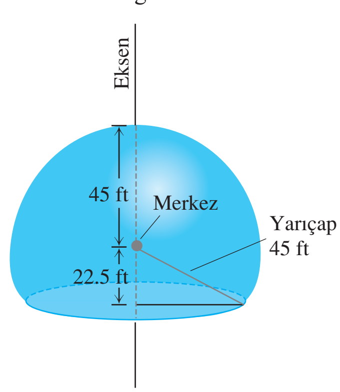
29. Aşağıda gösterilen gölgeli bant h birim aralıklı paralel düzlemlerle R yarıçaplı bir küreden kesiliyor. Bandın yüzey alanının $2\pi Rh$ olduğunu gösterin



30. Aşağıda U.S. Ulusal Hava Servisi tarafından Bozeman, Mont'taki radarı çevrelemek için kullanılan 90 ft'lik bir kubbenin şeması verilmektedir.

a. Boyanacak dış yüzey ne kadardır (tabanı saymadan)?

T **b.** Yanıtınızı bir ft^2 hassaslığında ifade edin.



31. Dönme eksenini kesen eğrilerle üretilen yüzeyler (3) denklemindeki yüzey alanı formülü, grafiği yüzeyi oluşturan f fonksiyonunun $[a\,,\,b]$ aralığında negatif olmadığı varsayımı altında geliştirilmiştir. Dönme eksenini kesen eğriler için (3) denklemini

$$S = \int 2\pi\rho\, ds = \int 2\pi |f(x)|\, ds. \tag{13}$$

mutlak değer formülüyle değiştiririz. (13) denklemini kullanarak $y = x, -1 \le x \le 2$, doğrusunun x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen çifte koninin yüzey alanını bulun.

32. (*Alıştırma 31'in devamı.*) $y = x^3/9, -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$, eğrisinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin alanını bulun. (13) denkleminden mutlak değer işaretlerini atıp alanı $S = \int 2\pi f(x)\, ds$ ile hesaplamaya kalkarsanız, sizce ne olur? Deneyin.

Parametrizasyonlar

33–35 alıştırmalarındaki eğrilerin belirtilen eksenler etrafında döndürülmeleriyle üretilen yüzeylerin alanlarını bulun.

33. $x = \cos t, \quad y = 2 + \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$; x-ekseni etrafında

34. $x = (2/3)t^{3/2}, \quad y = 2\sqrt{t}, \quad 0 \le t \le \sqrt{3}$; y-ekseni etrafında

35. $x = t + \sqrt{2}, \quad y = (t^2/2) + \sqrt{2}t, \quad -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$; y-ekseni etrafında

36. $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi$, eğrisinin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen yüzeyin alanını temsil eden bir integral yazın fakat hesaplamayın.

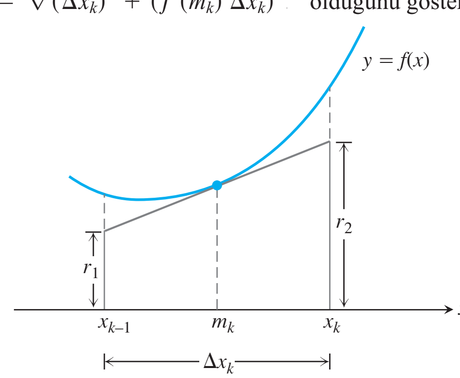
37. Kesik koni (0, 1) ve (2, 2) nokalarını birleştiren doğru parçası x-ekseni etrafında döndürülerek bir kesik koni üretiliyor. $x = 2t, y = t + 1, 0 \le t \le 1$, parametrizasyonunu kullanarak kesik koninin yüzey alanını bulun. Sonucunuzu şu geometri formülüyle kontrol edin: Alan = $\pi\,(r_1 + r_2)$(yanal ayrıt uzunluğu).

38. Bir koni Orijini (h, r) noktasına bağlayan doğru parçası x-ekseni etrafında döndürülerek h yükseklikli ve r yarıçaplı bir koni üretiliyor. $x = ht, y = rt, 0 \le t \le 1$, parametrizasyonunu kullanarak koninin yüzey alanını bulun. Sonucunuzu şu geometri formülüyle karşılaştırın: Alan = πr (yanal ayrıt uzunluğu).

39. Yüzey Alanı Formülünün Alternatif Elde Edilişi f'nin $[a, b]$ üzerinde düzgün olduğunu kabul edelim ve $[a, b]$'yi her zamanki gibi alt aralıklara bölelim. Şekilde gösterildiği gibi, $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığının $m_k = (x_{k-1} + m_k)/2$ orta noktasından eğriye bir teğet çizin.

a. $r_1 = f(m_k) - f'(m_k)\dfrac{\Delta x_k}{2}$ ve $r_2 = f(m_k) + f'(m_k)\dfrac{\Delta x_k}{2}$ olduğunu gösterin.

b. k. alt aralıktaki teğet doğru parçasının L_k uzunluğunun $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(m_k)\,\Delta x_k)^2}$ olduğunu gösterin.



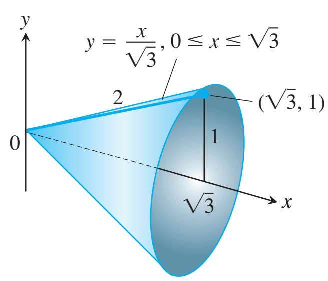
c. Teğet doğru parçasının x-ekseni etrafında dönerken taradığı kesik koninin yanal yüzey alanının $2\pi f(m_k)\sqrt{1 + (f'(m_k))^2}\,\Delta x_k$ olduğunu gösterin.

d. $y = f(x)$ eğrisini $[a, b]$ boyunca x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin alanının

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} k\text{.inci kesik koninin} \\ \text{yanal yüzey alanı} \end{pmatrix} = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

olduğunu gösterin.

40. Yüzey alanı modelleme $y = x/\sqrt{3}$, $0 \le x \le \sqrt{3}$, doğru parçasını x-ekseni çevresinde döndürürek taranan koninin yanal yüzey alanı $(1/2)$ (taban çevresi)(yanal ayrıt uzunluğu) $(1/2)(2\pi)(2) = 2\pi$ .olmalıdır. $f(x) = x/\sqrt{3}$ alarak (8) denklemini kullanırsanız ne bulursunuz?



Pappus Teoremleri

41. Köşeleri (0, 2), (2, 0), (4, 2) ve (2, 4)'te olan kare şeklindeki bölge x-ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretiliyor. Dönel cismin hacmini ve yüzey alanını bulun.

42. Pappus'un bir teoremini kullanarak, koordinat eksenleri ve $2x + y = 6$ doğrusuyla sınırlanan üçgen bölgenin $x = 5$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen hacmi bulun. (Bölüm 6.4'teki Alıştırma 29'da gördüğünüz gibi, bir üçgenin merkezi kenar ortayların kesim noktasında, yani her kenarın orta noktasından karşı köşeye olan uzaklığın üçte birinde bulunur.)

43. $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ çemberinin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen torusun hacmini bulun.

44. Pappus teoremlerini kullanarak bir dairesel dik koninin yanal yüzey alanını ve hacmini bulun.

45. Pappus'un ikinci teoremini ve a yarıçaplı bir kürenin yüzey alanının $4\pi a^2$ olduğunu kullanarak, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yarım çemberinin merkezini bulun.

46. Alıştırma 45'ten, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yarım çemberinin merkezi $(0, 2a/\pi)$'de bulunur. Yarım çemberin $y = a$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle taranın yüzeyin alanını bulun.

47. $y = (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$ yarım elipsi ile x-ekseni arasında kalan R bölgesinin alanı $(1/2)\pi ab$ ve R bölgesini x-ekseni etrafında döndürerek üretilen elipsoidin hacmi $(4/3)\pi ab^2$'dir. R'nin merkezini bulun. Konumun a'dan bağımsız olduğuna dikkat edin.

48. Örnek 6'da bulunduğu gibi, x-ekseni ve $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yarım çemberi ile sınırlanan bölgenin merkezi $(0, 4a/3\pi)$'dir. Bu bölgenin $y = -a$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen dönel cismin hacmini bulun.

49. Alıştırma 48'deki bölge $y = x - a$ doğrusu etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretiliyor. Dönel cismin hacmini bulun.

50. Alıştırma 45'ten, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yarım çemberinin merkezi $(0, 2a/\pi)$'dedir. Yarım çemberin $y = x - a$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen Dönel cismin hacmini bulun.

51. Örnek 6'daki yarım çembersel bölgenin x-ekseni etrafındaki momentini bulun. Bildiğiniz sonuçları kullanırsanız, integre etmeniz gerekmez.

6.6 İş

Günlük yaşamda iş, kas veya zihin gücü gerektiren faaliyetler anlamına gelir. Bilimde ise, bu terim özel olarak bir cisme etki eden kuvveti ve cismin buna karşı gelen yerdeğiştirmesini belitmektedir. Bu bölüm işin nasıl hesaplanacağını göstermektedir. Uygulamalar vagon yaylarını şıkıştırmak ve yeraltı tanklarını boşaltmaktan elektronları bir araya getirmek ve uyduları yörüngeye taşımaya kadar gider.

Sabit Bir Kuvvet Tarafından Yapılan İş

Bir cisim sabit F büyüklüklü bir kuvvetin etkisi sonucunda bir doğru boyunca d mesafesi kadar ilerlemişse, cisme etki eden kuvvetin yaptığı işi

$$W = Fd \qquad \text{(İş için sabit kuvvet formülü)} \tag{1}$$

formülüyle hesaplarız.

Jul

J olarak kısaltılan jul, adını İngiliz fizikçi James Prescott Joule'den (1818-1889) alır. Julü tanımlayan denklem
1 jul = (1 Newton) (1 metre)
olarak verilir. Sembolik olarak
1 J = 1 N · m'dir.

(1) denkleminden, herhangi bir sistemdeki iş biriminin birim uzunlukla çarpılan birim kuvvet olduğunu görebiliriz. SI birimleriyle (SI *Système International* veya Uluslarası Sistemin kısaltılmasıdır), kuvvet birimi bir newton, uzaklık birimi ise bir metre ve iş birimi newton metredir (N·m). Bu kombinasyonla o kadar sık karşılaşılır ki, özel bir ismi vardır: **jul**. İngiliz birim sisteminde iş birimi mühendisler tarafından çok sık kullanılan ft·lb'dir.

ÖRNEK 1 Bir Otomobili Kaldırmak

Lastik değiştirmek için 2000 lb'luk bir otomobilin bir tarafını 1.25 ft kaldırırsanız (yaklaşık 1000 lb'luk dikey bir kuvvet uygulamanız gerekir), otomobil üzerinde $1000 \times 1.25 = 1259$ ft·lb iş yapmış olursunuz. SI birimleriyle, 0.381 m'lik yol boyunca 4448 N'luk bir kuvvet uygulayarak $4448 \times 0.381 \approx 1695$ J 'lük iş yaparsınız. ■

Değişken Bir Kuvvetin Bir Doğru Boyunca Yaptığı İş

Bir yay sıkıştırırken olduğu gibi, uyguladığınız kuvvet yol boyunca değişiyorsa, $W = Fd$ formülü F'deki değişmeyi de göz önüne alacak bir inetgral formülüyle değiştirilmelidir.

İşi gerçekleştiren kuvvetin x-ekseni olarak aldığımız bir doğru üzerinde etkidiğini ve kuvvetin F büyüklüğünün, konumun sürekli bir fonksiyonu olduğunu varsayalım. $x = a$'dan $x = b$'ye kadar olan aralık üzerinde yapılan işi bulmak istiyoruz. $[a, b]$ aralığını her zamanki gibi böler ve her $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığından herhangi bir c_k noktası seçeriz. Alt aralık yeterince kısaysa, F sürekli olduğundan, x_{k-1}den x_k'ye kadar fazla değişmeyecektir. Aralık boyunca yapılan iş yaklaşık olarak, F sabit olsaydı ve (1) denklemini uygulasaydık bulacağımız iş olan, $F(c_k)$ kere Δx_k uzaklığı kadar olurdu. Dolayısıyla, a'dan b'ye kadar yapılacak toplam iş'e

$$\text{İş} \approx \sum_{k=1}^{n} F(c_k)\, \Delta x_k$$

Riemann toplamı ile yaklaşımda bulunulur. Bölünüşün normu sıfıra giderken, yaklaşımın iyileşmesini bekleriz, bundan dolayı kuvvetin a'dan b'ye kadar yaptığı işi F' nin a'dan b'ye kadar integrali olarak tanımlarız.

TANIM **İş**

Değişken bir $F(x)$ kuvveti tarafından x-ekseni boyunca $x = a$'dan $x = b$'ye kadar yapılan iş

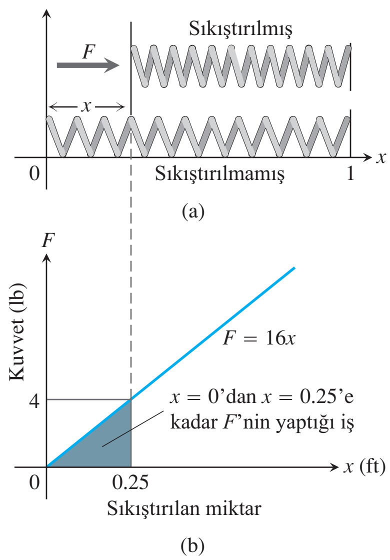
$$W = \int_a^b F(x)\, dx. \tag{2}$$

dir.

F newton ve x metre olarak verilirse, integralin birimi jul, F lb ve x ft olarak verilirse, integralin birimi ft-lb olacaktır. Dolayısıyla, $F(x) = 1/x^2$ N'luk bir kuvvet tarafından x-ekseni boyunca $x = 1$ m'den $x = 10$ m'ye kadar yapılan iş

$$W = \int_1^{10} \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\bigg]_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = 0.9 \text{ J}.$$

dir.



ŞEKİL 6.58 Bir yay sıkıştırılırken, yayı sıkışma altında tutmak için gereken F kuvveti lineer olarak artar. (Örnek 2)

Yaylar İçin Hooke Yasası: $F = kx$

Hooke yasası, bir yayı doğal (gerilmemiş) konumundan x birim uzunlukta açmak veya sıkıştırmak için gereken kuvvetin x ile orantılı olduğunu söyler:

$$F = kx \tag{3}$$

Birim uzunluk başına kuvvet birimiyle ölçülen k sabiti, yayın **kuvvet sabiti** (veya **yay sabiti**) adı verilen bir özelliğidir. Hooke yasası (3 denklemi), kuvvet yaydaki metali bozmadıkça, oldukça iyi sonuç verir. Bu bölümdeki kuvvetlerin bunu yapamayacak kadar küçük olduklarını varsayacağız.

ÖRNEK 2 Bir Yay Sıkıştırmak

Kuvvet sabiti $k = 16$ lb/ft ise, bir yayı doğal uzunluğu 1 ft'ten 0.75 ft uzunluğuna sıkıştırmak için gereken işi bulun.

Çözüm Sıkıştırılmamış yayı, serbest ucu orijinde ve sabit ucu $x = 1$ ft'te olacak şekilde, x-ekseni boyunca çizeriz (Şekil 6.58). Bu yayı 0'dan x'e kadar sıkıştırmak için gereken kuvveti $F = 16x$ formülüyle tanımlamamızı sağlar. Yayı 0'dan 0.25 ft'e sıkıştırmak için, kuvvet

$$F(0) = 16 \cdot 0 = 0 \text{ lb'den} \quad F(0.25) = 16 \cdot 0.25 = 4 \text{ lb'ye}$$

bu aralıkta yaptığı iş kadar artmalıdır. F'nin

$$W = \int_0^{0.25} 16x\,dx = 8x^2\Big]_0^{0.25} = 0.5 \text{ ft-lb}$$

$a = 0$, $b = 0.25$, ve $F(x) = 16x$ ile (2) denklemi.

olarak bulunur. ■

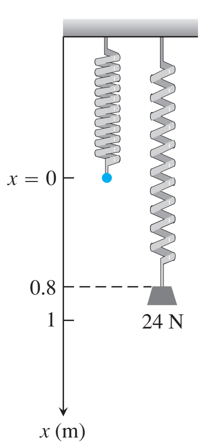
ÖRNEK 3 Bir Yay Germek

Bir yayın doğal uzunluğu 1 m'dir. 24 N'luk bir kuvvet yayı 1.8 m'ye germektedir.

(a) Kuvvet sabiti k'yi bulun.

(b) Yayı doğal uzunluğundan 2 m açmak için ne kadar iş gerekir?

(c) 45 N'luk bir kuvvet yayı ne kadar gerecektir?



ŞEKİL 6.59 24 N'luk bir ağırlık bu yayı gerilmemiş uzunluğundan 0.8 m uzatır(Örnek 3).

Çözüm

(a) *Kuvvet sabiti*. Kuvvet sabitini (3) denkleminden buluruz. 24 N'luk bir kuvvet yayı 0.8 m gerdiğine göre

$$24 = k(0.8)$$
$$k = 24/0.8 = 30 \text{ N/m}.$$

Eq. (3) with $F = 24$, $x = 0.8$

bulunur.

(b) *Yayı 2 m germek için yapılan iş* Gerilmemiş yayı serbest ucu $x = 0$'da olacak şekilde x-ekseninde asılıymış gibi düşünürüz (Şekil 6.59). Yayı doğal uzunluğundan x m germek için gereken kuvvet, yayın serbest ucunu orijinden x birim çekmek için gereken kuvvettir. $k = 30$ ile Hooke Yasası bu kuvvetin

$$F(x) = 30x$$

olduğunu söyler.

F'nin yay üzerinde $x = 0$ m'den $x = 2$ m'ye kadar yaptığı iş

$$W = \int_0^2 30x\, dx = 15x^2 \Big]_0^2 = 60 \text{ J}$$

olarak bulunur.

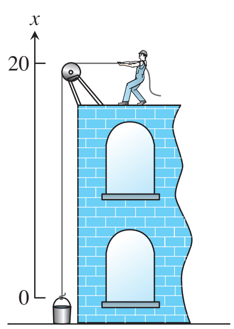
(c) 45 N*'luk bir kuvvet yayı ne kadar gerecektir?* $F = 30x$ denkleminde $F = 45$ koyarak

$$45 = 30x \quad \text{veya} \quad x = 1.5 \text{ m}$$

olarak bulunur.

buluruz. 45 N'luk bir kuvvet yayı 1.5 m gerecektir. Bunu bulmak için analize gerek yoktur. ■

İş integrali, ağırlıkları yükseklikleri ile değişen nesnelerin kaldırılmasında yapılan işi hesaplamak için kullanışlıdır.



ŞEKİL 6.60 Örnek 4'teki kovayı kaldırmak .

ÖRNEK 4 Bir İp ve Kova Kaldırmak

5 lb'lik bir kova 20 ft'lik bir iple sabit hızla çekilerek yerden kaldırılıyor (Şekil 6.60). İpin ağırlığı 0.08 lb/ft'tir. Kovayı ve ipi kaldırmak için ne kadar iş yapılmıştır?

Çözüm Kovanın ağırlı sabittir, dolayısıyla sadece kovayı kaldırırken yapılan iş ağırlık × mesafe lb-ft dir.

İp'in ağırlığı kovanın yüksekliği ile değişmektedir, çünkü daha azı serbestçe asılıdır. Kova yerden x ft yüksekte iken, ip'in kalan parçası hala $(0.08) \cdot (20 - x)$ ağırlığı ile asılıdır. Dolayısıyla ip'i kaldırırken yapılan iş

$$\text{İp üzerinde yapılan iş} = \int_0^{20} (0.08)(20 - x)\, dx = \int_0^{20} (1.6 - 0.08x)\, dx$$

$$= \left[1.6x - 0.04x^2\right]_0^{20} = 32 - 16 = 16 \text{ ft-lb}.$$

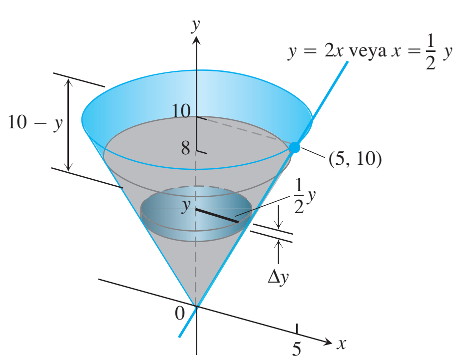
kova ve ip üzerinde yapılan toplam iş

$$100 + 16 = 116 \text{ ft-lb}$$ ■

kadardır.

Kaplardan Sıvı Pompalamak

Bir depodan sıvının hepsini veya bir kısmını pompalamak için ne kadar iş yapmak gerekir? Bunu bulmak için, sıvıyı her bir adımda ince bir tabaka olarak kaldırdığımızı ve her tabakaya $W = Fd$ denklemini uyguladığımızı düşünürüz. Sonra tabakaların incelmesi ve sayılarının artmasının yarattığı integrali hesaplarız. Elde ettiğimiz integral sıvının ağırlığına ve deponun boyutlarına bağlıdır, fakat integrali bulma yöntemimiz hep aynıdır. Aşağıdaki örnek neler yapılması gerektiğini göstermektedir.



ŞEKİL 6.61 Örnek 5'teki zeytinyağı ve tank.

ÖRNEK 5 Konik Bir Tanktan Zeytinyağı Pompalamak

Şekil 6.61'deki konik tank ağzından 2 ft aşağısına kadar 57 lb/ft^3 ağırlığında zeytinyağıyla doldurulmuştur. Zeytinyağını tankın ağzına kadar pompalamak için yapılması gereken iş ne kadardır?

Çözüm Zeytinyağının, [0, 8] aralığının bir bölünüşünün noktalarından y-eksenine paralel düzlemlerle ince tabakalara bölündüğünü düşünelim.

y ile $y + \Delta y$'deki düzlemler arasında kalan tipik bir tabakanın hacmi yaklaşık olarak

$$\Delta V = \pi(\text{yarıçap})^2\,(\text{kalınlık}) \quad = \pi\left(\frac{1}{2}y\right)^2 \Delta y = \frac{\pi}{4} y^2\, \Delta y \text{ ft}^3$$

olur.

Tabakayı kaldırmak için gereken $F(y)$ kuvveti tabakanın ağırlığına eşittir:

$$F(y) = 57\,\Delta V = \frac{57\pi}{4}y^2\,\Delta y \text{ lb}$$

ağırlık = birim hacim başına ağırlık × hacim

Bu tabakayı tankın ağzına kadar kaldırmak için $F(y)$'nin etkimesi gereken mesafe yaklaşık $(10 - y)$ ft'dir, dolayısıyla tabakayı kaldırmak için yapılması gereken iş yaklaşık

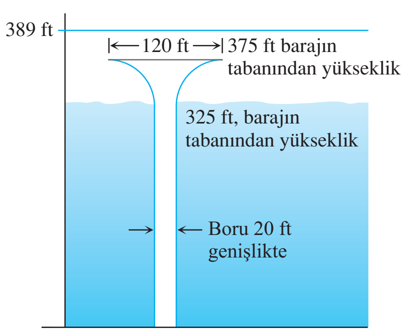
$$\Delta W = \frac{57\pi}{4}(10 - y)y^2\,\Delta y \text{ ft-lb}$$

civarındadır. $[0, 8]$ aralığının bir bölünüşüne karşı gelen n tabaka bulunduğunu ve Δy_k kalınlığındaki k. tabakaya karşı gelen düzlemin $y = y_k$ olduğunu kabul ederek, bütün tabakaları kaldırırken yapılan işe

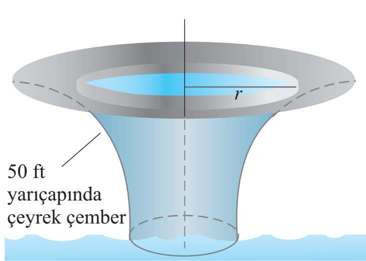
$$W \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{57\pi}{4}(10 - y_k){y_k}^2\,\Delta y_k \text{ ft-lb}$$

Riemann toplamı ile yaklaşımda bulunabiliriz. Zeytinyağını tankın ağzına kadar pompalamak için yapılması gereken iş, bölünüşün normu sıfıra giderken bu toplamların limitidir:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^8 \frac{57\pi}{4}(10 - y)y^2\,dy \\ &= \frac{57\pi}{4}\int_0^8 (10y^2 - y^3)\,dy \\ &= \frac{57\pi}{4}\left[\frac{10y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^8 \approx 30{,}561 \text{ ft-lb} \end{aligned}$$



(a)



(b)

ŞEKİL 6.62 (a) Bir barajın tahliye borusunun dik-kesiti ve (b) tahliye borusunun üstü (Örnek 6)

ÖRNEK 6 Bir Tahliye Borusunda Su Pompalamak

Bir barajın tahliye borusu, su seviyesinin çok fazla yükselmesini önleyen dikey bir boşaltma borusudur. Bir barajın tahliye borusunun üstü, baraj seviyesinden 14 ft aşağıda ve baraj tabanından 375 ft yukarıdadır (Şekil 6.62). Mevsimlik birikimleri zaman zaman pompalamak için bu boru gereklidir.

Şekil 6.62a'daki dik-kesitten, tahliye borusunun huni şeklinde bir kanal olduğunu görüyoruz. Huninin boğazı 20 ft genişliğinde ve ağzı 120 ft çapındadır. Şekil 6.62b de gösterildiği gibi, üst kısmın dik-kesitinin dış sınırı 50 ft yarıçapında çeyrek çemberler şeklindedir. Tahliye borusu, bir dik-kesitin, merkezi etrafında döndürülmesi ile oluşturulmuştur. Sonuç olarak, tahliye borusunun tamamı boyunca bütün yatay dik-kesitler dairesel disklerdir.

(a) borunun boğazından

(b) huni kısmından

Su pompalamak için gereken işi hesaplıyoruz.

Çözüm

(a) *Boğazdan pompalamak.* y ile $y + \Delta y$'deki düzlemler arasında kalan tipik bir tabakanın hacmi yaklaşık olarak

$$\Delta V = \pi(\text{yarıçap})^2\,(\text{kalınlık}) = \pi(10)^2\,\Delta y \text{ ft}^3$$

tür.

Tabakayı kaldırmak için gereken $F(y)$ kuvveti tabakanın ağırlığına eşittir (su için yaklaşık

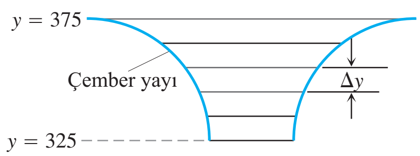
$$F(y) = 62.4\,\Delta V = 6240\pi\,\Delta y \text{ lb}$$

Bu tabakayı borunun üstüne kadar kaldırmak için $F(y)$'nin etkimesi gereken mesafe yaklaşık $(375 - y)$ ft'dir, dolayısıyla tabakayı kaldırmak için yapılan iş

$$\Delta W = 6240\pi(375 - y)\,\Delta y \text{ ft-lb}$$

dir. Borudan su pompalamakla yapılan işe, bütün tabakaları kaldırmak için yapılan işleri toplayarak ve sonra bölünüşün normu sıfıra giderken bu Riemann toplamının limitini alarak yaklaşımda bulunabiliriz. Bu, aşağıdaki integrali verir.

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{325} 6240\pi(375 - y)\,dy \\ &= 6240\pi\left[375y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{325} \\ &\approx 1{,}353{,}869{,}354 \text{ ft-lb} \end{aligned}$$



ŞEKİL 6.63 Tahliye borusunun huni kısmı

(b) *Huniden pompalamak.* Borunun huni kısmından, $y = 325$'ten $y = 375$'e kadar, su pompalamakta gereken işi hesaplamak için, Şekil 6.63'te gösterildiği gibi, hunideki yaklaşım elemanı için ΔV'yi hesaplamamız gerekir. Şekilden görüleceği gibi, tabakaların yarıçapları y yüksekliği ile değişmektedir.

33 ve 34 alıştırmalarında, suyu pompalamak için gereken toplam işi belirlemenin analizini tamamlamanız ve tahliye borusundan dışarıya pompalayabilmek için pompaların gücü istenmektedir. ■

ALIŞTIRMALAR 6.6

Yaylar

1. **Yay sabiti** Bir yayı doğal uzunluğu olan 2 m'den 5 m'ye germek için 1800 J'lük iş yapılmıştır. Yayın kuvvet sabitini bulun.

2. **Bir yay germek** Bir yayın doğal uzunluğu 10 inçtir. 800 lb'luk bir kuvvet yayı 14 inçe germektedir.
   a. Yayın kuvvet sabitini bulun.
   b. Yayı 10 inçten 12 inçe germek için ne kadar iş yapılır?
   c. 1600 lb'lik bir kuvvet yayı doğal uzunluğundan ne kadar gerecektir?

3. **Bir lastik bant germek** 2 N'luk bir kuvvet bir lastik bandı 2 cm (0.02 m) gerer. Hooke yasasının geçerli olduğunu varsayarsak, 4 N'luk bir kuvvet lastik bandı ne kadar gerer? Lastik bandı bu kadar germek için ne kadar iş yapılır?

4. **Bir yay germek** 90 N'luk bir kuvvet bir yayı doğal uzunluğundan 1 m geriyorsa, yayı doğal uzunluğundan 5 m germek için ne kadar iş yapılması gerekir?

5. **Metro vagonu yayları** Bir New York City Transit Authority metro vagonundaki sarımlı yayı serbest uzunluğu 8 inç-ten tamamen sıkışmış uzunluğu 5 inçe sıkıştırmak için 21.714 lb'lik kuvvet gerekmektedir.
   a. Yayın kuvvet sabiti nedir?
   b. Yayı ilk yarım inçe ve ikinci yarım inçe sıkıştırmak için ne kadar iş yapmak gerekir? En hassas şekilde lb olarak bulun.

   (New York City Transit Authority'ye 1985'ten 1987'ye kadar teslim edilen metro vagonu yayları için Bombardier, Inc., Toplu Taşıma Bölümü tarafından derlenen veriler.)

6. **Banyo tartısı** Bir banyo tartısı üzerine 150 lb'luk birisi çıktığında $1/16$ inç sıkışmaktadır. Tartının Hooke yasasına uyan bir yay gibi davrandığını varsayarsak, tartıyı $1/8$ inç sıkıştıran birisinin ağırlığı ne kadardır? Tartıyı $1/8$ inç sıkıştırmak için ne kadar iş yapılır?

Değişken Bir Kuvvetin Yaptığı İş

7. **Bir ipi kaldırmak** Bir dağcı 50 m uzunluğunda bir tırmanma ipini yukarı çekmek üzeredir. İp 0.624 N/m ağırlığındaysa, dağcı ne kadar iş yapacaktır?

8. **Delik kum torbası** Başlangıçta 144 lb ağırlığında olan bir torba kum sabit hızla kaldırılmaktadır. Yukarı kalkarken, kum da sabit hızla sızmaktadır. Torba 18 ft yukarı çekildiğinde, içindeki kumun yarısı gitmiştir. Kumu bu yüksekliğe çekmek için ne kadar

iş yapılmıştır? (Torbanın ve kaldırma aletlerinin ağırlıklarını ihmal edin.)

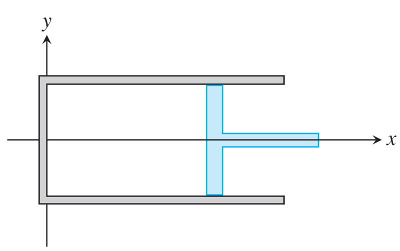
9. Bir asansör kablosunu kaldırmal Tepede bir motoru olan elektrikli bir asansörün 4.5 lb/ft ağırlığında sarımlı bir ipi vadır. Asansör birinci kattayken, 180 ft kablo açılmıştır ve asansör en üst kata vardığında 0 ft kablo açıktadır. Asansörü birinci kattan en üst kata çıkarırken, motor sadece ipi taşıyarak ne kadar iş yapmıştır?

10. Çekme kuvveti m kütleli bir parçacık $(x, 0)$'dayken, büyüklüğü k/x^2 olan bir kuvvetle orijine doğru çekilir. Parçacık harekete $x = b$'den durgun olarak başlarsa ve üzerine başka bir kuvvet etkimiyorsa, $x = a$, $0 < a < b$ noktasına vardığında parçacık üzerinde ne kadar iş yapılmış olduğunu bulun.

11. Gaz sıkıştırmak A kesit alanlı bir silindirdeki gazın bir pistonla sıkıştırıldığını varsayın. p gazın lb/inç^2 olarak basıncı ve V inç^3 olarak hacmiyse, gazı (p_1, V_1) durumundan (p_2, V_2) durumuna sıkıştırmak için yapılması gereken işin

$$\text{İş} = \int_{(p_1, V_1)}^{(p_2, V_2)} p\, dV$$

olduğunu gösterin. (*İpucu*: Şekilde verilen koordinatlarla $dV = A\, dx$ olur. Pistona karşı koyan kuvvet pA'dır.)



12. (*Alıştırma 11'nin devamı)* Alıştırma 11'deki integrali kullanarak, $p_1 = 50$ lb/inç^3 ise ve p ve V, $pV^{1.4}$ = sabit gaz yasasına uyuyorlarsa, gazı $V_1 = 243$ inç^3'ten $V_2 = 32$ inç^3'e sıkıştırmak için yapılan işi bulun.

13. Delik kova Örnek 4'teki kovanın sızdırdığını varsayın. 2 galon (16 lb) su ile başlar ve sabit bir hızla sızdırmaktadır. Tepeye vardığı anda, kova boşalır. Sadece suyu kaldırmak için ne kadar iş yapılmıştır? (*İpucu:* İp ve kovayı dahil etmeyin ve yükseklik x ft iken su miktarını bulun.)

14. (*Alıştırma 13'ün devamı*) Örnek 4'teki ve Alıştırma 13'teki işçiler, ellerindeki kovayı 5 galon (40 lb) su alan daha büyük bir kovayla değiştirdiler, fakat bu kovada daha büyük bir delik vardı, öyle ki yeni kova da yukarı çıktığı anda boşalmıştı. Suyun sabit bir hızla sızdığını varsayarsak, sadece suyu yukarı çekerken ne kadar iş yapılmıştır? (İpi ve kovayı hesaba katmayın.)

Kaplardan Sıvı Pompalamak

Suyun Ağırlığı

Dünyanın dönmesi ve yerçekimi alanındaki değişimlerden dolayı, deniz seviyesinde 1 ft^3 suyun ağırlığı, %0.5'lik bir değişimle ekvatorda 62.26 lb'den kutuplarda 62.59 lb'a kadar değişebilir. Melbourne ve New York Şehri'nde 62.4 lb ağırlığındaki 1 ft^3 su Juneau ve Stockholm'de 62.5 lb ağırlığında olacaktır. 62.4 tipik ve kitaplarda kullanılan bir değer olsa bile, önemli bir değişim sözkonusudur.

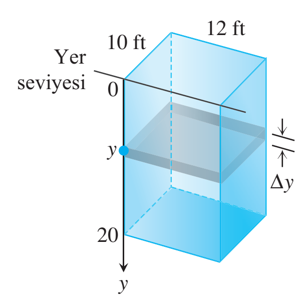
15. Su Pompalamak Aşağıda gösterilen, ağzı toprak seviyesinde olan dikdörtgenler prizması şeklindeki tank yağmur suyu toplamakta kullanılmaktadır. Suyun 62.4 lb/ft^3 ağırlığında olduğunu varsayın.

a. Tank tamamen dolduğunda, suyu yeniden dışarı pom-palayarak tankı boşaltmak için ne kadar iş yapılması gerekir?

b. Su dışarı (5/11) beygir gücünde (iş çıkışı 250 ft-lb/sn) bir motorla pompalanırsa, dolu tankı boşaltmak ne kadar sürecektir (dakika olarak)?

c. (b) şıkkındaki pompanın, pompalamanın ilk 25 dakikasında su seviyesini 10 ft (yarısı) azaltacağını gösterin.

d. Suyun ağırlığı (a) ve (b) şıklarındaki yanıtlar suyun ağırlığının 62.26 lb/ft^3 ve 62.59 lb/ft^3 olduğu yerlerde ne olur?



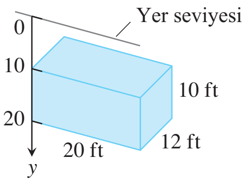
16. Bir sarnıcı boşaltmak Aşağıda gösterilen dikdörtgenler prizması şeklindeki sarnıcın (yağmur suyu toplamakta kullanılan tank) ağzı yer seviyesinden 10 ft aşağıdadır. Şu anda dolu olan sarnıç denetleme için içindekiler yer seviyesine pompalanarak boşaltılacaktır.

a. Sarnıcı boşaltmak için ne kadar iş yapılması gerekir?

b. Suyun (1/2) beygir gücünde, 275 ft-lb/sn hızında bir motorla dışarı pompalanması ne kadar sürer?

c. (b) şıkkındaki pompanın, sarnıcı yarıya kadar boşaltması ne kadar sürer? (Sarnıcı tamamen boşaltmak için gereken zamanın yarısından daha az sürecektir.)

d. Suyun ağırlığı (a)-(c) şıklarındaki yanıtlar suyun ağırlığının 62.26 lb/ft^3 ve 62.59 lb/ft^3 olduğu yerlerde ne olur?

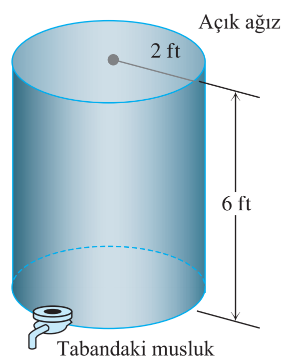


17. Yağ pompalamak Örnek 5'teki tank tamamen dolu ise tankta bulunan yağı tankın ağzına kadar pompalamak için ne kadar iş yapılması gerekir?

18. Yarı-dolu tanktan pompalamak Örnek 5'teki tankın, dolu olmak yerine, yarı dolu olduğunu varsayın. Kalan suyu tankın ağzından 4 m yukarıya pompalamak için ne kadar iş yapılması gerekir?

19. Bir tankı boşaltmak Dikey bir dairesel dik silindirik tank 30 ft yüksekliğinde ve 20 ft çapındadır. 51.2 lb/ft^3 ağırlığındaki kerosenle doludur. Keroseni tankın ağzına kadar pompalamak için ne kadar iş yapılması gerekir?

20. Aşağıda gösterilen silindirik tank, tankın tabanının 15 ft aşağısındaki bir gölden su pompalanarak doldurulabilmektedir. Bunu yapmanın iki yolu vardır. Birisi, suyu tankın tabanındaki bir musluğa takılı bir hortumla pompalamaktır. Diğeri ise hortumu tankın ağzına bağlamak ve suyu akıtmaktır. Hangi yol daha hızlıdır? Yanıtınızı açıklayın.



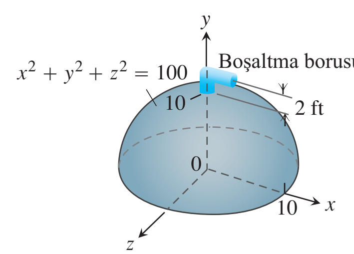
21. a. Süt pompalamak Örnek 5'teki konik tankta zeytinyağı yerine, 64.5 lb/ft^3 ağırlığında süt bulunduğunu varsayın. İçindekileri tankın ağzına kadar pompalamak için ne kadar iş yapmak gerekir?

b. Pumping oil Örnek 5'teki zeytinyağını tankın ağzının 3 ft yukarısında bir seviyeye getirmek için ne kadar iş yapmak gerekir?

22. Deniz suyu pompalamak Büyük bir paslanmaz çelik tankın iç yüzeyini tasarlamak için, $y = x^2$, $0 \le x \le 4$ eğrisini y-ekseni etrafında döndürüyorsunuz. Boyutları metre olan depo 10,000 N/m^3 ağırlığındaki deniz suyuyla doldurulacaktır. Suyu tankın ağzına pompalayarak boşaltmak için ne kadar iş yapmak gerekir?

23. Depodan su pompalamak Küresel depolardan pompalamayı da diğer depolarda olduğu gibi inetgrasyon eksenini kürenin dikey ekseninde alarak modelleriz. Aşağıdaki şekli kullanarak, yarıçapı 5 m olan dolu bir yarıküre şeklindeki su deposunu, suyu deponun 4 m yükseğine pompalayarak boşaltmak için ne kadar iş yapılacağını bulun. Suyun ağırlığı 9800 N/m^3'tür.

24. Aşağıda gösterilen depolama tankının boşaltılması ve tamiri ile görevlisiniz. Tank 10 ft yarıçapında bir yarıküre şeklindedir ve 56 lb/ft^3 ağırlığında benzenle doludur. Başvurduğunuz bir firma tankı ft-lb başına 1.2¢'e boşaltabileceğini söylüyor. Benzeni tankın iki ft yukarısındaki bir boşaltma musluğuna pompalayarak tankı boşaltmak için ne kadar iş yapılması gerektiğni hesaplayın. İş için bütçeniz 5000$ ise, firmayı tutmaya gücünüz yeter mi?



İş ve Kinetik Enerji

25. Kinetik Enerji Büyüklüğü $F(x)$ olan değişken bir kuvvet m kütleli bir cismi x-ekseni boyunca x_1'den x_2'ye taşırsa, cismin hızı v, dx/dt olarak yazılabilir (t zamanı göstermektedir). Newton' un İkinci Hareket Yasası $F = m(dv/dt)$'yi ve

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

Zincir Kuralını kullanarak, kuvvetin cismi x_1'den x_2'ye taşıyarak yaptığı işin

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = \frac{1}{2}mv_2^{\,2} - \frac{1}{2}mv_1^{\,2}$$

olduğunu gösterin. Burada v_1 ve v_2, cismin x_1 ve x_2'deki hızlarıdır. Fizikte $(1/2)mv^2$ ifadesine v hızıyla ilerleyen bir cismin *kinetik enerjisi* denir. Dolayısıyla, kuvvetin yaptığı iş cismin kinetik enerjisindeki değişime eşittir ve işi bu değişimi hesaplayarak bulabiliriz.

26–32 Alıştırmalarında, Alıştırma 25'in sonucunu kullanın

26. Tenis 2 onsluk bir tenis topu 160 ft/sn (yaklaşık 109 mil/sa) hızla atılmıştır. Topun bu kadar hızlı gitmesini sağlamak için ne kadar iş yapılmıştır? (Topun ağırlığından kütlesini bulmak için, ağırlığı lb olarak ifade edin ve yerçekimi ivmesi 32 ft/sn^2 ile bölün.)

27. Beyzbol Bir beyzbol topunu 90 mil/sa ile fırlatmak için kaç ft-lb'lik iş yapılır? Bir beyzbol topunun ağırlığı 5 ons = 0.3125 lb'dir.

28. Golf 1.6 onsluk bir golf topu başlangıç yerinden 280 ft/sn (yaklaşık 191 mil/sa) hızla atılır. Topu havaya fırlatmak için kaç ft-lb'lik iş yapılmıştır?

29. Tenis Pete Sampras'ın 1990 U.S. Açık erkekler tenis şampiyonasını kazandığı maç sırasında, Sampras 124 mil/sa ile gittiği ölçülen bir servis attı. Sampras o hıza ulaştırmak için 2 onsluk top üzerinde ne kadar iş yapmıştır?

30. Futbol Bir futbolcu 14.5 onsluk futbol topunu 88 ft/sn (60 mil/sa) hızla atmıştır. Bu hıza erişebilmesi için top üzerinde ne kadar iş yapılmıştır?

31. Softball 132 ft/sn (90 mil/sa) hıza çıkması için, 6.5 onsluk bir softball topu üzerinde ne kadar iş yapılmalıdır?

32. Gülle 2 onsluk çelik bir gülle kuvvet sabiti $k = 18$ lb/ft olan dikey bir yaya asılmıştır. Yay 3 inç sıkıştırılır ve bırakılır. Gülle ne kadar yükseğe çıkar?

33. Tahliye borusu hunisini boşaltmak (*Örnek 6'nın devamı.)*)

a. Örnek 6'daki boşaltma borusunun (huni kısmının) dik-kesitinin yarıçapını, su seviyesinden yükseklik olan y cinsinden bulun ($y = 325$'ten $y = 375$'e kadar).

b. Tahliye borusunun huni kısmının kesiti için ΔV'yi bulun ($y = 325$'ten $y = 375$'e kadar).

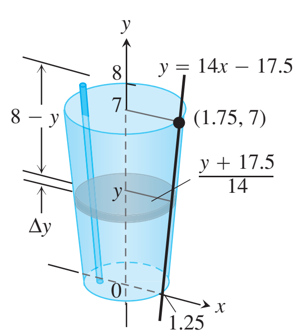
c. Huni kısmının kesitini dışarı pompalamak için gerekli işi, uygun belirli integrali formüle edip hesaplayarak bulun.

34. Tahliye borusudan su pompalamak (*Alıştırma 33'ün devamı.*)

a. Boru ve huni kısımlarını boşaltmak için gereken işleri toplayarak, boşaltma borusunu boşaltmak için gereken işi bulun.

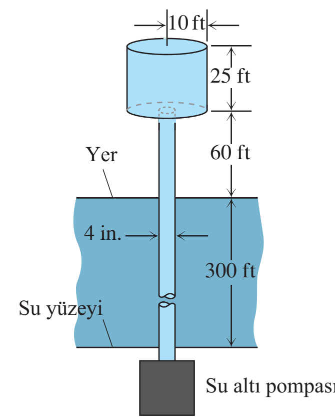
b. (a) daki cevabınız ft-lb cinsindendir. Motorlar beygir gücü ile derecelendirildiğinden, daha kullanışlı bir form beygir gücü-saat tir. ft-lb den beygir gücü-saat'e dönüşüm için 1.98×10^6 ile bölün. Motorun tam kapasite ile çalıştığını varsayarsak, 1000 beygir gücündeki bir motorun tahliye borusunu boşaltması kaç saat sürer?

35. Kamıştan süt emmek Aşağıda gösterilen kesik koni şeklindeki bardak 4/9 oz/inç^3 ağırlığında çilekli süt ile doludur. Görebileceğiniz gibi, bardak 7 inç derinliğinde, tabanı boyunca 2.5 inç genişliğinde ve üst tarafta da 3.5 inç genişliğindedir (Boston'daki Brigham'ın standart boyutları). Kamış bardağın ağzından bir inç dışarı çıkmaktadır. Kamıştan sütü emmek için ne kadar iş yapılması gerekecektir (sürtünmeyi ihmal edin)? İnç-ons olarak yanıtlayın.



inç olarak boyutlar

36. Su kulesi Kasabanız su rezervlerini arttırmak için bir kuyu kazmaya karar vermiştir. Kasaba mühendisi olarak, dağıtıma gerekli basıncı sağlamak için bir su kulesinin gerekli olduğunu belirliyorsunuz ve burada gösterilen sistemi tasarlıyorsunuz. Su, 300 ft'lik bir kuyudan 4 inçlik dikey bir boruyla çapı 20 ft ve yüksekliği 25 ft olan silindirik bir tankın tabanına pompalanacaktır. Tankın tabanı yerden 60 ft yüksekte olacaktır. Pompa 3 beygir gücünde, 1659 ft · lb/sn hızındadır. Saat olarak, ilk defasında tankı doldurmak ne kadar sürecektir? (Boruyu doldurmak için gereken zamanı da hesaba katın.) Suyun ağırlığının 62.4 lb/ft^3 olduğunu varsayın.



ÖLÇEKLİ DEĞİL

37. Bir uyduyu yörüngeye oturtmak Dünyanın yerçekimi alanının kuvveti dünyanın merkezinden uzaklık olan r ile değişir ve m kütleli bir uydunun fırlatılışı sırasında ve fırlatıldıktan sonra hissettiği yerçekimi kuvvetinin büyüklüğü

$$F(r) = \frac{mMG}{r^2}.$$

ile verilir. Burada, $M = 5.975 \times 10^{24}$ kg Dünyanın kütlesi, $G = 6.6720 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2\ kg^{-2}}$ evrensel yerçekimi sabitidir ve r metre olarak ölçülür. 1000 kg'lık bir uyduyu Dünya yüzeyinden, dünyanın merkezinden 35.780 km uzaktaki dairesel bir yörüngeye çıkartmak için yapılması gereken iş aşağıdaki integralle verilir:

$$\text{İş} = \int_{6{,}370{,}000}^{35{,}780{,}000} \frac{1000MG}{r^2}\, dr \text{ jul.}$$

İntegrali hesaplayın. İntegrasyonun alt sınırı Dünyanın, fırlatma rampasında, metre cinsinden yarıçapıdır. (Bu hesaplama fırlatma aracını kaldırmak için gereken enerjiyi ya da uyduyu yörünge hızına getirmek için gerekli enerjiyi hesaba katmaz.)

38. Elektronları bir araya getirmek r metre uzaklıkta iki elektron birbirlerini

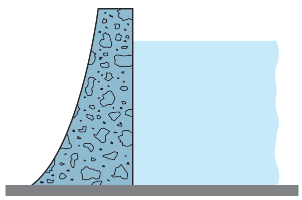
$$F = \frac{23 \times 10^{-29}}{r^2} \text{ newton}$$

kuvvetiyle iterler.

a. Bir elektronun x-ekseni üzerindeki (birimi metre) (0, 1) noktasında sabit tutulduğunu varsayın. İkinci bir elektronu x-ekseni üzerindeki (–1, 0) noktasından orijine ilerletmek için ne kadar iş yapılması gerekir?

b. (–1, 0) ve (1, 0) noktalarının her birinde bir elektronun sabit tutulduğunu varsayın. Üçüncü bir elektronu x-ekseni boyunca (5, 0)'dan (3, 0)'a ilerletmek için ne kadar iş yapılması gerekir?

6.7 Akışkan Basınçları ve Kuvvetleri



ŞEKİL 6.64 Artan basınca dayanabilmeleri için, barajların alt kısımları daha kalın yapılır.

Barajların altını üstlerinden daha kalın yaparız (Şekil 6.64), çünkü üzerlerindeki basınç derinlikle artar. Bir barajda, herhangi bir noktadaki basıncın barajın o noktada nasıl eğimlendirildiğine değil de o noktanın derinliğine bağlı olması önemli bir gerçektir. Basınç, yüzeyin h ft altında lb/ft^2 olarak, her zaman 62.4 h'dir. 62.4 sayısı suyun lb/ft^3 olarak ağırlık yoğunluğudur. Herhangi bir akışkanın yüzeyinden h ft aşağıdaki basıncı, akışkanın *ağırlık yoğunluğu* kere h'dir.

Basınç-Derinlik Denklemi
Hareketsiz duran bir akışkanda, h derinliğindeki p basıncı akışkanın ağırlık yoğunluğu w kere h'dir:

$$p = wh \qquad (1)$$

Bu bölümde $p = wh$ denklemini kullanarak bir akışkanın dikey veya yatay bir kap duvarının bir kısmına veya tamamına uyguladığı toplam kuvvet için bir formül türeteceğiz.

Ağırlık yoğunluğu
Bir akışkanın ağırlık yoğunluğu birim hacimdeki ağırlığıdır. Bazı değerler (lb/ft^3) aşağıda verilmiştir.

Mazot	42
Civar	849
Süt	64.5
Melas	100
Zeytinyağı	57
Deniz suyu	64
Su	62.4

Akışkan Kuvveti İçin Sabit-Derinlik Formülü

Yatay tabanlı bir akışkan kabında, akışkanın tabana uyguladığı toplam kuvvet, taban alanını tabandaki basınçla çarparak hesaplanabilir. Bunu yapabiliriz, çünkü toplam kuvvet, birim alandaki kuvvet (basınç) kere alandır (Şekil 6.65'e bakın). F, p ve A sırası ile toplam kuvvet, basınç ve alansa,

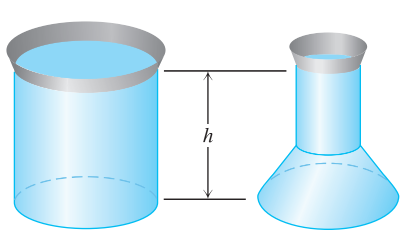
$$\begin{aligned} F &= \text{toplam kuvvet} = \text{birim alandaki kuvvet} \times \text{alan} \\ &= \text{basınç} \times \text{alan} = pA \\ &= whA \end{aligned}$$

(1) denkleminden $p = wh$

bulunur.

Sabit-Derinlikte Bir Yüzey Üzerindeki Toplam Kuvvet

$$F = pA = whA \qquad (2)$$



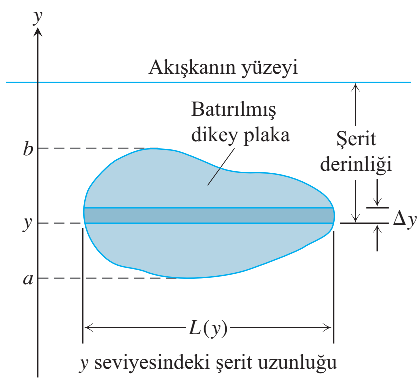
ŞEKİL 6.65 Bu kapların içinde aynı derinlikte su vardır ve taban alanları aynıdır. Dolayısıyla her kabın dibindeki toplam kuvvet aynıdır. Burada kapların şeklinin önemi yoktur.

Örneğin, suyun ağırlık-yoğunluğu 62.4 lb/ft^3'tür. Dolayısıyla, 3 ft derinliğinde ve 10 ft × 20 ft ölçülerinde dikdörtgen şeklindeki bir havuzun tabanındaki akışkan kuvveti

$$\begin{aligned} F &= whA = (62.4\ \text{lb/ft}^3)(3\ \text{ft})\ (10 \cdot 20\ \text{ft}^2) \\ &= 37{,}440\ \text{lb} \end{aligned}$$

dir.

Yukarıda incelemiş olduğumuz yüzme havuzunun tabanı gibi, yatay olarak batırılmış düz bir levha için, sıvı basıncından dolayı üst yüzeyine aşağıya doğru etki eden kuvvet (2) denklemi ile verilir. Halbuki, levha dikey olarak batırılırsa, farklı derinliklerdeki basınç farklı olacaktır ve artık (2) Denklemi kullanılamaz (h değiştiğinden). Levhayı bir çok ince yatay bant'a veya şerite bölerek, limiti dikey olarak batırılmış levhanın yüzeyine etki eden kuvvet olan, bir Riemann toplamı oluşturabiliriz. Prosedür aşağıdadır.



ŞEKİL 6.66 Bir akışkanın ince yatay bir şeridin bir tarafına uyguladığı kuvvet yaklaşık ΔF = basınç × alan = w × (şerit derinliği) × $L(y)\ \Delta y$'dir.

Değişken Derinlik Formülü

Ağırlık yoğunluğu w olan bir akışkanın içine batırılmış dikey bir plakanın bir tarafına akışkanın uyguladığı kuvveti bulmak istediğimizi varsayalım. Bunu bulmak için, plakayı xy-düzleminde $y = a$'dan $y = b$'ye kadar uzanan bir bölge olarak modelleyelim (Şekil 6.66). $[a, b]$ aralığını her zamanki gibi böler ve bölgenin, bölünüş noktalarından y-eksenine dik düzlemlerle ince yatay şeritlere ayrıldığını varsayarız. y'den $y + \Delta y$'ye kadar olan tipik bir şerit Δy birim genişliğinde ve $L(y)$ birim uzunluğundadır. $L(y)$'nin y'nin sürekli bir fonksiyonu olduğunu varsayarız.

Basınç şerit boyunca yukarıdan aşağıya değişir. Fakat şerit yeterince ince ise basınç, alt kenar değeri olan w × (şerit derinliği)'ne yakın kalacaktır. Akışkanın şeridin bir tarafına uyguladığı kuvvet

$$\Delta F = (\text{taban kenarı boyunca basınç}) \times (\text{alan})$$
$$= w \cdot (\text{şerit derinliği}) \cdot L(y)\ \Delta y$$

civarında olacaktır. $a \le y \le b$ bölünüşüne karşı gelen n tane şerit bulunduğunu ve y_k'nın, uzunluğu $L(y_k)$ ve genişliği Δy_k olan k. şeridin alt kenarı olduğunu varsayalım. Tüm plakaya karşı uygulanan kuvvete, her şeride etki eden kuvvetleri toplayarak yaklaşımda bulunulur. Bu toplam bir Riemann yoplamı verir:

$$F \approx \sum_{k=1}^{n} (w \cdot (\text{şerit derinliği})_k \cdot L(y_k))\ \Delta y_k \qquad (3)$$

(3)'teki toplam sürekli bir fonksiyonun $[a, b]$ aralığındaki Riemann toplamıdır ve bölünüşün normu sıfıra giderken yaklaşımların iyileşmesini bekleriz. Plakaya karşı uygulanan kuvvet bu toplamların limitidir.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (w \cdot (\text{şerit derinliği})_k \cdot L(y_k))\ \Delta y_k = \int_a^b w \cdot (\text{şerit derinliği}) \cdot L(y)\ \Delta y$$

TANIM Dikey Bir Levhaya Etki Eden Akışkan Basıncı İçin İntegral
Ağırlık yoğunluğu w olan bir akışkanın içine batırılmış bir plakanın y-ekseninde $y = a$'dan $y = b$'ye kadar uzandığını varsayın. $L(y)$, y seviyesinde plakanın yüzeyi boyunca soldan sağa doğru ölçülen yatay şeridin uzunluğu olsun. Bu durumda, plakanın bir tarafına akışkanın uyguladığı basınç şu şekildedir:

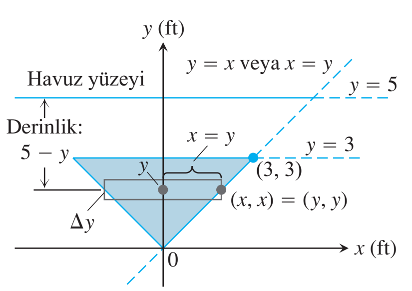
$$F = \int_a^b w \cdot (\text{şerit derinliği}) \cdot L(y)\ \Delta y \qquad (4)$$

ÖRNEK 1 Akışkan Basıncı İntegralini Uygulamak

Tabanı 6 ft ve yüksekliği 3 ft olan bir ikizkenar dik üçgen plaka dikey ve tabanı yukarıda olacak şekilde, bir yüzme havuzunun yüzeyinin 2 ft altına yerleştiriliyor. Plakanın bir tarafına suyun uyguladığı kuvveti bulun.

Çözüm Orijini plakanın alt köşesine koyup, y-eksenini plakanın simetri ekseni boyunca yukarı doğru alarak çalışacak bir koordinat sistemi oluştururuz (Şekil 6.67). Havuzun yüzeyi $y = 5$ doğrusu ve plakanın üst tabanı $y = 3$ doğrusu üzerindedir. Plakanın sağ kenarı, sağ köşesi (3, 3) noktasında olmak üzere, $y = x$ doğrusu üzerindedir. y seviyesindeki ince bir şeridin uzunluğu şudur:

$$L(y) = 2x = 2y$$



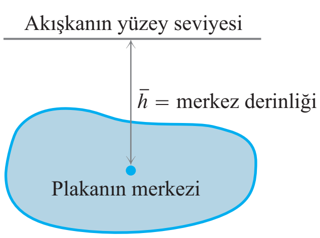
ŞEKİL 6.67 Örnek 1'de bulunan su altındaki plakanın bir tarafına uygulanan kuvveti bulmak için, buradaki gibi bir koordinat sistemi kullanabiliriz.

Yüzeyin altındaki şeridin uzunluğu $(5 - y)$'dir. Dolayısıyla, plakanın bir tarafına suyun uyguladığı kuvvet

$$F = \int_a^b w \cdot (\text{şerit derinliği}) \cdot L(y)\,\Delta y \qquad \text{Denk. (4)}$$
$$= \int_0^3 62.4(5 - y)2y\,dy$$
$$= 124.8\int_0^3 (5y - y^2)\,dy$$
$$= 124.8\left[\frac{5}{2}y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_0^3 = 1684.8 \text{ lb}$$

olarak bulunur. ■

Akışkan Kuvvetleri ve Merkezler



ŞEKİL 6.68 Plakanın bir tarafına uygulanan kuvvet $w \cdot \bar{h} \cdot$ plaka alanıdır.

Sıvıya batırılmış dikey bir plakanın merkezinin yerini biliyorsak (Şekil 6.68), plakanın bir tarafına uygulanan kuvveti bulmak için kestirme bir yol kullanabiliriz. Bu yol (4) denkleminden çıkar:

$$F = \int_a^b w \times (\text{şerit derinliği}) \times L(y)\,dy$$
$$= w\int_a^b (\text{şerit derinliği}) \times L(y)\,dy$$
$$= w \times (\text{plakanın kapladığı alanın yüzey seviye çizgisi etrafında moment})$$
$$= w \times (\text{plakanın merkezinin derinliği}) \times (\text{plakanın alanı})$$

> **Akışkan Kuvvetleri ve Merkezler**
> Ağırlık yoğunluğu w olan bir akışkanın sıvı altındaki dikey bir tabakaya uyguladığı kuvvet w, plakanın merkezinden akışkan yüzeyine olan uzaklık $\bar{h}$ ve plakanın alanının çarpımıdır:
>
> $$F = w\bar{h}A. \qquad (5)$$

ÖRNEK 2 (5) Denklemini Kullanarak Akışkan Kuvveti Bulmak

(5) denklemini kullanarak Örnek 1'deki kuvveti bulun.

Çözüm Üçgenin merkezi (Şekil 6,67) y-ekseni üzerinde, tabandan köşeye olan uzaklığın üçte birindedir, dolayısıyla $\bar{h} = 3$ olur. Üçgenin alanı

$$A = \frac{1}{2}(\text{taban})(\text{yükseklik})$$
$$= \frac{1}{2}(6)(3) = 9$$

olarak bulunur. Dolayısıyla,

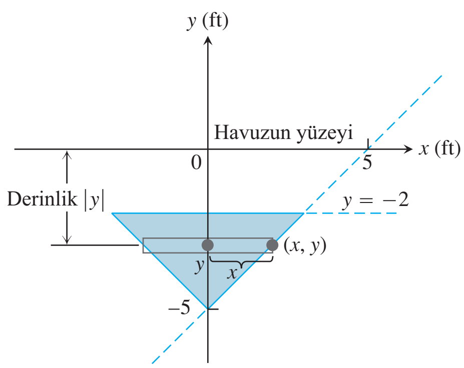
$$F = w\bar{h}A = (62.4)(3)(9)$$
$$= 1684.8 \text{ lb}$$

buluruz. ■

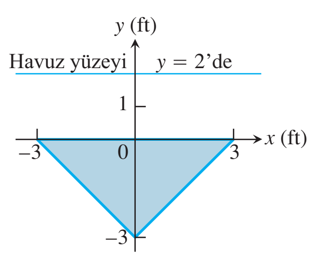
ALIŞTIRMALAR 6.7

Aşağıdaki alıştırmalar için akışkanların ağırlık-yoğunlukları sayfa 456'daki tablodan bulunabilir.

1. **Üçgensel plaka** Örnek 1'deki plakanın bir tarafına uygulanan akışkan kuvvetini buradaki koordinat sistemiyle bulun.



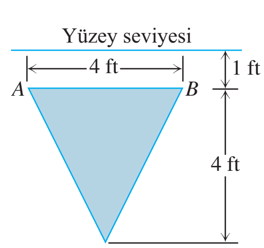
2. **Üçgensel plaka** Örnek 1'deki plakanın bir tarafına uygulanan akışkan kuvvetini buradaki koordinat sistemiyle bulun.



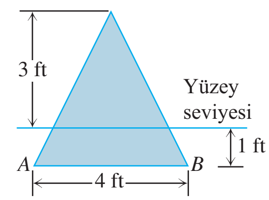
3. **Alçaltılmış üçgensel plaka** Örnek 1'deki plaka suyun 2 ft daha içine indiriliyor. Plakanın bir tarafındaki akışkan kuvveti şimdi nedir?

4. **Yükseltilmiş üçgensel plaka** Örnek 1'deki plaka, üst kenarı havuzun yüzeyine gelecek şekilde kaldırılıyor. Bir tarafındaki akışkan kuvveti nedir?

5. **Üçgensel plaka** Burada gösterilen ikizkenar üçgen şeklindeki plaka dikey olarak bir gölün yüzeyinin 1 ft altına koyuluyor.
   - **a.** Plakanın bir tarafındaki akışkan kuvvetini bulun.
   - **b.** Su, temiz su yerine deniz suyu olsaydı, plakanın bir tarafındaki akışkan basıncı ne olurdu?



6. **Döndürülmüş üçgensel plaka** Alıştırma 5'teki plaka, AB doğrusu etrafında plakanın bir kısmı gölün dışına çıkacak şekilde 180° döndürülüyor. Artık akışkan plakanın bir tarafına ne kadar kuvvet uygular?



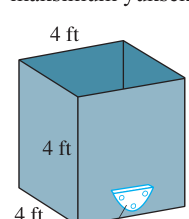
7. **New England Akvaryumu** Boston'daki New England Akvaryumundaki tipik bir balık tankının dikdörtgen cam penceresinin gözlem kısmı 63 inç genişliğindedir ve su yüzeyinin 0.5 inç altından yüzeyin 33.5 inç aşağısına kadar uzanır. Pencerenin bu kısmına uygulanan akışkan basıncını bulun. Deniz suyunun ağırlık-yoğunluğu 64 lb/ft^3'tür. (Merak ediyorsanız, cam $3/4$ inç kalınlığındadır ve balıkların dışarı atlamasını engellemek için tank duvarları suyun 4 inç yukarısına kadar çıkar.)

8. **Balık tankı** Tabanı 2×4 ft ve yüksekliği 2 ft olan (iç boyutlar) yatay, dikdörtgen şeklinde bir tatlı su balık tankı tepesinden 2 ft aşağıya kadar su ile doludur.
   - **a.** Tankın yanlarındaki ve uçlarındaki akışkan kuvvetini bulun.
   - **b.** Tank mühürlenir ve kare yüzeylerinden biri taban olacak şekilde üzerine kaldırılırsa (dökülmeden), dikdörtgen yüzeylerdeki akışkan basıncına ne olur?

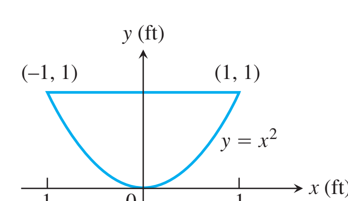
9. **Yarım daire şeklinde bir plaka** Çapı 2 ft olan yarım daire şeklinde bir plaka çapı yüzeyde olacak şekilde temiz suya daldırılıyor. Plakanın bir tarafına suyun uyguladığı akışkan basıncını bulun.

10. **Süt tankeri** Bir tanker 6 ft çapında yatay bir silindirik tankla süt taşımaktadır. Tank yarı doluyken, süt tankın uçlarına ne kadar kuvvet uygular?

11. Burada gösterilen kübik metal tankın vidalarla yerinde tutulan ve akıtmadan 169 lb'lik akışkan basıncına dayanabilecek parabolik bir kapısı vardır. Depolamayı düşündüğünüz sıvının ağırlık yoğunluğu 50 lb/ft^3'tür.
    - **a.** Sıvı 2 ft derinliğindeyken, kapıya uygulanan akışkan kuvveti nedir?
    - **b.** Bu kabın tasarım sınırlarını geçmeden doldurulabileceği maksimum yükseklik nedir?



Parabolik kapı

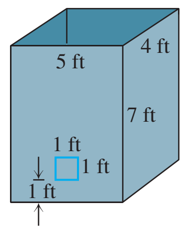


Parabolik kapının büyütülmüş görüntüsü

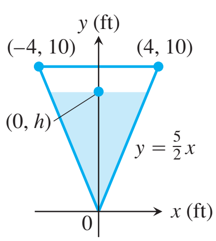
12. Burada gösterilen dikdörtgen tankın tabandan 1 ft yükseklikte 1 ft × 1 ft'lik kare bir penceresi vardır. Pencere çatlamadan 312 lb'lik bir akışkan basıncına dayanacak şekilde yapılmıştır.

a. Tank 3 ft derinliğinde suyla doluyken, pencerenin karşı koyacağı akışkan kuvveti ne kadardır?

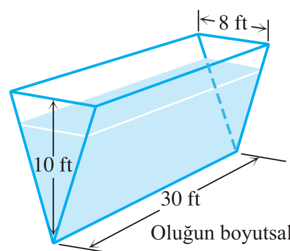
b. Pencerenin tasarım sınırları aşılmadan tank hangi seviyeye kadar doldurulabilir?



13. Burada gösterilen oluğun uç plakaları 6667 lb'lik akışkan kuvvetine dayanacak şekilde tasarlanmıştır. Bu sınırları aşmadan, tank kaç ft^3 su alabilir? Yanıtınızı yuvarlayın.



Oluğun uç görüntüsü

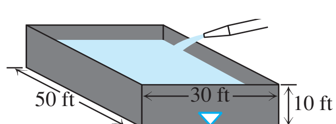


Oluğun boyutsal görüntüsü

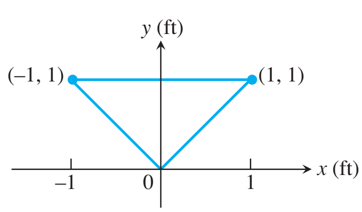
14. Burada gösterilen dikdörtgen havuza 1000 ft^3/sa hızla su akmaktadır.

a. 9 saatlik dolumdan sonra üçgen boşaltma plakasındaki akışkan basıncını bulun.

b. Boşaltma plakası 20 lb'lik bir akışkan kuvvetine dayanacak şekilde tasarlanmıştır. Bu limiti aşmadan, havuzu hangi yüksekliğe kadar doldurabilirsiniz?



Üçgen boşaltma plakası

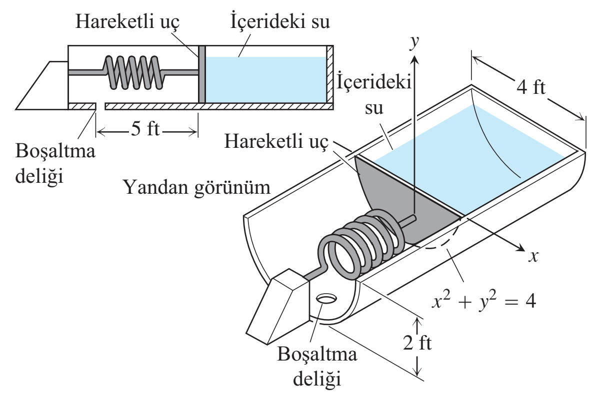


Boşaltma plakasının büyütülmüş görüntüsü

15. Uzunluğu a birim, genişliği b birim olan dikey dikdörtgen bir plaka uzun kenarları akışkanın yüzeyine paralel olacak şekilde ağırlık yoğunluğu w olan bir akışkanın içine konuluyor. Plakanın dikey boyutundaki basıncın ortalama değerini bulun. Yanıtınızı açıklayın.

16. (*Alıştırma 15'in devamı*) Akışkanın plakanın bir tarafına uyguladığı kuvvetin, basıncın ortalama değeri (Alıştırma 15'te bulunmuştur) kere plakanın alanı olduğunu gösterin.

17. Aşağıdaki tanka 4 ft^3/dak hızla su dolmaktadır. Tankın dik-kesitleri 4 ft çaplı yarım dairelerdir. Tankın bir ucu hareketlidir, fakat hacimi arttırmak için ucu hareket ettirmek bir yayı sıkıştırır. Yay sabiti $k = 100$ lb/ft'tir. Tankın ucu yayı 5 ft sıkıştırırsa, su dipteki bir güvenlik deliğinden 5 ft^3/dak hızla boşalacaktır. Hareketli uç, tank taşmadan deliğe varabilir mi?



18. Sulama oluğu Bir sulama oluğunun dikey uçları, bir kenarı 3 ft olan karelerdir.

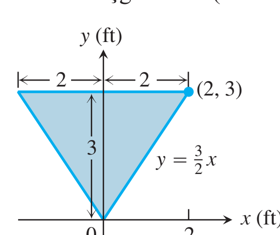
a. Oluk doluyken, uçlarındaki akışkan kuvvetini bulun.

b. Akışkan kuvvetini %25 azaltmak için, oluktaki su seviyesini kaç inç azaltmalısınız?

19. Süt kartonu Dikdörtgen bir süt kartonunun tabanı 3.75 × 3.75 inç ve yüksekliği 7.75 inçtir. Karton doluyken, sütün bir kenara uyguladığı akışkan basıncını bulun.

20. Yağ tenekesi Standart bir yağ tenekesinin tabanı 5.75 × 3.5 inç ve yüksekliği 10 inçtir. Teneke doluyken, tabana ve her kenara uygulanan akışkan basıncını bulun.

21. Sulama oluğu Bir sulama oluğunun dikey uçları aşağıda gösterildiği şekilde ikizkenar üçgenlerdir (ft olarak).



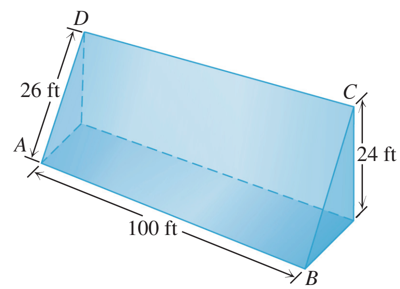
a. Oluk doluyken, uçlardaki akışkan kuvvetini bulun.

b. Uçlardaki akışkan kuvvetini yarıya indirmek için oluktaki su seviyesini kaç inç azaltmalısınız? (Yarım inç hassaslıkta yanıtlayın.)

c. Oluğun ne kadar uzun olduğunun önemi var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

22. Bir barajın set'i bir dikdörtgendir, $ABCD$ ve boyutları $AB = CD = 100$ ft, $AD = BC = 26$ ft dir. $ABCD$ düzlemi dikey olmak yerine şekilde gösterildiği gibi eğimlidir. Dolayısıyla setin üst kısmı tabandan 24 ft yüksektedir.

Su seviyesi set seviyesinde iken su basıncından dolayı sete etki eden kuvveti bulun.



Bölüm 6 Tekrar Soruları

1. Dilimleme yöntemiyle cisimlerin hacimlerini nasıl tanımlar ve hesaplarsınız? Bir örnek verin.
2. Hacim hesaplamak için disk ve pul yöntemleri dilimleme yönteminden nasıl üretilir? Bu yöntemlerle hacim hesaplanmasına örnekler verin.
3. Silindirik kabuk yöntemini açıklayın. Bir örnek verin.
4. Düzgün bir $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, parametrize eğrisinin uzunluğunu nasıl tanımlarsınız? Düzgünlüğün uzunlukla ne ilgisi vardır? Eğrinin uzunluğunu bulmak için parametrizasyonla ilgili başka ne bilmek gerekir?
5. Kapalı bir aralıkta düzgün bir fonksiyonun grafiğinin uzunluğunu nasıl bulursunuz? Bir örnek verin. Peki ya sürekli bir birinci türevi olmayan fonksiyonlar için ne diyebilirsiniz?
6. Kütle Merkezi nedir?
7. İnce bir çubuğun veya bir malzeme şeridinin kütle merkezini nasıl bulursunuz? Örnek verin. Bir malzemenin yoğunluğu sabitse, kütle merkezinin nerede olduğunu hemen söyleyebilirsiniz. Neredir?
8. İnce düz bir malzeme tabakasının kütle merkezini nasıl bulursunuz? Örnek verin.
9. Düzgün bir $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ fonksiyonunun grafiğinin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile süpürülen yüzeyin alanını nasıl tanımlar ve hesaplarsınız? Bir örnek verin.
10. Hangi koşullar altında bir $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$ eğrisinin **a.** x-ekseni **b.** y-ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen yüzeyin alanını bulabilirsiniz? Örnekler verin.
11. Pappus'un iki teoremi ne der? Yüzey alanları ile hacimleri hesaplamada ve merkezlerin yerini bulmada nasıl kullanıldıklarına dair örnek verin.
12. x-ekseninin bir bölümü üzerinde değişken bir kuvvetin yaptığı işi nasıl tanımlar ve hesaplarsınız? Bir sıvıyı bir tanktan pompalamak için yapılan işi nasıl hesaplarsınız? Örnekler verin.
13. Dikey bir duvarın bir kısmı üzerine bir sıvının uyguladığı kuvveti nasıl hesaplarsınız? Bir örnek verin.

Bölüm 6 Problemler

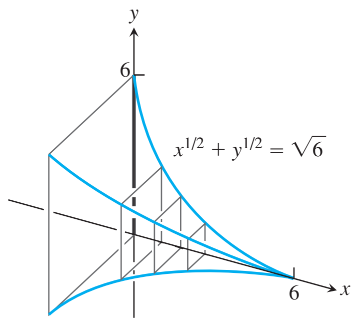
Hacimler

1–16 alıştırmalarındaki cisimlerin hacimlerini bulun.

1. Cisim, $x = 0$ ve $x = 1$'de x eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. Bu düzlemler arasında x-eksenine dikey olan dik-kesitleri, çapları $y = x^2$ parabolünden $y = \sqrt{x}$ parabolüne kadar giden dairesel disklerdir.
2. Cismin tabanı birinci bölgede $y = x$ doğrusu ile $y = 2\sqrt{x}$ parabolü arasında kalan bölgedir. Cismin x-eksenine dikey olan dik-kesitleri, tabanları doğrudan eğriye uzanan eşkenar üçgenlerdir.

3. Cisim, $x = \pi/4$ ve $x = 5\pi/4$'te x-eksenine dik olan düzlemler arasında bulunmaktadır. Bu düzlemler arasındaki dik-kesitler çapları $y = 2 \sin x$ eğrisinden $y = 2 \cos x$ eğrisine giden dairesel disklerdir.

4. Cisim, $x = 0$ ve $x = 6$'da x-eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. Bu düzlemler arasındaki dik-kesitler tabanları x-ekseninden $x^{1/2} + y^{1/2} = \sqrt{6}$ eğrisine kadar giden karelerdir.



5. Cisim, $x = 0$ ve $x = 4$'te x-eksenine dik düzlemler arasında bulunmaktadır. Cismin bu düzlemler arasında x-eksenine dikey olan dik-kesitleri çapları $x^2 = 4y$ eğrisinden $y^2 = 4x$ eğrisine giden dairesel disklerdir.

6. Cismin tabanı xy-düzlemindeki $y^2 = 4x$ parabolü ile $x = 1$ doğrusu arasında kalan bölgedir. x-eksenine dikey her dik-kesit bir kenarı düzlemde olan bir eşkenar üçgendir (Üçgenlerin hepsi düzlemin aynı tarafındadır).

7. x-ekseni, $y = 3x^4$ eğrisi, $x = 1$ ve $x = -1$ doğruları ile sınırlanan bölgenin **(a)** x-ekseni, **(b)** y-ekseni, **(c)** $x = 1$ doğrusu ve **(d)** $y = 3$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen cisimlerin hacimlerini bulun.

8. $x = y^2 + 1$ eğrisi ile $x = 1$ ve $y = 1/2$ doğruları arasındaki "üçgen" bölgenin **(a)** x-ekseni, **(b)** y-ekseni, **(c)** $x = 2$ doğrusu ve **(d)** $y = 4$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen cisimlerin hacimlerini bulun.

9. Soldan $x = y^2 + 1$ ve sağdan $x = 5$ doğrusuyla sınırlanan bölgenin **(a)** x-ekseni, **(b)** y-ekseni ve **(c)** $x = 5$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen cisimlerin hacimlerini bulun.

10. $y^2 = 4x$ parabolü ve $y = x$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin **(a)** x-ekseni, **(b)** y-ekseni, **(c)** $x = 4$ doğrusu ve **(d)** $y = 4$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen cisimlerin hacimlerini bulun.

11. Birinci bölgede x-ekseni, $x = \pi/3$ doğrusu ve y tan x eğrisi ile sınırlanan "üçgen" bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen cismin hacmini bulun.

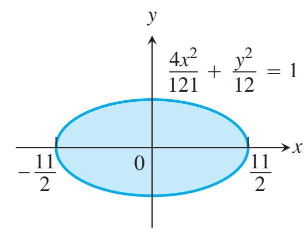
12. $y = \sin x$ eğrisi ile $x = 0$, $x = \pi$ ve $y = 2$ doğruları ile sınırlanan bölgenin, $y = 2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen cismin hacmini bulun.

13. x-ekseni ile $y = x^2 - 2x$ eğrisi arasındaki bölgenin **(a)** x-ekseni, **(b)** $y = -1$ doğrusu, **(c)** $x = 2$ doğrusu ve **(d)** $y = 2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen cisimlerin hacimlerini bulun.

14. $y = 2 \tan x$, $y = 0$, $x = -\pi/4$ ve $x = \pi/4$ ile sınırlanan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen cismin hacmini bulun. (Bölge birinci ve üçüncü bölgelerde bulunur ve eğri bir papyona benzer.)

15. **Bir küre deliğinin hacmi** 2 ft yarıçaplı içi dolu bir kürenin merkezinden geçen $\sqrt{3}$ ft yarıçaplı yuvarlak bir delik oyulmuştur. Küreden çıkarılan malzemenin hacmini bulun.

16. **Bir futbol topunun hacmi** Bir futbol topunun profili aşağıdaki elipse benzer. Topun hacmini inç^3 olarak bulun.



Eğrilerin Uzunlukları

17–23 Alıştırmalarındaki eğrilerin uzunluklarını bulun

17. $y = x^{1/2} - (1/3)x^{3/2}, \quad 1 \le x \le 4$

18. $x = y^{2/3}, \quad 1 \le y \le 8$

19. $y = (5/12)x^{6/5} - (5/8)x^{4/5}, \quad 1 \le x \le 32$

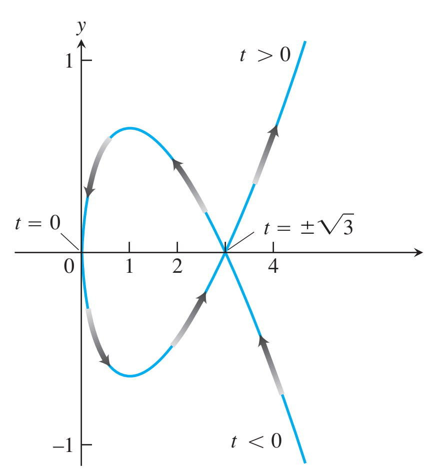
20. $x = (y^3/12) + (1/y), \quad 1 \le y \le 2$

21. $x = 5 \cos t - \cos 5t, \quad y = 5 \sin t - \sin 5t, \quad 0 \le t \le \pi/2$

22. $x = t^3 - 6t^2, \quad y = t^3 + 6t^2, \quad 0 \le t \le 1$

23. $x = 3 \cos \theta, \quad y = 3 \sin \theta, \quad 0 \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$

24. Şekilde gösterilen $x = t^2, y = (t^3/3) - t$ kapalı halkanın uzunluğunu bulun. Halka, $t = -\sqrt{3}$ te başlayıp $t = \sqrt{3}$ bitmektedir.



Merkezler ve Kütle Merkezleri

25. $y = 2x^2$ ve $y = 3 - x^2$ parabolleriyle çevrelenen bölgeyi kaplayan ince, düz bir tabakanın merkezini bulun.

26. x-ekseni, $x = 2$ ve $x = -2$ doğruları ve $y = x^2$ parabolü ile çevrelenen bölgeyi kaplayan ince, düz tabakanın merkezini bulun.

27. Birinci bölgede bulunan ve y-ekseni, $y = x^2/4$ parabolü ve $y = 4$ doğrusuyla çevrelenen "üçgen" bölgeyi kaplayan ince, düz tabakanın merkezini bulun.

28. $y^2 = x$ parabolü ve $x = 2y$ doğrusu ile çevrelenen bölgeyi kaplayan ince, düz tabakanın merkezini bulun.

29. Yoğunluk fonksiyonu $\delta(y) = 1 + y$ ise, $y^2 = x$ parabolü ve $x = 2y$ ile çevrelenen bölgeyi kaplayan ince, düz plakanın kütle merkezini bulun. (Yatay şeritler kullanın.)

30. **a.** $x = 1$'den $x = 9$'a kadar $y = 3/x^{3/2}$ eğrisi ile x-ekseni arasındaki bölgeyi kaplayan sabit yoğunluklu ince bir plakanın ağırlık merkezini bulun.

b. Yoğunluğu sabit olmak yerine, $\delta(x) = x$ ise, plakanın kütle merkezini bulun. (Dikey şeritler kullanın.)

Dönel Yüzeylerin Alanları

31–36 Problemlerinde, eğrilerin verilen eksenler etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeylerin alanlarını bulun.

31. $y = \sqrt{2x + 1}, \quad 0 \le x \le 3;$ x-ekseni

32. $y = x^3/3, \quad 0 \le x \le 1;$ x-ekseni

33. $x = \sqrt{4y - y^2}, \quad 1 \le y \le 2;$ y-ekseni

34. $x = \sqrt{y}, \quad 2 \le y \le 6;$ y-ekseni

35. $x = t^2/2, \quad y = 2t, \quad 0 \le t \le \sqrt{5};$ x-ekseni

36. $x = t^2 + 1/(2t), \quad y = 4\sqrt{t}, \quad 1/\sqrt{2} \le t \le 1;$ y-ekseni

İş

37. Donanım kaldırmak Bir dağcı, arkasından sarkan ve her metresi 0.8 newton ağırlığındaki 40 metrelik bir ipte asılı olan 100 N'luk (yaklaşık 22.5 lb) donanımı yukarı çekmek üzeredir. Ne kadar iş yapar? (*İpucu*: Yük ve ip için ayrı ayrı çözün ve toplayın.)

38. Sızdıran tanker 800 galonluk bir tankeri Washington Dağı'nın eteğinden zirvesine kadar çıkardınız ve zirveye vardığınızda tankın sadece yarıya kadar dolu olduğunu farkettiniz. Dolu bir tankla yola çıkmış, sabit hızla gitmiş ve 4750 ft'lik yükseklik farkını 50 dakikada almıştınız. Suyun sabit bir hızla sızdığını varsayarsanız, suyu tepeye kadar çıkartmak için ne kadar iş yapmışsınızdır? Kendinizi ve tankeri yukarı çıkarmak için yapılan işi saymayın. Suyun ağırlığı 8 lb/Amerikan galonudur.

39. Bir yayı germek Bir yayı normal uzunluğundan 1 ft germek için 20 lb' lik bir kuvvet gerekiyorsa, yayı bu kadar germek için ne kadar iş yapmak gerekir? Peki ya 1 ft daha?

40. Garaj kapısı yayı 200 N'luk bir kuvvet bir garaj kapısı yayını normal uzunluğundan 0.8 m uzatacaktır? 300 Nt'luk bir kuvvet yayı ne kadar gerer? Yayı bu kadar germek için ne kadar iş yapmak gerekir?

41. Bir rezervuardan su pompalamak Üstü 20 ft genişliğinde ve derinliği 8 ft olan tepesi aşağıda dik bir koni şeklindeki bir rezervuar su doludur. Suyu rezervuarın 6 ft yukarısına pompalamak için ne kadar iş yapmak gerekir?

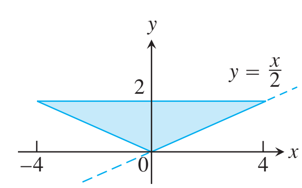
42. Bir rezervuardan su pompalamak (*Problem 41'in devamı*) Rezervuar 5 ft derinliğinde doludur ve su rezervuarın üstüyle aynı seviyeye pompalanacaktır. Ne kadar iş yapılır?

43. Konik bir tanktan sıvı pompalamak 5 ft yarıçaplı ve 10 ft yüksekliğinde tepesi aşağıya doğru olan bir dairesel dik koni şeklindeki bir depo ağırlık yoğunluğu 60 lb/ft^3 olan bir sıvıyla doludur. Sıvıyı tankın 2 ft yukarısına pompalamak için ne kadar iş yapılması gerekir? Pompa 275 ft-lb/sn hızlı (1/2 bg) bir motorla çalışıyorsa, depoyu boşaltmak ne kadar sürer?

44. Silindirik bir tanktan sıvı pompalamak Bir depolama tankı ekseni yatay olan 20 ft uzunluğunda ve 8 ft çapında bir silindirdir. Tank yarısına kadar ağırlığı 57 lb/ft^3 olan zeytinyağıyla doluysa, tankın dibinden tankın 6 ft yukarısına kadar çıkan bir boruyla yağ boşaltılırken ne kadar iş yapılacağını bulun.

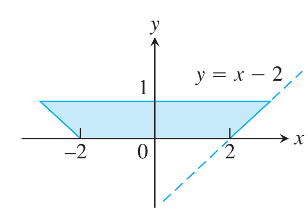
Akışkan Kuvveti

45. Su oluğu Aşağıda görülen dikey üçgen tabaka suyla dolu bir oluğun uç kısmıdır ($w = 62.4$). Plakaya karşı olan akışkan kuvveti nedir?



BİRİMİ FİT

46. Akçaağaç şurubu oluğu Aşağıda gösterilen dikey yamuk şeklindeki tabaka ağırlığı 75 lb/ft^3 olan akçaağaç şurubuyla dolu bir oluğun uç kısmıdır. Şurup 10 ft derinliğindeyken, oluğun uç tabakasına uygulanan akışkan basıncı nedir?

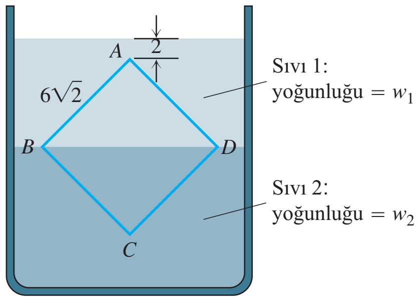


BİRİMİ FİT

47. Parabolik kapak üzerindeki kuvvet Bir barajdaki dikey düz bir kapağın şekli, birimler fit olmak üzere, $y = 4x^2$ parabolü ile $y = 4$ doğrusu arasında kalan bölgenin şekli gibidir. Kapının tepesi suyun yüzeyinin 5ft altındadır. Suyun kapağa uyguladığı kuvveti bulun ($w = 62.4$).

T **48.** Taban kenarı 1 ft olan ve iç duvarları 40.000 lb'lik akışkan kuvvetine dayanabilecek dikey bir kare tankta civa ($w = 849$ lb/ft^3) depolamak istiyorsunuz. Herhangi bir zamanda tankta kaç ft^3 civa depolayabilirsiniz?

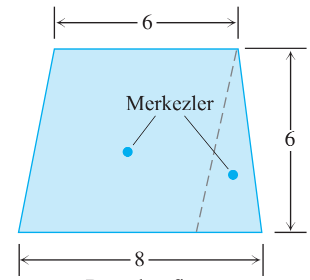
49. Şekilde yandan görülen depo, ağırlık yoğunlukları w_1 ve w_2.olan karışmayan iki sıvıyla doludur. Dikey *ABCD* kare plakasının bir tarafındaki akışkan kuvvetini bulun. *B* ve *D* noktaları sınırda bulunurlar ve karenin bir kenarı $6\sqrt{2}$ ft'tir.



50. Aşağıda gösterilen yamuk palaka üst köşesi yüzeyin 4 ft altında olacak şekilde su ($w = 62.4$) altına konuluyor. Plakanın bir tarafındaki akışkan kuvvetini iki yoldan bulun:

a. Bir integral hesaplayarak.

b. Plakayı bir paralelkenar ve bir ikizkenar üçgene bölüp, merkezlerini hesaplayarak ve Bölüm 6.7'deki $F = w\bar{h}A$ denklemini kullanarak.



Bölüm 6 Ek ve İleri Alıştırmalar

Hacim ve Uzunluk

1. $y = f(x)$ sürekli fonksiyonun grafiği, x-ekseni, $x = a$ sabit doğrusu ve $x = b, b > a$, değişken doğrusu ile çevrelenen bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle bir cisim üretiliyor. Hacim her b değeri için $b^2 - ab$'dir. $f(x)$'i bulun.

2. $y = f(x)$ sürekli fonksiyonun grafiği, x-ekseni, $x = 0$ ve $x = a$ doğrularıyla sınırlanan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle bir cisim üretiliyor. Hacim her $a > 0$,değeri için $a^2 + a$'dır. $f(x)$'i bulun.

3. Artan $f(x)$ fonksiyonunun $x \geq 0$ için düzgün olduğunu ve $f(0) = a$ olduğunu varsayın. $s(x)$, $(0, a)$'dan $(x, f(x))$'e kadar, $x > 0$, f'nin grafiğini göstersin. Bir C sabiti için, $s(x) = Cx$ ise $f(x)$'i bulun. C'nin alabileceği değerler nedir?

4. a. $0 < \alpha \leq \pi/2$,için

$$\int_0^\alpha \sqrt{1 + \cos^2\theta}\, d\theta > \sqrt{\alpha^2 + \sin^2\alpha}.$$

olduğunu gösterin.

b. (a)'daki sonucu genelleştirin.

Moment ve Kütle Merkezleri

5. Alttan x-ekseni ve üstten $y = 1 - x^n$, n bir pozitif çift tamsayı, eğrisiyle sınırlanan bölgenin merkezini bulun. $n \to \infty$ iken, merkezin limit konumu nedir?

6. Bir kamyonun arkasındaki iki tekerlekli bir römorkla bir telefon direği taşırsanız, uygun bir "dil" ağırlığı sağlamak için tekerleklerin direğin kütle merkezinin 3 ft kadar arkasında olmasını istersiniz. NYNEX' in sınıf 1.40 ft'lik tahta direklerinin çevresi üstte 27 inç ve tabanda 43.5 inçtir. Kütle merkezi üstten ne kadar uzaktadır?

7. Alanı A ve yoğunluğu sabit δ olan ince metal bir tabakanın xy-düzleminde bir R bölgesini kapladığını varsayın ve M_y tabakanın y-ekseni etrafındaki momenti olsun. Tabakanın $x = b$ etrafındaki momentinin aşağıdaki şekilde olduğunu gösterin:

a. Tabaka doğrunun sağındaysa, $M_y - b\delta A$

b. Tabaka doğrunun solundaysa, $b\delta A - M_y$

8. $y^2 = 4ax$ eğrisi ve $x = a$, $a =$ pozitif sabit, doğrusu ile sınırlanan bölgeyi kaplayan ince bir tabakanın (x, y)'deki yoğunluğu doğrudan **(a)** x ile ve **(b)** $|y|$ ile orantılı ise, tabakanın kütle merkezini bulun.

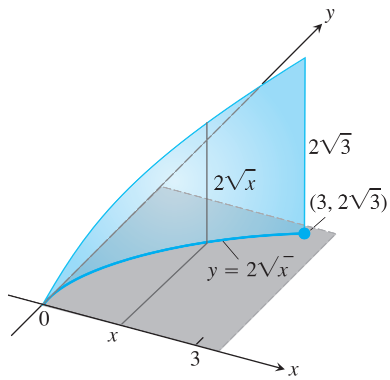
9. a. Birinci bölgede, yarıçapları a ve b olan ve merkezleri orijinde bulunan iki eşmerkezli çember ve koordinat eksenleri arasında kalan bölgenin merkezini bulun.

b. a, b'ye yaklaşırken merkezin koordinatlarının limitini bulun ve sonucun anlamını tartışın.

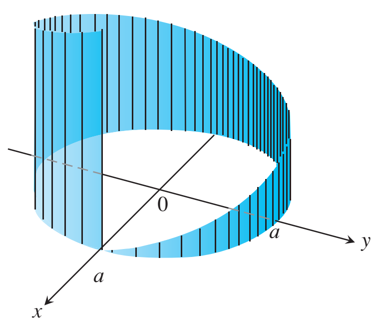
10. Kenarı 1 ft olan bir kareden üçgen bir köşe kesilmektedir. Çıkarılan üçgenin alanı 36 inç^2'dir. Kalan bölgenin merkezi orijinal karenin bir kenarından 7 inç uzaktaysa, diğer kenarlardan ne kadar uzaktadır?

Yüzey Alanı

11. $y = 2\sqrt{x}$ eğrisinin üzerindeki noktalarda, uzunlukları $h = y$ olan doğru parçaları xy-düzlemine dik olarak çizilmektedir (Şekle bakın). Bu dik doğruların $(0, 0)$'dan $(3, 2\sqrt{3})$.'e kadar oluşturdukları yüzeyin alanını bulun.



12. *a* yarıçaplı bir çemberin üzerindeki noktalarda, çemberin düzlemine dik doğru parçaları çizilmektedir. Her *P* noktasındaki dik doğrunun uzunluğu *ks*'dir. *s* çemberin $(a, 0)$'dan *P*'ye kadar saat yönünün tersine radyan olarak ölçülen yay uzunluğu ve *k* de aşağıda gösterildiği gibi bir sabittir. $(a, 0)$'dan başlayıp çemberi bir kere dönen yay üzerindeki dik doğruların oluşturdukları yüzeyin alanını bulun.



İş

13. *m* kütleli bir parçacık $t = 0$ anında durgun konumdan harekete başlamakta ve *x*-ekseni boyunca büyüklüğü $F(t) = t^2$ olan değişken bir kuvvete karşı $x = 0$'dan $x = h$'ye kadar sabit ivmeyle götürülmektedir. Yapılan işi bulun.

14. İş ve kinetik enerji 16 onsluk bir golf topunun kuvvet sabiti $k = 2$ lb/inç olan dikey bir yaya yerleştirildiğini varsayın. Yay 6 inç sıkıştırılır ve serbest bırakılır. Top (yayın denge konumundan) ne kadar yükseğe çıkar?

Akışkan Kuvveti

15. Üçgen bir *ABC* tabakası düzlemi dikey olacak şekilde suya batırılır. 4ft uzunluğundaki *AB* kenarı suyun 6 ft altındayken, *C* köşesi suyun 2 ft altındadır. Suyun, tabakanın bir tarafına uyguladığı akışkan basıncını bulun.

16. Dikey bir dikdörtgen tabaka, üst kenarı akışkanın yüzeyine paralel olacak şekilde bir akışkanın içine batırılmıştır. Akışkanın, tabakanın bir tarafına uyguladığı kuvvetin tabakanın altındaki ve üstündeki basıncın ortalama değeri kere tabakanın alanını olduğunu gösterin.

17. Bir akışkan içine batırılmış bir tabakanın bir tarafındaki *basınç merkezi* akışkanın uyguladığı toplam kuvvetin düzlemdeki herhangi bir eksen etrafındaki momenti değiştirmeyecek şekilde uygulanabildiği nokta olarak tanımlanır. **(a)** *h* yükseklikli ve *b* genişlikli dikey bir tabakanın üst kenarı akışkanın yüzeyindeyse ve **(b)** *h* yükseklikli ve *b* tabanlı dikey bir üçgenin *b* kenarının karşısındaki köşe akışkanın yüzeyinin *a* ft ve *b* tabanı akışkanın yüzeyinin $(a + h)$ ft altındaysa basınç merkezlerini bulun.

Bölüm 6 Teknoloji Uygulama Projeleri

Mathematica/Maple Module

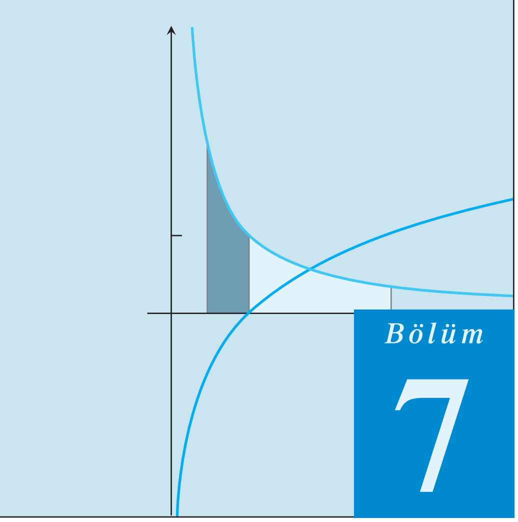
Alanları, Hacimleri ve Eğrilerin Uzunluklarını Kestirmek için Riemann Toplamlarını Kullanmak

Alanları ve hacimleri gözünüzde canlandırın ve yaklaşımda bulunun **Kısım I** ve **Kısım II**: Dönel Cisim Hacimleri; ve Kısım III: Eğrilerin Uzunlukları.

Mathematica/Maple Module

Bir Bungee Atlayışını Modellemek

Bir bungee atlayıcısının harcadığı kuvveti modellemek için veri toplayın (veya önceden toplanmış veri kullanın). Verilen bir atlayıcı ve verilen bir bungee ipi uzunluğu için atlayıcının düşmüş olduğu mesafeyi hesaplamak için iş-enerji teoremini kullanın.



Bölüm 7

TRANSANDANT FONKSİYONLAR

GİRİŞ Fonksiyonlar iki büyük grupta sınıflandırılabilirler (Bkz. Bölüm 1.4). Polinomlar ve polinomların toplamı, çarpımı, bölümü, kuvvetlerinin veya köklerinin alınması yoluyla elde edilen fonksiyonlar *cebirsel* fonksiyonlardır. Cebirsel olmayan fonksiyonlara *transandant* fonksiyonlar denir. Trigonometrik, üstel, logaritmik ve hiperbolik fonksiyonlar ve bunların ters fonksiyonları transandant fonksiyonlardır.

Transandant fonksiyonlar, nüfus büyümelerini, titreşimleri ve dalgaları, bilgisayar algoritmalarının verimlilikleri ve mühendislik yapılarının kararlılıklarını da içeren birçok analiz konusunda ve uygulamalarda sıklıkla karşımıza çıkarlar. Bu bölümde önemli birkaç transandant fonksiyon tanıtacağız ve bunların grafiklerini, özelliklerini, türevlerini ve integrallerini inceleyeceğiz.

7.1 Ters Fonksiyonlar ve Türevleri

Bir f fonksiyonun etkisini tersine çeviren veya yaptığının tersini yapan fonksiyona f fonksiyonunun *tersi* denir. Bir çok fonksiyonun, hepsinin olmasa da, bir tersi vardır. Ters türevlerin formüllerinde ve diferansiyel denklem çözümlerinde sıklıkla önemli ters fonksiyonlar ortaya çıkar. Ayrıca, ters fonksiyonlar, bölüm 7.3 te göreceğimiz gibi, logaritmik ve üstel fonksiyonların geliştirilmesinde ve özelliklerinde anahtar rolü oynarlar.

Bire-Bir Fonksiyonlar

Bir fonksiyon, tanım kümesindeki her elemana değer kümesinden bir değer atayan bir kuraldır. Bazı fonksiyonlar aynı değeri birden fazla tanım kümesi elemanına atayabilirler. $f(x) = x^2$ fonksiyonu, -1 ve 1'in her ikisine 1'i karşılık getirir; $\pi/3$ ve $2\pi/3$'ün sinüslerinin ikisi de $\sqrt{3}/2$'dir. Bazı fonksiyonlar değer kümelerindeki bir değeri birden fazla almazlar. Farklı sayıların karekökleri ve küpleri her zaman farklıdır. Bu fonksiyonlar değer kümelerindeki herhangi bir değeri tam bir defa alırlar.

TANIM **Bire-Bir Fonksiyon**

D tanım kümesinde $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise, $f(x)$ fonksiyonu D üzerinde **bire-bir** dir.

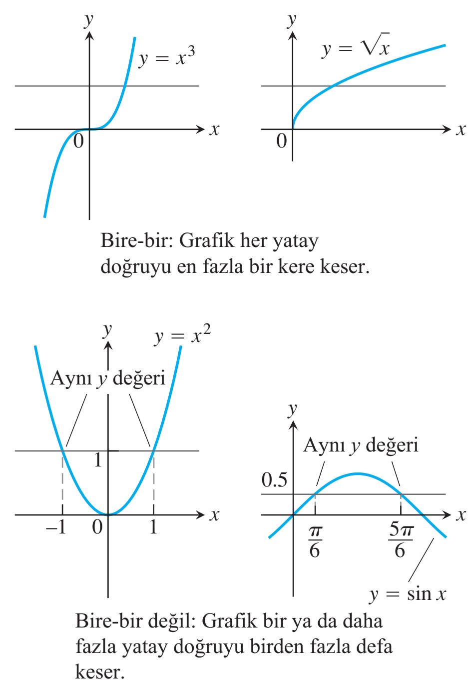
ÖRNEK 1 Bire-Bir Fonksiyonların Tanım Kümeleri

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu negatif olmayan sayılardan oluşan herhangi bir tanım kümesi üzerinde bire-bir dir. Çünkü $x_1 \neq x_2$ iken $\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$ olur.

(b) $g(x) = \sin x$, $[0, \pi]$ aralığında bire-bir değildir, çünkü $\sin(\pi/6) = \sin(5\pi/6)$'dır. Ancak sinüs fonksiyonu $[0, \pi/2]$ aralığında bire-bir dir, çünkü $[0, \pi/2]$ üzerinde kesin olarak artan bir fonksiyondur. ■

Bire-bir olan $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilen bir yatay eğriyi en fazla bir kere kesebilir. Doğruyu bir kereden fazla keserse aynı y değerini birden fazla alır ve dolayısıyla bire-bir olmaz (Şekil 7.1).

Bire-Bir Fonksiyonlar İçin Yatay Doğru Testi
$y = f(x)$ fonksiyonu ancak ve ancak, grafiği her yatay doğruyu en fazla bir kere keserse bire-bir dir.



ŞEKİL 7.1 Yatay doğru testini kullanarak, $y = x^3$ ve $y = \sqrt{x}$'in tanım kümeleri $(-\infty, \infty)$ ve $[0, \infty)$ üzerinde bire-bir olduklarını fakat, $y = x^2$ ve $y = \sin x$'in, tanım kümeleri olan $(-\infty, \infty)$ üzerinde bire-bir olmadıklarını görürüz.

Ters Fonksiyonlar

Bire-bir olan bir fonksiyonun her çıktısı tek bir girdiden geldiği için, bire-bir olan bir fonksiyonun etkisi, çıktıları geldikleri girdilere gönderecek şekilde tersine çevrilebilir.

TANIM Ters Fonksiyon

f'nin tanım kümesi D ve değer kümesi R olan bire-bir bir fonksiyon olduğunu varsayın. f^{-1} **ters fonksiyonu**

$$f(b) = a \text{ ise, } f^{-1}(a) = b$$

ile tanımlanır. f^{-1}'in tanım kümesi R ve değer kümesi D dir.

f ve f^{-1}'in tanım ve değer kümeleri yer değiştirir. f'nin tersi için kullanılan f^{-1} sembolü "f'nin tersi" olarak okunur. f^{-1}'deki –1 bir kuvvet *değildir*: $f^{-1}(x)$, $1/f(x)$ anlamına gelmez.

Bir x girdi değerini $f(x)$'e göndermek için f'yi uygularsak ve f^{-1}'e $f(x)$'i uygulayarak devam edersek, başladığımız yer olan x'e geri döneriz. Benzer şekilde, f'nin değer kümesinden bir y sayısı alır ve buna f^{-1}'i uygularsak ve sonra $f^{-1}(y)$ değerine f'yi uygularsak, başladığımız yer olan y'ye geri döneriz. Bir fonksiyonla tersinin bileşkesini almak, hiçbir şey yapmamakla aynı etkiyi verir.

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad f\text{'nin tanım kümesindeki her } x \text{ için}$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = y, \quad f^{-1}\text{'in tanım kümesindeki (}f\text{'nin değer kümesi) her } y \text{ için}$$

Yalnız bire-bir bir fonksiyonun tersi var olabilir. Nedeni şudur: x_1 ve x_2 farklı girdileri için $f(x_1) = y$ ve $f(x_2) = y$ ise $f^{-1}(y)$'ye hem $f^{-1}(f(x_1)) = x_1$ ve hem de $f^{-1}(f(x_2)) = x_2$ sağlanacak şekilde bir değer atamanın yolu yoktur.

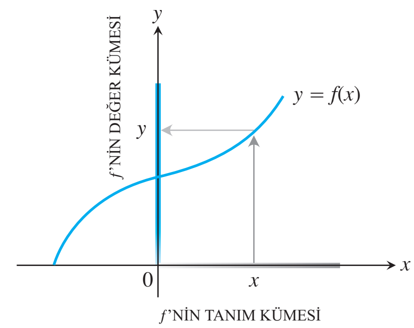
Bir aralık üzerinde, $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ olan artan bir fonksiyon bire-bir dir ve bir tersi vardır. Azalan fonksiyonlarında birer tersi vardır (Alıştırma 39). Her x değerinde türevi pozitif olan fonksiyonlar artandırlar (Ortalama Değer Teoremi Sonuç 3, Bölüm 4.2) ve dolayısıyla tersleri vardır. Benzer şekilde, her x değerinde türevi negatif olan fonksiyonlar azalandırlar ve tersleri vardır. Ne artan nede azalan olan fonksiyonlar da bire-bir olabilirler ve bir tersleri var olabilir, Bölüm 7.7'deki $\sec^{-1} x$ gibi.

Ters Fonksiyonları Bulmak

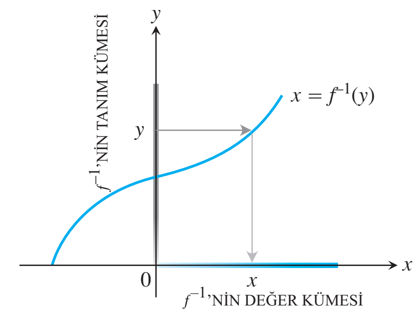
Bir fonksiyonun ve tersinin grafikleri yakından ilgilidir. Bir fonksiyonun değerini grafiğinden okumak için, x-ekseni üzerindeki bir x noktasından başlar, dikey olarak grafiğe gider ve sonra yatay olarak y-eksenine gider ve karşılık gelen y-değerini okuruz. Bu işlemi tersine çevirerek, grafikten ters fonksiyon okunabilir. y-ekseni üzerindeki bir y noktası ile başlarız, yatay olarak grafiğe gideriz ve sonra değerini okumak için dikey olarak x-eksenine gideriz $x = f^{-1}(y)$ (Şekil 7.2).

f^{-1}'in grafiğini, fonksiyonlar için her zaman yaptığımız gibi, girdi değerleri y-ekseni üzerinde olmak yerine x-ekseni üzerinde olacak şekilde düzenlemek isteriz.

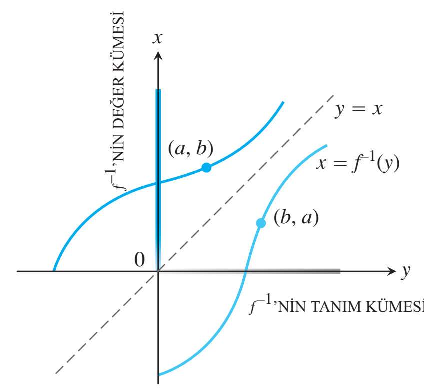
Bunu sonuçlandırmak için, 45°'lik $y = x$ doğrusundan yansıtarak, x ve y eksenlerini aralarında değiştiririz. Bu değişimden sonra f^{-1}'i temsil eden yeni bir grafik elde ederiz. Şimdi $f^{-1}(x)$'in değeri, her zamanki gibi, x-ekseni üzerindeki bir x noktasından başlayıp dikey olarak grafiğe giderek ve sonra $f^{-1}(x)$'in değerini bulmak için yatay olarak y-eksenine giderek, okunabilir. Şekil 7.2, f ve f^{-1}'in grafikleri arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Grafikler, $y = x$ doğrusundan yansıtılarak aralarında değiştirilir.



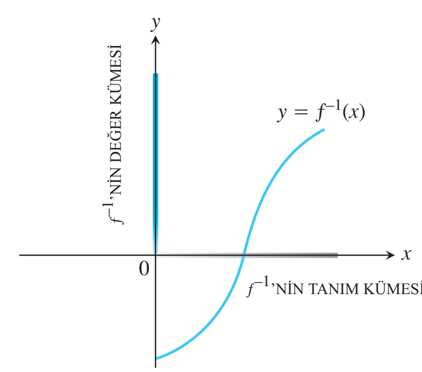
(a) f'nin x'teki değerini bulmak için, x'ten başlar, eğriye gider ve y-eksenine geçeriz.



(b) f'nin grafiği aynı zamanda f^{-1}'in grafiğidir, fakat x ve y yer değiştirmiş olarak, y'yi vermiş olan x'i bulmak için, y'den başlar, eğriye gider ve x-eksenine ineriz. f^{-1}'in tanım kümesi f'nin değer kümesidir. f^{-1}'in değer kümesi f'nin tanım kümesidir.



(c) f^{-1}'in grafiğini her zamanki gibi çizmek için, sistemi $y = x$ doğrusundan yansıtırız.



(d) Sonra x ve y harflerini değiştiririz. Artık f^{-1}'in x'in bir fonksiyonu olarak normal görünüşte bir grafiği vardır.

ŞEKİL 7.2 $y = f(x)$'in grafiğinden $y = f^{-1}(x)$'in grafiğini belirlemek.

f'den f^{-1}'e geçme işlemi iki adımlı bir işlem olarak özetlenebilir.

1. $y = f(x)$ denleminden x'i çözün. Bu, x'i y'nin bir fonksiyonu olarak ifade eden bir $x = f^{-1}(y)$ formülü verir.
2. x ve y'yi aralarında değiştirerek, f^{-1}'i geleneksel formatta, x'i bağımsız değişken y'yi de bağlı değişken olarak, ifade eden $y = f^{-1}(x)$ formülünü elde edilir.

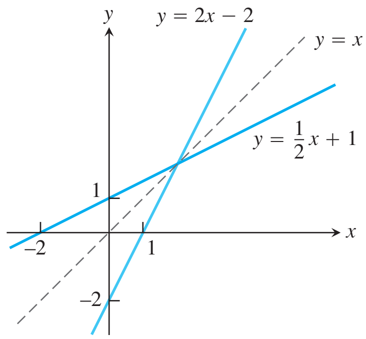
ÖRNEK 2 Bir Ters Fonksiyon Bulmak

$y = \frac{1}{2}x + 1$ 'in tersini x'in bir fonksiyonu olarak bulun.

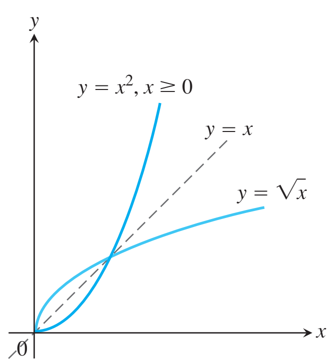
Çözüm

1. *x'i y cinsinden çözün:*

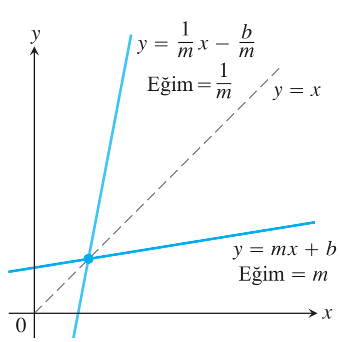
$$y = \frac{1}{2}x + 1$$
$$2y = x + 2$$
$$x = 2y - 2.$$



ŞEKİL 7.3 $f(x) = (1/2)x + 1$ ve $f^{-1}(x) = 2x - 2$'nin grafiklerini birlikte çizmek grafiklerin $y = x$'e göre simetrisini gösterir. Eğimler, birbirinin çarpmaya göre tersidir (Örnek 2).



ŞEKİL 7.4 $y = \sqrt{x}$ ve $y = x^2, x \geq 0$, fonksiyonları birbirinin tersidir (Örnek 3).



ŞEKİL 7.5 $y = x$ doğrusu etrafında yansıtılan dikey olmayan doğruların eğimleri birbirlerinin çarpmaya göre tersleridir.

2. *x ve y'yi değiştirin:* $y = 2x - 2$.

$f(x) = (1/2)x + 1$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = 2x - 2$ fonksiyonudur. Kontrol etmek için, iki bileşkenin de birim fonksiyonu verdiğini doğrularız:

$$f^{-1}(f(x)) = 2\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 2 = x + 2 - 2 = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{2}(2x - 2) + 1 = x - 1 + 1 = x.$$

Şekil 7.3'e bakın. ■

ÖRNEK 3 Bir Ters Fonksiyon Bulmak

$y = x^2, x \geq 0$ fonksiyonunun tersini x'in bir fonksiyonu olarak bulun.

Çözüm Önce x'i y cinsinden çözeriz:

$$y = x^2$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x \qquad x \geq 0 \text{ olduğu için } |x| = x$$

Sonra x ve y'nin yerini değiştiririz:

$$y = \sqrt{x}$$

$y = x^2, x \geq 0$ fonksiyonunun tersi $y = \sqrt{x}$ fonksiyonudur (Şekil 7.4).

Kısıtlanmış $y = x^2, x \geq 0$ fonksiyonunun tersine, kısıtlanmamış $y = x^2$ fonksiyonunun bire bir olmadığına, dolayısıyla tersinin bulunmadığına dikkat edin. ■

Türevlenebilir Fonksiyonların Terslerinin Türevleri

Örnek 2'deki $f(x) = (1/2)x + 1$'in ve tersi $f^{-1}(x) = 2x - 2$'nin türevlerini hesaplarsak şunu buluruz:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{d}{dx}(2x - 2) = 2$$

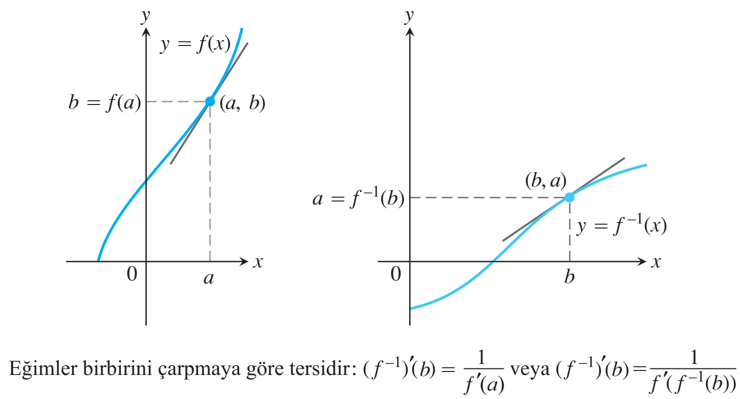
Türevler birbirlerinin çarpmaya göre tersidir. f'nin grafiği $y = (1/2)x + 1$ doğrusu ve f^{-1}'in grafiği $y = 2x - 2$ doğrusudur (Şekil 7.3). Eğimleri birbirlerinin çarpmaya göre tersidir.

Bu özel bir durum değildir. Yatay olmayan veya dikey olmayan herhangi bir doğrunun $y = x$ doğrusuna göre simetriğini almak her zaman doğrunun eğimini tersine çevirir. Eğer orijinal doğrunun eğimi $m \neq 0$ ise (Şekil 7.5), simetriğinin eğimi $1/m$'dir (Alıştırma 36).

f ve f^{-1}'in eğimleri arasındaki çarpmaya göre terslik ilişkisi başka fonksiyonlar için de geçerlidir. Fakat, birbirlerine karşı gelen noktalardaki eğimleri karşılaştırmaya dikkat etmeliyiz. $y = f(x)$'in $(a, f(a))$ noktasındaki eğimi $f'(a)$ ise ve $f'(a) \neq 0$ ise, $y = f^{-1}(x)$'in buna karşılık gelen $(f(a), a)$ noktasındaki eğimi $1/f'(a)$'dır (Şekil 7.6). $b = f(a)$ yazarsak

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

olur. $y = f(x)$'in $(a, f(a))$ noktasında yatay bir teğeti varsa f^{-1} ters fonksiyonunun $(f(a), a)$ noktasında dikey bir teğeti vardır ve bu sonsuz eğim f^{-1}'in $f(a)$ da türevlenebilir



ŞEKİL 7.6 Ters fonksiyonların grafiklerinin karşılık gelen noktalardaki eğimleri, çarpmaya göre birbirinin tersidir.

olmamasını gerektirir. Teorem 1, f^{-1}'in hangi koşullar altında, aynı zamanda f'nin değer kümesi de olan, tanım kümesi içinde türevlenebilir olduğunu vermektedir.

TEOREM 1 Ters Fonksiyonlar İçin Türev Kuralı

f'nin tanım kümesi I ise ve I üzerinde $f'(x)$ var ve hiç sıfır olmuyorsa, f^{-1}, tanım kümesinin her noktasında türevlenebilir dir. f^{-1}'in tanım kümesinin bir b noktasındaki $(f^{-1})'$ değeri, f''nün $a = f^{-1}(b)$'deki değerinin çarpmaya göre tersidir.

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

veya

$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=b} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=f^{-1}(b)}} \tag{1}$$

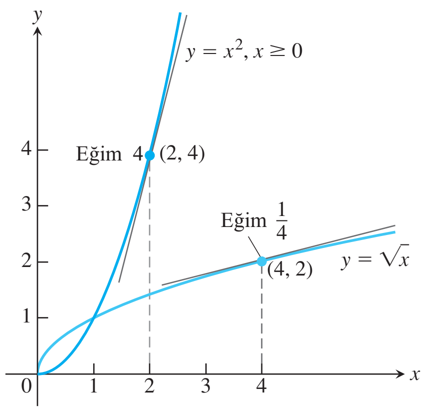
Teoremin ispatını geçiyoruz, fakat görmenin bir başka yolunu veriyoruz. $y = f(x)$ $x = a$'da türevlenebilir olduğunda ve x'i dx kadar küçük bir miktarda değiştirdiğimizde y'de buna karşı gelen değişiklik yaklaşık olarak

$$dy = f'(a)\,dx.$$

kadardır. Bu, $x = a$ iken, y'nin yaklaşık olarak x'in değişim hızı kere $f'(a)$ kadar değişmesi demektir ve dolayısıyla, $y = b$ iken, x'nin yaklaşık olarak y'in değişim hızı kere $1/f'(a)$ kadar değişmesi demektir. Bu nedenle, f^{-1}'in b'deki türevinin, f'nin a'daki türevinin çarpmaya göre tersi olması anlamlıdır.

ÖRNEK 4 Teorem 1'i uygulamak

$f(x) = x^2$, $x \geq 0$ fonksiyonu ve tersi $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$'in türevleri $f'(x) = 2x$ ve $(f^{-1})'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ dir.



ŞEKİL 7.7 $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$'in (4, 2) noktasındaki türevi $f(x) = x^2$'nin (2, 4) noktasındaki türevinin çarpmaya göre tersidir (Örnek 4).

Teorem 1, $f^{-1}(x)$'in türevinin

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{2(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{2(\sqrt{x})}.\end{aligned}$$

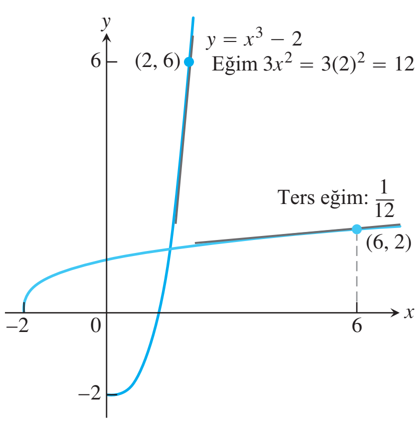
olduğunu öngörür. Teorem 1, karekök fonksiyonu için Kuvvet Kuralı'nı kullanarak yaptığımız hesabımızla uyuşan bir türev verir.

Teorem 1'i özel bir noktada inceleyelim. $x = 2$ (a sayısı) ve $f(2) = 4$ (b sayısı) alalım. Teorem 1, f'nin 2'deki türevi $f'(2) = 4$ ve f^{-1}'in $f(2)$'deki türevi $(f^{-1})'(4)$, çarpmaya göre birbirinin tersidir der. Şunu ifade eder

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(f^{-1}(4))} = \frac{1}{f'(2)} = \left.\frac{1}{2x}\right|_{x=2} = \frac{1}{4}.$$

Bkz. Şekil 7.7 ■

(1) Denklemi, bazı hallerde f^{-1} için bir formül bilmeksizin df^{-1}/dx'in özel değerlerini bulmamızı sağlar.



ŞEKİL 7.8 $f(x) = x^3 - 2$'nin $x = 2$'deki türevi bize f^{-1}'in $x = 6$'daki türevini söyler (Örnek 5).

ÖRNEK 5 Ters Türevin Bir Değerini Bulmak

$f(x) = x^3 - 2$ olsun. $f^{-1}(x)$ için bir formül bulmadan df^{-1}/dx'in $x = 6 = f(2)$'deki değerini bulun.

Çözüm

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=2} = \left.3x^2\right|_{x=2} = 12$$

$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=f(2)} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=2}} = \frac{1}{12} \qquad \text{Denk. (1)}$$

Bkz. Şekil 7.8. ■

Ters Fonksiyonları Parametrelemek

Herhangi bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini

$$x = t \quad \text{ve} \quad y = f(t)$$

şeklinde parametrik olarak çizebilir veya temsil edebiliriz. t ve $f(t)$'yi aralarında değiştirmek ters fonksiyon için parametrik denklemleri verir.

$$x = f(t) \quad \text{ve} \quad y = t$$

(Bkz. Şekil 3.5).

Örneğin, bir grafik çizicide, $f(x) = x^2, x \geq 0$ bire-bir fonksiyonunun grafiğini, tersi ve $y = x, x \geq 0$ doğrusu ile birlikte çizmek için, parametrik grafik seçeneğini

$$\begin{aligned}&f\text{'nin grafiği: } x_1 = t, \quad y_1 = t^2, \quad t \geq 0 \\ &f^{-1}\text{'in grafiği: } x_2 = t^2, \quad y_2 = t \\ &y = x\text{'in grafiği: } x_3 = t, \quad y_3 = t\end{aligned}$$

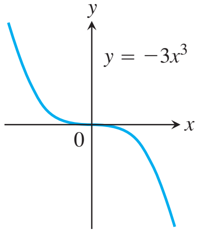
ile kullanın.

ALIŞTIRMALAR 7.1

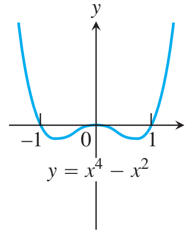
Bire-Bir Fonksiyonları Grafik Olarak Tanımlamak

1–6 alıştırmalarında grafikleri verilen fonksiyonların hangileri bire bir, hangileri değildir?

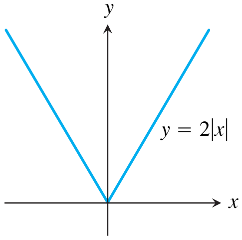
1.



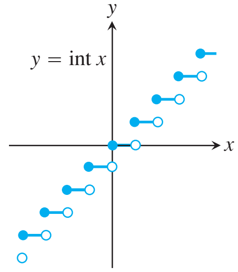
2.



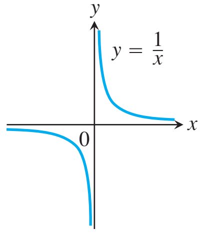
3.



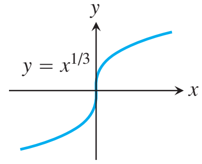
4.



5.



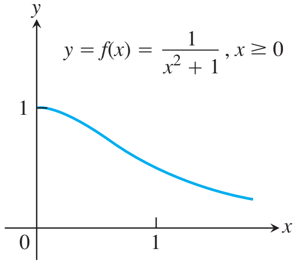
6.



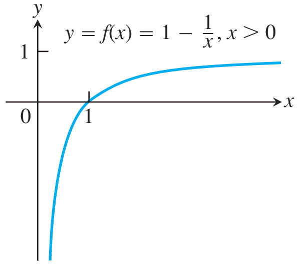
Ters Fonksiyonların Grafiğini Çizmek

7–10 alıştırmalarının her biri bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini gösterir. Grafiği kopyalayın ve $y = x$ doğrusunu çizin. $y = x$ doğrusuna göre simetriyi kullanarak çiziminize f^{-1}'in grafiğini ekleyin. (f^{-1} için bir formül bulmak gerekli değildir.) f^{-1}'in tanım ve değer kümelerini belirleyin.

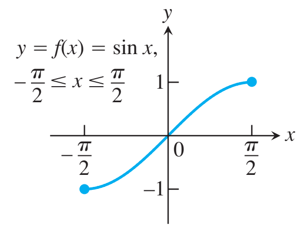
7.



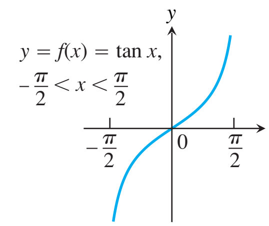
8.



9.



10.



11. a. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq 1$ fonksiyonunu çizin. Grafiğinin nasıl bir simetrisi vardır?

b. f'nin tersinin kendisi olduğunu gösterin. ($x \geq 0$ ise $\sqrt{x^2} = x$ olduğunu hatırlayın.)

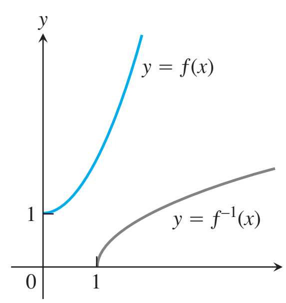
12. a. $f(x) = 1/x$ fonksiyonunu çizin. Grafiğinin nasıl bir simetrisi vardır?

b. f'nin tersinin kendisi olduğunu gösterin.

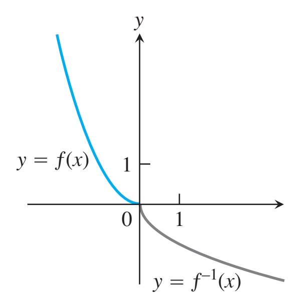
Ters Fonksiyonların Formülleri

13-18 Alıştırmalarının her biri bir $y = f(x)$ fonksiyonunun formülünü vermekte ve f'nin ve f^{-1}'in grafiklerini göstermektedir. Her durumda f^{-1}'in formülünü bulun.

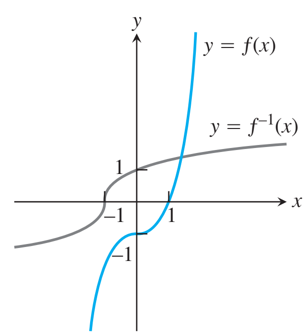
13. $f(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$



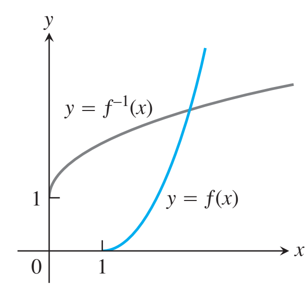
14. $f(x) = x^2, \quad x \leq 0$



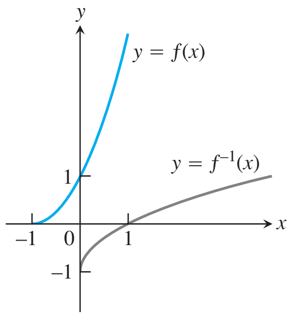
15. $f(x) = x^3 - 1$



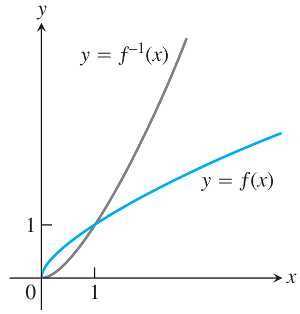
16. $f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad x \geq 1$



17. $f(x) = (x + 1)^2, \quad x \geq -1$



18. $f(x) = x^{2/3}, \quad x \geq 0$



19–24 alıştırmaların her biri bir $y = f(x)$ fonksiyonunun formülünü verir. Her durumda, $f^{-1}(x)$'i bulun ve f^{-1}'in tanım ve değer kümelerini belirleyin. Kontrol için, $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ olduğunu gösterin.

19. $f(x) = x^5$

20. $f(x) = x^4, \quad x \geq 0$

21. $f(x) = x^3 + 1$

22. $f(x) = (1/2)x - 7/2$

23. $f(x) = 1/x^2, \quad x > 0$

24. $f(x) = 1/x^3, \quad x \neq 0$

Ters Fonksiyonların Türevleri

25–28 Alıştırmalarında:

a. $f^{-1}(x)$'i bulun.

b. f ve f^{-1}'in grafiklerini birlikte çizin.

c. df/dx'i $x = a$'da ve df^{-1}/dx'i $x = f(a)$'da hesaplayarak bu noktalarda $df^{-1}/dx = 1/(df/dx)$ olduğunu gösterin.

25. $f(x) = 2x + 3, \quad a = -1$

26. $f(x) = (1/5)x + 7, \quad a = -1$

27. $f(x) = 5 - 4x, \quad a = 1/2$

28. $f(x) = 2x^2, \quad x \geq 0, \quad a = 5$

29. **a.** $f(x) = x^3$ ve $g(x) = \sqrt[3]{x}$'in birbirlerinin tersi olduğunu gösterin.

b. f ve g'nin grafiklerini (1, 1) ve (–1, –1) noktalarındaki kesişimleri gösterecek kadar büyük bir x-aralığında çizin. Resmin $y = x$ doğrusunda istenilen simetriyi göstermesine dikkat edin.

c. f ve g'nin grafiklerinin (1, 1) ve (–1, –1)'deki teğetlerinin eğimlerini bulun (toplam dört teğet).

d. Eğrilerin orijindeki teğetleri hangi doğrulardır?

30. **a.** $h(x) = x^3/4$ ve $k(x) = (4x)^{1/3}$'ün birbirlerinin tersi olduğunu gösterin.

b. h ve k'nin grafiklerini (2, 2) ve (–2, –2) noktalarındaki kesişimleri gösterecek kadar büyük bir x-aralığında çizin. Resmin $y = x$ doğrusunda istenilen simetriyi göstermesine dikkat edin.

c. h ve k'nin grafiklerinin (2, 2) ve (–2, –2)'deki teğetlerinin eğimlerini bulun (toplam dört teğet).

d. Eğrilerin orijindeki teğetleri hangi doğrulardır?

31. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$, $x \geq 2$ olsun. df^{-1}/dx'in $x = -1 = f(3)$ noktasındaki değerini bulun.

32. $f(x) = x^2 - 4x - 5$, $x > 2$ olsun. df^{-1}/dx'in $x = 0 = f(5)$ noktasındaki değerini bulun.

33. Türevlenebilir $y = f(x)$ fonksiyonunun bir tersinin var olduğunu, f'nin grafiğinin (2, 4) noktasından geçtiğini ve bu noktadaki eğiminin 1/3 olduğunu varsayın. df^{-1}/dx'in $x = 4$'teki değerini bulun.

34. Türevlenebilir $y = g(x)$ fonksiyonunun bir tersinin var olduğunu ve orijinden 2 eğimiyle geçtiğini varsayın. g^{-1} 'in grafiğinin orijindeki eğimini bulun.

Doğruların Tersleri

35. **a.** m sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere, $f(x) = mx$ fonksiyonunun tersini bulun.

b. Grafiği, sıfırdan farklı bir eğimle orijinden geçen bir doğru olan bir $y = f(x)$ fonksiyonunun tersi hakkında ne gibi bir sonuca varırsınız?

36. m ve b sabitler ve $m \neq 0$ olmak üzere, $f(x) = mx + b$ 'nin tersinin grafiğinin eğimi $1/m$ ve y-kesim noktası $-b/m$ olan bir doğru olduğunu gösterin.

37. **a.** $f(x) = x + 1$'in tersini bulun. f'nin ve tersinin grafiklerini birlikte çizin. $y = x$ doğrusunu kesikli çizgi veya noktalarla çiziminize ekleyin.

b. $f(x) = x + b$'nin (b sabit) tersini bulun. f^{-1}'in grafiğinin f'nin grafiğiyle ilişkisi nedir?

c. Grafikleri $y = x$ doğrusuna paralel olan fonksiyonların tersleri hakkında ne gibi bir sonuç çıkarırsınız?

38. **a.** $f(x) = -x + 1$'in tersini bulun. $y = -x + 1$ doğrusunun grafiğini $y = x$ doğrusuyla birlikte çizin. Doğrular hangi açıyla kesişir?

b. $f(x) = -x + b$'nin (b sabit) tersini bulun. $y = -x + b$ doğrusu $y = x$ doğrusuyla hangi açıyı yapar?

c. Grafikleri $y = x$ doğrusuna dik olan fonksiyonların tersleri hakkında ne gibi bir sonuç çıkarırsınız?

Artan ve Azalan Fonksiyonlar

39. Bölüm 4.3'teki gibi, bir I aralığının herhangi iki x_1 ve x_2 noktasında

$$x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1)$$

ise $f(x)$ fonksiyonu I aralığında artan bir fonksiyondur. Aynı şekilde, I aralığının herhangi iki x_1 ve x_2 noktasında

$$x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) < f(x_1)$$

ise, $f(x)$ fonksiyonu I aralığında azalan bir fonksiyondur. Artan ve azalan fonksiyonların bire bir olduklarını gösterin. Yani, I'daki herhangi x_1 ve x_2 noktası için, $x_2 \neq x_1$'nin $f(x_2) \neq f(x_1)$ anlamına geldiğini gösterin.

Alıştırma 39'un sonuçlarını kullanarak 40–44 alıştırmalarındaki fonksiyonların kendi tanım kümelerinde terslerinin var olduğunu gösterin. Teorem 1'i kullanarak df^{-1}/dx için bir formül bulun.

40. $f(x) = (1/3)x + (5/6)$

41. $f(x) = 27x^3$

42. $f(x) = 1 - 8x^3$

43. $f(x) = (1 - x)^3$

44. $f(x) = x^{5/3}$

Teori ve Uygulamalar

45. $f(x)$ bire-bir ise, $g(x) = -f(x)$ hakkında bir şey söylenebilir mi? O da bire-bir midir? Yanıtınızı açıklayın.

46. $f(x)$ bire-bir ise ve $f(x)$ hiç 0 olmuyorsa, $h(x) = 1/f(x)$ hakkında bir şey söylenebilir mi? O da bire-bir midir? Yanıtınızı açıklayın.

47. g'nin değer kümesinin, $f \circ g$ bileşkesi tanımlı olacak şekilde, f'nin tanım kümesi içinde olduğunu varsayın. f ve g bire-bir ise, $f \circ g$ hakkında bir şey denebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

48. Bir $f \circ g$ bileşkesi bire-bir ise, g bire-bir olmak zorunda mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

49. $f(x)$'in $[a, b]$ aralığında pozitif, sürekli ve artan olduğunu varsayın. f'nin grafiğini yorumlayarak

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy = bf(b) - af(a).$$

olduğunu gösterin.

50.

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

kesirli fonksiyonunun tersinin olabilmesi için a, b, c ve d sabitleri üzerindeki koşulları belirleyin.

51. $f^{-1}(x)$ yerine $g(x)$ yazarsak, (1) denklemi

$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \quad \text{veya} \quad g'(f(a)) \cdot f'(a) = 1$$

şeklinde yazılabilir. Eğer a yerine x yazarsak,

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

elde ederiz. Son denklem size Zincir kuralını anımsatabilir ve gerçekten de aralarında bir ilişki vardır.

f ve g'nin birbirlerinin tersi olan türevlenebilir fonksiyonlar olduklarını varsayın, böylece $(g \circ f)(x) = x$ olur. $(g \circ f)'(x)$'i g ve f'nin türevlerinin bir çarpımı olarak ifade etmek için zincir kuralını kullanarak, bu denklemin iki tarafının da x'e göre türevini alın. Ne buluyorsunuz? (Bu Teorem 1'in ispatı değildir, çünkü burada teoremin $g = f^{-1}$'in türevlenebilir olduğunu söyleyen sonucunu kabul ediyoruz.)

52. Hacim bulmak için pul ve kabuk yöntemlerinin denkliği f, $a > 0$ olmak üzere, $a \le x \le b$ aralığında türevlenebilir ve artan olsun ve f'nin türevlenebilir bir f^{-1} tersinin var olduğunu kabul edin. f'nin grafiği ile $x = a$ ve $y = f(b)$ doğrularının sınırladığı bölgeyi y-ekseni etrafında döndürerek bir cisim üretin. Bu durumda, hacim için pul ve kabuk yöntemlerinin vereceği integrallerin değerleri aynıdır:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \pi((f^{-1}(y))^2 - a^2)\,dy = \int_a^b 2\pi x(f(b) - f(x))\,dx.$$

Bunu göstermek için aşağıdakileri tanımlayın:

$$W(t) = \int_{f(a)}^{f(t)} \pi((f^{-1}(y))^2 - a^2)\,dy$$

$$S(t) = \int_a^t 2\pi x(f(t) - f(x))\,dx.$$

Sonra W ve S fonksiyonlarının $[a, b]$ aralığının bir noktasında uyuştuklarını ve $[a, b]$'de türevlerinin aynı olduğunu gösterin. Bölüm 4.8, Alıştırma 102'de gördüğünüz gibi, bu $[a, b]$ aralığındaki her t değerleri için $W(t) = S(t)$ olmasını garantiler. (*Kaynak*: "Disks and Shells Revisited," Walter Carlip, *American Mathematical Monthly*, Vol. 98, No. 2, Şubat 1991, sayfa 154-156.)

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

53–60 alıştırmalarında, bazı fonksiyonları ve terslerinin belirli noktalardaki türevleri ve lineer yaklaşım fonksiyonlarıyla birlikte araştıracaksınız. BCS'nizi kullanarak aşağıdaki adımları gerçekleştirin.

a. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini verilen aralıkta türeviyle birlikte çizin. Bu aralıkta f'nin bire-bir olduğunu nereden bildiğinizi açıklayın.

b. $y = f(x)$ denkleminden x'i y cinsinden çözün ve ortaya çıkan ters fonksiyona g deyin.

c. Belirtilen $(x_0, f(x_0))$ noktasında f'nin teğetinin denklemini bulun.

d. g'nin 45° lik $y = x$ doğrusuna (birim fonksiyonun grafiği) göre simetrik olarak yerleştirilen $(f(x_0), x_0)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulun. Teorem 1'i kullanarak bu teğetin eğimini bulun.

e. f, g ve birim fonksiyonlarını, iki teğeti ve $(x_0, f(x_0))$ ile $(f(x_0), x_0)$ noktalarını birleştiren doğru parçasını çizin. Ana köşegen üzerinde gördüğünüz simetrileri tartışın.

53. $y = \sqrt{3x - 2}, \quad \frac{2}{3} \le x \le 4, \quad x_0 = 3$

54. $y = \dfrac{3x + 2}{2x - 11}, \quad -2 \le x \le 2, \quad x_0 = 1/2$

55. $y = \dfrac{4x}{x^2 + 1}, \quad -1 \le x \le 1, \quad x_0 = 1/2$

56. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}, \quad -1 \le x \le 1, \quad x_0 = 1/2$

57. $y = x^3 - 3x^2 - 1, \quad 2 \le x \le 5, \quad x_0 = \dfrac{27}{10}$

58. $y = 2 - x - x^3, \quad -2 \le x \le 2, \quad x_0 = \dfrac{3}{2}$

59. $y = e^x, \quad -3 \le x \le 5, \quad x_0 = 1$

60. $y = \sin x, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \quad x_0 = 1$

61 ve 62 alıştırmalarında, belirtilen aralıklarda verilen denklemlerle kapalı olarak tanımlanan $y = f(x)$ ve $x = f^{-1}(y)$ fonksiyonları için yukarıdaki adımları tekrarlayın.

61. $y^{1/3} - 1 = (x + 2)^3, \quad -5 \le x \le 5, \quad x_0 = -3/2$

62. $\cos y = x^{1/5}, \quad 0 \le x \le 1, \quad x_0 = 1/2$

7.2 Doğal Logaritmalar

Herhangi bir a pozitif sayısı için, x bir tamsayı veya rasyonel sayı iken $f(x) = a^x$ fonksiyonunun değerini tanımlamak kolaydır. x irrasyonel iken a^x'in anlamı çok açık değildir. Benzer şekilde, $f(x) = a^x$'in tersi olan $\log_a x$ logaritma fonksiyonunun tanımı tamamen açık değildir. Bu bölümde, a sayısının önemli bir özel değer olduğu *doğal logaritma* fonksiyonunu tanımlamak için integral hesabı kullanacağız. Bu fonksiyon, genel üstel ve logaritmik fonksiyonları, $y = a^x$ ve $y = \log_a x$ tanımlamamızı ve incelememizi sağlar.

Logaritmalar başlangıçta aritmetik hesaplamalarda önemli roller oynamıştır. Tarihsel olarak, beş, sekiz hatta daha fazla ondalık basamağa kadar doğru, uzun logaritma tablolarının hazırlanmasında oldukça büyük emek harcanmıştır. Modern çağın elektronik hesap makinelerinden, bilgisayarlarından önce her mühendisin logaritmik ölçekli sürgülü hesap cetvelleri vardı. Logaritmalarla hesaplamalar, onyedinci-yüzyılda denizcilikteki ve gökyüzü mekaniğindeki büyük gelişmelerin yapılmasını sağlamıştır. Bu gün, böyle hesaplamaların hesap makineleri veya bilgisayarlar kullanılarak yapıldığını biliyoruz. Fakat, logaritmaların özellikleri ve pek çok uygulaması, şimdiye kadar olduğu gibi önemlidir.

Doğal Logaritma Fonksiyonunun Tanımı

Logaritmaları tanımlamanın ve anlamanın güvenilir bir yolu, Analizin Temel Teoremi sayesinde bir integral olarak tanımlanan doğal logaritma fonksiyonunun bir incelemesiyle başlar.

Bu yaklaşım dolaylı gözükse de logaritmik ve üstel fonksiyonların bildik özelliklerini çabucak elde etmemizi sağlar. Şimdiye kadar incelediğimiz fonksiyonlar analiz teknikleri kullanılarak incelenmiştir. Fakat, burada daha temel olan bazı şeyler yapıyoruz. Logaritmik ve üstel fonksiyonların tanımları için analiz kullanıyoruz.

Pozitif bir x sayısının $\ln x$ olarak yazılan doğal logaritması, bir integralin değeridir.

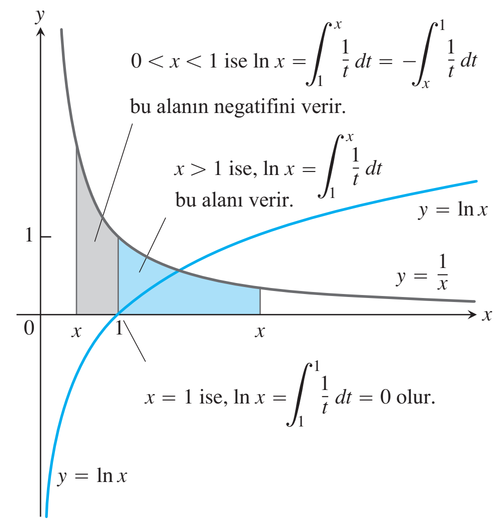
TANIM Doğal Logaritma Fonksiyonu

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \qquad x > 0$$

$x > 1$ ise $\ln x$, $t = 1$ den $t = x$'e kadar $y = 1/t$ eğrisinin altındaki alandır (Şekil 7.9). $0 < x < 1$ için $\ln x$, x'ten 1'e kadar eğrinin altındaki alanın negatifini verir. Fonksiyon $x \leq 0$ için tanımlı değildir. Ayrıca, belirli integraller için Sıfır Genişliğinde Aralık kuralından

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0.$$

dir.



ŞEKİL 7.9 $y = \ln x$'in grafiği ve onun $y = 1/x, x > 0$ .fonksiyonuyla olan ilişkisi. x, 1'den sağa doğru ilerlerken, logaritmanın grafiği x-ekseninden yükselir ve x, 1'den sola doğru giderken eksenden aşağı iner.

TABLO 7.1 $\ln x$'in tipik 2 basamaklı değerleri

x	$\ln x$
0	tanımsız
0.05	−3.00
0.5	−0.69
1	0
2	0.69
3	1.10
4	1.39
10	2.30

Şekil 7.9'da $y = 1/x$'in grafiğini gösterdiğimizi, fakat integralde $y = 1/t$ kullandığımıza dikkat edin. Herşey için x kullanmak bize

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{x}\,dx,$$

verirdi ki, burada x iki farklı anlama gelmektedir. Dolayısıyla integrasyon değişkenini t'ye değiştiririz.

Bölüm 5.1'deki gibi, $t = 1$ ve $t = x$ arasında $y = 1/t$'nin grafiği altındaki alana sonlu yaklaşımlar elde etmek için dikdörtgenler kullanarak $\ln x$ fonksiyonunun değerlerine yaklaşabiliriz. Tablo 7.1 de birkaç değer verilmiştir. Doğal logaritması 1'e eşit olan önemli bir sayı vardır.

TANIM ***e* Sayısı**

e sayısı, doğal logaritma fonksiyonunun tanım kümesinde

$$\ln(e) = 1$$

eşitliğini sağlayan sayıdır.

Geometrik olarak e sayısı, x-ekseninde $y = 1/t$'nin grafiği altında ve $[1, e]$ aralığı üzerindeki alanın tam olarak birim karenin alanına eşit olduğu noktaya karşı gelen sayıdır. Şekil 7.9'daki renkli bölgenin alanı $x = e$ iken 1 birim karedir.

$y = \ln x$'in Türevi

Analizin Temel Teoreminin birinci kısmından (Bölüm 5.4)

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}$$

bulunur. Her pozitif x değerinde, ln x'in türevi şöyledir:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

Bu nedenle, $y = \ln x$ fonksiyonu $dy/dx = 1/x,\ x > 0,\ y(1) = 0$ başlangıç değer probleminin çözümüdür. Türevin daima pozitif olduğuna dikkat edin, bu nedenle doğal logaritma fonksiyonu artandır ve böylece bire-bir dir ve tersi vardır. Tersi, Bölüm 7.3'te incelenmektedir.

u, x'in, ln u'nun tanımlı olacağı şekilde değerleri pozitif olan türevlenebilir bir fonksiyonu ise, $y = \ln u$ fonksiyonuna

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Zincir Kuralını uygulamak

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{d}{du}\ln u \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

verir.

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \qquad u > 0 \tag{1}$$

ÖRNEK 1 Doğal Logaritmaların Türevleri

(a) $\frac{d}{dx}\ln 2x = \frac{1}{2x}\frac{d}{dx}(2x) = \frac{1}{2x}(2) = \frac{1}{x}$

(b) $u = x^2 + 3$ ile (1) denklemi

$$\frac{d}{dx}\ln(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}\cdot\frac{d}{dx}(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+3}$$

verir.

Örnek 1a'daki kayda değer olaya dikkat edin. $y = \ln 2x$ fonksiyonunun türevi $y = \ln x$'in türevi ile aynıdır. Bu, her pozitif a sayısı için doğrudur:

$$\frac{d}{dx}\ln ax = \frac{1}{ax}\cdot\frac{d}{dx}(ax) = \frac{1}{ax}(a) = \frac{1}{x} \tag{2}$$

Aynı türeve sahip olduklarından, $y = \ln ax$ ve $y = \ln x$ fonksiyonları bir sabit kadar fark ederler.

Tarihsel Biyografi

John Napier
(1550–1617)

Logaritmaların Özellikleri

Logaritmalar John Napier tarafından bulunmuştu ve modern bilgisayarlardan önce aritmetik hesaplamalardaki tek en önemli gelişmeydi. Onları bu kadar kullanışlı yapan şey, logaritma özelliklerinin, pozitif sayıların çarpımının, logaritmalarını toplayarak yapılabilmesini, pozitif sayıların bölümünün, logaritmalarını çıkararak yapılabilmesini sağlaması ve bir sayının kuvvetini almayı, sayının logaritmasını kuvvet ile çarparak yapılmasını sağlamasındandır. Bu özellikleri Teorem 2'de bir kurallar zinciri olarak özetliyoruz. Şimdilik Kural 4'teki r kuvvetini rasyonel sayı olarak kısıtlıyoruz; kuralı ispatladığımızda nedenini göreceksiniz.

TEOREM 2 Logaritmaların Özellikleri

Herhangi $a > 0$ ve $x > 0$ sayıları için, doğal logaritma şu kuralları sağlar:

1. *Çarpım Kuralı*: $\ln ax = \ln a + \ln x$
2. *Bölüm Kuralı*: $\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$
3. *Çarpmaya Göre Ters Kuralı*: $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ — $a = 1$ ile Kural 2
4. *Kuvvet Kuralı*: $\ln x^r = r \ln x$ — r rasyonel

Bu kuralların nasıl uygulandığını örnekliyoruz.

ÖRNEK 2 Logaritmaların Özelliklerini Yorumlamak

(a) $\ln 6 = \ln(2\cdot 3) = \ln 2 + \ln 3$ — Çarpım

(b) $\ln 4 - \ln 5 = \ln\frac{4}{5} = \ln 0.8$ — Bölüm

(c) $\ln\frac{1}{8} = -\ln 8$ — Çarpımaya göre ters

$= -\ln 2^3 = -3\ln 2$ — Kuvvet ■

ÖRNEK 3 Özellikleri Fonksiyon Formüllerine Uygulamak

(a) $\ln 4 + \ln \sin x = \ln(4\sin x)$ — Çarpım

(b) $\ln\frac{x+1}{2x-3} = \ln(x+1) - \ln(2x-3)$ — Bölüm

(c) $\ln \sec x = \ln \frac{1}{\cos x} = -\ln \cos x$ Çarpmaya göre ters

(d) $\ln \sqrt[3]{x+1} = \ln (x+1)^{1/3} = \frac{1}{3} \ln (x+1)$ Kuvvet ■

Şimdi Teorem 2'nin ispatını veriyoruz. İspattaki adımlar, logaritma içeren problemlerin çözümünde kullanılanlara benzerdir.

$\ln ax = \ln a + \ln x$'in ispatı: Açıklaması alışılmadıktır – ve şıktır. $\ln ax$ ve $\ln x$'in türevlerinin aynı olduğunun (2 denklemi) gözlenmesiyle başlar. Bu durumda, Ortalama Değer Teoreminin 2. Sonucuna göre, fonksiyonlar bir sabit kadar fark etmelidir, bu da herhangi bir C sabiti için

$$\ln ax = \ln x + C$$

demektir.

Bu son denklem x'in bütün pozitif değerlerinde geçerli olduğundan, $x = 1$ için de geçerli olmalıdır. Böylece:

$$\ln (a \cdot 1) = \ln 1 + C$$

$$\ln a = 0 + C \qquad \ln 1 = 0$$

$$C = \ln a$$

bulunur. Yerine yazmakla

$$\ln ax = \ln a + \ln x$$

sonucunu elde ederiz.

$\ln x^r = r \ln x$'in ispatı (r'nin rasyonel olduğunu varsayarak) Yine eşit-türev fikrini kullanacağız. x'in bütün pozitif değerlerinde

$$\frac{d}{dx} \ln x^r = \frac{1}{x^r} \frac{d}{dx}(x^r) \qquad u = x^r \text{ ile (1) denklemi}$$

$$= \frac{1}{x^r} r x^{r-1}$$

İşte burası r'nin rasyonal olmasını istediğimiz yerdir, en azından şimdilik. Kuvvet kuralını sadece rasyonel sayılar için ispatladık.

$$= r \cdot \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}(r \ln x)$$

olur. $\ln x^r$'in ve $r \ln x$'in türevleri aynı olduğundan dolayı, bir C sabiti için

$$\ln x^r = r \ln x + C$$

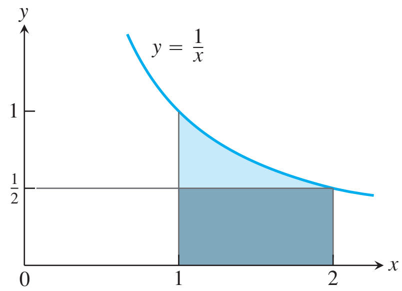
olmalıdır. x'i bir almak C'yi sıfıra eşitler ve ispat tamamlanır.

Alıştırma 84'te Kural 2'yi ispatlamanız istenmektedir. Kural 3, Kural 2'nin bir özel halidir, $a = 1$ yazarak ve $\ln 1 = 0$ olduğu not edilerek elde edilir. Böylece Teorem 2'nin bütün durumlarını gösterdik. ■

Kural 4'ü irrasyonel r'ler için henüz ispat etmedik; bu duruma Bölüm 7.3'te döneceğiz. Kural bütün r'ler için sağlanır, rasyonel veya irrasyonel.

$\ln x$'in Grafiği ve Değer Kümesi

$d(\ln x)/dx = 1/x$ türevi $x > 0$ için pozitiftir, dolayısıyla x'in artan bir fonksiyonudur. İkinci türev, $-1/x^2$ negatiftir, dolayısıyla $\ln x$'in grafiği aşağı konkavdır.



ŞEKİL 7.10 Yüksekliği $y = 1/2$ olan dikdörtgen $y = 1/x$ aralığı için $1 \le x \le 2$'in grafiğinin altına uyar.

[1, 2] aralığında $y = 1/x$'in grafiği altındaki alanı düşünerek ln 2 değerini tahmin edebiliriz. Şekil 7.10'da [1, 2] aralığında yüksekliği $y = 1/2$ olan bir dikdörtgen grafiğin altına uyar. Bu nedenle, ln 2'ye eşit olan grafiğin altındaki alan, dikdörtgenin alanı $1/2$'den büyüktür. Yani, $\ln 2 > 1/2$'dir. Bu kadarını bilmek,

$$\ln 2^n = n \ln 2 > n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2}$$

ve

$$\ln 2^{-n} = -n \ln 2 < -n\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{n}{2}$$

verir. Bunlardan da

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

elde edilir. $x > 0$'i için tanımladık, dolayısıyla ln x'in tanım kümesi pozitif reel sayılar kümesidir. Yukarıdaki sonuçlar ve Ara Değer Teoremi, değer kümesinin, Şekil 7.9'da gösterilen $y = \ln x$'in grafiğini verecek şekilde, bütün reel sayılar kümesi olduğunu gösterir.

$\int (1/u)\, du$ İntegrali

(1) Denklemi, u pozitif türevlenebilir bir fonksiyon iken

$$\int \frac{1}{u}\, du = \ln u + C \tag{3}$$

integral formülüne yol açar, fakat ya u negatifse ne olur? u negatifse, $-u$ pozitiftir ve

$$\int \frac{1}{u}\, du = \int \frac{1}{(-u)}\, d(-u) \qquad u \text{ yerine } -u \text{ yazılmış (3) Denk.}$$

$$= \ln(-u) + C \tag{4}$$

elde edilir. Her durumda sağ taraftaki ifadenin $\ln |u| + C$ olduğuna dikkat ederek, (3) ve (4) denklemlerini tek bir denklemde birleştirebiliriz. (3) denkleminde, $u > 0$ olduğu için $\ln u = \ln |u|$; (4) denkleminde ise, $u < 0$ olduğu için $\ln(-u) = \ln |u|$ olur. u ister negatif, ister pozitif osun, $1/u)\, du$'nun integrali $\ln |u| + C$'dir.

> Hiçbir zaman sıfır değerini almayan türevlenebilir bir u fonksiyonu için,
>
> $$\int \frac{1}{u}\, du = \ln |u| + C \tag{5}$$
>
> dir.

(5) Denklemi, $1/u$'nun tanım kümesinin herhangi bir yerinde uygulanabilir.

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1 \text{ ve } n \text{ rasyonel}$$

olduğunu biliyoruz.

(5) denklemi $n = -1$ olduğunda ne yapılacağını söyler. (5) denklemi, belirli *formdaki* integrallerin logaritmaya yol açtığını söyler. $u = f(x)$ ise $du = f'(x)\,dx$'dir ve

$$\int \frac{1}{u}\,du = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

olur. Dolayısıyla (5) denklemi, $f(x)$ verilen tanım aralığında sabit bir işareti olan türevlenebilir bir fonksiyon ise

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

verir.

ÖRNEK 4 (5) Denklemini Uygulamak

(a) $$\int_0^2 \frac{2x}{x^2-5}\,dx = \int_{-5}^{-1} \frac{du}{u} = \ln|u|\Big]_{-5}^{-1}$$
$$= \ln|-1| - \ln|-5| = \ln 1 - \ln 5 = -\ln 5$$

$u = x^2 - 5,\quad du = 2x\,dx,$
$u(0) = -5,\quad u(2) = -1$

(b) $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4\cos\theta}{3+2\sin\theta}\,d\theta = \int_1^5 \frac{2}{u}\,du$$
$$= 2\ln|u|\Big]_1^5$$
$$= 2\ln|5| - 2\ln|1| = 2\ln 5$$

$u = 3 + 2\sin\theta,\quad du = 2\cos\theta\,d\theta,$
$u(-\pi/2) = 1,\quad u(\pi/2) = 5$

$[-\pi/2, \pi/2]$ üzerinde $u = 3 + 2\sin\theta$'nın daima pozitif olduğuna dikkat edin, bu yüzden (5) denklemi uygulanabilir. ■

Tan x ve cot x'in İntegralleri

(5) denklemi bize en sonunda tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının integrallerinin nasıl alınacağını söyler. Tanjant fonksiyonu için

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{-du}{u}$$
$$= -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C$$
$$= -\ln|\cos x| + C = \ln\frac{1}{|\cos x|} + C$$
$$= \ln|\sec x| + C$$

$u = \cos x > 0$ on $(-\pi/2, \pi/2)$,
$du = -\sin x\,dx$

Çarpmaya göre ters

bulunur. Kotanjant içinse

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \int \frac{du}{u}$$
$$= \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C = -\ln|\csc x| + C$$

$u = \sin x,$
$du = \cos x\,dx$

elde edilir.

$$\int \tan u \, du = -\ln |\cos u| + C = \ln |\sec u| + C$$

$$\int \cot u \, du = \ln |\sin u| + C = -\ln |\csc x| + C$$

ÖRNEK 5

$$\int_0^{\pi/6} \tan 2x \, dx = \int_0^{\pi/3} \tan u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \tan u \, du$$

$$= \frac{1}{2} \ln |\sec u| \Big]_0^{\pi/3} = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2$$

$u = 2x$, $dx = du/2$, $u(0) = 0$, $u(\pi/6) = \pi/3$ alın. ■

Logaritmik Türev Alma

Çarpım, bölüm ve kuvvet içeren formüllerle verilmiş olan pozitif fonksiyonların türevleri, türev almadan önce iki tarafın da doğal logaritmasını alırsak, daha kolay bulunur. Bu, türev almadan önce formülleri basitleştirmek için logaritma kurallarını kullanmamıza olanak sağlar. **Logaritmik türev alma** adı verilen bu işlem aşağıdaki örnekte kullanılmaktadır.

ÖRNEK 6 Logaritmik Türev Almayı Kullanmak

$$y = \frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1}, \qquad x > 1 \quad \text{ise } dy/dx\text{'i bulun.}$$

Çözüm İki tarafın da doğal logaritmasını alır ve sonucu logaritma özellikleri ile sadeleştiririz:

$$\ln y = \ln \frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1}$$

$$= \ln ((x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}) - \ln (x - 1) \qquad \text{Kural 2}$$

$$= \ln (x^2 + 1) + \ln (x + 3)^{1/2} - \ln (x - 1) \qquad \text{Kural 1}$$

$$= \ln (x^2 + 1) + \frac{1}{2} \ln (x + 3) - \ln (x - 1) \qquad \text{Kural 3}$$

Daha sonra, sol tarafta (1) denklemini kullanarak, iki tarafın da x'e göre türevini alırız:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 3} - \frac{1}{x - 1}$$

Artık dy/dx'i çözebiliriz:

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x + 6} - \frac{1}{x - 1}\right)$$

Son olarak, y'yi yerine yazarız:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1}\left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x + 6} - \frac{1}{x - 1}\right)$$ ■

Örnek 6'da Bölüm ve Çarpım Kurallarını kullanarak yapılacak doğrudan hesaplama çok daha uzun sürecektir.

ALIŞTIRMALAR 7.2

Logaritmaların Özelliklerini Kullanmak

1. Aşağıdaki logaritmaları ln 2 ve ln 3 cinsinden ifade edin.

a. $\ln 0.75$ **b.** $\ln(4/9)$ **c.** $\ln(1/2)$

d. $\ln\sqrt[3]{9}$ **e.** $\ln 3\sqrt{2}$ **f.** $\ln\sqrt{13.5}$

2. Aşağıdaki logaritmaları ln 5 ve ln 7 cinsinden ifade edin.

a. $\ln(1/125)$ **b.** $\ln 9.8$ **c.** $\ln 7\sqrt{7}$

d. $\ln 1225$ **e.** $\ln 0.056$

f. $(\ln 35 + \ln(1/7))/(\ln 25)$

3 ve 4 alıştırmalarındaki ifadeleri sadeleştirmek için logaritmaların özelliklerini kullanın.

3. a. $\ln\sin\theta - \ln\left(\frac{\sin\theta}{5}\right)$ **b.** $\ln(3x^2 - 9x) + \ln\left(\frac{1}{3x}\right)$

c. $\frac{1}{2}\ln(4t^4) - \ln 2$

4. a. $\ln\sec\theta + \ln\cos\theta$ **b.** $\ln(8x + 4) - 2\ln 2$

c. $3\ln\sqrt[3]{t^2 - 1} - \ln(t + 1)$

Logaritmaların Türevleri

5–36 alıştırmalarında, y'nin hangisi uygunsa x, t veya θ'ya göre türevini bulun.

5. $y = \ln 3x$

6. $y = \ln kx$, k constant

7. $y = \ln(t^2)$

8. $y = \ln(t^{3/2})$

9. $y = \ln\frac{3}{x}$

10. $y = \ln\frac{10}{x}$

11. $y = \ln(\theta + 1)$

12. $y = \ln(2\theta + 2)$

13. $y = \ln x^3$

14. $y = (\ln x)^3$

15. $y = t(\ln t)^2$

16. $y = t\sqrt{\ln t}$

17. $y = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16}$

18. $y = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$

19. $y = \frac{\ln t}{t}$

20. $y = \frac{1 + \ln t}{t}$

21. $y = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$

22. $y = \frac{x\ln x}{1 + \ln x}$

23. $y = \ln(\ln x)$

24. $y = \ln(\ln(\ln x))$

25. $y = \theta(\sin(\ln\theta) + \cos(\ln\theta))$

26. $y = \ln(\sec\theta + \tan\theta)$

27. $y = \ln\frac{1}{x\sqrt{x + 1}}$

28. $y = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}$

29. $y = \frac{1 + \ln t}{1 - \ln t}$

30. $y = \sqrt{\ln\sqrt{t}}$

31. $y = \ln(\sec(\ln\theta))$

32. $y = \ln\left(\frac{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}{1 + 2\ln\theta}\right)$

33. $y = \ln\left(\frac{(x^2 + 1)^5}{\sqrt{1 - x}}\right)$

34. $y = \ln\sqrt{\frac{(x + 1)^5}{(x + 2)^{20}}}$

35. $y = \int_{x^2/2}^{x^2} \ln\sqrt{t}\,dt$

36. $y = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} \ln t\,dt$

İntegrasyon

37–54 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

37. $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x}$

38. $\int_{-1}^{0} \frac{3\,dx}{3x - 2}$

39. $\int \frac{2y\,dy}{y^2 - 25}$

40. $\int \frac{8r\,dr}{4r^2 - 5}$

41. $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2 - \cos t}\,dt$

42. $\int_0^{\pi/3} \frac{4\sin\theta}{1 - 4\cos\theta}\,d\theta$

43. $\int_1^2 \frac{2\ln x}{x}\,dx$

44. $\int_2^4 \frac{dx}{x\ln x}$

45. $\int_2^4 \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

46. $\int_2^{16} \frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}}$

47. $\int \frac{3\sec^2 t}{6 + 3\tan t}\,dt$

48. $\int \frac{\sec y\tan y}{2 + \sec y}\,dy$

49. $\int_0^{\pi/2} \tan\frac{x}{2}\,dx$

50. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot t\,dt$

51. $\int_{\pi/2}^{\pi} 2\cot\frac{\theta}{3}\,d\theta$

52. $\int_0^{\pi/12} 6\tan 3x\,dx$

53. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x} + 2x}$

54. $\int \frac{\sec x\,dx}{\sqrt{\ln(\sec x + \tan x)}}$

Logaritmik Türev Alma

55–68 alıştırmalarında, y'nin verilen bağımsız değişkene göre türevini logaritmik türev alarak bulun.

55. $y = \sqrt{x(x+1)}$

56. $y = \sqrt{(x^2+1)(x-1)^2}$

57. $y = \sqrt{\dfrac{t}{t+1}}$

58. $y = \sqrt{\dfrac{1}{t(t+1)}}$

59. $y = \sqrt{\theta + 3}\sin\theta$

60. $y = (\tan\theta)\sqrt{2\theta+1}$

61. $y = t(t+1)(t+2)$

62. $y = \dfrac{1}{t(t+1)(t+2)}$

63. $y = \dfrac{\theta+5}{\theta\cos\theta}$

64. $y = \dfrac{\theta\sin\theta}{\sqrt{\sec\theta}}$

65. $y = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{2/3}}$

66. $y = \sqrt{\dfrac{(x+1)^{10}}{(2x+1)^5}}$

67. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x-2)}{x^2+1}}$

68. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x+1)(x-2)}{(x^2+1)(2x+3)}}$

Teori ve Uygulamalar

69. Aşağıdakilerin yerel ekstremumlarının yerlerini bulun ve tanımlayın.

a. $\ln(\cos x)$, $[-\pi/4, \pi/3]$ aralığında.

b. $\cos(\ln x)$, $[1/2, 2]$ aralığında.

70. **a.** $x > 1$ için $f(x) = x - \ln x$'in arttığını gösterin.

b. (a) şıkkından, $x > 1$ ise $\ln x < x$ olduğunu gösterin.

71. $x = 1$'den $x = 5$'e kadar $y = \ln x$ ile $y = \ln 2x$ eğrileri arasında kalan alanı bulun.

72. $x = -\pi/4$'den $x = \pi/3$'e kadar $y = \tan x$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan alanı bulun.

73. Birinci bölgede, koordinat eksenleri, $y = 3$ doğrusu ve $x = 2/\sqrt{y+1}$ eğrisi ile sınırlanan bölge y-ekseni etrafında döndürülerek bir cisim üretiliyor. Cismin hacmini bulun.

74. $x = \pi/6$'dan $x = \pi/2$'ye kadar $y = \sqrt{\cot x}$ eğrisiyle x-ekseni arasında kalan bölge x-ekseni etrafında döndürülerek bir cisim üretiliyor. Cismin hacmini bulun.

75. $x = 1/2$'den $x = 2$'ye kadar $y = 1/x^2$ eğrisiyle x-ekseni ara-sında kalan bölge y-ekseni etrafında döndürülerek bir cisim üretiliyor. Cismin hacmini bulun.

76. Bölüm 6.2, Alıştırma 6'da, $x = 0$'dan $x = 3$'e kadar $y = 9x/\sqrt{x^3+9}$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan bölgeyi y-ekseni etrafında döndürerek hacmi 36π olan bir cisim üretmiştik. Bölgeyi x-ekseni etrafında döndürürseniz hacmi ne bulursunuz? (Grafik için Bölüm 6.2, Alıştırma 6'ya bakın.)

77. Aşağıdaki eğrilerin uzunluklarını bulun.

a. $y = (x^2/8) - \ln x, \quad 4 \le x \le 8$

b. $x = (y/4)^2 - 2\ln(y/4), \quad 4 \le y \le 12$

78. (1, 0) noktasından geçen ve $x = 1$'den $x = 2$'ye kadar uzunluğu aşağıdaki gibi olan bir eğri bulun.

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx$$

T **79.** **a.** $x = 1$'den $x = 2$'ye kadar $y = 1/x$ doğrusu ile x-ekseni arasında kalan bölgenin merkezini bulun. Koordinatları iki ondalık basamak hassaslıkla bulun.

b. Bölgeyi çizin ve merkezi çiziminizde belirtin.

80. **a.** $x = 1$'den $x = 16$'ya kadar $y = 1/\sqrt{x}$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan bölgeyi kaplayan sabit yoğunluklu ince bir tabakanın kütle merkezini bulun.

b. Yoğunluk sabit olmak yerine, $\delta(x) = 4/\sqrt{x}$ ise kütle merkezini bulun.

81 ve 82 Alıştırmalarında başlangıç değer problemlerini çözün.

81. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{1}{x}, \quad y(1) = 3$

82. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 x, \quad y(0) = 0 \quad \text{ve} \quad y'(0) = 1$

T **83.** **$\ln(1+x)$'in $x = 0$'da lineerizasyonu** $\ln x$'e $x = 1$ civarında yaklaşımda bulunmak yerine, $\ln(1+x)$'e $x = 0$ civarında yaklaşımda bulunuruz. Bu yolla daha basit bir formül buluruz.

a. $x = 0$'da $\ln(1+x) \approx x$ lineerizasyonunu çıkarın.

b. $[0, 0.1]$ aralığında $\ln(1+x)$ yerine x almanın vereceği hatayı 5 ondalık basamağa kadar hesaplayın.

c. $0 \le x \le 0.5$ için $\ln(1+x)$ ve x'i beraber çizin. Varsa, farklı renkler kullanın. Hangi noktalarda $\ln(1+x)$ yaklaşımı en iyi ve en kötü görünmektedir? Grafiklerden koordinatları okuyarak, grafik çizicinizin izin verdiği hassaslıkta hata için bir üst sınır bulun.

84. Teorem 2'de 1 ve 4 Kurallarını ispatlamak için yaptığımız gibi, logaritmaların Bölüm kuralını ispatlamak için yarı-türev düşüncesini kullanın.

Grafik Araştırmaları

85. $0 < x \le 10$ için, $\ln x$, $\ln 2x$, $\ln 4x$, $\ln 8x$ ve $\ln 16x$'i (çizebildiğiniz kadarını) birlikte çizin. Neler oluyor? Açıklayın.

86. $0 \le x \le 22$, $-2 \le y \le 0$ penceresinde $y = \sin|x|$'in grafiğini çizin. Neler gördüğünüzü açıklayın. Yayları tersine döndürmek için formülü nasıl değiştirirdiniz?

87. **a.** $0 \le x \le 23$ aralığında, $a = 2, 4, 8, 20$ ve 50 için $y = \sin x$ ve $y = \ln(a + \sin x)$ grafiklerini birlikte çizin.

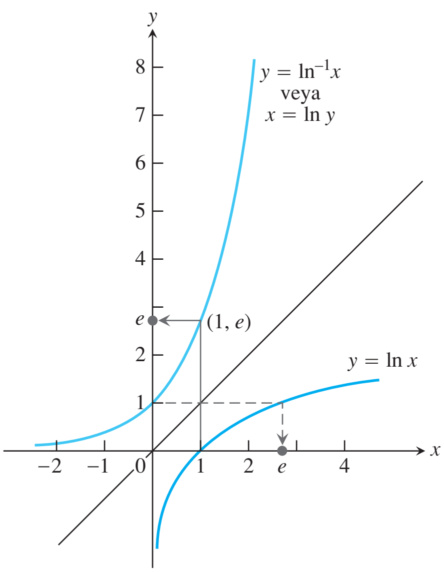
b. a arttıkça eğriler neden düzleşir? (*İpucu*: $|y'|$ için a'ya bağlı bir üst sınır bulun.)

88. $y = \sqrt{x} - \ln x$, $x > 0$ 'in grafiğinin bir büküm noktası var mıdır? Soruyu **(a)** grafiğini çizerek, **(b)** analiz kullanarak yanıtlamaya çalışın.

7.3 Eksponansiyel Fonksiyon

ln x fonksiyonunun teorisini geliştirirken, $\exp x = e^x$ eksponansiyel fonksiyonunu ln x'in tersi olarak tanıtıyoruz. Özelliklerini inceliyoruz, türevini ve integralini hesaplıyoruz. Türevini kullanarak, n herhangi bir reel sayı iken, rasyonel veya irrasyonel, x^n'nin türevini almak için kuvvet kuralını ispat ediyoruz.

ln x'in Tersi ve e Sayısı



ŞEKİL 7.11 $y = \ln x$ ve $y = \ln^{-1} x = \exp x$'in grafikleri. e sayısı $\ln^{-1} 1 = \exp(1)$ dir.

Tanım kümesi $(0, \infty)$ ve değer kümesi $(-\infty, \infty)$ olmak üzere x'in artan bir fonksiyonu olan ln x fonksiyonunun, tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ ve değeri kümesi $(0, \infty)$ olan bir tersi, $\ln^{-1} x$ vardır. $\ln^{-1} x$'in grafiği ln x'in grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriğidir. Şekil 7.11'den Görebileceğiniz gibi,

$$\lim_{x\to\infty} \ln^{-1} x = \infty \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to-\infty} \ln^{-1} x = 0.$$

dır. $\ln^{-1} x$ fonksiyonu $\exp x$ ile de gösterilir.

Bölüm 7.2'de e sayısını $\ln(e) = 1$ denklemi ile tanımladık, dolayısıyla $e = \ln^{-1}(1) = \exp(1)$ dir. Bir rasyonel sayı olmamasına rağmen, bu bölümün sonlarında e'yi bir limit olarak ifade etmenin bir yolunu göreceğiz. Bölüm 11'de e'nin değerini bir bilgisayarla, istediğimiz basamağa kadar doğruluk derecesi ile farklı bir formül kullanarak hesaplayabileceğiz (Bölüm 11.9, Örnek 6). 15 basamağa kadar

$$e = 2.718281828459045$$

$y = e^x$ Fonksiyonu

e sayısının rasyonel bir r kuvvetini her zamanki gibi alırız:

$$e^2 = e \cdot e, \qquad e^{-2} = \frac{1}{e^2}, \qquad e^{1/2} = \sqrt{e},$$

gibi. e pozitif olduğu için e^r de pozitiftir. Bu e^r'nin bir logaritması olduğu anlamına gelir. Logaritmasını aldığımız zaman,

$$\ln e^r = r \ln e = r \cdot 1 = r$$

olduğunu görürüz. ln x bire-bir olduğundan ve $(\ln^{-1} r) = r$ olduğundan, bu denklem bize

$$e^r = \ln^{-1} r = \exp r, \quad r \text{ rasyonel} \tag{1}$$

olduğunu söyler. Henüz, irrasyonel bir x için e^x'e açık bir anlam verecek bir yol bulmadık. Fakat $\ln^{-1} x$'in her x için, rasyonel veya irrasyonel, bir anlamı vardır. Bu nedenle (1) denklemi e^x'in tanımını x'in irrasyonel değerlerine genişletmek için bir yol sunar. $\ln^{-1} x$ fonksiyonu her x için tanımlıdır, dolayısıyla bunu daha önce e^x'in değerlerinin bulunmadığı yerlerde e^x'e değer vermekte kullanabiliriz.

e^x'in Tipik Değerleri

x	e^x (yuvarlanmış)
−1	0.37
0	1
1	2.72
2	7.39
10	22026
100	2.6881×10^{43}

> **TANIM Doğal Eksponansiyel Fonksiyon**
> Her x reel sayısı için, $e^x = \ln^{-1} x = \exp x$, olarak tanımlanır.

İlk defa olarak irrasyonel bir kuvvet için kesin bir anlam elde ettik. Eksponansiyel fonksiyon $\exp x$ yerine genellikle e^x ile gösterilir. ln x ve e^x biribirilerinin tersleri olduklarından, aşağıdakileri yazabiliriz.

e^x ve $\ln x$ İçin Ters Denklemler

$$e^{\ln x} = x \qquad (\text{her } x > 0 \text{ için}) \qquad (2)$$

$$\ln(e^x) = x \qquad (\text{her } x \text{ için}) \qquad (3)$$

Transandantal Sayılar ve Transandantal Denklemler

Rasyonel katsayılı polinom denklemlerin çözümleri olan sayılara cebirsel denir: –2 cebirseldir, çünkü $x + 2 = 0$ denklemini sağlar ve $\sqrt{3}$ cebirseldir, çünkü $x^2 - 3 = 0$ denklemini sağlar. e ve π gibi cebirsel olmayan sayılara transandantal denir. 1873'te Charles Hermite e'nin transandantallığını bizim tanımladığımız anlamda ispatlamıştır. 1882'de, C.L.F. Lindemann π'nin transandantallığını ispatlamıştır. Bugün, bir $y = f(x)$ fonksiyonuna, P'ler x'in rasyonel katsayılı polinomları olmak üzere,

$$P_n y^n + \cdots + P_1 y + P_0 = 0$$

şeklinde bir denklemi sağlıyorsa cebirsel diyoruz. $y = 1/\sqrt{x+1}$ cebirseldir, çünkü $(x + 1)y^2 - 1 = 0$ denklemini sağlar. Burada polinomlar $P_2 = x + 1$, $P_1 = 0$ ve $P_0 = -1$'dir. Cebirsel olmayan fonksitonlara transandantal denir.

$\ln x$'in tanım kümesi $(0, \infty)$ ve değer kümesi $(-\infty, \infty)$ dur. Dolayısıyla, e^x'in tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ ve değer kümesi $(0, \infty)$ dur.

ÖRNEK 1 Ters Denklemleri Kullanmak

(a) $\ln e^2 = 2$

(b) $\ln e^{-1} = -1$

(c) $\ln \sqrt{e} = \dfrac{1}{2}$

(d) $\ln e^{\sin x} = \sin x$

(e) $e^{\ln 2} = 2$

(f) $e^{\ln(x^2+1)} = x^2 + 1$

(g) $e^{3\ln 2} = e^{\ln 2^3} = e^{\ln 8} = 8$ Bir yol

(h) $e^{3\ln 2} = (e^{\ln 2})^3 = 2^3 = 8$ Bir başka yol ■

ÖRNEK 2 Bir üssü çözmek

$e^{2k} = 10$ ise k'yi bulun.

Çözüm İki tarafın da doğal logaritmasını alın:

$$e^{2k} = 10$$
$$\ln e^{2k} = \ln 10$$
$$2k = \ln 10 \qquad \text{(3) denklemi}$$
$$k = \frac{1}{2}\ln 10. \qquad ■$$

a^x Genel Eksponansiyel Fonksiyonu

Her pozitif a sayısı için, $a = e^{\ln a}$ olduğu için, a^x'i $(e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$ olarak düşünebiliriz. Bundan dolayı aşağıdaki tanımı yaparız.

TANIM **Genel Eksponansiyel Fonksiyon**

Herhangi $a > 0$ ve x sayıları için, a tabanlı eksponansiyel fonksiyon

$$a^x = e^{x \ln a}$$

dır.

$a = e$ iken $a^x = e^{x \ln a} = e^{x \ln e} = e^{x \cdot 1} = e^x$ verir.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Siméon Denis Poisson
(1781–1840)

ÖRNEK 3 Üstel Fonksiyonları Hesaplamak

(a) $2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\ln 2} \approx e^{1.20} \approx 3.32$

(b) $2^{\pi} = e^{\pi \ln 2} \approx e^{2.18} \approx 8.8$ ■

Genel eksponansiyel fonksiyonların analizini ve terslerini gelecek bölümde inceliyoruz. Burada, e^x'in üs kurallarını incelemek için tanıma ihtiyacımız vardır.

Üs Kuralları

e^x, $\ln^{-1} x$ gibi dolaylı bir yoldan tanımlansa bile, cebirden bilinen tanıdık üs kurallarına uyar. Teorem 3 bize bu kuralların, $\ln x$ ve e^x'in tanımlarının sonuçları olduklarını söyler.

TEOREM 3 e^x **İçin Üs Kuralları**

Her x, x_1 ve x_2 sayıları için e^x doğal eksponansiyel fonksiyonu aşağıdaki kurallara uyar.

1. $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$

2. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

3. $\dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1-x_2}$

4. $(e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1 x_2} = (e^{x_2})^{x_1}$

Kural 1'in İspatı

$$y_1 = e^{x_1} \quad \text{ve} \quad y_2 = e^{x_2} \tag{4}$$

olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} x_1 = \ln y_1 \quad &\text{ve} \quad x_2 = \ln y_2 && \text{(4) denklemlerinin iki tarafının da logaritmasını alın.} \\ x_1 + x_2 &= \ln y_1 + \ln y_2 \\ &= \ln y_1 y_2 && \text{Çarpım Kuralı} \\ e^{x_1+x_2} &= e^{\ln y_1 y_2} && \text{Eksponansiyelini alın.} \\ &= y_1 y_2 && e^{\ln u} = u \\ &= e^{x_1} e^{x_2} \end{aligned}$$ ■

bulunur.
Kural 4'ün ispatı da benzer şekildedir. Kural 2 ve 3, Kural 1'den çıkar (Alıştırma 78).

ÖRNEK 4 Üs Kurallarını Uygulamak

(a) $e^{x+\ln 2} = e^x \cdot e^{\ln 2} = 2e^x$ — Kural 1

(b) $e^{-\ln x} = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$ — Kural 2

(c) $\dfrac{e^{2x}}{e} = e^{2x-1}$ — Kural 3

(d) $(e^3)^x = e^{3x} = (e^x)^3$ — Kural 4 ■

Teorem 3, a tabanlı eksponansiyel fonksiyon a^x için de geçerlidir. Örneğin,

$$\begin{aligned} a^{x_1} \cdot a^{x_2} &= e^{x_1 \ln a} \cdot e^{x_2 \ln a} && a^x\text{'in tanımı} \\ &= e^{x_1 \ln a + x_2 \ln a} && \text{Kural 1} \\ &= e^{(x_1+x_2)\ln a} && \ln a \text{ parantezi} \\ &= a^{x_1+x_2}. && a^x\text{'in tanımı} \end{aligned}$$

e^x'in Türevi ve İntegrali

Eksponansiyel fonksiyon türevlenebilirdir, çünkü türevi hiç sıfır olamayan türevlenebilir bir fonksiyonun tersidir (Teorem 1). Türevini, Teorem 1'i ve $\ln x$'in türevi hakkında bildiklerimizi kullanarak hesaplıyoruz:

$$f(x) = \ln x \quad \text{ve} \quad y = e^x = \ln^{-1} x = f^{-1}(x)$$

olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x) &= \frac{d}{dx}\ln^{-1} x \\ &= \frac{d}{dx} f^{-1}(x) \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} && \text{Teorem 1} \\ &= \frac{1}{f'(e^x)} && f^{-1}(x) = e^x \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{e^x}\right)} && z = e^x \text{ ile } f'(z) = \frac{1}{z} \\ &= e^x. \end{aligned}$$

Yani, $y = e^x$ için, $dy/dx = e^x$ bulduk dolayısıyla, doğal eksponansiyel fonksiyonun türevi kendisidir. Bölüm 7.5'te, bu şekilde davranan fonksiyonların sadece e^x'in sabit katları olduğunu göreceğiz. Özet olarak,

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \tag{5}$$

ÖRNEK 5 Bir Eksponansiyeli Türetmek

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(5e^x) &= 5\frac{d}{dx}e^x \\ &= 5e^x \end{aligned}$$

■

Zincir Kuralı (5) denklemini her zamanki gibi daha genel bir şekle genişletir.

u, x'in türevlenebilir herhangi bir fonksiyonu ise

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx}. \qquad (6)$$

ÖRNEK 6 Zincir Kuralını Üslerle Uygulamak

(a) $\frac{d}{dx}e^{-x} = e^{-x}\frac{d}{dx}(-x) = e^{-x}(-1) = -e^{-x}$ $u = -x$ ile (6) denklemi

(b) $\frac{d}{dx}e^{\sin x} = e^{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$ $u = \sin x$ ile (6) denklemi ■

(6) denkleminin integral eşdeğeri şöyledir:

$$\int e^u\,du = e^u + C.$$

ÖRNEK 7 Üsleri İntegre Etmek

(a)
$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} e^{3x}\,dx &= \int_0^{\ln 8} e^u \cdot \frac{1}{3}\,du \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\ln 8} e^u\,du \\ &= \frac{1}{3}e^u\Big]_0^{\ln 8} \\ &= \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}\end{aligned}$$

$u = 3x,\quad \frac{1}{3}du = dx,\quad u(0) = 0,$
$u(\ln 2) = 3\ln 2 = \ln 2^3 = \ln 8$

(b)
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x\,dx &= e^{\sin x}\Big]_0^{\pi/2} \\ &= e^1 - e^0 = e - 1\end{aligned}$$

Örnek 6'daki ters türev ■

ÖRNEK 8 Bir Başlangıç Değer Problemini Çözmek

$$e^y\frac{dy}{dx} = 2x, \qquad x > \sqrt{3}; \qquad y(2) = 0$$

başlangıç değer problemini çözün.

Çözüm Diferansiyel denklemin iki tarafını da x'e göre integre ederek

$$e^y = x^2 + C$$

elde ederiz.

C'yi bulmak için $y(2) = 0$ başlangıç koşulunu kullanırız::

$$C = e^0 - (2)^2$$
$$= 1 - 4 = -3$$

Bu e^y'nin formülünü tamamlar:

$$e^y = x^2 - 3$$

y'yi bulmak için, iki tarafın da logaritmasını alırız:

$$\ln e^y = \ln(x^2 - 3)$$
$$y = \ln(x^2 - 3).$$

Çözümün $x > \sqrt{3}$ için geçerli olduğuna dikkat edin.

Çözümü esas denklemde yerine koyarak kontrol edelim.

$$e^y \frac{dy}{dx} = e^y \frac{d}{dx} \ln(x^2 - 3)$$

$$= e^y \frac{2x}{x^2 - 3} \qquad \ln(x^2 - 3)\text{'ün türevi}$$

$$= e^{\ln(x^2-3)} \frac{2x}{x^2 - 3} \qquad y = \ln(x^2 - 3)$$

$$= (x^2 - 3)\frac{2x}{x^2 - 3} \qquad e^{\ln y} = y$$

$$= 2x$$

buluruz. Çözüm doğrudur. ■

Bir Limit Olarak İfade Edilmiş *e* Sayısı

e sayısını, $\ln e = 1$ eşitliğini sağlayan sayı olarak veya exp(1) sayıyısı olarak tanımladık. e sayısının, logaritmik ve eksponansiyel fonksiyonlar için önemli bir sabit olduğunu görüyoruz, fakat sayısal değeri nedir? Aşağıdaki teorem, e sayısını bir limit olarak hesaplamanın bir yolunu göstermektedir.

TEOREM 4 Bir Limit Olarak *e* Sayısı

e sayısı

$$e = \lim_{x \to 0}(1 + x)^{1/x}.$$

limiti olarak hesaplanabilir.

İspat $f(x) = \ln x$ ise $f'(x) = 1/x$, dir ve $f'(1) = 1$ dir. Fakat, türev tanımına göre,

$$f'(1) = \lim_{h \to 0}\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{x \to 0}\frac{f(1 + x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{\ln(1 + x) - \ln 1}{x} = \lim_{x \to 0}\frac{1}{x}\ln(1 + x) \qquad \ln 1 = 0$$

$$= \lim_{x \to 0}\ln(1 + x)^{1/x} = \ln\left[\lim_{x \to 0}(1 + x)^{1/x}\right] \qquad \ln \text{ süreklidir.}$$

$f'(1) = 1$ olduğundan,

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right] = 1$$

buluruz. Bu nedenle

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e \qquad \text{ln } e = 1 \text{ ve ln bire-bir dir}$$ ■

$y = 1/x$ yazmakla, Teorem 4'teki limiti

$$e = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y \tag{7}$$

olarak ifade edebiliriz.

Bölümün başında, 15 basamağa kadar $e = 2.718281828459045$ olduğunu belirtmiştik.

Kuvvet Kuralı Genel Hali

Artık x^n'yi herhangi bir $x > 0$ ve herhangi bir n reel sayısı için $x^n = e^{n \ln x}$ olarak tanımlayabiliriz. Dolayısıyla, $\ln x^n = n \ln x$ denklemindeki n artık rasyonel olmak zorunda değildir— $x > 0$ olduğu sürece herhangi bir sayı olabilir:

$$\ln x^n = \ln(e^{n\ln x}) = n\ln x \qquad \ln e^u = u,\ u \text{ keyfi}$$

$a^x/a^y = a^{x-y}$ kuralı ve $x^n = e^{n \ln x}$ tanımı, birlikte, türev alma için Kuvvet Kuralını son haliyle yazmamızı sağlarlar. x^n'nin x'e göre türevini almak

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^n &= \frac{d}{dx}e^{n\ln x} && x^n,\ x > 0\text{'ın tanımı}\\
&= e^{n\ln x}\cdot\frac{d}{dx}(n\ln x) && e^u \text{ için Zincir Kuralı}\\
&= x^n\cdot\frac{n}{x} && \text{Yine tanım}\\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

verir. Kısaca, $x > 0$ olduğu sürece

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

olur. Zincir Kuralı bu eşitliği Kuvvet Kuralının son haline genişletir.

Kuvvet Kuralı (Genel Hal)

u, x'in türevlenebilir pozitif bir fonksiyonu ve n herhangi bir reel sayı ise, bu durumda u^n'de x'in türevlenebilir bir fonksiyonudur:

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

ÖRNEK 9 Kuvvet kuralını İrrasyonel Kuvvetlerle Kullanmak

(a) $\dfrac{d}{dx}x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1} \qquad (x > 0)$

(b) $$\frac{d}{dx}(2 + \sin 3x)^{\pi} = \pi(2 + \sin 3x)^{\pi-1}(\cos 3x)\cdot 3$$
$$= 3\pi(2 + \sin 3x)^{\pi-1}(\cos 3x).$$

ALIŞTIRMALAR 7.3

Eksponansiyel ve Logaritmalarla Cebirsel Hesaplamalar

1–4 alıştırmalarındaki büyüklükler için basit ifadeler bulun.

1. **a.** $e^{\ln 7.2}$ **b.** $e^{-\ln x^2}$ **c.** $e^{\ln x - \ln y}$

2. **a.** $e^{\ln(x^2+y^2)}$ **b.** $e^{-\ln 0.3}$ **c.** $e^{\ln \pi x - \ln 2}$

3. **a.** $2\ln\sqrt{e}$ **b.** $\ln(\ln e^e)$ **c.** $\ln(e^{-x^2-y^2})$

4. **a.** $\ln(e^{\sec\theta})$ **b.** $\ln(e^{(e^x)})$ **c.** $\ln(e^{2\ln x})$

Logaritmik veya Eksponansiyel Terimli Denklemleri Çözmek

5–10 alıştırmalarında, y'yi t veya x cinsinden çözün.

5. $\ln y = 2t + 4$

6. $\ln y = -t + 5$

7. $\ln(y - 40) = 5t$

8. $\ln(1 - 2y) = t$

9. $\ln(y - 1) - \ln 2 = x + \ln x$

10. $\ln(y^2 - 1) - \ln(y + 1) = \ln(\sin x)$

11 ve 12 alıştırmalarında k'yi çözün.

11. **a.** $e^{2k} = 4$ **b.** $100e^{10k} = 200$ **c.** $e^{k/1000} = a$

12. **a.** $e^{5k} = \dfrac{1}{4}$ **b.** $80e^{k} = 1$ **c.** $e^{(\ln 0.8)k} = 0.8$

13–16 alıştırmalarında t'yi çözün.

13. **a.** $e^{-0.3t} = 27$ **b.** $e^{kt} = \dfrac{1}{2}$ **c.** $e^{(\ln 0.2)t} = 0.4$

14. **a.** $e^{-0.01t} = 1000$ **b.** $e^{kt} = \dfrac{1}{10}$ **c.** $e^{(\ln 2)t} = \dfrac{1}{2}$

15. $e^{\sqrt{t}} = x^2$

16. $e^{(x^2)}e^{(2x+1)} = e^t$

Türevler

17–36 alıştırmalarında, y'nin x, t veya θ'ya göre, hangisi uygunsa. türevini alın.

17. $y = e^{-5x}$

18. $y = e^{2x/3}$

19. $y = e^{5-7x}$

20. $y = e^{(4\sqrt{x}+x^2)}$

21. $y = xe^x - e^x$

22. $y = (1 + 2x)e^{-2x}$

23. $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$

24. $y = (9x^2 - 6x + 2)e^{3x}$

25. $y = e^{\theta}(\sin\theta + \cos\theta)$

26. $y = \ln(3\theta e^{-\theta})$

27. $y = \cos(e^{-\theta^2})$

28. $y = \theta^3 e^{-2\theta}\cos 5\theta$

29. $y = \ln(3te^{-t})$

30. $y = \ln(2e^{-t}\sin t)$

31. $y = \ln\left(\dfrac{e^{\theta}}{1 + e^{\theta}}\right)$

32. $y = \ln\left(\dfrac{\sqrt{\theta}}{1 + \sqrt{\theta}}\right)$

33. $y = e^{(\cos t + \ln t)}$

34. $y = e^{\sin t}(\ln t^2 + 1)$

35. $y = \displaystyle\int_0^{\ln x} \sin e^t\, dt$

36. $y = \displaystyle\int_{e^{4\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln t\, dt$

37–40 alıştırmalarında dy/dx'i bulun.

37. $\ln y = e^y \sin x$

38. $\ln xy = e^{x+y}$

39. $e^{2x} = \sin(x + 3y)$

40. $\tan y = e^x + \ln x$

İntegraller

41–62 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

41. $\displaystyle\int (e^{3x} + 5e^{-x})\, dx$

42. $\displaystyle\int (2e^x - 3e^{-2x})\, dx$

43. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x\, dx$

44. $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{0} e^{-x}\, dx$

45. $\displaystyle\int 8e^{(x+1)}\, dx$

46. $\displaystyle\int 2e^{(2x-1)}\, dx$

47. $\displaystyle\int_{\ln 4}^{\ln 9} e^{x/2}\, dx$

48. $\displaystyle\int_0^{\ln 16} e^{x/4}\, dx$

49. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}\, dr$

50. $\displaystyle\int \frac{e^{-\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}\, dr$

51. $\displaystyle\int 2t\, e^{-t^2}\, dt$

52. $\displaystyle\int t^3 e^{(t^4)}\, dt$

53. $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$

54. $\displaystyle\int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}\, dx$

55. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (1 + e^{\tan\theta})\sec^2\theta\, d\theta$

56. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + e^{\cot\theta})\csc^2\theta\, d\theta$

57. $\displaystyle\int e^{\sec \pi t}\sec \pi t \tan \pi t\, dt$

58. $\displaystyle\int e^{\csc(\pi + t)}\csc(\pi + t)\cot(\pi + t)\, dt$

59. $\displaystyle\int_{\ln(\pi/6)}^{\ln(\pi/2)} 2e^v \cos e^v \, dv$

60. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\ln \pi}} 2x\, e^{x^2} \cos\left(e^{x^2}\right) dx$

61. $\displaystyle\int \frac{e^r}{1 + e^r}\, dr$

62. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + e^x}$

Başlangıç Değer Problemleri

63–66 alıştırmalarındaki başlangıç değer problemlerini çözün.

63. $\dfrac{dy}{dt} = e^t \sin(e^t - 2), \quad y(\ln 2) = 0$

64. $\dfrac{dy}{dt} = e^{-t} \sec^2(\pi e^{-t}), \quad y(\ln 4) = 2/\pi$

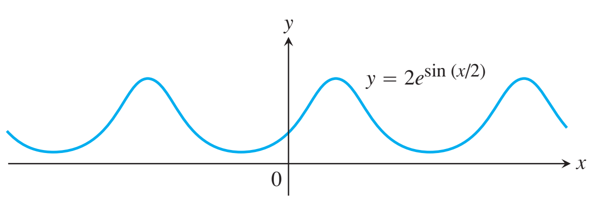
65. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2e^{-x}, \quad y(0) = 1 \quad \text{ve} \quad y'(0) = 0$

66. $\dfrac{d^2y}{dt^2} = 1 - e^{2t}, \quad y(1) = -1 \quad \text{ve} \quad y'(1) = 0$

Teori ve Uygulamalar

67. $f(x) = e^x - 2x$'in $[0, 1]$ aralığındaki mutlak maksimum ve minimum değerlerini bulun.

68. $f(x) = 2e^{\sin(x/2)}$ periyodik fonksiyonu ekstremum değerlerini nerelerde alır ve bu değerler nedir?



69. $f(x) = x^2 \ln(1/x)$'in mutlak maksimum değerini bulun ve bu değerin nerede alındığını söyleyin.

70. $f(x) = (x - 3)^2 e^x$ fonksiyonunun ve türevinin grafiklerini birlikte çizin. f'nin davranışının, f''nün işaretleri ve değerleriyle ilişkisini yorumlayın. Grafiklerdeki önemli noktaları gerekirse analizle belirleyin.

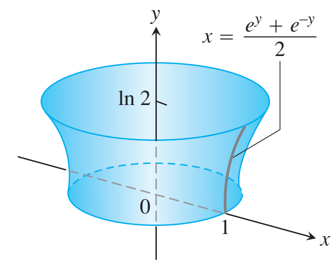
71. Birinci bölgede, üstten $y = e^{2x}$ eğrisi, alttan $y = e^x$ eğrisi ve sağdan $x = \ln 3$ doğrusu ile sınırlanan "üçgen" bölgenin alanını bulun.

72. Birinci bölgede, üstten $y = e^{x/2}$ eğrisi, alttan $y = e^{-x/2}$ eğrisi ve sağdan $x = 2 \ln 2$ doğrusu ile sınırlanan "üçgen" bölgenin alanını bulun.

73. xy-düzleminde orijinden geçen ve $x = 0$ ile $x = 1$ arasında uzunluğu aşağıdaki gibi olan bir eğri bulun.

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4} e^x}\, dx.$$

74. $x = (e^y + e^{-y})/2,\ 0 \le y \le \ln 2$, eğrisinin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin alanını bulun.



75. a. $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$ olduğunu gösterin.

b. $\ln x$'in $[0, e]$ aralığındaki ortalama değerini bulun.

76. $f(x) = 1/x$'in $[1, 2]$ aralığındaki ortalama değerini bulun.

77. e^x'in $x = 0$'da lineerizasyonu.

a. $x = 0$'da $e^x \approx 1 + x$ lineer yaklaşımını elde edin.

b. $[0,0.2]$ aralığında e^x yerine $1 + x$ yazmanın getireceği hatayı 5 ondalık basamak hassaslıkla bulun.

c. $-2 \le x \le 2$ aralığında e^x ve $1 + x$'i birlikte çizin. Varsa, farklı renkler kullanın. Yaklaşım hangi aralıklarda e^x'i fazla veya az bulur?

78. Üs Kuralları

a. Konuda türetilen $e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$ denkleminden başlayarak, herhangi bir x reel sayısı için $e^{-x} = 1/e^x$ olduğunu gösterin. Sonra, herhangi iki x_1 ve x_2 reel sayısı için $e^{x_1}/e^{x_2} = e^{x_1-x_2}$ olduğunu gösterin.

b. Herhangi iki x_1 ve x_2 sayısı için $(e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1x_2} = (e^{x_2})^{x_1}$ olduğunu gösterin.

79. e'nin ondalık gösterimi $\ln x = 1$ denklemini çözerek, e'yi hesap makinenizin izin verdiği hassaslıkta bulun.

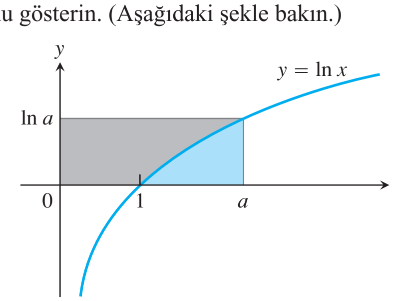
80. e^x ile $\ln x$ arasındaki ters ilişkisi. Hesap makinenizin aşağıdaki bileşkeleri bulmada ne kadar başarılı olduğunu bulun.

$$e^{\ln x} \quad \text{ve} \quad \ln(e^x)$$

81. Herhangi bir $a > 1$ sayısı için

$$\int_1^a \ln x\, dx + \int_0^{\ln a} e^y\, dy = a \ln a$$

olduğunu gösterin. (Aşağıdaki şekle bakın.)



82. Geometrik, logaritmik ve aritmetik ortalama eşitsizliği.

a. e^x'in grafiğinin bütün x-değerleri aralıklarında yukarı konkav olduğunu gösterin.

b. Aşağıdaki şekle bakarak, $0 < a < b$ ise,

$$e^{(\ln a+\ln b)/2} \cdot (\ln b - \ln a) < \int_{\ln a}^{\ln b} e^x\,dx < \frac{e^{\ln a} + e^{\ln b}}{2} \cdot (\ln b - \ln a)$$

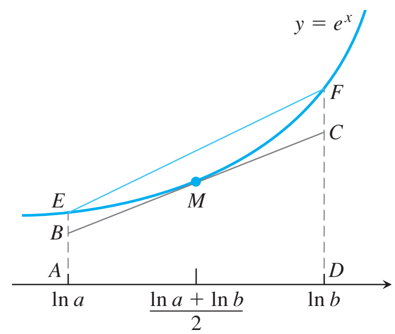
olduğunu gösterin.

c. (b)'deki eşitsizliği kullanarak

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}.$$

sonucunu çıkarın. Bu eşitsizlik, iki pozitif sayının geometrik ortalamasının logaritmik ortalamalarından onunda aritmetik ortalamalarından daha küçük olduğunu söyler.

(Bu eşitsizlik hakkında daha fazla bilgi için, *"The Geometric, Logaritmic and Arithmetic Mean Inequality," Frank Burk, American Mathematical Monthly*, Vol.94, No.6, June-July 1987, sayfa 527-528'e bakın.)



ÖLÇEKLİ DEĞİL

7.4 a^x ve $\log_a x$

Genel eksponansiyel fonksiyonları 2^x, 10^x ve π^x olarak tanımladık. Bu bölümde bunların türevlerini ve integrallerini hesaplıyoruz. Ayrıca, $\log_2 x$, $\log_{10} x$ ve $\log_\pi x$ gibi genel logaritmik fonksiyonları ile türevlerini ve integrallerini tanımlıyoruz.

a^u'un Türevi

$a^x = e^{x \ln a}$ tanımı ile başlarız:

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = e^{x\ln a} \cdot \frac{d}{dx}(x \ln a) \qquad \frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$$

$$= a^x \ln a$$

$a > 0$ ise,

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$$

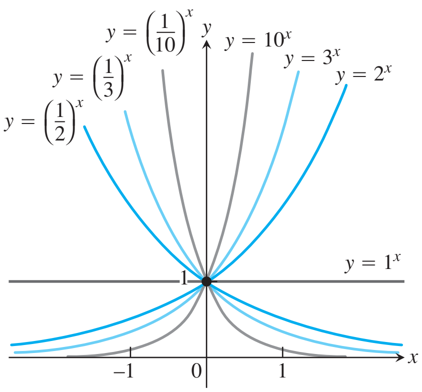
olur. Zincir Kuralıyla daha genel bir form elde ederiz.

> $a > 0$ ve u, x'in türevlenebilir bir fonksiyonu ise, a^u da x'in türevlenebilir bir fonksiyonudur.
>
> $$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a\,\frac{du}{dx} \tag{1}$$

Bu denklemler e^x'in neden analizde tercih edilen eksponansiyel fonksiyon olduğunu gösterir. $a = e$ ise, $\ln a = 1$ olur ve a^x'in türevi

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \ln e = e^x$$

haline sadeleşir.



ŞEKİL 7.12 Ekponansiyel fonksiyonlar $0 < a < 1$ ise azalır, $a > 1$ ise artarlar. $x \to \infty$ iken, $0 < a < 1$ ise, $a^x \to 0$, $a > 1$ ise $a^x \to \infty$ buluruz. $x \to -\infty$ iken, $0 < a < 1$ ise $a^x \to \infty$ ve $a > 1$ ise, $a^x \to 0$ bulunur.

ÖRNEK 1 Genel Eksponansiyel Fonksiyonları Türetmek

(a) $\dfrac{d}{dx}3^x = 3^x \ln 3$

(b) $\dfrac{d}{dx}3^{-x} = 3^{-x}(\ln 3)\dfrac{d}{dx}(-x) = -3^{-x}\ln 3$

(c) $\dfrac{d}{dx}3^{\sin x} = 3^{\sin x}(\ln 3)\dfrac{d}{dx}(\sin x) = 3^{\sin x}(\ln 3)\cos x$ ■

(1) denkleminden a^x'in türevinin, $\ln a > 0$ veya $a > 1$ ise pozitif, $\ln a < 0$ veya $0 < a < 1$ ise negatif olacağını görürüz. Yani a^x, $a > 1$ ise x'in artan bir fonksiyonu, $0 < a < 1$ ise x'in azalan bir fonksiyonudur. Her durumda, a^x bire-bir dir. İkinci türev,

$$\frac{d^2}{dx^2}(a^x) = \frac{d}{dx}(a^x \ln a) = (\ln a)^2 a^x$$

her x için pozitiftir, dolayısıyla a^x'in grafiği reel doğrunun her aralığında yukarı konkavdır (Şekil 7.12).

Diğer Kuvvet Fonksiyonları

Pozitif sayıların keyfi reel kuvvetlerini alabilme olanağı $x > 0$ için x^x ve $x^{\ln x}$ gibi fonksiyonları tanımlamayı sağlar. Bu tip fonksiyonların türevlerini, fonksiyonları e'nin kuvvetleri şeklinde yeniden yazarak alırız.

ÖRNEK 2 Bir Genel Kuvvet Fonksiyonunu Türetmek

$y = x^x$, $x > 0$ ise dy/dx'i bulun.

Çözüm x^x'i e'nin bir kuvveti olarak yazın:

$$y = x^x = e^{x \ln x} \qquad a = x \text{ ile } a^x$$

Sonra her zamanki gibi türev alın:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}e^{x\ln x}\\ &= e^{x\ln x}\frac{d}{dx}(x\ln x)\\ &= x^x\left(x\cdot\frac{1}{x} + \ln x\right)\\ &= x^x(1+\ln x)\end{aligned}$$ ■

a^u'nun İntegrali

$a \neq 1$, yani $\ln a \neq 0$ ise, (1) denkleminin 2 tarafını da $\ln a$ ile bölerek

$$a^u\frac{du}{dx} = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(a^u)$$

elde edebiliriz.

Artık x'e göre integral almak

$$\int a^u \frac{du}{dx}\,dx = \int \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(a^u)\,dx = \frac{1}{\ln a}\int \frac{d}{dx}(a^u)\,dx = \frac{1}{\ln a}a^u + C$$

verir. İlk integrali diferansiyel formda yazarsak aşağıdaki ifadeyi buluruz.

$$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C \qquad (2)$$

ÖRNEK 3 Genel Üstel Fonksiyonları İntegre Etmek

(a) $\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ $\quad a = 2,\ u = x$ ile (2) denklemi

(b) $\int 2^{\sin x}\cos x\,dx$

$$= \int 2^u\,du = \frac{2^u}{\ln 2} + C \qquad u = \sin x,\ du = \cos x\,dx$$

$$= \frac{2^{\sin x}}{\ln 2} + C \qquad u\text{'yu } \sin x \text{ ile değiştirin.}$$

■

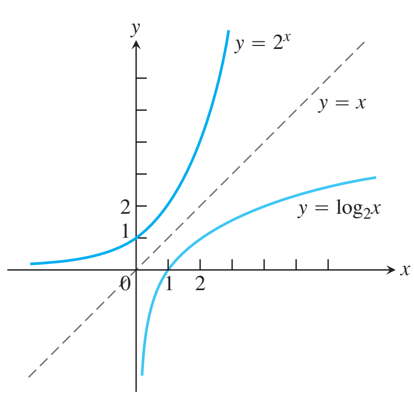
a Tabanlı Logaritmalar

Daha önce gördüğümüz gibi, a sıfırdan farklı herhangi bir pozitif sayı ise, a^x fonksiyonu bire-bir dir ve hiçbir noktada sıfır olamayan bir türevi vardır. Dolayısıyla türevlenebilir bir tersi de bulunur. Tersine ***x*'in *a* tabanına göre logaritması** der ve **$\log_a x$** ile gösteririz.

TANIM $\log_a x$

Herhangi bir $a \neq 1$ pozitif sayısı için,

$\log_a x$, a^x'in ters fonksiyonudur.



ŞEKİL 7.13 2^x'in ve tersi $\log_2 x$'in grafikleri.

$y = \log_a x$'in grafiği, $y = a^x$ grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriğini alarak elde edilebilir (Şekil 7.13). $a = e$ olduğunda $\log_e x = e^x$'in tersi $= \ln x$ buluruz. $\log_a x$ ve a^x birbirlerinin tersi oldukları için, ikisinin herhangi bir şekilde bileşkesini almak birim fonksiyonu verir.

a^x ve $\log_a x$ İçin Ters Denklemler

$$a^{\log_a x} = x \qquad (x > 0) \qquad (3)$$

$$\log_a (a^x) = x \qquad (\text{her } x \text{ için}) \qquad (4)$$

ÖRNEK 4 Ters Denklemleri Uygulamak

(a) $\log_2(2^5) = 5$ **(b)** $\log_{10}(10^{-7}) = -7$

(c) $2^{\log_2(3)} = 3$ **(d)** $10^{\log_{10}(4)} = 4$ ■

$\log_a x$'in Hesaplanması

$\log_a x$ değeri $\ln x$ 'in sayısal bir katıdır. Bu gözlem $\log_a x$'in hesaplanmasını basitleştirir.

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad (5)$$

Bu denklemi (3) denkleminden türetebiliriz:

$$a^{\log_a(x)} = x \qquad \text{(3) denklemi}$$
$$\ln a^{\log_a(x)} = \ln x \qquad \text{İki tarafın da doğal logaritmasını alın.}$$
$$\log_a(x) \cdot \ln a = \ln x \qquad \text{Teorem 2'deki Kuvvet Kuralı}$$
$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad \log_a x\text{'i çözün.}$$

Örneğin,

$$\log_{10} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10} \approx \frac{0.69315}{2.30259} \approx 0.30103$$

$\log_a x$'in aritmetik özellikleri $\ln x$'inkilerle aynıdır (Teorem 2). Tablo 7.2 de verilen bu kurallar, doğal logaritma fonksiyonunda karşı gelen kuralların $\ln a$ ile bölünmesiyle ispatlanabilir. Örneğin,

$$\ln xy = \ln x + \ln y \qquad \text{Doğal logaritmalar için Kural 1}$$
$$\frac{\ln xy}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a} \qquad \ldots \ln a \text{ bölünürse } \ldots$$
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y. \qquad \ldots a \text{ tabanlı logaritmalar için Kural 1'i verir.}$$

TABLO 7.2 *a* tabanlı logaritmaların özellikleri

Herhangi $x > 0$ ve $y > 0$ sayıları için

1. *Çarpım Kuralı:*
   $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. *Bölüm Kuralı:*
   $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
3. *Çarpmaya Göre Ters Kuralı:*
   $\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$
4. *Kuvvet Kuralı:*
   $\log_a x^y = y \log_a x$

$\log_a x$ İçeren Türevler ve İntegraller

a tabanlı logaritmaları içeren türevleri ve integralleri hesaplamak için, önce bunları doğal logaritmalara çeviririz.

u, x'in türevlenebilir pozitif bir fonksiyonuysa,

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln u}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

olur.

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

ÖRNEK 5

(a) $$\frac{d}{dx}\log_{10}(3x+1) = \frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{3x+1}\frac{d}{dx}(3x+1) = \frac{3}{(\ln 10)(3x+1)}$$

(b) $$\int \frac{\log_2 x}{x}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{\ln x}{x}\,dx \qquad \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\int u\,du \qquad u = \ln x,\quad du = \frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{\ln 2}\frac{(\ln x)^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2\ln 2} + C$$

■

10 Tabanlı Logaritmalar

Çoğunlukla **yaygın logaritma** olarak adlandırılan 10 tabanlı logaritmalar çoğu bilimsel formülde yer alır. Örneğin, deprem şiddeti genellikle logaritmik **Richter ölçeği** ile bildirilir. Bu formül şu şekilde verilir:

$$\text{Şiddet } R = \log_{10}\left(\frac{a}{T}\right) + B$$

Burada, a alıcı istasyondaki yer hareketinin mikron olarak genliği, T sismik dalganın saniye olarak periyodu ve B de depremin merkezinden uzaklıklaştıkça sismik dalganın zayıflamasını hesaba katan gözlemsel bir faktördür.

ÖRNEK 6 Deprem Şiddeti

Alıcı istasyondan 10.000 km uzaktaki bir deprem için, $B = 6.8$'dir. Bildirilen dikey yer hareketi $a = 10$ mikron ve periyot $T = 1$ s ise, depremin şiddeti

$$R = \log_{10}\left(\frac{10}{1}\right) + 6.8 = 1 + 6.8 = 7.8$$

olarak bulunur. Bu şiddette bir deprem, merkezinin çevresinde çok büyük hasara neden olabilir. ■

Bir çözeltinin asitliliğini ölçen **pH ölçeği** 10 tabanlı logaritmik bir ölçektir. Çözeltinin pH değeri (hidrojen potansiyeli), çözeltinin hidronyum iyonu konsantrasyonu $[H_3O^+]$'nun çarpımsal tersinin yaygın logaritmasıdır:

$$\text{pH} = \log_{10}\frac{1}{[H_3O^+]} = -\log_{10}[H_3O^+]$$

Hidronyum iyonu konsantrasyonu mol bölü litre olarak ölçülür. Sirkenin pH değeri 3, steril suyun pH değeri 7, deniz suyununki 8.15 ve ev amonyağınınki ise 12 civarındadır. Bütün ölçek, normal hidroklorik asit için 0.1'den normal bir sodyum hidroksit çözeltisi için 14'e kadar gider.

Çoğu Yiyecek asitlidir ($\text{pH} < 7$) .

Yiyecek	**pH Değeri**
Muz	4.5–4.7
Greyfurt	3.0–3.3
Portakal	3.0–4.0
Limon	1.8–2.0
Süt	6.3–6.6
Hafif içeçekler	2.0–4.0
Ispanak	5.1–5.7

Yaygın logaritmaların başka bir örneği gürültüyü ölçen **desibel** veya dB **ölçeğidir**. I sesin metre kare başına watt olarak **şiddetiyse**, sesin seviyesi

$$\textbf{Ses seviyesi} = 10\log_{10}(1\times 10^{12})\text{ db} \qquad (6)$$

dir.

Tipik Ses Seviyeleri

Duyma Eşiği	0 db
Yaprak hışırtısı	10 db
Ortalama fısıltı	20 db
Sessiz otomobil	50 db
Normal konuşma	65 db
10 fit uzaktaki pnömatik kazıcı	90 db
Acı sınırı	120 db

Eğer müzik setinizin gücünü iki kat arttırdığınızda ses seviyesinin neden sadece birkaç desibel arttığını merak ediyorsanız, (6) denklemi bu sorunun yanıtını verir. Aşağıdaki örneğin gösterdiği gibi, I'yı iki katına çıkarmak sadece 3 dB kadar artış sağlar.

ÖRNEK 7 Ses Şiddeti

(6) denklemindeki I'yı iki katına çıkarmak 3 dB kadar bir artış sağlar. $\log_{10}$ yerine log yazarak (her zaman yapılır) aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$
\begin{aligned}
I \text{ iki katına çıkınca ses seviyesi} &= 10 \log (2I \times 10^{12}) && I \text{ yerine } 1I \text{ ile (6) denk.}\\
&= 10 \log (2 \cdot I \times 10^{12})\\
&= 10 \log 2 + 10 \log (I \times 10^{12})\\
&= \text{esas ses seviyesi} + 10 \log 2\\
&\approx \text{esas ses seviyesi} + 3 && \log_{10} 2 \approx 0.30
\end{aligned}
$$

ALIŞTIRMALAR 7.4

a^x ve $\log_a x$ İle Cebirsel Hesaplamalar

1–4 alıştırmalarındaki ifadeleri sadeleştirin.

1. a. $5^{\log_5 7}$ b. $8^{\log_8 \sqrt{2}}$ c. $1.3^{\log_{1.3} 75}$
   d. $\log_4 16$ e. $\log_3 \sqrt{3}$ f. $\log_4 \left(\frac{1}{4}\right)$
2. a. $2^{\log_2 3}$ b. $10^{\log_{10}(1/2)}$ c. $\pi^{\log_\pi 7}$
   d. $\log_{11} 121$ e. $\log_{121} 11$ f. $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right)$
3. a. $2^{\log_4 x}$ b. $9^{\log_3 x}$ c. $\log_2 (e^{(\ln 2)(\sin x)})$
4. a. $25^{\log_5 (3x^2)}$ b. $\log_e (e^x)$ c. $\log_4 (2^{e^x \sin x})$

5 ve 6 alıştırmalarındaki oranları doğal logaritmaların oranlarına çevirin ve sadeleştirin.

5. a. $\dfrac{\log_2 x}{\log_3 x}$ b. $\dfrac{\log_2 x}{\log_8 x}$ c. $\dfrac{\log_x a}{\log_{x^2} a}$
6. a. $\dfrac{\log_9 x}{\log_3 x}$ b. $\dfrac{\log_{\sqrt{10}} x}{\log_{\sqrt{2}} x}$ c. $\dfrac{\log_a b}{\log_b a}$

7–10 alıştırmalarındaki denklemlerden x'i çözün.

7. $3^{\log_3 (7)} + 2^{\log_2 (5)} = 5^{\log_5 (x)}$
8. $8^{\log_8 (3)} - e^{\ln 5} = x^2 - 7^{\log_7 (3x)}$
9. $3^{\log_3 (x^2)} = 5e^{\ln x} - 3 \cdot 10^{\log_{10} (2)}$
10. $\ln e + 4^{-2 \log_4 (x)} = \frac{1}{x} \log_{10} (100)$

Türevler

11–38 alıştırmalarında, verilen bağımsız değişkene göre y'nin türevini bulun.

11. $y = 2^x$
12. $y = 3^{-x}$
13. $y = 5^{\sqrt{s}}$
14. $y = 2^{(s^2)}$
15. $y = x^\pi$
16. $y = t^{1-e}$
17. $y = (\cos \theta)^{\sqrt{2}}$
18. $y = (\ln \theta)^\pi$
19. $y = 7^{\sec \theta} \ln 7$
20. $y = 3^{\tan \theta} \ln 3$
21. $y = 2^{\sin 3t}$
22. $y = 5^{-\cos 2t}$
23. $y = \log_2 5\theta$
24. $y = \log_3 (1 + \theta \ln 3)$
25. $y = \log_4 x + \log_4 x^2$
26. $y = \log_{25} e^x - \log_5 \sqrt{x}$
27. $y = \log_2 r \cdot \log_4 r$
28. $y = \log_3 r \cdot \log_9 r$
29. $y = \log_3 \left(\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\ln 3}\right)$
30. $y = \log_5 \sqrt{\left(\dfrac{7x}{3x+2}\right)^{\ln 5}}$
31. $y = \theta \sin (\log_7 \theta)$
32. $y = \log_7 \left(\dfrac{\sin \theta \cos \theta}{e^\theta 2^\theta}\right)$
33. $y = \log_5 e^x$
34. $y = \log_2 \left(\dfrac{x^2 e^2}{2\sqrt{x+1}}\right)$
35. $y = 3^{\log_2 t}$
36. $y = 3 \log_8 (\log_2 t)$
37. $y = \log_2 (8t^{\ln 2})$
38. $y = t \log_3 \left(e^{(\sin t)(\ln 3)}\right)$

Logaritmik Türev Alma

39–46 alıştırmalarında, y'nin verilen bağımsız değişkene göre türevini bulmak için logaritmik türev alın.

39. $y = (x + 1)^x$
40. $y = x^{(x+1)}$
41. $y = (\sqrt{t})^t$
42. $y = t^{\sqrt{t}}$
43. $y = (\sin x)^x$
44. $y = x^{\sin x}$
45. $y = x^{\ln x}$
46. $y = (\ln x)^{\ln x}$

İntegrasyon

47–56 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

47. $\displaystyle\int 5^x \, dx$
48. $\displaystyle\int (1.3)^x \, dx$

49. $\int_0^1 2^{-\theta}\, d\theta$

50. $\int_{-2}^0 5^{-\theta}\, d\theta$

51. $\int_1^{\sqrt{2}} x2^{(x^2)}\, dx$

52. $\int_1^4 \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

53. $\int_0^{\pi/2} 7^{\cos t} \sin t\, dt$

54. $\int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{3}\right)^{\tan t} \sec^2 t\, dt$

55. $\int_2^4 x^{2x}(1 + \ln x)\, dx$

56. $\int_1^2 \frac{2^{\ln x}}{x}\, dx$

57–60 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

57. $\int 3x^{\sqrt{3}}\, dx$

58. $\int x^{\sqrt{2}-1}\, dx$

59. $\int_0^3 (\sqrt{2} + 1)x^{\sqrt{2}}\, dx$

60. $\int_1^e x^{(\ln 2)-1}\, dx$

61–70 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

61. $\int \frac{\log_{10} x}{x}\, dx$

62. $\int_1^4 \frac{\log_2 x}{x}\, dx$

63. $\int_1^4 \frac{\ln 2 \log_2 x}{x}\, dx$

64. $\int_1^e \frac{2 \ln 10 \log_{10} x}{x}\, dx$

65. $\int_0^2 \frac{\log_2 (x + 2)}{x + 2}\, dx$

66. $\int_{1/10}^{10} \frac{\log_{10} (10x)}{x}\, dx$

67. $\int_0^9 \frac{2 \log_{10} (x + 1)}{x + 1}\, dx$

68. $\int_2^3 \frac{2 \log_2 (x - 1)}{x - 1}\, dx$

69. $\int \frac{dx}{x \log_{10} x}$

70. $\int \frac{dx}{x(\log_8 x)^2}$

71–74 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

71. $\int_1^{\ln x} \frac{1}{t}\, dt, \quad x > 1$

72. $\int_1^{e^x} \frac{1}{t}\, dt$

73. $\int_1^{1/x} \frac{1}{t}\, dt, \quad x > 0$

74. $\frac{1}{\ln a}\int_1^x \frac{1}{t}\, dt, \quad x > 0$

Teori ve Uygulamalar

75. $y = 2x/(1 + x^2)$ eğrisi ile x-ekseninin $-2 \le x \le 2$ aralığı arasında kalan bölgenin alanını bulun.

76. $y = 2^{1-x}$ eğrisi ile x-ekseninin $-1 \le x \le 1$ aralığı arasında kalan bölgenin alanını bulun.

77. Kan pH'si İnsan kanının pH'si normalde 7.37 ile 7.44 arasına düşer. Karşılık gelen $[H_3O^+]$ sınırlarını bulun.

78. Beyin sıvısı pH'si Beyindeki omurilik sıvısının hidroksiyum iyonu konsantrasyonu $[H_3O^+] = 4.8 \times 10^{-8}$ mol bölü litre civarındadır. pH nedir?

79. Ses amplifikatörleri Ses seviyesine 10 desibel eklemek için ses amplifikatörünüzdeki sesin şiddeti I'yı hangi k faktörüyle çarpmalısınız?

80. Ses amplifikatörleri Müzik setinizin sesinin şiddetini 10 kat arttırdınız. Bu, ses seviyesini kaç desibel arttırır?

81. Herhangi bir solüsyonda, hidronyum iyonu konsantrasyonu $[H_3O^+]$ (mol/L) ile hidroksit iyonu konsantrasyonunun $[OH^-]$ (mol/L) çarpımı 10^{-14} civarındadır.

a. $[H_3O^+]$'nin hangi değeri $S = [H_3O^+] + [OH^-]$ konsantrasyonlar toplamını minimize eder? (*İpucu*: Gösterimi değiştirin. $x = [H_3O^+]$ olsun.)

b. S'nin bu minimum değere sahip olduğu çözeltinin pH'si nedir?

c. $[H_3O^+]$'nin $[OH^-]$'ye hangi oranı S'yi minimize eder?

82. $\log_a b$, $1/\log_b a$'ya eşit olabilir mi?

T **83.** $x^2 = 2^x$'in üç çözümü vardır: $x = 2$, $x = 4$ ve bir başkası. Üçüncü çözümü grafik çizerek en hassas şekilde bulun.

T **84.** $x^{\ln 2}$, $x > 0$ için $2^{\ln x}$'e eşit olabilir mi? İki fonksiyonun grafiğini çizin ve gördüklerinizi açıklayın.

85. 2^x'in Lineerizasyonu

a. $f(x) = 2^x$ 'in $x = 0$'daki lineerizasyonunu bulun. Katsayılarını iki ondalık basamağa yuvarlayın.

T **b.** Lineerizasyonun ve fonksiyonun grafiklerini $-3 \le x \le 3$ ve $-1 \le x \le 1$ için birlikte çizin.

86. $\log_3 x$'in Lineerizasyonu

a. $f(x) = \log_3 x$'in $x = 3$'teki lineerizasyonunu bulun. Katsayılarını iki ondalık basamağa yuvarlayın.

T **b.** Lineerizasyonun ve fonksiyonun grafiklerini $0 \le x \le 8$ ve $2 \le x \le 4$ pencerelerinde birlikte çizin.

Başka Tabanlarla Hesaplamalar

T **87.** Çoğu bilimsel hesap makinesinin $\log_{10} x$ ve $\ln x$ için tuşları vardır. Başka tabanlardaki logaritmaları bulmak için (5) denklemini kullanırız, $\log_a x = (\ln x)/(\ln a)$.
Aşağıdaki logaritmaları 5 ondalık basamağa kadar bulun

a. $\log_3 8$

b. $\log_7 0.5$

c. $\log_{20} 17$

d. $\log_{0.5} 7$

e. $\log_{10} x = 2.3$ ise $\ln x$

f. $\log_2 x = 1.4$ ise $\ln x$

g. $\log_2 x = -1.5$ ise $\ln x$

h. $\log_{10} x = -0.7$ ise $\ln x$

88. Dönüşüm faktörleri.

a. 10 tabanlı logaritmaları 2 tabanlı logaritmalara dönüştürme denkleminin

$$\log_2 x = \frac{\ln 10}{\ln 2} \log_{10} x$$

olduğunu gösterin.

b. a tabanlı logaritmaları b tabanlı logaritmalara dönüştürme denkleminin

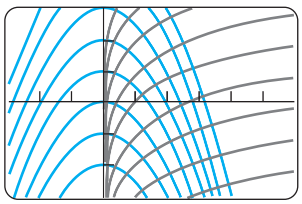
$$\log_b x = \frac{\ln a}{\ln b} \log_a x$$

olduğunu gösterin.

89. Ortogonal Eğri Aileleri

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + k$$

(k herhangi bir sabit) ailesindeki bütün eğrilerin, $y = \ln x + c$ (c herhangi bir sabit) ailesindeki bütün eğrilere dik olduğunu gösteriniz. (Şekle bakınız.)



T **90. e^x ile $\ln x$ arasındaki ters ilişki** Hesap makinenizin

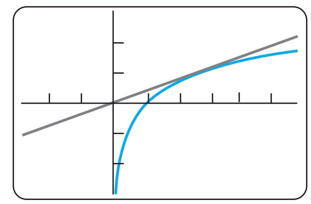
$$e^{\ln x} \quad \text{ve} \quad \ln(e^x)$$

bileşkelerini hesaplamada ne kadar iyi olduğunu test edin.

T **91. e'nin ondalık gösterimi** $\ln x = 1$ denklemini çözerek, hesap makinenizin yapabildiği basamağa kadar e'yi bulun.

T **92. Hangisi daha büyüktür, π^e veya e^π ?** Hesap makineleri, bir zamanların ilgi çekici sorusunun sırrının bir kısmını ortaya çıkardı (doğrudan kontrol edin; sürpriz bir şekilde şaşıracaksınız). Buna rağmen soruyu hesap makinesiz cevaplayabilirsiniz.

a. $y = \ln x$'in grafiğinin orijinden geçen teğeti için bir denklem bulun.



$[-3, 6]$ ile $[-3, 3]$

b. Neden her pozitif $x \neq e$ için $\ln x < x/e$ olduğunu açıklamak için $y = \ln x$'in ve teğetinin grafiklerine dayanan bir iddia ortaya koyun.

c. Her pozitif $x \neq e$ için $\ln(x^e) < x$ olduğunu gösterin.

d. Her pozitif $x \neq e$ için $x^e < e^x$ sonucunu çıkarın.

e. Böylece hangisi daha büyüktür, π^e veya e^π?

7.5 Üstel Büyüme ve Bozunma

Eksponansiyel fonksiyonlar, serbest değişkenin değişimi ile çok hızlı artarlar veya azalırlar. Doğal ve endüstriyel bir çok durumda büyüme veya bozunmayı tanımlarlar. Bu fonksiyonlara dayandırılmış modellerin çeşitliliği, onların önemini kısmen gösterir.

Eksponansiyel Değişim Kuralı

Bir çok gerçek-dünya durumunu modellemede, bir y niceliği verilen bir t zamanındaki niceliği ile orantılı bir hızla artar veya azalır. Böyle niceliklere örnekler, bozunmakta olan radyoaktif bir maddenin miktarını, bir banka hesabındaki faiz birikimini, bir nüfus büyüklüğü ve bir fincan kahve ile içinde bulunduğu odanın sıcaklıkları farkını içerir. Böyle nicelikler, bu bölümde ele alacağımız *eksponansiyel değişim kuralı*'na göre değişirler.

$t = 0$ anında var olan miktara y_0 denirse, aşağıdaki başlangıç değer problemini çözerek y'yi t'nin bir fonksiyonu olarak bulabiliriz:

$$\text{Diferansiyel denklem :} \quad \frac{dy}{dt} = ky$$

$$\text{Başlangıç koşulu:} \quad t = 0 \quad \text{iken} \quad y = y_0 \qquad (1)$$

y pozitif ve artan ise k de pozitiftir ve büyüme hızının şimdiye kadar gerçekleşmiş olanla orantılı olduğunu söylemek için (1) denklemini kullanırız. y pozitif ve azalan ise k negatiftir ve bozunma hızının kalan miktarla orantılı olduğunu söylemek için (1) denklemini kullanırız.

Sabit $y = 0$ fonksiyonunun (1) denkleminin bir çözümü olduğunu hemen görebiliriz. Sıfırdan farklı çözümleri bulmak için, (1) denklemini y ile böleriz:

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dt} = k$$

$$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\,dt = \int k\,dt \qquad t\text{'ye göre integre edin:}$$

$$\ln|y| = kt + C \qquad \int (1/u)\,du = \ln|u| + C.$$

$$|y| = e^{kt+C} \qquad \text{Eksponansiyelini alın.}$$

$$|y| = e^{C}\cdot e^{kt} \qquad e^{a+b} = e^{a}\cdot e^{b}$$

$$y = \pm e^{C}e^{kt} \qquad |y| = r, \text{ ise } y = \pm r.$$

$$y = Ae^{kt} \qquad A,\ \pm e^{C}\text{'nin kısa adıdır.}$$

A'nın, $\pm e^{C}$'nin bütün olası değerlerinin yanı sıra 0 değerini almasına da izin verirsek, $y = 0$ çözümünü de formüle katmış oluruz.

Başlangıç değer problemindeki gerçek A değerini $y = y_0$ ve $t = 0$ iken A' yı çözerek buluruz:

$$y_0 = Ae^{k\cdot 0} = A$$

Dolayısıyla başlangıç değer probleminin çözümü $y = y_0e^{kt}$ 'dir.

Bu şekilde değişen niceliklere $k > 0$ ise **eksponansiyel büyümeye,** $k < 0$ ise **eksponansiyel bozunmaya** maruzdur denir.

Eksponansiyel Değişim Kuralı

$$y = y_0e^{kt} \tag{2}$$

Büyüme: $k > 0$ Bozunma: $k < 0$

k sayısına denklemin **oran sabiti** denir.

(2) denkleminin çıkartılışı kendi türevleri olan fonksiyonların sadece eksponansiyel fonksiyonun sabit katları olduğunu gösterir.

Sınırsız Nüfus Artışı

Doğruyu söylemek gerekirse, bir topluluktaki (örneğin insan, bitki, tilki, bakteri) bireylerin sayısı zamanın süreksiz bir fonksiyonudur, çünkü kesikli değerler alır. Ancak, bireylerin sayısı yeterince büyük olduğunda, nüfusa sürekli bir fonksiyonla yaklaşımda bulunulabilir. Bir çok durumda yaklaşım fonksiyonunun türevlenebilirliği, nüfus büyüklüğünü modellemek ve tahmin etmek için analiz kullanımına izin veren bir başka anlamlı hipotezdir.

Üreyen bireylerin oranının sabit olduğunu ve sabit bir verimlilik bulunduğunu varsayarsak, herhangi bir t anındaki doğum oranı varolan bireylerin sayısı $y(t)$ ile orantılıdır. Ayrıca, ölüm oranının kararlı ve hali hazırdaki nüfus sayısı $y(t)$ ile orantılı olduğunu da varsayın. Dahası, gelenleri ve gidenleri ihmal edersek, büyüme hızı, dy/dt, varsayımlarımız altında iki orantının farkı olan, doğum oranı eksi ölüm oranı olacaktır.

Başka bir deyişle, $dy/dt = ky$, yani $y = y_0e^{kt}$ olur. Burada y_0 nüfusun $t = 0$ anındaki büyüklüğüdür. Bütün büyüme şekillerinde olduğu gibi, çevreden gelen kısıtlayıcı koşullar olabilir, fakat burada bunlarla ilgilenmeyeceğiz (Bu durum Bölüm 9.5'te incelenmektedir).

Aşağıdaki örnekte, verilen bir topluluk içinde bir hastalık bulaşmış bireylerin sayısının, hastalık uygun bir şekilde tedavi edildiğinde, nasıl azaldığına bakmak için bu nüfus modelini kabul ediyoruz.

ÖRNEK 1 Bulaşıcı Bir Hastalık Vakalarını Azaltmak

Uygun şekilde tedavi edildiğinde hastalıkların ortadan kalkmasına dair bir model, hastalık bulaşmış kişilerin sayısının değişim hızı olan dy/dt'nin y sayısıyla orantılı olduğunu varsayar. Tedavi edilmiş insanların sayısı, hastalığı taşıyan insanların sayısı ile orantılıdır. Herhangi bir yılda hastalık vakalarının sayısının %20 azaldığını varsayın. Bugün 10.000 vaka varsa, sayının 1000'e düşmesi için kaç yıl gerekir?

Çözüm $y = y_0e^{kt}$ denklemini kullanırız. Bulmamız gereken üç şey vardır: y_0'ın değeri, k'nin değeri ve $y = 1000$ olmasını sağlayacak t değeri.

y_0'ın değeri. Zamanı istediğimiz yerden başlatmakta serbestiz. Eğer bugünden başlarsak, $t = 0$ iken $y = 10.000$, dolayısıyla $y_0 = 10.000$'dir. Denklemimiz

$$y = 10,000\, e^{kt} \tag{3}$$

halini alır.

k'nin değeri. $t = 1$ yıl iken, vakaların sayısı şimdiki sayının %80'i, veya 8000 olacaktır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} 8000 &= 10,000\, e^{k(1)} && t = 1 \text{ ve } y = 8000 \text{ ile (3) denklemi} \\ e^k &= 0.8 \\ \ln(e^k) &= \ln 0.8 && \text{İki tarafın logaritması} \\ k &= \ln 0.8 < 0 \end{aligned}$$

bulunur. Herhangi bir t anında denklem

$$y = 10,000\, e^{(\ln 0.8)t} \tag{4}$$

olur.

$y = 1000$ olmasını sağlayan t değeri (4) denkleminde y yerine 1000 koyar ve t'yi çözeriz:

$$\begin{aligned} 1000 &= 10,000 e^{(\ln 0.8)t} \\ e^{(\ln 0.8)t} &= 0.1 \\ (\ln 0.8)t &= \ln 0.1 && \text{İki tarafın logaritması} \\ t &= \frac{\ln 0.1}{\ln 0.8} \approx 10.32 \text{ yıl.} \end{aligned}$$

Vakaların sayısını 1000'e indirmek için 10 yıldan biraz daha fazlası gerekmektedir. ■

Sürekli Bileşik Faizler

Sabit bir r (ondalık sayı olarak ifade edilir) yıllık faiz oranıyla A_0 miktarında bir para yatırırsanız ve faiz, yılda k kere hesabınıza eklenirse, t yıl sonra hesabınızdaki para

$$A_t = A_0\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} \tag{5}$$

olur.

Faiz, aylık ($k = 12$), haftalık ($k = 52$), günlük ($k = 365$) veya daha hızlı, mesela satte veya dakikada bir hesabınıza eklenebilir (bankacılar buna "bileşik faiz" derler). Ancak bu şekilde ne kadar kazanabileceğinizin de bir sınırı vardır ve bu sınır

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} A_t &= \lim_{k\to\infty} A_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} \\
&= A_0 \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{\frac{k}{r}\cdot rt} \\
&= A_0\left[\lim_{\frac{r}{k}\to 0}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{\frac{k}{r}}\right]^{rt} && k\to\infty \text{ iken } \frac{r}{k}\to 0 \\
&= A_0\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right]^{rt} && x=\frac{r}{k} \text{ yazın} \\
&= A_0 e^{rt} && \text{Teorem 4}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. t yıl sonra hesabınızdaki paranın formülü bu durumda

$$A(t) = A_0\, e^{rt} \tag{6}$$

olur. Bu formüle göre ödenen faize **sürekli bileşke** adı verilir. r sabitine ise **sürekli faiz oranı** denir. Paranın t yıl sonraki miktarı, (6) Denkleminde verilen eksponansiyel değişim kuralı ile hesaplanır.

ÖRNEK 2 Bir Tasarruf Hesabı

%6 sürekli bileşik faiz veren bir bankaya 621$ yatırdığınızı varsayın. 8 yıl sonra ne kadar paranız olacaktır?

Çözüm $A_0 = 621$, $r = 0.06$ ve $t = 8$ ile (6) denklemini kullanırız:

$$A(8) = 621e^{(0.06)(8)} = 621e^{0.48} = 1003.58 \qquad \text{Sent hassaslığında}$$

Banka faizi üç ayda bir ödeseydi ((5) denkleminde $k = 4$), hesabınızda 1000.01$ olurdu. Dolayısıyla sürekli bileşke faizin etkisi üç aylık bileşke faizden 3.57 $'lık bir artış olmuştur. Bir banka bu ek miktarın reklam edilmeye değer olduğunu düşünebilir: "Her saniye, gece gündüz bileşik faiz veriyoruz—daha da iyisi sürekli bileşik faiz uyguluyoruz." ■

Radyoaktivite

Bazı atomlar kararsızdırlar ve sürekli olarak kütle veya radyasyon yayabilirler.
Bu işleme **radyoaktif bozunma** denir ve atomları sürekli olarak bu işlemden geçen bir elemente **radyoaktif** adı verilir. Bazen bir atom, kütlesinin bir kısmını radyasyon olarak dışarı verdiğinde, atomun geri kalanı yeniden yapılanarak yeni bir elementin atomunu oluşturur. Örneğin, radyoaktif karbon-14 azota bozunur; radyum, radyoaktif ara adımlardan sonra kurşuna bozunur.

Deneyler verilen herhangi bir zamanda bir radyoaktif elementin bozunma hızının (birim zamanda değişen çekirdek sayısı olarak ölçülür) var olan radyoaktif çekirdek sayısıyla orantılı olduğunu göstermiştir. Yani, bir radyoaktif elementin bozunumu $dy/dt = -ky,\ k > 0$ ile tanımlanır. y'nin azaldığını belirtmek için burada $k(k < 0)$ yerine

Radon-222 gazı için, t gün olarak ölçülür ve $k = 0.18$ olarak verilir. Eskiden geceleri parlamaları için saat kadranları üzerine sürülen (tehlikeli bir uğraş) radyum-226 için, t yıl olarak ölçülür ve $k = 4.3 \times 10^{-4}$'tür.

$-k$ ($k > 0$) kullanmak gelenek olmuştur. y_0, sıfır anında bulunan parçacıkların sayısı ise, daha sonraki bir t anında kalan paracık sayısı şu şekildedir:

$$y = y_0 e^{-kt}, \qquad k > 0$$

ÖRNEK 3 Radyoaktif Bir Elementin Yarı-Ömrü

Radyoaktif bir elementin **yarı-ömrü** bir örnekte bulunan radyoaktif çekirdeklerin yarısının bozunması için gereken zamandır. Yarı ömrün başlangıçta örnekte bulunan radyoaktif çekirdek sayısına değil de sadece radyoaktif maddeye bağlı olması önemli bir özelliktir.

Bunun nedenini anlamak için, y_0 başlangıçta örnekte bulunan radyoaktif çekirdek sayısı olsun. Böylece t anında kalan çekirdek sayısı $y = y_0 e^{-kt}$ olur. Çekirdek sayısının, başlangıçtaki çekirdek sayısının yarısına eşit olduğu bir t değeri arıyoruz:

$$\begin{aligned} y_0 e^{-kt} &= \frac{1}{2} y_0 \\ e^{-kt} &= \frac{1}{2} \\ -kt &= \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 && \text{Logaritmalar için Çarpmaya Göre Ters Kural 1} \\ t &= \frac{\ln 2}{k} \end{aligned}$$

Bu t değeri elementin yarı ömrüdür. Sadece k'nin değerine bağlıdır, y_0 sayısı işin içine girmez.

$$\text{Yarı-ömür} = \frac{\ln 2}{k} \tag{7}$$

■

ÖRNEK 4 Polonyum-210'un Yarı-Ömrü

Polonyum-210'un etkin ömrü o kadar kısadır ki yıldan ziyade günle ölçeriz. Başlangıçta içinde y_0 radyoaktif atom bulunan bir örnekte t gün sonra kalan atom sayısı

$$y = y_0 e^{-5\times10^{-3}\, t}$$

olarak verilir. Elementin yarı ömrünü bulun.

Çözüm

$$\begin{aligned} \text{Yarı-ömür} &= \frac{\ln 2}{k} && \text{(7) denklemi} \\ &= \frac{\ln 2}{5 \times 10^{-3}} && \text{Polonyumun bozunma denklemindeki } k \text{ değeri} \\ &\approx 139 \text{ gün} \end{aligned}$$

■

ÖRNEK 5 Karbon-14 Tarihlendirmesi

Radyoaktif elementlerin bozunması bazen Dünyanın geçmişindeki olayları tarihlendirmede kullanılabilir. Yaşayan bir organizmada, radyoaktif karbonun, karbon-14, normal karbona oranı, organizmayı çevreleyen orana neredeyse eşit olduğu için, organizmanın ömrü boyunca değişmez. Ancak, organizmanın ölümünden sonra, yeni karbon

alınmaz ve organizmanın kalıntılarında kalan karbon-14 miktarı, karbon-14 bozunduğu için azalır.

Karbon-14'le tarih ölçümü yapan kişiler yarı ömrü için 5700 yıl gibi bir sayı kullanırlar (alıştırmalarda karbon-14'le ilgili daha fazla bilgi vardır). Başlangıçtaki çekirdek sayısının %10'unun bozunmuş olduğu bir örneğin yaşını bulun.

Çözüm $y = y_0 e^{-kt}$, bozunma denklemini kullanırız. Bulunacak iki şey vardır: k'nin değeri ve y değeri $0.9y_0$'a eşit iken t değeri (Radyoaktif çekirdeklerin %90'ı hala var.) Yani, $y_0 e^{-kt} = 0.9y_0$ veya $e^{-kt} = 0.9$ iken t'yi bulun

k'nin değeri. Yarı ömür denklemi (7)'yi kullanırız:

$$k = \frac{\ln 2}{\text{yarı-ömür}} = \frac{\ln 2}{5700} \qquad (\text{yaklaşık } 1.2 \times 10^{-4})$$

$e^{-kt} = 0.9$ *yapan t değeri:*

$$\begin{aligned} e^{-kt} &= 0.9 \\ e^{-(\ln 2/5700)t} &= 0.9 \\ -\frac{\ln 2}{5700}t &= \ln 0.9 && \text{İki tarafın da logaritması} \\ t &= -\frac{5700 \ln 0.9}{\ln 2} \approx 866 \text{ yıl} \end{aligned}$$

Örnek yaklaşık 866 yaşındadır. ■

Isı İletimi: Newton'un Soğutma Yasası

Teneke bir kapta bırakılan sıcak çorba, etrafını çevreleyen havanın sıcaklığına kadar soğur. Suya batırılmış sıcak bir gümüş pota etrafını çevreleyen suyun sıcaklığına kadar soğur. Bu gibi durumlarda, bir cismin herhangi bir zamanda sıcaklığının değiştiği oran kabaca kendisinin sıcaklığı ile çevresindeki ortamın sıcaklığı arasındaki farkla orantılıdır. Bu olaya *Newton'un soğuma kanunu* denir, fakat aynı zamanda ısınmaya da uygulanabilir ve bir denklemi vardır.

H, cismin t anındaki sıcaklığı ve H_S de çevrenin sıcaklığı ise,

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - H_S) \tag{8}$$

olur. $(H - H_S)$ yerine y yazarsak,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}(H - H_S) = \frac{dH}{dt} - \frac{d}{dt}(H_S) \\ &= \frac{dH}{dt} - 0 && H_S \text{ bir sabittir} \\ &= \frac{dH}{dt} \\ &= -k(H - H_S) && \text{(8) denklemi} \\ &= -ky && H - H_S = y \end{aligned}$$

buluruz.

Artık, $dy/dt = -ky$'nin çözümünün, $y(0) = y_0$ olmak üzere $y = y_0 e^{-kt}$ olduğunu biliyoruz. y yerine $(H - H_S)$ yazarak, $t = 0$'daki sıcaklık H_0 olmak üzere

$$H - H_S = (H_0 - H_S)e^{-kt} \tag{9}$$

elde edilir. Bu, Newton'un Soğuma Yasası denklemidir.

ÖRNEK 6 Katı Olarak Pişirilmiş Bir Yumurtayı Soğutmak

98°C'de katı olarak pişirilmiş bir yumurta, içinde 18°C'de su bulunan bir kaba konuyor. 5 dakika sonra yumurtanın sıcaklığı 38°C oluyor. Suyun farkedilir şekilde ısınmadığını varsayarak, yumurtanın sıcaklığının 20°C'ye inmesi için ne kadar zaman geçmesi gerektiğini bulun.

Çözüm Yumurtanın 98°C'den 20°C'ye inmesi için ne kadar zaman geçmesi gerektiğini bulur ve bundan zaten geçmiş olan 5 dakikayı çıkarırız. (9) denklemini $H_S = 18$ ve $H_0 = 98$ ile (9) denklemini kullanarak, yumurtanın kaba konduktan t dakika sonraki sıcaklığı

$$H = 18 + (98 - 18)e^{-kt} = 18 + 80e^{-kt}$$

olarak bulunur. k'yi bulmak için, $t = 5$ iken $H = 38$ olduğu bilgisini kullanırız:

$$\begin{aligned}
38 &= 18 + 80e^{-5k} \\
e^{-5k} &= \frac{1}{4} \\
-5k &= \ln\frac{1}{4} = -\ln 4 \\
k &= \frac{1}{5}\ln 4 = 0.2 \ln 4 \qquad \text{(yaklaşık 0.28)}
\end{aligned}$$

Yumurtanın t anındaki sıcaklığı $H = 18 + 80e^{-(0.2 \ln 4)t}$ dir. Artık $H = 20$ olduğu t zamanını bulalım:

$$\begin{aligned}
20 &= 18 + 80e^{-(0.2 \ln 4)t} \\
80e^{-(0.2 \ln 4)t} &= 2 \\
e^{-(0.2 \ln 4)t} &= \frac{1}{40} \\
-(0.2 \ln 4)t &= \ln\frac{1}{40} = -\ln 40 \\
t &= \frac{\ln 40}{0.2 \ln 4} \approx 13 \text{ dakika}
\end{aligned}$$

Yumurtanın sıcaklığı soğuması için suya konulduktan 13 dakika kadar sonra 20°C olacaktır. 38°C'ye ulaşması 5 dakika sürdüğü için, 20°C'ye gelmesi için 8 dakika kadar daha gerekmektedir. ■

ALIŞTIRMALAR 7.5

Aşağıdaki alıştırmaların yanıtlarının çoğu logaritma ve eksponansiyel içermektedir. Yanıtları ondalık sayı olarak ifade etmenizde bir hesap makinesi yardımcı olabilir.

1. **İnsan evrimi sürüyor** Michigan Üniversitesinin Antropoloji Müzesinde C. Loring Brace ve meslektaşları tarafından sürdürülen dişlerin küçülmesi araştırması insan dişlerinin büyüklüğünün azalmaya devam ettiğini ve çoğu bilim adamının belirttiği gibi evrimin 30.000 yıl önce sona ermediğini belitmektedir. Örneğin, Kuzey Avrupalılarda, diş büyüklüğünün azalması şu anda 1000 yılda %1 hızındadır.

a. t yıl olarak zamanı ve y de diş büyüklüğünü temsil ediyorsa, $t = 1000$ iken $y = 0.99\ y_0$ koşulunu kullanarak $y = y_0 e^{kt}$ denklemindeki k'yi bulun. Sonra bu değeri kullanarak aşağıdaki soruları yanıtlayın.

b. Kaç yıl sonra insan dişleri şu andaki büyüklüklerinin %90'ı büyüklüğünde olacaktır?

c. Bugünden itibaren 20.000 yıl sonra ileriki nesillerin diş büyüklüğü (bugünkü diş büyüklüğünün bir yüzdesi olarak) ne olacaktır?

(*Kaynak: LSA Magazine*, Spring 1989, Vol.12, No. 2, sayfa 19, Ann Arbor, MI.)

2. Atmosfer basıncı Dünyanın atmosfer basıncı p genellikle p'nin deniz seviyesinden h yüksekliğiyle değişme oranı dp/dh'nin p'ye orantılı olduğu varsayılarak hesaplanır. Deniz seviyesinde basıncın 1013 milibar (yaklaşık 14.7 pound bölü inç kare) ve 20 km yükseklikte basıncın 90 milibar olduğunu varsayın.

a. Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözerek p'yi h cinsinden ifade edin.

Diferansiyel denklem: $dp/dh = kp$ (k bir sabit)

Başlangıç koşulu: $h = 0$ iken $p = p_0$

Yükseklik-basınç verilerinden p_0'ın değerini bulun.

b. $h = 50$ km'de atmosfer basıncı nedir?

c. Basınç 900 milibar olduğunda yükseklik nedir?

3. Birinci dereceden kimyasal tepkimeler Bazı kimyasal tepkimelerde, bir maddenin miktarının zamanla değişme oranı o anda bulunan miktarla orantılıdır. Örneğin, δ-glükono laktonun glükonik aside dönüşme oranı, t saat olarak,

$$\frac{dy}{dt} = -0.6y$$

olarak verilir. $t = 0$ iken 100 gran δ-glükono laktın varsa, ilk saatin sonunda ne kadar kalacaktır?

4. Şekerin dönüşümü Ham şekerin işlenmesinde "dönüşüm" adı verilen ve şekerin moleküler yapısını değiştiren bir adım bulunur. İşlem başladıktan sonra, ham şeker miktarının değişim oranı kalan ham şekerle orantılıdır. İlk 10 saat boyunca, 1000 kg ham şeker 800 kg kalıyorsa, bir 14 saat daha sonra ne kadar ham şeker kalacaktır?

5. Su altında çalışmak Işığın okyanus yüzeyinin x fit altındaki şiddeti $L(x)$

$$\frac{dL}{dx} = -kL$$

diferansiyel denklemini sağlar. Bir dalgıç olarak, deneyimlerinizden, Karayip Denizi'nde 18 fit dalmanın şiddeti yarıya indireceğini biliyorsunuz. Şiddet yüzey değerinin onda birinin altına düştüğünde, yapay ışık olmadan çalışamayacağınızı biliyorsunuz. Yapay ışıksız ne kadar derinlikte çalışmayı beklersiniz?

6. Boşalan bir kondansatördeki gerilim Bir kondansatördeki elektriğin uçları arasındaki V gerilimine orantılı bir hızla boşaldığını ve t saniye olarak ölçülürse,

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{40}V$$

olduğunu varsayın. Bu denklemden, $t = 0$ iken V'nin değeri olarak V_0 kullanarak, V'yi çözün. Gerilimin başlangıç değerinin %10'una düşmesi için ne kadar zaman gerekir?

7. Kolera bakterileri Bir kolonideki bakterilerin eksponansiyel değişme kuralıyla kontrolsüz olarak ürediklerini varsayın. Koloni 1 bakteriyle başlar ve her yarım saatte bir ikiye katlanır. 24 saat sonunda koloni kaç bakteri barındırır? (Uygun laboratuvar koşullarında, kolera bakterilerinin sayısı her 30 dakikada bir ikiye katlanır. Hastalanmış bir insanda, bakterilerin çoğu ölür, fakat bu örnek sabahleyin kendini çok iyi hisseden bir insanın neden akşama tehlikeli bir şekilde hasta olduğunu açıklamaya yardımcı olur.)

8. Bakterilerin büyümesi Bir laboratuvarda ideal koşullarda bir bakteri kolonisi nüfusu zamanla eksponansiyel olarak artacak şekilde üretiliyor. 3 saat sonunda 10.000 bakteri vardır. 5 saat sonunda 40.000 bakteri olur. Başlangıçta kaç bakteri vardır?

9. Bir hastalığın gelişimi (*(Örnek 1'in devamı)* Herhangi bir yılda vakaların %20 yerine %25 azaldığını varsayın.

a. Vakaların sayısını 1000'e indirmek ne kadar sürer?

b. Bu hastalığı yok etmek, yani vaka sayısını 1'in altına düşürmek için ne kadar zaman gerekir?

10. A.B.D. nüfusu Boston'daki bilim müzesi A.B.D. nüfusu-nun sürekli değişen bir tablosunu sunmaktadır. 11 Mayıs 1993'te, toplam nüfus her 14 saniyede bir kişi olarak artı-yordu. O gün öğleden sonra saat 3:45'teki kişi sayısı 257.313.431'di.

a. Eksponansiyel büyümenin sabit bir oranda olduğunu varsayarak, nüfusun hız sabitini bulun (365 günlük yıl başına kişi sayısı).

b. Bu hızla, 11 Mayıs 2008'de Boston zamanıyla öğleden sonra 3:45'te A.B.D. nüfusu ne olacaktır?

11. Petrol azalması Whittier, California'daki kanyon kuyularından birinden pompalanan petrol miktarının her yıl sürekli olarak %10 oranında düştüğünü varsayın. Kuyunun çıktısı ne zaman şu andaki değerinin beşte birine düşer?

12. Sürekli fiyat indirimi Müşterilerin 100 birimlik siparişler vermesini sağlamak için, şirketinizin satış bölümü birim fiyatı, sipariş edilen birim sayısı x'in bir $p(x)$ fonksiyonu olmasını sağlayacak şekilde sürekli bir indirim uyguluyor. İndirim fiyatı ısmarlanan birim başına 0.01$ azaltmaktadır. 100 birimlik bir siparişte birim fiyatı $p(100) = 20.09$\$'dır.

a. Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözerek $p(x)$'i bulun.

Diferansiyel denklem: $\dfrac{dp}{dx} = -\dfrac{1}{100}p$

Başlangıç koşulu: $p(100) = 20.09.$

b. 10 birimlik bir siparişin $p(10)$ birim fiyatını ve 90 birimlik bir siparişin $p(90)$ birim fiyatının bulun.

c. Satış bölümünüz indirimin, şirketin geliri, $r(x) = x \cdot p(x)$'in gerçekte 100 birimlik bir siparişte 90 birimlik bir siparişten daha az olacağı kadar fazla mı olduğunu araştırmanızı istiyor. $x = 100$ iken r'nin değerinin maksimum olduğunu göstererek onları rahatlatın.

T **d.** $0 \leq x \leq 200$ için $r(x) = xp(x)$ kazanç fonksiyonunun grafiğini çizin.

13. Sürekli bileşik faiz Sürekli bileşik faiz olarak %4 veren bir bankaya A_0 dolar yatırdınız.

a. Hesabınızda 5 yıl sonra ne kadar para olacaktır?

b. Paranızın iki ve üç katına çıkması için ne kadar zaman gerekir?

14. John Napier'in sorusu Logaritmaları icat eden İskoç soylusu John Napier (1550-1617), %100 sürekli bileşik faizle bir miktar para yatırırsanız ne olur sorusuna yanıt veren ilk kişidir.

a. Ne olur?

b. Paranızı üçe katlamanız ne kadar sürer?

c. Bir yılda ne kadar kazanırsınız?

Yanıtlarınızı açıklayın.

15. Benjamin Franklin'in vasiyeti Boston'daki Franklin Teknik Enstitüsü, varlığını Benjamin Franklin'in vasiyetinin bir ekindeki öngörüye borçludur. Ekin bir kısmı şöyledir:

> Olabilirse, Ölümümden sonra bile Hem Boston'daki hem de Philadelphia'daki Ülkelerine yararlı olabilecek başka gençlerin oluşumları ve gelişimlerinde yararlı olmak istiyorum. Bu nedenle, aşağıda belirtilen ve açıklanan Kullanım, Yarar ve Amaçlar İçin Fonda, bini Massachusetts'teki Boston Kasabası Hemşehrilerine, bini de Philadelphia Şehri Hemşehrilerine verilmek üzere İki Bin Pound Sterling bırakıyorum.

Franklin'in planı aşağıdaki koşullarla genç atılımcılara %5 faizle para ödünç vermekti. Ekteki öngörüye göre borçlular yıl boyunca

> …yıllık Faizle birlikte Anaparanın onda birini ödeyecekler. Toplanan Faiz ve Anapara yeni Alacaklılara verilecek… Bu plan yüz Yıl boyunca kesilmeden uygulanır ve beklendiği gibi başarılı olursa, Toplam o zaman yüz otuz bir bin Pound olacak ve Bağış Yöneticilerinin bu paranın yüz bin Poundunu kullanımları için Boston Kasabasının Hemşehrilerine Halk İşlerinde kullanılması için vermesini sağlayacağım… Kalan otuzbir bin Pound'un yukarıda belirtilenle aynı şekilde bir Yüz Yıl daha Faizle ödünç verilmesini istiyorum.… İkinci vadenin bitiminde, talihsiz bir kaza operasyonu engellememişse, Toplam Dört Milyon ve Altmış Bir Bin Pound olacaktır.

Her zaman Franklin'in beklediği kadar çok alacaklı bulunamadı, fakat fonun yöneticileri ellerinden gelenin en iyisini yaptılar. Franklin'in hediyesinin alınışının yüzüncü yılının sonunda, Ocak 1894'te, fon 1000 pounddan neredeyse tam 90.000 pounda çıkmıştı. 100 yılda ana para Franklin'in düşündüğü 131 kat yerine 90 kat artmıştı.

Hangi sürekli bileşik faiz oranı Benjamin Franklin'in orijinal anaparasını 100 yılda 90 kat arttırırdı?

16. (*Alıştırma 15'in Devamı*) Benjamin Franklin orijinal 1000 poundun 100 yılda 131.000 pounda çıkacağını hesaplarken, yıllık %5 faizden ve yılda bir kere faizin anaparaya katılmasından yola çıkmıştı. Hangi sürekli bileşik faiz oranı Franklini'in anaparasını 100 yılda 131 kat arttırırdı?

17. Radon-222 Radon-222 gazının bozunma denklemi, t gün olmak üzere, $y = y_0 e^{-0.18t}$ olarak verilir. Mühürlü bir muhafazadaki bir hava örneğinde radonun orijinal değerinin %90'ına düşmesi ne kadar sürer?

18. Polonyum-210 Polonyumun yarı ömrü 139 gündür, fakat örneğinizde geldiği gün bulunan radyoaktif çekirdeklerin %95'i çözündükten sonra örneğiniz işinize yaramayacaktır. Örneğinizin geldiği zamandan itibaren ne kadar süreyle polonyumu kullanabilirsiniz?

19. Bir radyaoktif çekirdeğin ortalama ömrü $y = y_0 e^{-kt}$ radyoaktivite denklemini kullanan fizikçiler $1/k$ sayısına bir radyoaktif çekirdeğin ortalama ömrü derler. Bir radon çekirdeğinin ortalama ömrü $1/0.18 = 5.6$ gün civarındadır. Bir karbon-14 çekirdeğinin ortalama ömrü ise 8000 yıldan fazladır. Başlangıçta bir örnekte bulunan radyoaktif çekirdeklerin %95'inin üç ortalama ömür süresi içinde, yani $t = 3/k$ zamanında, çözüneceğini gösteriniz. Bu şekilde, bir çekirdeğin ortalama ömrü bir örneğin radyoaktifliğinin ne kadar süreceğini belirlemenin çabuk bir yolunu verir.

20. Kaliforniyum-252 Gramı 27 milyon dolar olan ve beyin kanserinin tedavisinde, kömürün kükürt içeriğinin incelenmesinde ve bavullardaki patlayıcıları bulmakta kullanılan şey nedir? Yanıt, Glenn Saeborg'un 1950'deki keşfinden sonra batı dünyasında sadece 8 gram yapılabilmiş olacak kadar nadir olan kaliforniyum-252'dir. İzotopun yarı ömrü 2.645 yıldır—yararlı bir hizmet verebilecek kadar uzun ve birim kütlede yüksek bir radyoaktiviteye sahip olacak kadar kısa. İzotopun 1 mikrogramı saniyede 170 milyon nötron salmaktadır.

a. İzotopun bozunma denklemindeki k'nin değeri nedir?

b. İzotopun ortalama ömrü nedir? (Alıştırma 19'a bakın.)

c. Bir örnekteki radyoaktif çekirdeklerin %95'inin çözünmesi ne kadar sürer?

21. Çorba soğutmak Sıcaklığı 20°C olan bir odada sıcaklığı 90°C olan bir kase çorbanın 10 dakikada 60°C'ye soğutulduğunu varsayın. Aşağıdaki soruları yanıtlamak için Newton'un soğutma yasasını kullanın.

a. Çorbanın 35°C'ye soğuması daha ne kadar sürer?

b. Odada bırakılmak yerine, çorba kasesi sıcaklığı –15°C olan bir dondurucuya koyuluyor. Çorbanın 90°C'den 35°C'ye soğuması ne kadar sürer?

22. Bilinmeyen sıcaklıkta bir çubuk Bir alüminyum çubuk dışarının soğuğundan sıcaklığı 65°'de tutulan bir makine dükkanına getiriliyor. 10 dakika sonra, çubuğun sıcaklığı 35°F, bir 10 dakika sonra ise 50°F oluyor. Newton'un soğutma yasasını kullanarak çubuğun ilk sıcaklığını bulun.

23. Bilinmeyen sıcaklıklı ortam Sıcak su (65°C) dolu bir tava buzdolabına konuluyor. 10 dakika sonra suyun sıcaklığı 39°C, bir 10 dakika sonra ise 33°C oluyor. Newton'un soğutma yasasını kullanarak buzdolabının ne kadar soğuk olduğunu bulun.

24. Havada soğuyan gümüş Bir gümüş potanın sıcaklığı şu anda oda sıcaklığının 60°C üzerindedir. 20 dakika önceyse sıcaklığı oda sıcaklığının 70°C üzerindeydi. Aşağıdaki durumlarda gümüş, oda sıcaklığının ne kadar üzerinde olacaktır?

a. Şu andan itibaren 15 dakika sonra?

b. Şu andan itibaren 2 saat sonra?

c. Gümüş ne zaman oda sıcaklığının 10°C üzerinde olacaktır?

25. Crater Gölünün yaşı Oregon'daki Crater Gölünü yaratan volkanik patlamada ölen bir ağacın kömüründe yaşayan maddedeki karbon-14'ün %44.5'i bulunmuştur. Crater Gölü yaklaşık kaç yaşındadır?

26. Karbon-14 tarihlsndirmesinin ölçümlere duyarlılığı Tarihlendirilen bir örnekteki karbon-14 miktarının hesaplanmasındaki oldukça küçük bir hatanın etkisini anlamak için, aşağıdaki hayali durumu düşünün.

a. M.S. 2000 yılında İllinois merkezinde bulunan fosilleşmiş bir kemik orijinal karbon-14 içeriğinin %17'si ni bulundurmaktadır. Hayvanın öldüğü yılı bulun.

b. %17 yerine %18 alarak (a) şıkkını tekrarlayın.

c. %17 yerine %16 alarak (a) şıkkını tekrarlayın.

27. Sanat sahtekarlığı Orijinal karbon-14'ünün %96.2'sinden fazlasını içermemesi gereken Vermeer'e (1632-1675) atfedilen bir tabloda %99.5 karbon-14 bulunmaktadır. Taklit kaç yaşındadır?

7.6 Bağıl Büyüme Oranları

Matematikte, bilgisayar biliminde ve mühendislikte, x büyüdükçe x'in fonksiyonlarının büyüme oranlarını karşılaştırmak önemlidir. Bu karşılaştırmalarda, çok hızlı büyümelerinden dolayı eksponansiyel fonksiyonlar ve çok yavaş büyümelerinden dolayı da logaritmik fonksiyonlar önemlidirler. Bu bölümde, bu karşılaştırmaların sonuçlarını tanımlamak için kullanılan *küçük-o* ve *büyük-o* notasyonunu tanıtıyoruz. Dikkatimizi, er geç pozitif olan ve $x \to \infty$ iken pozitif kalan fonksiyonlara odaklıyoruz.

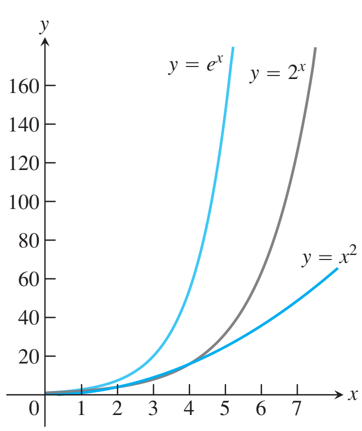
Fonksiyonların Büyüme Oranları

2^x ve e^x gibi üstel fonksiyonların, x büyüdükçe polinomlar ve rasyonel fonksiyonlardan çok daha hızlı büyüdükleri gibi gözüktüklerini fark etmiş olabilirsiniz. Bu eksponansiyeller, x'in kendisinden kesinlikle daha hızlı büyürler. Şekil 7.14 te, x artarken 2^x'in x^2'den daha hızlı büyüdüğünü görebilirsiniz. Aslında, $x \to \infty$ iken 2^x ve e^x fonksiyonları x'in herhangi bir kuvvetinden daha hızlı büyürler, $x^{1,000,000}$ dan bile (Alıştırma 19).

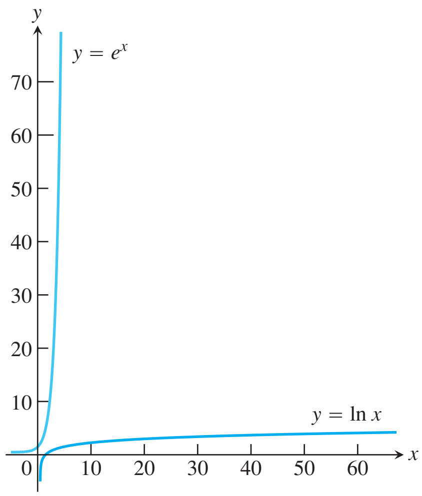
x'in artması ile $y = e^x$'in değerlerinin ne kadar hızlı büyüdüğü hakkında bir hiss edinmek için, eksenlerin santimetre ile ölçeklendiği büyük bir tahtada fonksiyonun grafiğini çizdiğinizi düşünün. $x = 1$ cm de grafik, x-ekseninin $e^1 \approx 3$ cm üstündedir. $x = 6$ cm de grafik, $e^6 \approx 403$ cm ≈ 4 m yukarıdadır (tavana varmak üzeredir, daha önce varmadıysa). $x = 10$ cm de grafik, $e^{10} \approx 22{,}026$ cm ≈ 220 m yukarıdadır, bir çok binadan daha yüksek. $x = 24$ cm de grafik Ay'ın yarı yolundan daha ileridedir ve orijinden $x = 43$ cm ileride grafik, güneşin en yakın yıldız komşusu, kızıl cüce Proxima Centauri'yi aşacak kadar yüksektir:

$$\begin{aligned} e^{43} &\approx 4.73 \times 10^{18} \text{ cm} \\ &= 4.73 \times 10^{13} \text{ km} \\ &\approx 1.58 \times 10^{8} \text{ ışık-saniyesi} \\ &\approx 5.0 \text{ ışık-yılı} \end{aligned}$$

Işık, boşlukta 300,000 km/s ile ilerler.



ŞEKİL 7.14 e^x, 2^x ve x^2'nin grafikleri.



ŞEKİL 7.15 e^x ve $\ln x$'in grafiklerinin ölçülü çizimleri.

Proxima Centauri'nin uzaklığı yaklaşık olarak 4.22 ışık-yılı dır. $x = 43$ cm ile, grafik hala y-eksininin sağında eksene 2 feet'ten daha yakındır.

Buna karşılık, $y = \log_2 x$ ve $y = \ln x$ gibi fonksiyonlar, $x \to \infty$ iken x'in herhangi bir kuvvetinden çok yavaş büyürler (Alıştırma 21). Santimetre olarak ölçeklenmiş eksenlerle, $y = \ln x$'in grafiğinin $y = 43$ cm yüksekliğinde bir noktasını bulmak için, x-ekseni üzerinde yaklaşık olarak 5 ışık-yılı ileriye gitmeniz gerekir. Şekil 7.15'e bakınız.

$x \to \infty$ iken bir $f(x)$ fonksiyonunun başka bir $g(x)$ fonksiyonundan daha hızlı büyümesinin ne demek olduğu tanımlanarak, eksponansiyel, polinom ve logaritmik fonksiyonların bu önemli karşılaştırmalarına açıklık getirilebilir.

TANIM $x \to \infty$ **İçin Büyüme Oranları**

Yeterince büyük x'ler için $f(x)$ ve $g(x)$ pozitif olsunlar.

1. $x \to \infty$ iken

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

ise, veya buna denk olarak

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

ise, f fonksiyonu g'den **daha hızlı büyür**. Ayrıca, $x \to \infty$ iken g fonksiyonu f'den **daha yavaş büyür** de deriz.

2. L, pozitif ve sonlu olmak üzere $x \to \infty$ iken

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

ise f ve g **aynı oranda büyürler.**

Bu tanımlara göre, $y = 2x$, $y = x$'ten daha hızlı büyümez. İki fonksiyon aynı oranda büyür, çünkü

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to\infty} 2 = 2$$

sonlu ve sıfırdan farklı bir limittir. Tecrübeyi görünüşte önemsememenin nedeni şudur; "f, g'den daha hızlı büyür" ile büyük x-değerleri için f ile karşılaştırıldığında g ihmal edilebilir, demek istiyoruz.

ÖRNEK 1 Büyüme Oranlarının Birkaç Kullanışlı Karşılaştırması

(a) $x \to \infty$ iken e^x x^2'den daha hızlı büyür çünkü;

$$\underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{\infty/\infty} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x}}_{\infty/\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty \qquad \text{l'Hopital Kuralını Kullanarak}$$

dır.

(b) $x \to \infty$ iken 3^x 2^x'den daha hızlı büyür çünkü;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \infty$$

dur.

(c) $x \to \infty$ iken x^2 ln x'ten daha hızlı büyür çünkü;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1/x} = \lim_{x\to\infty} 2x^2 = \infty \qquad \text{Hopital Kuralı}$$

dır.

(d) $x \to \infty$ iken $\ln x$ x'ten daha yavaş büyür çünkü;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} \qquad \text{Hopital Kuralı}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

dır. ■

ÖRNEK 2 Farklı Tabanlarda Eksponansiyel ve Logaritmik Fonksiyonlar

(a) Alıştırma 1b de belirtildiği gibi, tabanları farklı eksponansiyel fonksiyonlar $x \to \infty$ iken asla aynı hızla büyümezler. $a > b > 0$ ise, a^x b^x'ten daha hızlı büyür. $(a/b) > 1$ olduğu için

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = \infty$$

bulunur.

(b) Eksponansiyel fonksiyonların aksine, farklı a ve b tabanlı logaritmik fonksiyonlar $x \to \infty$ iken aynı hızla büyürler:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{\log_b x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x/\ln a}{\ln x/\ln b} = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

Limit oran her zaman sonludur ve hiç sıfır olmaz. ■

$x \to \infty$ iken, f ile g aynı hızla büyüyorsa ve $x \to \infty$ iken g ile h aynı hızla büyüyorsa, $x \to \infty$ iken f ile h aynı hızla büyür. Bunun nedeni

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = L_1 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{g}{h} = L_2$$

ifadelerinin

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{h} = \lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} \cdot \frac{g}{h} = L_1 L_2$$

anlamına gelmeleridir. L_1 ve L_2 sonlu ve sıfırdan farklıysa, $L_1 L_2$ de sonlu ve sıfırdan farklıdır.

ÖRNEK 3 Aynı Oranda Büyüyen Fonksiyonlar

$x \to \infty$ iken, $\sqrt{x^2 + 5}$ ve $(2\sqrt{x} - 1)^2$'nin aynı oranda büyüdüğünü gösterin.

Çözüm Fonksiyonların aynı oranda büyüdüklerini göstermek için, $g(x) = x$ fonksiyonu ile aynı oranda büyüdüklerini gösteririz:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2\sqrt{x}-1)^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4$$ ■

Mertebe ve O Gösterimi

Burada sayı teorisyenleri tarafından yüzyıl önce icat edilen ve şu anda matematiksel analiz ve bilgisayar bilimlerinde yaygın olarak kullanılan "küçük o" ve "büyük o" gösterimlerini tanıtacağız.

TANIM Küçük-o

f ve g fonksiyonları için $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ise $x \to \infty$ iken f'nin **mertebesi** g'den **daha küçüktür**. Bunu, $\boldsymbol{f = o(g)}$ şeklinde yazarak belirtiriz.

$x \to \infty$ iken, $f = o(g)$ demenin $x \to \infty$ iken f'nin g'den yavaş büyüdüğünü söylemenin başka bir yolu olduğuna dikkat edin.

ÖRNEK 4 Küçük-o Notasyonunu Kullanmak

(a) $x \to \infty$ iken $\ln x = o(x)$ 'tir, çünkü $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

(b) $x \to \infty$ iken $x^2 = o(x^3 + 1)$ 'tir, çünkü $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3 + 1} = 0$ ■

TANIM Büyük-o

x yeterince büyükken, $f(x)$ ve $g(x)$ pozitif olsunlar. x yeterince büyükken

$$\frac{f(x)}{g(x)} \le M,$$

olacak şekilde pozitif bir M tamsayısı varsa, f **en fazla** g **mertebesindedir**. Bunu $\boldsymbol{f = O(g)}$ yazarak belirtiriz.

ÖRNEK 5 Büyük-o Notasyonunu Kullanmak

(a) $x \to \infty$ iken $x + \sin x = O(x)$'tir, çünkü x yeterince büyükken $\frac{x + \sin x}{x} \le 2$ olur.

(b) $x \to \infty$ iken $e^x + x^2 = O(e^x)$'tir, çünkü $x \to \infty$ iken $\frac{e^x + x^2}{e^x} \to 1$ olur.

(c) $x \to \infty$ iken $x = O(e^x)$'tir, çünkü $x \to \infty$ iken $\frac{x}{e^x} \to 0$ olur. ■

Tanımlara yeniden bakarsanız, yeterince büyük x değerlerinde pozitif olan fonksiyonlar için $f = o(g)$'nin $f = O(g)$ anlamına geldiğini görürsünüz. Ayrıca, f ve g aynı oranda büyüyorsa, $f = O(g)$ ve $g = O(f)$ olur (Alıştırma 11).

Sıralı ve İkili Arama

Bilgisayar bilimcileri bir algoritmanın etkinliğini çoğunlukla, algoritmanın bir şeyi yapması için bilgisayarın gerçekleştirmesi gerektiği adım sayısını sayarak ölçerler. Aynı şeyi

yapmaları için tasarlanmış olsalar bile, algoritmaların etkinlikleri arasında belirgin farklar olabilir. Bu farklar genellikle büyük-o gösterimiyle tanımlanırlar. Aşağıda buna bir örnek vardır.

Webster's Third International Dictionary'de *a* harfiyle başlayan 26.000 kelime vardır. Bir kelimeyi bulmanın veya olup olmadığını öğrenmenin bir yolu, kelimeyi buluncaya kadar veya olmadığına karar verene kadar listede bir kerede bir kelimeyi okumaktır. Sıralı arama adı verilen bu yöntem kelimenin alfabetik sıralanmasını kullanmaz. Bir yanıt bulacağınız kesindir, fakat bu 26.000 adım sürebilir.

Kelimeyi bulmanın veya olup olmadığını öğrenmenin başka bir yolu doğrudan listenin ortasına gitmektir (birkaç harf oynayabilir). Kelimeyi bulamazsanız, onu içeren yarıya gider ve içermeyen yarıyı unutursunuz (Kelimenin hangi yarıda olduğunu biliyorsunuz, çünkü listenin alfabetik olduğunu biliyorsunuz). Bu yöntem tek bir adımda kabaca 13.000 kelimeyi eler. Kelimeyi ikinci denemede bulamazsanız, onu içeren yarının ortasına atlayın. Kelimeyi bulana veya listeyi içinde hiç kelime kalmayacak şekilde ikiye bölene kadar işleme devam edin. Kelimeyi bulana veya orada olmadığına karar verene kadar listeyi kaç kere bölmeniz gerekir?

$$(26{,}000/2^{15}) < 1$$

olduğu için, en fazla 15 kere. Bu kesinlikle olası bir 26.000 adımdan daha iyidir.

n uzunluğunda bir liste için, sıralı bir arama bir kelimeyi bulmak veya orada olmadığını belirlemek için n mertebesinde adım gerektirir. İkili arama adı verilen ikinci yöntem ise $\log_2 n$ mertebesinde adım gerektirir. Bunun nedeni, $2^{m-1} < n \leq 2^m$ ise, $m - 1 < \log_2 n \leq m$ olması ve listeyi tek kelimeye indirgemek için gereken bölmelerin sayısının en fazla $m = \lceil \log_2 n \rceil$, $\log_2 n$'nin tamsayı tavanı olmasıdır.

Büyük-o gösterimi bunu söylemenin kısa bir yolunu verir. Düzenli bir listeyi sıralı olarak aramak için $O(n)$ adım sayısı gerekirken, ikili bir aramadaki adım sayısı $O(\log_2 n)$'dir. Örneğimizde ikisi arasında büyük bir fark vardır (26.000 ve 15) ve $n \to \infty$ iken, n $\log_2 n$'den daha hızlı büyüdüğü için aradaki fark sadece artar (Örnek 1d'deki gibi).

ALIŞTIRMALAR 7.6

e^x Eksponansiyeliyle Karşılaştırmalar

1. $x \to \infty$ iken aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri e^x'ten daha hızlı büyür? Hangileri e^x'le aynı oranda büyür? Hangileri daha yavaş büyür?

a. $x + 3$ **b.** $x^3 + \sin^2 x$
c. $\sqrt{x}$ **d.** 4^x
e. $(3/2)^x$ **f.** $e^{x/2}$
g. $e^x/2$ **h.** $\log_{10} x$

2. $x \to \infty$ iken aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri e^x'ten daha hızlı büyür? Hangileri e^x'le aynı oranda büyür? Hangileri daha yavaş büyür?

a. $10x^4 + 30x + 1$ **b.** $x \ln x - x$
c. $\sqrt{1 + x^4}$ **d.** $(5/2)^x$
e. e^{-x} **f.** xe^x
g. $e^{\cos x}$ **h.** e^{x-1}

x^2 Kuvvetiyle Karşılaştırmalar

3. $x \to \infty$ iken aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri x^2'den daha hızlı büyür? Hangileri x^2'yle aynı oranda büyür? Hangileri daha yavaş büyür?

a. $x^2 + 4x$ **b.** $x^5 - x^2$
c. $\sqrt{x^4 + x^3}$ **d.** $(x + 3)^2$
e. $x \ln x$ **f.** 2^x
g. $x^3 e^{-x}$ **h.** $8x^2$

4. $x \to \infty$ iken aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri x^2'den daha hızlı büyür? Hangileri x^2'yle aynı oranda büyür? Hangileri daha yavaş büyür?

a. $x^2 + \sqrt{x}$ **b.** $10x^2$
c. $x^2 e^{-x}$ **d.** $\log_{10}(x^2)$
e. $x^3 - x^2$ **f.** $(1/10)^x$
g. $(1.1)^x$ **h.** $x^2 + 100x$

ln x Logaritmasıyla Karşılaştırmalar

5. $x \to \infty$ iken aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri ln x'ten daha hızlı büyür? Hangileri ln x'le aynı oranda büyür? Hangileri daha yavaş büyür?

a. $\log_3 x$ **b.** $\ln 2x$
c. $\ln \sqrt{x}$ **d.** $\sqrt{x}$
e. x **f.** $5 \ln x$
g. $1/x$ **h.** e^x

6. $x \to \infty$ iken aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri ln x'ten daha hızlı büyür? Hangileri ln x'le aynı oranda büyür? Hangileri daha yavaş büyür?

a. $\log_2 (x^2)$ **b.** $\log_{10} 10x$
c. $1/\sqrt{x}$ **d.** $1/x^2$
e. $x - 2\ln x$ **f.** e^{-x}
g. $\ln (\ln x)$ **h.** $\ln (2x + 5)$

Fonksiyonları Büyüme Oranlarına Göre Dizmek

7. Aşağıdaki fonksiyonları $x \to \infty$ iken en yavaş büyüyenden en hızlı büyüyene doğru sıralayın

a. e^x **b.** x^x
c. $(\ln x)^x$ **d.** $e^{x/2}$

8. Aşağıdaki fonksiyonları $x \to \infty$ iken en yavaş büyüyenden en hızlı büyüyene doğru sıralayın

a. 2^x **b.** x^2
c. $(\ln 2)^x$ **d.** e^x

Büyük O ve Küçük O; Mertebe

9. $x \to \infty$ iken doğru mu, yanlış mı?

a. $x = o(x)$ **b.** $x = o(x + 5)$
c. $x = O(x + 5)$ **d.** $x = O(2x)$
e. $e^x = o(e^{2x})$ **f.** $x + \ln x = O(x)$
g. $\ln x = o(\ln 2x)$ **h.** $\sqrt{x^2 + 5} = O(x)$

10. $x \to \infty$ iken doğru mu, yanlış mı?

a. $\dfrac{1}{x + 3} = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **b.** $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$
c. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **d.** $2 + \cos x = O(2)$
e. $e^x + x = O(e^x)$ **f.** $x \ln x = o(x^2)$
g. $\ln (\ln x) = O(\ln x)$ **h.** $\ln (x) = o(\ln (x^2 + 1))$

11. Pozitif $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $x \to \infty$ iken aynı oranda büyüyorlarsa, $f = O(g)$ ve $g = O(f)$ olduğunu gösterin.

12. $x \to \infty$ iken, bir $f(x)$ polinomu ne zaman bir $g(x)$ polinomundan daha küçük mertebededir? Yanıtınızı açıklayın.

13. $x \to \infty$ iken, bir $f(x)$ polinomu ne zaman bir $g(x)$ polinomuyla en fazla aynı mertebededir? Yanıtınızı açıklayın.

14. Bölüm 2.4'te rasyonel fonksiyonların limitleri hakkında çıkardığımız sonuçlar $x \to \infty$ iken polinomların birbirlerine göre büyümeleri hakkında bize ne söyler?

Diğer Karşılaştırmalar

T **15.** İnceleyin

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln (x + 1)}{\ln x} \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln (x + 999)}{\ln x}$$

limitlerini inceleyin. Sonra l'Hôpital kuralıyla bulduğunuzu açıklayın.

16. (*Alıştırma 15'in devamı*) a sabitine hangi değeri verirseniz verin

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln (x + a)}{\ln x}$$

limitinin değerinin değişmeyeceğini gösterin. Bu, $f(x) = \ln (x + a)$ ve $g(x) = \ln x$ fonksiyonlarının bağıl hızları hakkında ne söyler?

17. İkisinin de $x \to \infty$ iken $\sqrt{x}$ ile aynı oranda büyüdüklerini göstererek, $\sqrt{10x + 1}$ ve $\sqrt{x + 1}$'in $x \to \infty$ iken aynı oranda büyüdüğünü gösterin.

18. İkisinin de $x \to \infty$ iken x^2 ile aynı oranda büyüdüklerini göstererek, $\sqrt{x^4 + x}$ ve $\sqrt{x^4 - x^3}$'ün $x \to \infty$ iken aynı oranda büyüdüğünü gösterin.

19. $x \to \infty$ iken, her n pozitif sayısı için e^x'in x^n'den, hatta $x^{1.000.000}$'dan bile, daha hızlı büyüdüğünü gösterin. (*İpucu*: x^n'nin n. türevi nedir?)

20. **e^x fonksiyonu her polinomdan daha fazla büyür** $x \to \infty$ iken, e^x fonksiyonunun her

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

polinomundan daha hızlı büyüdüğünü gösterin.

21. **a.** Herhangi bir pozitif n tam sayısı için, $x \to \infty$ iken, ln x'in $x^{1/n}$'den, hatta $x^{1/1.000.000}$'dan bile, daha yavaş büyüdüğünü gösterin.

T **b.** $x^{1/1.000.000}$'un değerleri ln x'i er geç geçse bile, bu gerçekleşmeden önce x-ekseninde bir hayli ilerlemeniz gerekir. $x^{1/1.000.000} > \ln x$ olacak şekilde 1'den büyük bir x değeri bulun. İşe, $x > 1$ iken, $\ln x = x^{1/1.000.000}$ denkleminin $\ln (\ln x) = (\ln x)/1,000,000$ denklemine denk olduğunu gözlemleyerek başlayın.

T **c.** $x^{1/10}$'un bile ln x'i geçmesi uzun zaman alır. Bir hesap makinesiyle $x^{1/10}$ ile ln x'in kesiştikleri veya buna eşdeğer olarak $\ln x = 10 \ln (\ln x)$ olduğu x değerini bulmak için denemeler yapın. Kesişme noktasını 10'un kuvvetleri arasına alın ve art arda yarıya bölerek yaklaşın.

T **d.** (*c şıkkının devamı*) $\ln x = 10 \ln (\ln x)$ olduğu x değeri bazı grafik çizicilerin ve kök bulucuların tanımlayamayacakları kadar uzaktadır. Elinizdeki aletlerle bunu deneyin ve neler olduğunu görün.

22. **ln x fonksiyonu her bir polinomdan daha yavaş büyür** $x \to \infty$ iken ln x'in sabit olmayan herhangi bir polinomdan daha yavaş büyüdüğünü gösterin.

Algoritmalar ve Aramalar

23. a. Elinizde aynı problemi çözmek için üç farklı algoritma bulunduğunu ve her algoritmanın aşağıda verilen fonksiyonlar mertebesinde adım içerdiğini varsayın:

$$n \log_2 n, \quad n^{3/2}, \quad n(\log_2 n)^2$$

Algoritmaların hangisi uzun vadede daha etkindir? Yanıtınızı açıklayın.

T **b.** Her birinin ne kadar hızlı büyüdükleri hakkında bir fikir edinmek için (a) şıkkındaki fonksiyonların grafiklerini bir arada çizin.

24. Alıştırma 23'ü aşağıdaki fonksiyonlar için tekrar edin:

$$n, \quad \sqrt{n} \log_2 n, \quad (\log_2 n)^2.$$

T **25.** Bir milyon madde içeren düzenli bir listede bir şey aradığınızı varsayın. Bunu bulmak sıralı bir aramayla kaç adım, ikili bir aramayla kaç adım gerektirir?

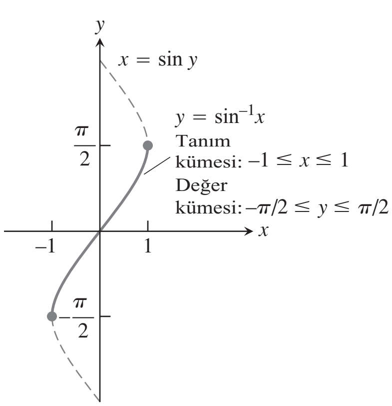
T **26.** 450.000 maddelik (*Webster's Third International Dictionary*'nin uzunluğu) bir listede bir şey aradığınızı varsayın. Bunu bulmak sıralı bir aramayla kaç adım, ikili bir aramayla kaç adım gerektirir?

7.7 Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Ters trigonometrik fonksiyonlar, üçgenlerin kenar ölçümlerinden açı hesaplamak istediğimizde ortaya çıkarlar. Ayrıca, yararlı ters türevler sağlarlar ve diferansiyel denklemlerin çözümünde sıklıkla ortaya çıkarlar. Bu bölüm, fonksiyonların nasıl tanımlandığını, grafiklerinin nasıl çizildiğini ve nasıl hesaplandıklarını anlatmaktadır.

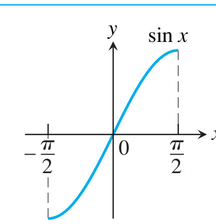
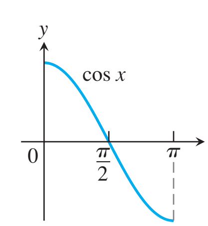
Ters Fonksiyonları Tanımlamak

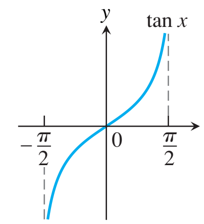
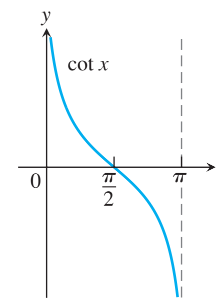
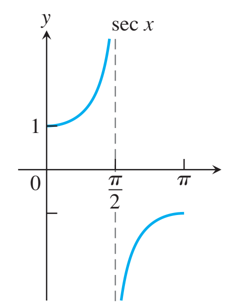
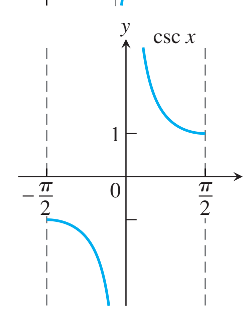
Altı temel trigonometrik fonksiyon bire-bir değildirler (değerleri periyodik olarak tekrarlanır), fakat tanım kümelerini bire-bir oldukları aralıklara kısıtlayabiliriz. Sinüs fonksiyonu $x = -\pi/2$'deki -1 değerinden $x = \pi/2$'deki 1 değerine kadar artar. Tanım kümesini $[-\pi/2, \pi/2]$ aralığına kısıtlamakla $\sin^{-1} x$ gibi bir tersi var olacak şekilde bire-bir olmasını sağlayabiliriz (Şekil 7.16). Benzer tanım kümesi kısıtlamaları altı trigonometrik fonksiyonun her biri için uygulanabilir.



ŞEKİL 7.16 $y = \sin^{-1} x$'in grafiği.

Trigonometrik fonksiyonları bire-bir yapan tanım kümesi kısıtlamaları

Fonksiyon	Tanım Aralığı	Değer Aralığı	
$\sin x$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$[-1, 1]$	
$\cos x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$	

tan x	$(-\pi/2, \pi/2)$	$(-\infty, \infty)$	
cot x	$(0, \pi)$	$(-\infty, \infty)$	
sec x	$[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	
csc x	$[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	

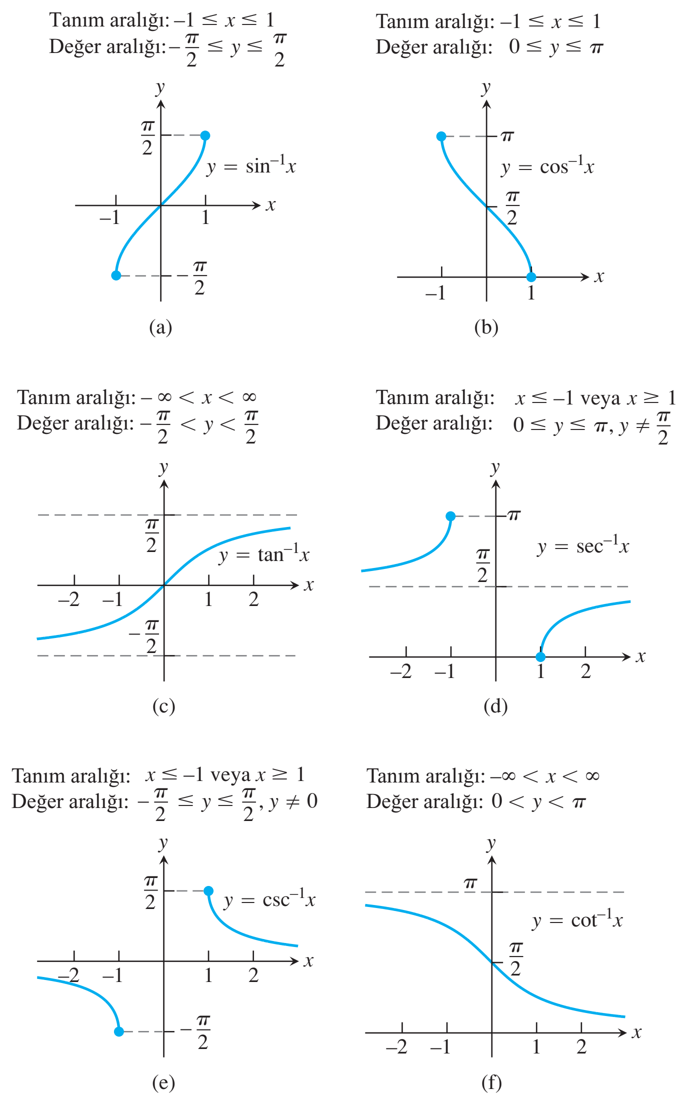
Bu kısıtlanmış fonksiyonlar artık bire bir oldukları için, tersleri vardır ve bunları aşağıdaki şekilde gösteririz:

$$y = \sin^{-1} x \quad \text{veya} \quad y = \arcsin x$$
$$y = \cos^{-1} x \quad \text{veya} \quad y = \arccos x$$
$$y = \tan^{-1} x \quad \text{veya} \quad y = \arctan x$$
$$y = \cot^{-1} x \quad \text{veya} \quad y = \operatorname{arccot} x$$
$$y = \sec^{-1} x \quad \text{veya} \quad y = \operatorname{arcsec} x$$
$$y = \csc^{-1} x \quad \text{veya} \quad y = \operatorname{arccsc} x$$

Bu denklemler “y eşittir x’in arksinüsü” veya “y eşittir arksinüs x” olarak okunur.

DİKKAT Ters fonksiyonlardaki –1 üssü "ters fonksiyon" anlamına gelir. Çarpmaya göre ters anlamına gelmez. Örneğin, sin x'in çarpmaya göre tersi $(\sin x)^{-1} = 1/\sin x = \csc x$ olarak yazılır.

Altı ters trigonometrik fonksiyonun grafikleri Şekil 7.17 de gösterilmiştir. Bu grafikleri, Bölüm 7.1'deki gibi, kısıtlanmış trigonometrik fonksiyonların grafiklerinin $y = x$ doğrusuna göre simetriklerini alarak elde edebiliriz. Bu fonksiyonlara ve türevlerine daha yakından bakalım.

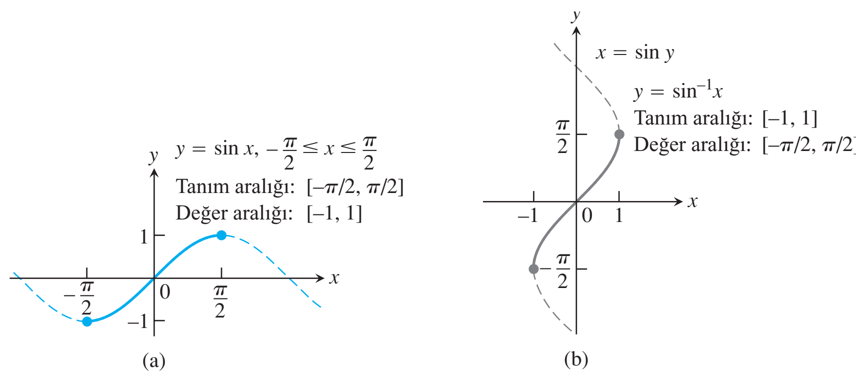


ŞEKİL 7.17 Altı ters trigonometrik fonksiyonun grafikleri

Arksinüs ve Arkkosinüs

x'in arksinüsü, $[-\pi/2, \pi/2]$'de sinüsü x olan açıdır. Arkkosinüs ise $[0, \pi]$'de kosinüsü x olan açıdır.

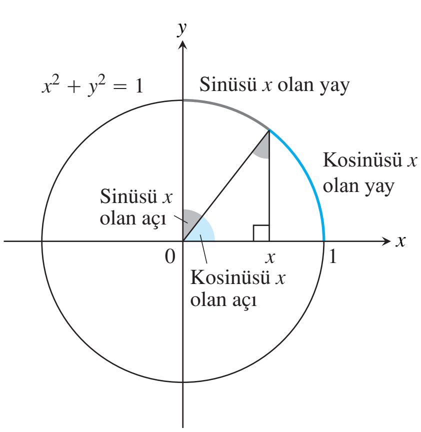
> **TANIM** **Arksinüs ve Arkkosinüs Fonksiyonları**
>
> $\boldsymbol{y = \sin^{-1} x}$, $[-\pi/2, \pi/2]$ aralığında $\sin y = x$ olan sayıdır.
>
> $\boldsymbol{y = \cos^{-1} x}$, $[0, \pi]$ aralığında $\cos y = x$ olan sayıdır.



ŞEKİL 7.18 $y = \sin x, -\pi/2 \le x \le \pi/2]$, ve (b) tersi $y = \sin^{-1} x$'in grafikleri. $\sin x$'in grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriğinin alınmasıyla elde edilen $\sin^{-1} x$'in grafiği, $x = \sin y$ eğrisinin bir parçasıdır.

Arsinüs ve Arkkosinüsteki "Ark"

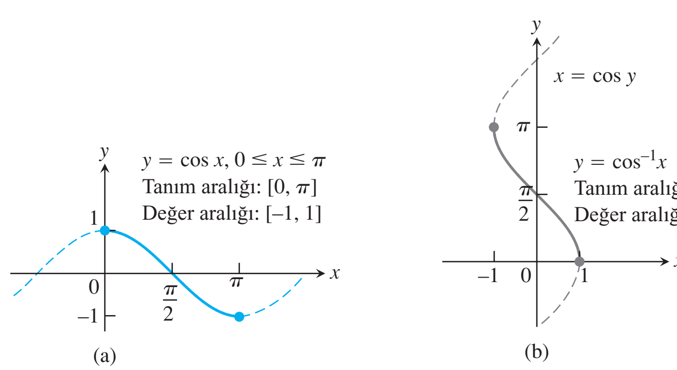
Aşağıdaki şekil, birinci bölgede radyan açılar için $y = \sin^{-1} x$ ve $y = \cos^{-1} x$'in geometrik bir açıklamasını vermektedir. Bir birim çember için $s = r\theta$ denklemi haline gelir ve böylece merkez açılar ve gördükleri yayların ölçüsü aynı olur. $x = \sin x$ ise y, sinüsü x olan açı olmanın yanı sıra sinüsü x olan açının gördüğü yayın uzunluğudur. Dolayısıyla y'ye "sinüsü x olan yay" deriz.



$y = \sin^{-1} x$'in grafiği (Şekil 7.18) orijine göre simetriktir ($x = \sin y$'nin grafiği üzerinde bulunur). Dolayısıyla arksinüs bir tek fonksiyondur:

$$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x \qquad (1)$$

$y = \cos^{-1} x$'in grafiğinin (Şekil 7.19) böyle bir simetrisi yoktur.

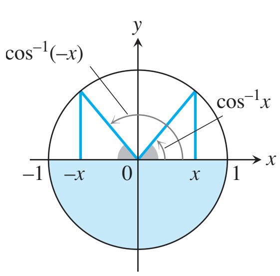


ŞEKİL 7.19 $y = \cos x, 0 \le x \le \pi$, ve (b) tersi $y = \cos^{-1} x$'in grafikleri. $\cos x$'in grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriğinin alınmasıyla elde edilen $\cos^{-1} x$'in grafiği, $x = \cos y$ eğrisinin bir parçasıdır.

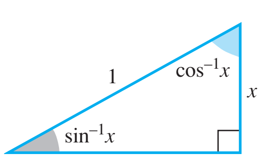
$\sin^{-1} x$'in ve $\cos^{-1} x$'in değerlerini bulmak için bilinen $\sin x$ ve $\cos x$ değerlerinin tersleri alınabilir.

x	$\sin^{-1} x$
$\sqrt{3}/2$	$\pi/3$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$
$1/2$	$\pi/6$
$-1/2$	$-\pi/6$
$-\sqrt{2}/2$	$-\pi/4$
$-\sqrt{3}/2$	$-\pi/3$

x	$\cos^{-1} x$
$\sqrt{3}/2$	$\pi/6$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$
$1/2$	$\pi/3$
$-1/2$	$2\pi/3$
$-\sqrt{2}/2$	$3\pi/4$
$-\sqrt{3}/2$	$5\pi/6$

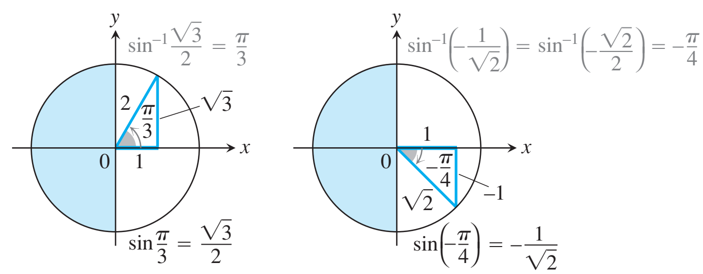


ŞEKİL 7.20 $\cos^{-1} x$ ve $\cos^{-1}(-x)$ bütünleyen açılardır (dolayısıyla toplamları π dir).



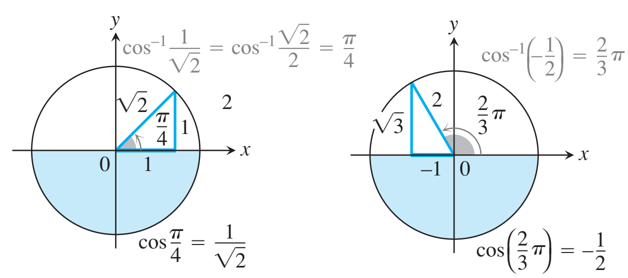
ŞEKİL 7.21 $\sin^{-1} x$ ve $\cos^{-1} x$ are tümleyen açılardır (dolayısıyla toplamları $\pi/2$'dir).

ÖRNEK 1 $\sin^{-1} x$'in Bilinen Değerleri.



Açılar birinci ve dördüncü dörtte bir bölgelerden gelirler, çünkü $\sin^{-1} x$'in değer aralığı $[-\pi/2, \pi/2]$'dir.

ÖRNEK 2 $\cos^{-1} x$'in Bilinen Değerleri.



Açılar birinci ve ikinci dörtte bir bölgelerden gelir, çünkü $\cos^{-1} x$'in değer aralığı $[0, \pi]$'dir. ■

Arksinüs ve Arkkosinüs İçeren Özdeşlikler

Şekil 7.20'den de göreceğiniz gibi, x'in arkkosinüsü

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi \tag{2}$$

veya

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x \tag{3}$$

özdeşliğini sağlar. Şekil 7.21'deki üçgenden ise $x > 0$ için

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2 \tag{4}$$

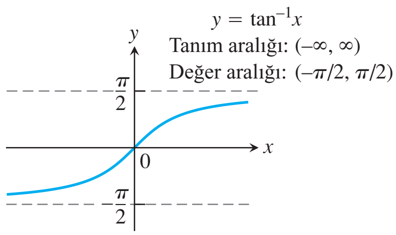
olduğunu görebiliriz. (4) denklemi x'in $[-1, 1]$ aralığındaki başka değerlerinde de geçerlidir, ancak bunu Şekil 7.21'deki üçgenden çıkaramayız. Ancak, bu (1) ve (3) denklemlerinin bir sonucudur (Alıştırma 131).

tan$x$, cot x, sec x ve csc x'in Ters Fonksiyonları

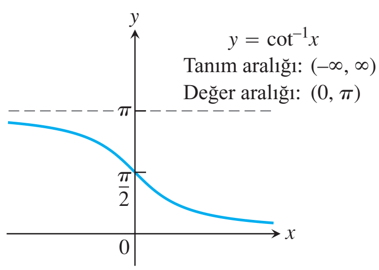
x'in arktanjantı tanjantı x olan bir açıdır. x'in arkkotanjantı ise kotanjantı x olan bir açıdır.

TANIM **Arktanjant ve Arkkotanjant Fonksiyonları**

> $\boldsymbol{y = \text{tann}^{-1}\, x}$, $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığında $\tan y = x$ olan sayıdır.
>
> $\boldsymbol{y = \cot^{-1} x}$, $(0, \pi)$ aralığında $\cot y = x$ olan sayıdır.



ŞEKİL 7.22 $y = \tan^{-1} x$'in grafiği



ŞEKİL 7.23 $y = \cot^{-1} x$'in grafiği

Tanjant ve kotanjantın tanımlı olmadığı değerlerden kaçınmak için açık aralıklar kullanırız.

$y = \tan^{-1} x$'in grafiği orijine göre simetriktir, çünkü orijine göre simetrik olan $x = \tan^{-1} y$ grafiğinin bir dalıdır (Şekil 7.22). Cebirsel olarak bu

$$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$$

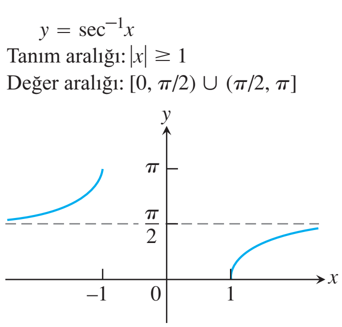
anlamına gelir; arktanjant bir tek fonksiyondur. $y = \cot^{-1} x$'in böyle bir simetrisi yoktur (Şekil 7.23).

$\sec x$ ve $\csc x$'in kısıtlanmış hallerinin tersleri Şekil 7.24 ve 7.25'te gösterilen fonksiyonlar olarak seçilmiştir.

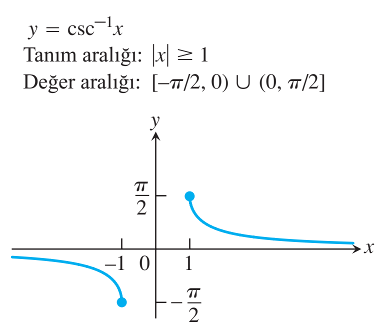
DİKKAT x'in negatif değerlerinde $\sec^{-1} x$'in nasıl tanımlanacağı hakkında genel bir anlaşma yoktur. Biz ikinci dörtte bir bölgedeki $\pi/2$ ve π arasındaki açıları seçtik. Bu seçim $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$ olmasını sağlar. Ayrıca, bu seçim $\sec^{-1} x$'i tanım aralığının her yerinde artan bir fonksiyon yapar. Bazı tablolar $x < 0$ için $\sec^{-1} x$'i $[-\pi, -\pi/2)$ aralığında seçerler, bazıları ise $[\pi, 3\pi/2)$ aralığında kabul ederler (Şekil 7.26). Bu seçimler türev formülünü basitleştirirler (bizim seçimimizde mutlak değer işaretleri gerekir), fakat $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$ sayısal denklemini sağlamazlar. Buradan, (4) Denklemini uygulayarak

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (5)$$

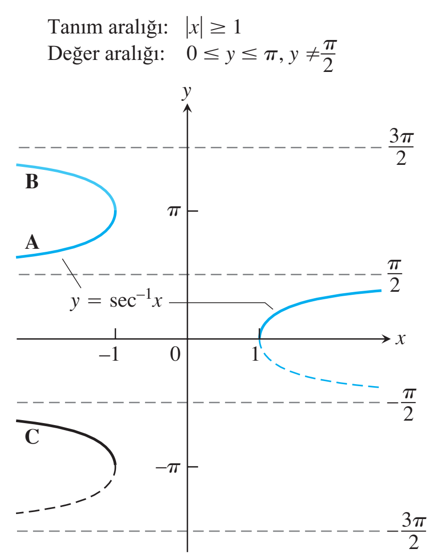
özdeşliğini elde edebiliriz.



ŞEKİL 7.24 $y = \sec^{-1} x$'in grafiği



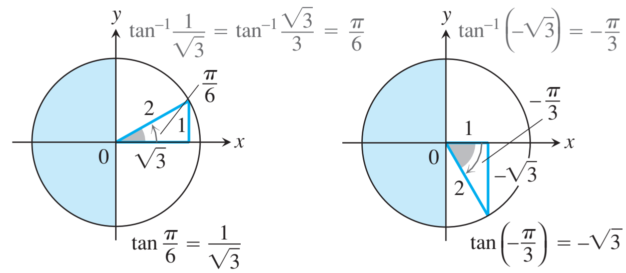
ŞEKİL 7.25 $y = \csc^{-1} x$'in grafiği



ŞEKİL 7.26 $y = \sec^{-1} x$'in sol kolu için çeşitli mantıklı seçimler vardır. **A** seçimi ile $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$, kullanışlı bir özdeşlik, birçok hesap makinesinde çalışır.

x	$\tan^{-1} x$
$\sqrt{3}$	$\pi/3$
1	$\pi/4$
$\sqrt{3}/3$	$\pi/6$
$-\sqrt{3}/3$	$-\pi/6$
-1	$-\pi/4$
$-\sqrt{3}$	$-\pi/3$

ÖRNEK 3 Common Values of $\tan^{-1} x$

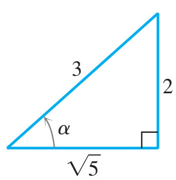


Açılar birinci ve dördüncü dörtte bir bölgeden gelirler çünkü $\tan^{-1} x$'in değer aralığı $(-\pi/2, -\pi/2)$'dir. ■

ÖRNEK 4

$$\alpha = \sin^{-1}\frac{2}{3}$$

ise $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{scc}\alpha$ ve $\cot\alpha$'yı bulun.



ŞEKİL 7.27 $\alpha = \sin^{-1}(3)$ ise, α'nin diğer temel trigonometrik fonksiyonların değerleri bu üçgenden okunabilir (Örnek 4).

Çözüm Yukarıdaki denklem $\sin\alpha = 2/3$ olduğunu söyler. α'yı, hipotenüsü 3 olan bir dik üçgende, karşısındaki kenarı 2 olan bir açı olarak resmederiz (Şekil 7.27). Diğer kenarın uzunluğu

$$\sqrt{(3)^2 - (2)^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5} \qquad \text{Pisagor Teoremi}$$

olarak bulunur. Bu bilgiyi de şekle ekler ve sonra tamamlanmış üçgenden istediğimiz bilgileri okuruz:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sec\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad \csc\alpha = \frac{3}{2}, \quad \cot\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$ ■

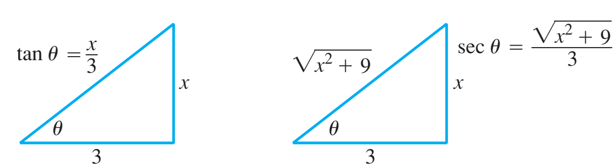
ÖRNEK 5 $\sec\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}\right)$'ü bulun.

Çözüm $\theta = \tan^{-1}(x/3)$ alırız (sadece açıya bir isim vermek için) ve θ'yı

$$\tan\theta = \text{karşı/komşu} = x/3$$

olan dik üçgende resimlendiririz. Üçgenin hipotenüsünün uzunluğu

$$\sqrt{x^2+3^2} = \sqrt{x^2+9}.$$

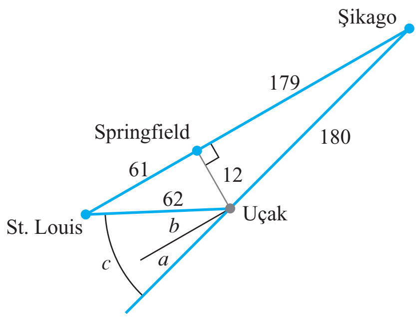


olarak bulunur. Böylece

$$\sec\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}\right) = \sec\theta$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} \qquad \sec\theta = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{komşu}}$$

elde ederiz. ■



ŞEKİL 7.28 Uzaklıklar mil olarak yuvarlanmış şekilde kayma düzeltmesi (Örnek 7) diyagramı (çizim ölçekli değil).

ÖRNEK 6 Kayma düzeltmesi

Şikago'dan St. Louis'e bir uçak yolculuğunda, hava görevlisi uçağın rotasından Şekil 7.28'de görüldüğü gibi 12 mil sapmış olduğunu belirler. Orijinal, doğru rotaya paralel olan bir rota için a açısını, b açısını ve $c = a + b$ düzeltme açısını bulun.

Çözüm

$$a = \sin^{-1}\frac{12}{180} \approx 0.067 \text{ radyan} \approx 3.8°$$

$$b = \sin^{-1}\frac{12}{62} \approx 0.195 \text{ radyan} \approx 11.2°$$

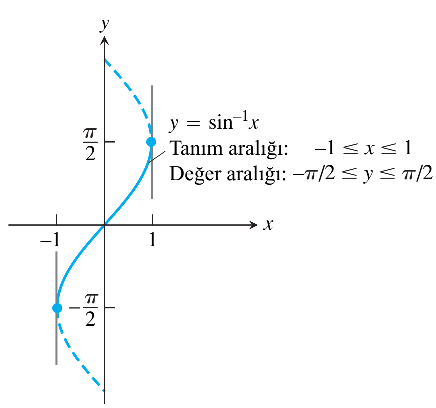
$$c = a + b \approx 15°$$

■

$y = \sin^{-1} u$'nun Türevi

$x = \sin y$ fonksiyonunun $-\pi/2 < y < \pi/2$ aralığında türevlenebildiğini ve türevi kosinüsün bu aralıkta pozitif olduğunu biliyoruz. Bu nedenle Bölüm 7.1'deki Teorem 1, $y = \sin^{-1} x$ ters fonksiyonun $-1 < x < 1$ aralığında türevlenebileceğini garantiler. $x = 1$ veya $x = -1$'de türevlenmesini bekleyemeyiz, çünkü bu noktalarda fonksiyonun grafiğinin teğetleri dikeydir (Şekil 7.29).

$y = \sin^{-1} x$'in türevini $f(x) = \sin x$ ve $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ ile Teorem 1'i uygulayarak buluruz:



ŞEKİL 7.29 $y = \sin^{-1} x$'in grafiği.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad \text{Teorem 1}$$

$$= \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} \qquad f'(u) = \cos u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)}} \qquad \cos u = \sqrt{1 - \sin^2 u}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \sin(\sin^{-1} x) = x$$

Alternatif Türetme: Teorem 1'i doğrudan uygulamak yerine, $y = \sin^{-1} x$'in türevini kapalı türev kullanarak aşağıdaki gibi bulabiliriz:

$$\sin y = x \qquad y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow \sin y = x$$

$$\frac{d}{dx}(\sin y) = 1 \qquad \text{İki tarafın da } x\text{'e göre türevi}$$

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{Zincir Kuralı}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \qquad -\pi/2 < y < \pi/2 \text{ aralığında } \cos y > 0 \text{ olduğu için bölebiliriz.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$$

Hangi türetmeyi kullanırsak kullanalım, $y = \sin^{-1} x$'in x'e göre türevi

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

olarak bulunur.

$|u| < 1$ olmak üzere u, x'in türevlenebilir bir fonksiyonu ise, Zincir Kuralını uygulayarak

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1$$

elde ederiz.

ÖRNEK 7 Türev Formülünü Uygulamak

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

■

$y = \tan^{-1} u$'nun Türevi

$y = \tan^{-1} x$'nun türevini, $f(x) = \tan x$ ve $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$ ile Teorem 1'i uygulayarak buluruz. $-\pi/2 < x < \pi/2$ için $\tan x$ pozitif olduğundan Teorem 1 uygulanabilir:

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} && \text{Teorem 1} \\
&= \frac{1}{\sec^2(\tan^{-1} x)} && f'(u) = \sec^2 u \\
&= \frac{1}{1+\tan^2(\tan^{-1} x)} && \sec^2 u = 1 + \tan^2 u \\
&= \frac{1}{1+x^2} && \tan(\tan^{-1} x) = x
\end{aligned}$$

Türev, bütün reel sayılar için tanımlıdır. u, x'in türevlenebilir bir fonksiyonu ise aşağıdaki Zincir Kuralı formunu elde ederiz.

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

ÖRNEK 8 Hareket Eden Bir Parçacık

Bir parçacık x-ekseni üzerinde herhangi bir $t \geq 0$ anındaki konumu $x(t) = \tan^{-1}\sqrt{t}$ olacak şekilde hareket etmektedir. $t = 16$ iken parçacığın hızı nedir?

Çözüm

$$v(t) = \frac{d}{dt}\tan^{-1}\sqrt{t} = \frac{1}{1+(\sqrt{t})^2} \cdot \frac{d}{dt}\sqrt{t} = \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$t = 16$ iken hız

$$v(16) = \frac{1}{1+16} \cdot \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{136}$$

dır.

$y = \sec^{-1} u$'nun Türevi

$0 < x < \pi/2$ ve $\pi/2 < x < \pi$ için sec x'in türevi pozitif olduğundan Teorem 1, ters fonksiyonunun türevlenebildiğini söyler. Teorem 1'deki formülü doğrudan uygulamak yerine $y = \sec^{-1} x$, $|x| > 1$, fonksiyonun türevini kapalı türev Zincir Kuralını kullanarak aşağıdaki gibi alırız:

$$y = \sec^{-1} x$$

$$\sec y = x \qquad \text{Ters Fonksiyon Bağıntısı}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec y) = \frac{d}{dx} x \qquad \text{İki tarafın da } x\text{'e göre türevi}$$

$$\sec y \tan y \frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{Zincir Kuralı}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y} \qquad |x| > 1, y \text{ olduğundan } (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi) \text{ ve } \sec y \tan y \neq 0$$

Sonucu x'e göre ifade etmek üzere

$$\sec y = x \qquad \text{ve} \qquad \tan y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2 - 1}$$

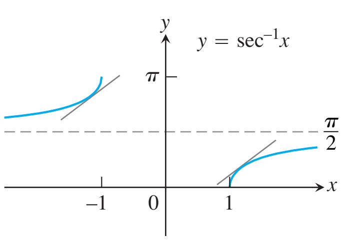
bağıntılarını kullanarak

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

elde ederiz.

İşaret için ($\pm$) bir şey yapabilir miyiz? Şekil 7.30'a bakmak $y = \sec^{-1} x$'in grafiğinin eğiminin daima pozitif olduğunu gösterir. Dolayısıyla

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \begin{cases} +\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{if } x > 1 \\ -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{if } x < -1. \end{cases}$$



ŞEKİL 7.30 $y = \sec^{-1} x$ eğrisinin eğimi hem $x < -1$, hem de $x > 1$ için pozitiftir.

bulunur. Mutlak değer sembolü ile "±" belirsizliğini ortadan kaldıran tek bir formül yazabiliriz:

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

$|u| > 1$ olmak üzere u, x'in türevlenebilir bir fonksiyonu ise aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, \qquad |u| > 1.$$

ÖRNEK 9 Formülü Kullanmak

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sec^{-1}(5x^4) &= \frac{1}{|5x^4|\sqrt{(5x^4)^2-1}}\frac{d}{dx}(5x^4)\\ &= \frac{1}{5x^4\sqrt{25x^8-1}}(20x^3) \qquad 5x^4>0\\ &= \frac{4}{x\sqrt{25x^8-1}}\end{aligned}$$

■

Diğer Üçünün Türevleri

Diğer üç ters trigonometrik fonksiyonun – arkkosinüs, arkkotanjant ve arkkosekant – türevlerini bulmak için aynı tekniği kullanabiliriz, fakat aşağıdaki denklemler sayesinde çok daha kolay bir yol vardır.

Ters Fonksiyon–Ters Co-fonksiyon Özdeşlikleri

$$\cos^{-1}x = \pi/2 - \sin^{-1}x$$
$$\cot^{-1}x = \pi/2 - \tan^{-1}x$$
$$\csc^{-1}x = \pi/2 - \sec^{-1}x$$

Bu özdeşliklerden ilkini (4) Denkleminde görüyoruz. Diğerleri benzer yolla elde edilir. Ters co-fonksiyonların türevlerinin, karşı gelen ters fonksiyonların türevlerinin negatifleri oldukları kolaylıkla görülebilir. Örneğin, $\cos^{-1}x$'in türevi aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x\right) \qquad \text{Özdeşlik}\\ &= -\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)\\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{arcsinüs'ün türevi}\end{aligned}$$

ÖRNEK 10 Arkkotanjant Eğrisine Bir Teğet

$y = \cos^{-1}x$ grafiğine $x = -1$'de teğet olan doğru için bir denklem bulunuz.

Çözüm Önce

$$\cot^{-1}(-1) = \pi/2 - \tan^{-1}(-1) = \pi/2 - (-\pi/4) = 3\pi/4.$$

olduğunu not edelim. Teğetin eğimi

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = -\left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=-1} = -\frac{1}{1+(-1)^2} = -\frac{1}{2}$$

dir. Dolayısıyla teğetin denklemi $y - 3\pi/4 = (-1/2)(x+1)$ dir. ■

Ters trigonometrik fonksiyonların türevleri Tablo 7.3 te özetlenmiştir

TABLO 7.3 Ters trigonometrik fonksiyonların türevleri

1. $$\frac{d(\sin^{-1} u)}{dx} = \frac{du/dx}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad |u| < 1$$

2. $$\frac{d(\cos^{-1} u)}{dx} = -\frac{du/dx}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad |u| < 1$$

3. $$\frac{d(\tan^{-1} u)}{dx} = \frac{du/dx}{1 + u^2}$$

4. $$\frac{d(\cot^{-1} u)}{dx} = -\frac{du/dx}{1 + u^2}$$

5. $$\frac{d(\sec^{-1} u)}{dx} = \frac{du/dx}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}, \quad |u| > 1$$

6. $$\frac{d(\csc^{-1} u)}{dx} = \frac{-du/dx}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}, \quad |u| > 1$$

İntegrasyon Formülleri

Tablo 7.3'teki türev formülleri Tablo 7.4'teki üç yararlı integrasyon formülünü verir. Formüller, sağ taraftaki fonksiyonların türevlerini alarak kolayca sağlanabilir.

TABLO 7.4 Ters trigonometrik fonksiyonlarla hesaplanan integraller

Aşağıdaki formüller herhangi bir $a \neq 0$ sabiti için geçerlidir.

1. $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad (u^2 < a^2 \text{ için geçerli})$$

2. $$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad (\text{Her } u \text{ için geçerli})$$

3. $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C \qquad (|u| > a > 0 \text{ için geçerli})$$

Tablo 7.3'teki türev formüllerinde $a = 1$'dir, fakat çoğu integrasyonda $a \neq 1$'dir ve Tablo 7.4'teki formüller daha yararlıdır.

ÖRNEK 11 İntegral Formüllerini Kullanmak

(a) $$\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \sin^{-1} x \Big]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2}$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x\Big]_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

(c) $\displaystyle\int_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x\Big]_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$ ■

ÖRNEK 12 Dönüşüm ve Tablo 7.4'ü Kullanmak

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(3)^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$ $\quad$ $a = 3$, $u = x$ ile Tablo 7.4, Formül 1

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$ $\quad$ $a = \sqrt{3}$, $u = 2x$ ve $du/2 = dx$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad \text{Formül 1}$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C$$ ■

ÖRNEK 13 Tam Kareye Tamamlamak

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$$

integralini hesaplayın.

Çözüm $\sqrt{4x-x^2}$ ifadesi Tablo 7.4'teki formüllerden hiçbirine uymaz, o yüzden önce tam kareye tamamlama yöntemiyle $4x - x^2$'yi yeniden yazarız:

$$4x - x^2 = -(x^2 - 4x) = -(x^2 - 4x + 4) + 4 = 4 - (x-2)^2.$$

Sonra $a = 2$, $u = x - 2$ ve $du = dx$ koyarak

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} \quad a = 2,\ u = x - 2, \text{ ve } du = dx$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad \text{Tablo 7.4, Formül 1}$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$$ ■

buluruz.

ÖRNEK 14 Tam Kareye Tamamlamak

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+2}$$

integralini hesaplayın.

Çözüm $4x^2 + 4x$ binom ifadesini tam kareye tamamlarız:

$$4x^2 + 4x + 2 = 4(x^2 + x) + 2 = 4\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + 2 - \frac{4}{4}$$

$$= 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 = (2x + 1)^2 + 1$$

Sonra,

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 2} = \int \frac{dx}{(2x + 1)^2 + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 + a^2} \qquad a = 1,\ u = 2x + 1, \text{ ve } du/2 = dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad \text{Tablo 7.4, Formül 2}$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x + 1) + C \qquad a = 1,\ u = 2x + 1$$

buluruz. ■

ÖRNEK 15 Dönüşüm Kullanmak

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 6}}$$

integralini hesaplayın.

Çözüm

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 6}} = \int \frac{du/u}{\sqrt{u^2 - a^2}} \qquad u = e^x,\ du = e^x\,dx,\ dx = du/e^x = du/u,\ a = \sqrt{6}$$

$$= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}}$$

$$= \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C \qquad \text{Tablo 7.4, Formül 3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\sec^{-1}\left(\frac{e^x}{\sqrt{6}}\right) + C$$ ■

ALIŞTIRMALAR 7.7

Ters Trigonometrik Fonksiyonların Bilinen Değerleri

Örnek 1–3'teki gibi referans üçgenler kullanarak 1–12 alıştırmalarındaki açıları bulun.

1. **a.** $\tan^{-1} 1$ **b.** $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ **c.** $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

2. **a.** $\tan^{-1}(-1)$ **b.** $\tan^{-1}\sqrt{3}$ **c.** $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

$\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ **3. a.**

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **c.** $\sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

4. **a.** $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **b.** $\sin^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ **c.** $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

5. **a.** $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **b.** $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ **c.** $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

6. **a.** $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ **b.** $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **c.** $\cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

7. **a.** $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$ **b.** $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ **c.** $\sec^{-1}(-2)$

8. **a.** $\sec^{-1}\sqrt{2}$ **b.** $\sec^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$ **c.** $\sec^{-1} 2$

9. **a.** $\csc^{-1}\sqrt{2}$ **b.** $\csc^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$ **c.** $\csc^{-1} 2$

10. **a.** $\csc^{-1}(-\sqrt{2})$ **b.** $\csc^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ **c.** $\csc^{-1}(-2)$

11. **a.** $\cot^{-1}(-1)$ **b.** $\cot^{-1}(\sqrt{3})$ **c.** $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

12. **a.** $\cot^{-1}(1)$ **b.** $\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ **c.** $\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Trigonometrik Fonksiyon Değerleri

13. $\alpha = \sin^{-1}(5/13)$ ise $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\sec\alpha$, $\csc\alpha$, $\sec\alpha$ ve $\cot\alpha$'yı bulun.

14. $\alpha = \tan^{-1}(4/3)$ ise $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sec\alpha$, $\csc\alpha$ ve $\cot\alpha$'yı bulun.

15. $\alpha = \sec^{-1}(-\sqrt{5})$ ise $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\csc\alpha$ ve $\cot\alpha$'yı bulun.

16. $\alpha = \sec^{-1}(-\sqrt{13}/2)$, ise $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\csc\alpha$, ve $\cot\alpha$'yı bulun.

Trigonometrik ve Ters Trigonometrik Fonksiyonları Hesaplama

17–28 alıştırmalarındaki değerleri hesaplayın.

17. $\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ **18.** $\sec\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$

19. $\tan\left(\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ **20.** $\cot\left(\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

21. $\csc(\sec^{-1} 2) + \cos(\tan^{-1}(-\sqrt{3}))$

22. $\tan(\sec^{-1} 1) + \sin(\csc^{-1}(-2))$

23. $\sin\left(\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

24. $\cot\left(\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) - \sec^{-1} 2\right)$

25. $\sec(\tan^{-1} 1 + \csc^{-1} 1)$ **26.** $\sec(\cot^{-1}\sqrt{3} + \csc^{-1}(-1))$

27. $\sec^{-1}\left(\sec\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ (Yanıt $-\pi/6$ *değildir*.)

28. $\cot^{-1}\left(\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ (Yanıt $-\pi/4$ *değildir*.)

Trigonometrik İfadeleri Bulmak

29–40 alıştırmalarındaki ifadeleri hesaplayın.

29. $\sec\left(\tan^{-1}\frac{x}{2}\right)$ **30.** $\sec(\tan^{-1} 2x)$

31. $\tan(\sec^{-1} 3y)$ **32.** $\tan\left(\sec^{-1}\frac{y}{5}\right)$

33. $\cos(\sin^{-1} x)$ **34.** $\tan(\cos^{-1} x)$

35. $\sin(\tan^{-1}\sqrt{x^2 - 2x})$, $x \geq 2$

36. $\sin\left(\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ **37.** $\cos\left(\sin^{-1}\frac{2y}{3}\right)$

38. $\cos\left(\sin^{-1}\frac{y}{5}\right)$ **39.** $\sin\left(\sec^{-1}\frac{x}{4}\right)$

40. $\sin\sec^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\right)$

Limitler

41–48 alıştırmalarındaki limitleri bulun. (Şüpheye düşerseniz, fonksiyonun grafiğine bakın.)

41. $\lim_{x\to 1^-} \sin^{-1} x$ **42.** $\lim_{x\to -1^+} \cos^{-1} x$

43. $\lim_{x\to\infty} \tan^{-1} x$ **44.** $\lim_{x\to -\infty} \tan^{-1} x$

45. $\lim_{x\to\infty} \sec^{-1} x$ **46.** $\lim_{x\to -\infty} \sec^{-1} x$

47. $\lim_{x\to\infty} \csc^{-1} x$ **48.** $\lim_{x\to -\infty} \csc^{-1} x$

Türev Bulmak

49–70 alıştırmalarında, y'nin uygun değişkene göre türevini bulun.

49. $y = \cos^{-1}(x^2)$ **50.** $y = \cos^{-1}(1/x)$

51. $y = \sin^{-1}\sqrt{2}\,t$ **52.** $y = \sin^{-1}(1 - t)$

53. $y = \sec^{-1}(2s + 1)$ **54.** $y = \sec^{-1} 5s$

55. $y = \csc^{-1}(x^2 + 1)$, $x > 0$

56. $y = \csc^{-1}\frac{x}{2}$

57. $y = \sec^{-1}\frac{1}{t}$, $0 < t < 1$ **58.** $y = \sin^{-1}\frac{3}{t^2}$

59. $y = \cot^{-1}\sqrt{t}$ **60.** $y = \cot^{-1}\sqrt{t - 1}$

61. $y = \ln(\tan^{-1} x)$ **62.** $y = \tan^{-1}(\ln x)$

63. $y = \csc^{-1}(e^t)$ **64.** $y = \cos^{-1}(e^{-t})$

65. $y = s\sqrt{1 - s^2} + \cos^{-1} s$ **66.** $y = \sqrt{s^2 - 1} - \sec^{-1} s$

67. $y = \tan^{-1}\sqrt{x^2 - 1} + \csc^{-1} x$, $x > 1$

68. $y = \cot^{-1}\frac{1}{x} - \tan^{-1} x$ **69.** $y = x\sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$

70. $y = \ln(x^2 + 4) - x\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

İntegral Hesaplamak

71–94 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

71. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$ **72.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

73. $\int \frac{dx}{17 + x^2}$ **74.** $\int \frac{dx}{9 + 3x^2}$

75. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{25x^2 - 2}}$

76. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2 - 4}}$

77. $\displaystyle\int_0^1 \frac{4\,ds}{\sqrt{4 - s^2}}$

78. $\displaystyle\int_0^{3\sqrt{2}/4} \frac{ds}{\sqrt{9 - 4s^2}}$

79. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dt}{8 + 2t^2}$

80. $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{dt}{4 + 3t^2}$

81. $\displaystyle\int_{-1}^{-\sqrt{2}/2} \frac{dy}{y\sqrt{4y^2 - 1}}$

82. $\displaystyle\int_{-2/3}^{-\sqrt{2}/3} \frac{dy}{y\sqrt{9y^2 - 1}}$

83. $\displaystyle\int \frac{3\,dr}{\sqrt{1 - 4(r - 1)^2}}$

84. $\displaystyle\int \frac{6\,dr}{\sqrt{4 - (r + 1)^2}}$

85. $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + (x - 1)^2}$

86. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + (3x + 1)^2}$

87. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x - 1)\sqrt{(2x - 1)^2 - 4}}$

88. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x + 3)\sqrt{(x + 3)^2 - 25}}$

89. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2\cos\theta\,d\theta}{1 + (\sin\theta)^2}$

90. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\csc^2 x\,dx}{1 + (\cot x)^2}$

91. $\displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x\,dx}{1 + e^{2x}}$

92. $\displaystyle\int_1^{e^{\pi/4}} \frac{4\,dt}{t(1 + \ln^2 t)}$

93. $\displaystyle\int \frac{y\,dy}{\sqrt{1 - y^4}}$

94. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 y\,dy}{\sqrt{1 - \tan^2 y}}$

95–104 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

95. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}}$

96. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$

97. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{6\,dt}{\sqrt{3 - 2t - t^2}}$

98. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{6\,dt}{\sqrt{3 + 4t - 4t^2}}$

99. $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2 - 2y + 5}$

100. $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2 + 6y + 10}$

101. $\displaystyle\int_1^2 \frac{8\,dx}{x^2 - 2x + 2}$

102. $\displaystyle\int_2^4 \frac{2\,dx}{x^2 - 6x + 10}$

103. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + 2x}}$

104. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x - 2)\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$

105–112 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

105. $\displaystyle\int \frac{e^{\sin^{-1} x}\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

106. $\displaystyle\int \frac{e^{\cos^{-1} x}\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

107. $\displaystyle\int \frac{(\sin^{-1} x)^2\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

108. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\tan^{-1} x}\,dx}{1 + x^2}$

109. $\displaystyle\int \frac{dy}{(\tan^{-1} y)(1 + y^2)}$

110. $\displaystyle\int \frac{dy}{(\sin^{-1} y)\sqrt{1 - y^2}}$

111. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\sec^2(\sec^{-1} x)\,dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

112. $\displaystyle\int_{2/\sqrt{3}}^2 \frac{\cos(\sec^{-1} x)\,dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

Limitler

113–116 alıştırmalarındaki limitleri bulun.

113. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1} 5x}{x}$

114. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sec^{-1} x}$

115. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\tan^{-1}\frac{2}{x}$

116. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\tan^{-1} 3x^2}{7x^2}$

İntegrasyon Formülleri

117–120 alıştırmalarındaki integrasyon formüllerini doğrulayın.

117. $\displaystyle\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2}\,dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) - \frac{\tan^{-1} x}{x} + C$

118. $\displaystyle\int x^3\cos^{-1} 5x\,dx = \frac{x^4}{4}\cos^{-1} 5x + \frac{5}{4}\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1 - 25x^2}}$

119. $\displaystyle\int (\sin^{-1} x)^2\,dx = x(\sin^{-1} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1 - x^2}\sin^{-1} x + C$

120. $\displaystyle\int \ln(a^2 + x^2)\,dx = x\ln(a^2 + x^2) - 2x + 2a\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

Başlangıç Değer Problemleri

121–124 alıştırmalarındaki başlangıç değer problemlerini çözün.

121. $\displaystyle\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad y(0) = 0$

122. $\displaystyle\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1} - 1, \quad y(0) = 1$

123. $\displaystyle\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1; \quad y(2) = \pi$

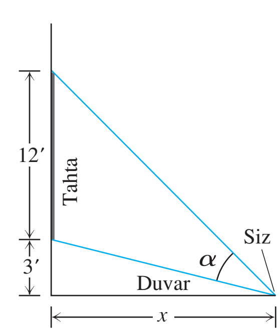
124. $\displaystyle\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad y(0) = 2$

Uygulamalar ve Teori

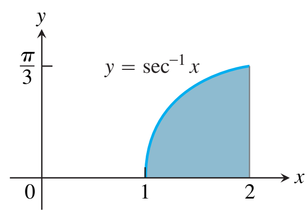
125. Bir sınıfta duvar yanında oturarak sınıfın önünüdeki tahtaya bakıyorsunuz. Tahat 12 ft uzunluğundadır ve yanında oturduğunuz duvarın 3 ft ilerisinden başlar. Karşı duvardan x ft uzaklıktaysanız görme açınızın

$$\alpha = \cot^{-1}\frac{x}{15} - \cot^{-1}\frac{x}{3}$$

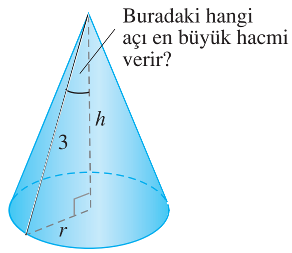
olduğunu gösterin.



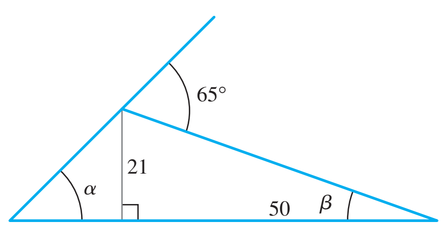
126. $y = \sec^{-1} x$ ve x-ekseni arasında, $x = 1$'den $x = 2$'ye kadar olan bölge (şekilde gösterilen) bir dönel cisim elde etmek üzere y-ekseni etrafında döndürülüyor. Dönel cismin hacmini bulun.



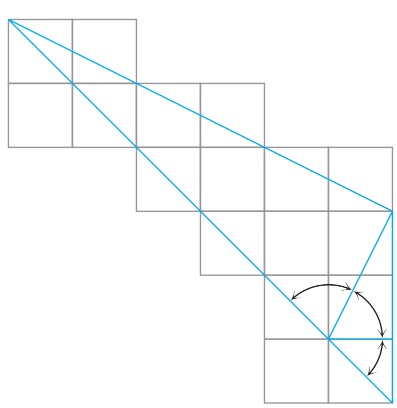
127. Şekilde gösterilen koninin yanal yüksekliği 3 m dir. Koninin hacmini maksimize eden, belirtilen açı ne olmalıdır.



128. α açısını bulun.

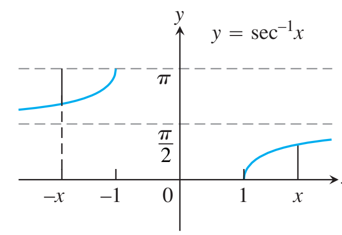


129. Aşağıda $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3 = \pi$ eşitliğinin resmi olmayan bir ispatı verilmiştir. Neler olduğunu açıklayın.



130. $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$ Özdeşliğinin iki elde edilişi

a. (*Geometrik*) $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$'in resimli bir ispatı. Bakın, yapabilirseniz neler olduğunu söyleyin.



b. (*Cebirsel*) Aşağıdaki iki denklemi birleştirerek $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$ özdeşliğini elde edin.

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x \qquad \text{Denklem (3)}$$

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x) \qquad \text{Denklem (5)}$$

131. $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$ Özdeşliği Şekil 7.21, $0 < x < 1$ için özdeşliği tespit eder. $[-1, 1]$'in geri kalanında özdeşliği saptamak üzere için doğrudan hesaplamayla $x = 1$, 0 ve -1 için doğruluğunu gösterin. Sonra, x'in $(-1, 0)$'daki değerleri için $x = -a$, $a > 0$ olsun. (1) ve (3) denklemlerini $\sin^{-1}(-a) + \cos^{-1}(-a)$ toplamına uygulayın.

132. $\tan^{-1} x + \tan^{-1}(1/x)$ toplamının sabit olduğunu gösterin.

133–136 alıştırmalarındaki ifadelerin hangileri tanımlıdır, hangileri tanımlı değildir? Cevaplarınızı açıklayın.

133. a. $\tan^{-1} 2$ **b.** $\cos^{-1} 2$

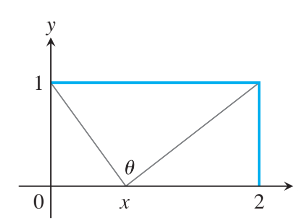
134. a. $\csc^{-1}(1/2)$ **b.** $\csc^{-1} 2$

135. a. $\sec^{-1} 0$ **b.** $\sin^{-1}\sqrt{2}$

136. a. $\cot^{-1}(-1/2)$ **b.** $\cos^{-1}(-5)$

137. (*Alıştırma 125'in devamı*) Görme açınız α'yı maksimize etmek için duvar boyunca iskemlenizin yerini düzenlemek istiyorsunuz. Odanın ön tarafından ne kadar uzakta oturmanız gerekir?

138. Hangi x-değeri aşağıda gösterilen θ açısını maksimize eder? Bu noktada θ ne kadar geniştir? $\theta = \pi - \cot^{-1} x - \cot^{-1}(2 - x)$ olduğunu göstermekle başlayın.



139. (a) ve (b)'deki integrallerin ikisi de doğru olabilir mi? Açıklayın.

a. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \sin^{-1} x + C$$

b. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\int -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\cos^{-1} x + C$$

140. (a) ve (b)'deki integrallerin ikisi de doğru olabilir mi? Açıklayın.

a. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\int -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\cos^{-1} x + C$$

b. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-du}{\sqrt{1-(-u)^2}} \qquad x = -u,\ dx = -du$$

$$= \int \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \cos^{-1} u + C$$

$$= \cos^{-1}(-x) + C \qquad u = -x$$

141.

$$\csc^{-1} u = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1} u$$

bağıntısını kullanarak $\sec^{-1} u$'nun türev formülünden Tablo 7.3'teki $\csc^{-1} u$'nun türev formülünü elde edin.

142. $y = \tan^{-1} x$'in türevinin formülü olan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

formülünü, buna denk olan $\tan y = x$ denkleminin iki tarafının da türevini alarak çıkarınız.

143. Aşağıdaki formülü türetmek için Bölüm 7.1, Teorem 1'deki Türev Kuralını kullanın:

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \qquad |x| > 1.$$

144.

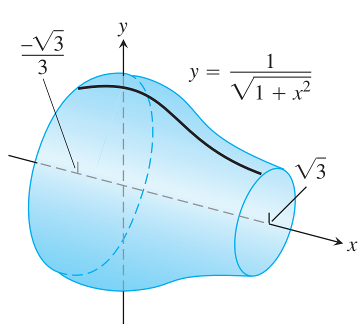
$$\cot^{-1} u = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} u$$

bağıntısını kullanarak $\tan^{-1} u$'nun türev formülünden Tablo 7.3'teki $\cot^{-1} u$'nun türev formülünü türetin.

145. $f(x) = \sin^{-1}\dfrac{x-1}{x+1}$, $x \geq 0$, ve $g(x) = 2\tan^{-1}\sqrt{x}$? fonksiyonlarının özelliği nedir? Açıklayın.

146. $f(x) = \sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ ve $g(x) = \tan^{-1}\dfrac{1}{x}$? fonksiyonlarının özelliği nedir? Açıklayın.

147. Aşağıda gösterilen dönel yüzeyin hacmini bulun.



148. Yay uzunluğu $y = \sqrt{1-x^2}$, $-1/2 \leq x \leq 1/2$ eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

Dilimleyerek Hacim Bulma

149 ve 150 alıştırmalarındaki cisimlerin hacimlerini bulun.

149. Cisim, x-eksenine $x = -1$ ve $x = 1$ noktalarında dik olan düzlemler arasındadır. x-eksenine dik olan dik-kesitleri

a. çapları $y = -1/\sqrt{1+x^2}$ eğrisinden $y = 1/\sqrt{1+x^2}$ eğrisine uzanan çemberlerdir;

b. tabanları $y = -1/\sqrt{1+x^2}$ eğrisinden $y = 1/\sqrt{1+x^2}$ eğrisine uzanan dikey karelerdir.

150. Cisim x-eksenine $x = -\sqrt{2}/2$ ve $x = \sqrt{2}/2$ noktalarında dik olan düzlemler arasındadır. x-eksenine dik olan dik-kesitleri

a. çapları, x-ekseninden $y = 2/\sqrt[4]{1-x^2}$ eğrisine uzanan çemberler;

b. köşegenleri x-ekseninden $y = 2/\sqrt[4]{1-x^2}$ eğrisine uzanan karelerdir.

Hesap Makinesi ve Grafik Araştırmaları

T **151.** Aşağıdaki değerleri bulun.

a. $\sec^{-1} 1.5$ **b.** $\csc^{-1}(-1.5)$ **c.** $\cot^{-1} 2$

152. Aşağıdaki değerleri bulun.

a. $\sec^{-1}(-3)$ **b.** $\csc^{-1} 1.7$ **c.** $\cot^{-1}(-2)$

153–155 alıştırmalarında, her bir bileşke fonksiyonun tanım ve değer kümelerini bulun. Sonra, bileşenleri ayrı ekranlarda çizin. Her durumda grafikler anlamlı mıdır? Cevaplarınızı açıklayın. Gördüğünüz herhangi farklılıkları yorumlayın.

153. a. $y = \tan^{-1}(\tan x)$ **b.** $y = \tan(\tan^{-1} x)$

154. a. $y = \sin^{-1}(\sin x)$ **b.** $y = \sin(\sin^{-1} x)$

155. a. $y = \cos^{-1}(\cos x)$ **b.** $y = \cos(\cos^{-1} x)$

156. $y = \sec(\sec^{-1} x) = \sec(\cos^{-1}(1/x))$'in grafiğini çizin. Ne gördüğünüzü açıklayın.

157. Newton yılanı $y = 4x/(x^2+1)$ Newtom yılanının grafiğini çizin. Sonra, aynı çerçevede $y = 2\sin(2\tan^{-1} x)$'in grafiğini çizin. Ne görüyorsunuz? Açıklayın.

158. $y = (2 - x^2)/x^2$ rasyonel fonksiyonunu çizin. Sonra, aynı çerçevede $y = \cos(2\sec^{-1} x)$'in grafiğini çizin. Ne görüyorsunuz? Açıklayın.

159. $f(x) = \sin^{-1} x$'i, ilk iki türevinin grafiğiyle birlikte çizin. f'nin davranışının ve grafiğinin şeklinin, f' ve f'''nün işaret ve değerleriyle ilişkisini yorumlayın.

160. $f(x) = \tan^{-1} x$'i, ilk iki türevinin grafiğiyle birlikte çizin. f'nin davranışının ve grafiğinin şeklinin, f' ve f'''nün işaret ve değerleriyle ilişkisini yorumlayın.

7.8 Hiperbolik Fonksiyonlar

Hiperbolik fonksiyonlar, e^x ve e^{-x} eksponansiyel fonksiyonlarının kombinasyonları ile oluşturulurlar. Hiperbolik fonksiyonlar bir çok matematiksel ifadeyi basitleştirirler ve uygulamalarda önemlidirler. Örneğin, bir elektrik iletim hattında olduğu gibi, iki ucundan asılmış bir kablodaki gerilmeleri hesaplama gibi problemlerde kullanılırlar. Ayrıca, diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmada önemli rol oynarlar. Bu bölümde, hiperbolik fonksiyonların, grafiklerinin, türevlerinin nasıl hesaplandığının ve neden önemli ters türevler olarak ortaya çıktıklarının kısa bir tanıtımını veriyoruz.

Eksponansiyel Fonksiyonun Çift ve Tek Kısımları

Bölüm 1.4'teki çift ve tek fonksiyon tanımlarını ve grafiklerinin simetrilerini hatırlayın. Bir çift fonksiyon $f(-x) = f(x)$ bağıntısını sağlarken, bir tek fonksiyon $f(-x) = -f(x)$ bağıntısını sağlar. Merkezi orijinde olan bir aralıkta tanımlanan her f fonksiyonu bir çift fonksiyon ve bir tek fonksiyonun toplamı olarak tek bir şekilde yazılabilir. Ayrışma

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{çift kısım}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{tek kısım}}$$

olarak yapılır. e^x'i bu şekilde yazarsak,

$$e^x = \underbrace{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}_{\text{çift kısım}} + \underbrace{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}_{\text{tek kısım}}$$

buluruz. e^x'in, sırasıyla, kosinüs hiperbolik ve sinüs hiperbolik olarak adlandırılan çift ve tek kısımlarının özel yararları vardır. Elastik cisimlerdeki dalga hareketlerini ve metal soğutucu kanatlardaki sıcaklık dağılımlarını tanımlarlar. St. Louis'deki Batıya giden Gateway Arch'ın merkez doğrusu ağırlıklandırılmış bir hiperbolik kosinüs eğrisidir.

Tanımlar ve Özdeşlikler

Kosinüs hiperbolik ve sinüs hiperbolik fonksiyonları Tablo 7.5'teki ilk iki denklemle tanımlanırlar. Tablo ayrıca tanjant, kotanjant, sekant ve kosekant hiperbolik fonksiyonlarını da verir. Göreceğimiz gibi, hiperbolik fonksiyonlar isimlerini aldıkları trigonometrik fonksiyonlarla bir çok benzerlik gösterirler. (Alıştırma 84'e de bakın.)

$\cosh x$ gösterimi genellikle "koş x" ve $\sinh x$ gösterimi "sinç x" olarak okunur.

Hiperbolik fonksiyonlar Tablo 7.6'daki özdeşlikleri sağlarlar. Bunlar işaret farkları dışında, trigonometrik fonksiyonlardan bildiğimiz özdeşliklere benzerler.

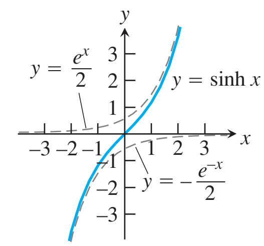
İkinci denklem aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} 2 \sinh x \cosh x &= 2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \\ &= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \\ &= \sinh 2x \end{aligned}$$

TABLO 7.5 Altı temel hiperbolik fonksiyon

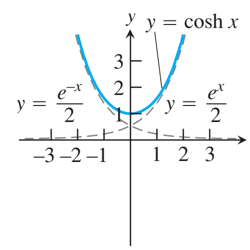
ŞEKİL 7.31

x'in sinüs hiperboliği: $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$



(a)

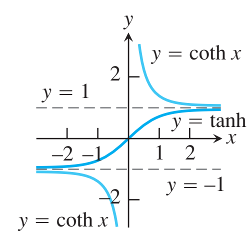
x'in kosinüs hiperboliği: $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$



(b)

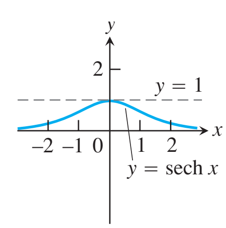
Tanjant hiperbolik: $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Kotanjant hiperbolik: $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$



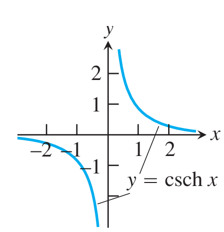
(c)

Sekant hiperbolik: $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$



(d)

Kosekant hiperbolik: $\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$



(e)

TABLO 7.6 Hiperbolik fonksiyon özdeşlikleri

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$
$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$
$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$
$$\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$$
$$\coth^2 x = 1 + \operatorname{csch}^2 x$$

Diğer özdeşlikler, hiperbolik fonksiyonların tanımlarında dönüşümler ve cebir kullanarak benzer şekilde elde edilirler. Birçok standart fonksiyon gibi, hiperbolik fonksiyonlar ve tersleri, hesap makineleri ile, bu amaca yönelik özel tuşlar veya temel tuşlardan oluşan bir dizi kullanarak, kolaylıkla hesaplanırlar.

Türevler ve İntegraller

Türevlenebilir e^x ve e^{-x}'in rasyonel kombinasyonları olan hiperbolik fonksiyonların tanımlı oldukları her noktada türevleri vardır (Tablo 7.7). Burada da, trigonometrik fonksiyonlarla benzerlikler vardır. Tablo 7.7'deki türev formülleri Tablo 7.8'deki integral formüllerini verirler.

TABLE 7.7 Hiperbolik fonksiyonların türevleri

$$\frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$$

TABLE 7.8 Hiperbolik fonksiyonların integral formülleri

$$\int \sinh u \, du = \cosh u + C$$

$$\int \cosh u \, du = \sinh u + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C$$

Türev formülleri, e^u'nun türevinden elde edilirler:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sinh u) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right) && \text{sinh } u\text{'nun tanımı}\\ &= \frac{e^u \, du/dx + e^{-u} \, du/dx}{2} && e^u\text{'nun türevi}\\ &= \cosh u \frac{du}{dx} && \text{cosh } u\text{'nun tanımı}\end{aligned}$$

Bu, ilk türev formülünü verir.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sinh u}\right) && \text{csch } u\text{'nun tanımı}\\ &= -\frac{\cosh u}{\sinh^2 u}\frac{du}{dx} && \text{Bölüm Kuralı}\\ &= -\frac{1}{\sinh u}\frac{\cosh u}{\sinh u}\frac{du}{dx} && \text{Terimleri yeniden yazmak}\\ &= -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx} && \text{csch } u \text{ ve coth } u\text{'nun tanımı}\end{aligned}$$

Bu hesaplama da son formülü verir. diğerleri benzer şekilde elde edilirler.

ÖRNEK 1 Türevleri ve İntegralleri Bulmak

(a) $$\frac{d}{dt}\left(\tanh\sqrt{1+t^2}\right) = \operatorname{sech}^2\sqrt{1=t^2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1+t^2}\right)$$
$$= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}$$

(b) $$\int \coth 5x\,dx = \int \frac{\cosh 5x}{\sinh 5x}dx = \frac{1}{5}\int\frac{du}{u}$$ $u = \sinh 5x$, $du = 5\cosh 5x\,dx$
$$= \frac{1}{5}\ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|\sinh 5x| + C$$

(c) $$\int_0^1 \sinh^2 x\,dx = \int_0^1 \frac{\cosh 2x - 1}{2}dx$$ Tablo 7.6
$$= \frac{1}{2}\int_0^1(\cosh 2x - 1)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sinh 2x}{2} - x\right]_0^1$$
$$= \frac{\sinh 2}{4} - \frac{1}{2} \approx 0.40672$$ Bir hesap makinesi ile hesaplayın

(d) $$\int_0^{\ln 2} 4e^x\sinh x\,dx = \int_0^{\ln 2}4e^x\frac{e^x - e^{-x}}{2}dx = \int_0^{\ln 2}(2e^{2x} - 2)\,dx$$
$$= \left[e^{2x} - 2x\right]_0^{\ln 2} = (e^{2\ln 2} - 2\ln 2) - (1 - 0)$$
$$= 4 - 2\ln 2 - 1$$
$$\approx 1.6137$$ ■

Ters Hiperbolik Fonksiyonlar

Altı hiperbolik fonksiyonun tersleri integrasyonda çok kullanışlıdır. $d(\sinh x)/dx = \cosh x > 0$ olduğundan, sinüs hiperbolik, x'in artan bir fonksiyonudur. Tersini

$$y = \sinh^{-1} x$$

ile gösteririz. $-\infty < x < \infty$ aralığındaki her x için, $y = \sinh^{-1} x$'in değeri, sinüs hiperboliği x olan sayıdır. $y = \sinh x$ ve $y = \sinh^{-1} x$'in grafikleri Şekil 7.32a'da gösterilmektedir.

$y = \cosh x$ fonksiyonu, Şekil 7.31'deki grafiğinden görebileceğimiz gibi, bire-bir değildir. Fakat kısıtlanmış $y = \cosh x$, $x \geq 0$, fonksiyonu bire-bir dir ve dolayısıyla

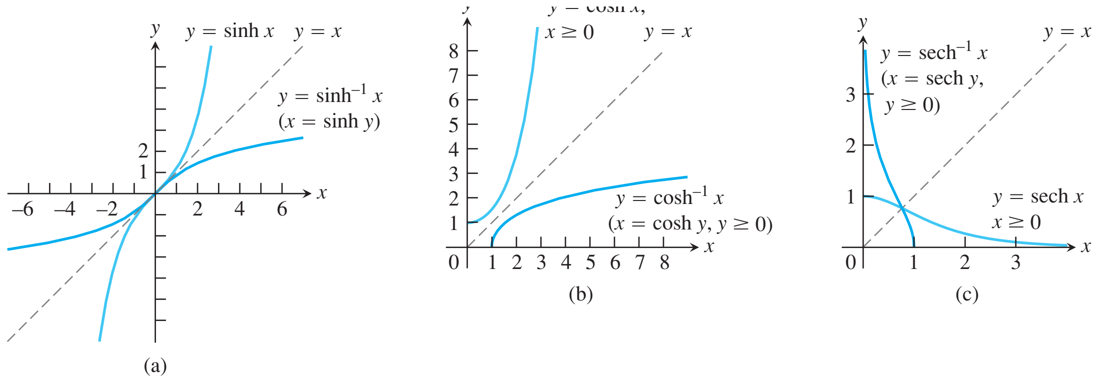
$$y = \cosh^{-1} x$$

ile gösterilen bir tersi vardır. Her $x \geq 1$ değeri için, $y = \cosh^{-1} x$, $0 \leq y < \infty$ aralığında hiperbolik kosinüsü x olan sayıdır. $y = \cosh x$, $x \geq 0$ ve $y = \cosh^{-1} x$ fonksiyonlarının grafikleri Şekil 7.32b'de gösterilmektedir.

$y = \cosh x$ gibi, $y = \operatorname{sech} x = 1/\cosh x$ de bire-bir değildir, fakat x'in negatif olmayan değerlerine kısıtlanmış şeklinin bir tersi vardır ve

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x$$

ile gösterilir. $(0, 1]$ aralığındaki her x değeri için, $y = \operatorname{sech}^{-1} x$, negatif olmayan ve sekant hiperboliği x olan sayıdır. $y = \operatorname{sech} x$, $x \geq 0$, ve $y = \operatorname{sech}^{-1} x$'in grafikleri Şekil 7.32(c)'de gösterilmektedir.

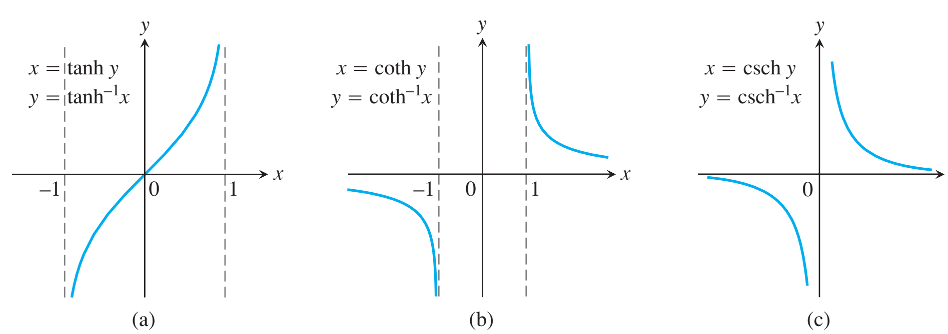


ŞEKİL 7.32 Ters sinüs, kosinüs ve sekant hiperboliğin grafikleri. $y = x$ doğrusuna göre simetrilere dikkat edin.

Tanjant, kotanjant ve kosecant hiperbolik fonksiyonları tanım aralıklarında bire-bir dir ve

$$y = \tanh^{-1} x, \qquad y = \coth^{-1} x, \quad y = \operatorname{csch}^{-1} x$$

ile tanımlanan tersleri vardır. Bu fonksiyonların grafikleri Şekil 7.33'te verilmektedir.



ŞEKİL 7.33 Ters tanjant, kotanjant ve kosekant hiperboliğin grafikleri.

TABLO 7.9 Ters hiperbolik fonksiyonlar için bağıntılar

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1} \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \sinh^{-1} \frac{1}{x}$$

$$\coth^{-1} x = \tanh^{-1} \frac{1}{x}$$

Yararlı Bağıntılar

Tablo 7.9'daki bağıntıları, sadece $\operatorname{sech}^{-1} x$, $\operatorname{csch}^{-1} x$ ve $\coth^{-1} x$'in değerlerini veren hesap makinelerinde $\cosh^{-1} x$, $\sinh^{-1} x$ ve $\tanh^{-1} x$'in değerlerini hesaplamakta kullanırız. Bu bağıntılar tanımların doğrudan birer sonucudur. Örneğin, $0 \le x \le 1$ ise,

$$\operatorname{sech}\left(\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{\cosh\left(\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x$$

dir.

Bu nedenle, sekant hiperbolik (0, 1] üzerinde bire-bir olduğundan

$$\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sech}^{-1} x$$

elde edilir.

Türevler ve İntegraller

Ters hiperbolik fonksiyonların başlıca kullanımları Tablo 7.10'daki türev formüllerini tersine çeviren integrasyonlarda yatar.

TABLO 7.10 Ters hiperbolik fonksiyonların türevleri

$$\frac{d(\sinh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\cosh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \qquad u > 1$$

$$\frac{d(\tanh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1$$

$$\frac{d(\coth^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \qquad |u| > 1$$

$$\frac{d(\operatorname{sech}^{-1} u)}{dx} = \frac{-du/dx}{u\sqrt{1-u^2}}, \qquad 0 < u < 1$$

$$\frac{d(\operatorname{csch}^{-1} u)}{dx} = \frac{-du/dx}{|u|\sqrt{1+u^2}}, \qquad u \neq 0$$

$\tanh^{-1} u$ ve $\coth^{-1} u$'nun türev formüllerindeki $|u| < 1$ ve $|u| > 1$ kısıtlamaları bu fonksiyonların değerlerindeki doğal kısıtlamalardan gelir. (Şekil 7.33a ve b'ye bakın.) $|u| < 1$ ile $|u| > 1$ arasındaki ayrım türev formüllerini integral formüllerine döndürdüğümüzde önem kazanır. $|u| < 1$ ise, $1/(1-u^2)$'nin integrali $\tanh^{-1} u + C$ olur. $|u| > 1$ ise, integral $\coth^{-1} u + C$ olur.

Ters hiperbolik fonksiyonların türevlerinin nasıl bulunduğunu, $d(\coth^{-1} u)/dx$'i hesapladığımız Örnek 2'de gösteriyoruz. Diğer türevler benzer şekilde elde edilirler.

ÖRNEK 2 Ters Hiperbolik Kosinüs'ün Türevi

u, x'in değerleri 1'den büyük türevlenebilir bir fonksiyonu ise,

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

olduğunu gösterin.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Sonya Kovalevsky
(1850–1891)

Çözüm Önce $x > 1$ için, $f(x) = \cosh x$ ve $f^{-1}(x) = \cosh^{-1} x$ ile Teorem 1'i uygulayarak $f(x) = \cosh^{-1} x$'in türevini buluruz. $0 < x$ olduğundan Teorem 1 uygulanabilir.

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} && \text{Teorem 1}\\
&= \frac{1}{\sinh(\cosh^{-1} x)} && f'(u) = \sinh u\\
&= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\cosh^{-1} x) - 1}} && \cosh^2 u - \sinh^2 u = 1,\ \sinh u = \sqrt{\cosh^2 u - 1}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} && \cosh(\cosh^{-1} x) = x
\end{aligned}$$

Kısaca,

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

dir. Zincir Kuralı istenilen sonucu verir:

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}.$$ ■

Örnek 2'de olduğu gibi, Teorem 1'i doğrudan uygulamak yerine, kapalı türev alma ve Zincir Kuralı'nı kullanarak da $y = \cosh^{-1} x$, $x > 1$'ın türevini bulabiliriz:

$$\begin{aligned}
y &= \cosh^{-1} x\\
x &= \cosh y && \text{Eşdeğer denklem}\\
1 &= \sinh y \frac{dy}{dx} && x\text{'e göre türev alma ve Zincir Kuralı}\\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} && x > 1 \text{ olduğu için, } y > 0 \text{ ve } \sinh y > 0\\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} && \cosh y = x
\end{aligned}$$

Uygun değişken değişimleriyle, Tablo 7.10'daki türev formülleri Tablo 7.11'deki integrasyon formüllerini verirler. Tablo 7.11'deki her formül, sağ taraftaki ifadenin türevini alarak sağlanabilir.

ÖRNEK 3 Tablo 7.11'i Kullanmak

$$\int_0^1 \frac{2\,dx}{\sqrt{3 + 4x^2}}$$

integralini hesaplayın.

TABLE 7.11 Ters hiperbolik fonksiyonları veren integraller

1. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad a > 0$

2. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad u > a > 0$

3. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C & u^2 < a^2 \text{ ise} \\ \frac{1}{a}\coth^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, & u^2 > a^2 \text{ ise} \end{cases}$

4. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad 0 < u < a$

5. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{csch}^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C, \qquad u \neq 0 \text{ ve } a > 0$

Çözüm Belirsiz integral

$$\int \frac{2\,dx}{\sqrt{3 + 4x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} \qquad u = 2x, \quad du = 2\,dx, \quad a = \sqrt{3}$$

$$= \sinh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad \text{Tablo 7.11'deki formül}$$

$$= \sinh^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

olarak bulunur. Dolayısıyla,

$$\int_0^1 \frac{2\,dx}{\sqrt{3 + 4x^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)\Bigg]_0^1 = \sinh^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \sinh^{-1}(0)$$

$$= \sinh^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - 0 \approx 0.98665$$

bulunur. ■

ALIŞTIRMALAR 7.8

Hiperbolik Fonksiyonların Değerleri ve Bağıntıları

1–4 alıştırmalarının her biri sinh x veya cosh x'in bir değerini verir. Tanımları ve $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ bağıntısını kullanarak diğer beş hiperbolik fonksiyonu bulun.

1. $\sinh x = -\frac{3}{4}$

2. $\sinh x = \frac{4}{3}$

3. $\cosh x = \frac{17}{15}, \quad x > 0$

4. $\cosh x = \frac{13}{5}, \quad x > 0$

5–10 alıştırmalarındaki ifadeleri yeniden yazın ve sonuçları elinizden geldiğince sadeleştirin.

5. $2\cosh(\ln x)$

6. $\sinh(2\ln x)$

7. $\cosh 5x + \sinh 5x$

8. $\cosh 3x - \sinh 3x$

9. $(\sinh x + \cosh x)^4$

10. $\ln(\cosh x + \sinh x) + \ln(\cosh x - \sinh x)$

11.

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

ifadelerini kullanarak aşağıdakileri gösterin.

a. $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

b. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$.

12. $\cosh x$ ve $\sinh x$'in tanımlarını kullanarak

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

olduğunu gösterin.

Türevler

13–24 alıştırmalarında y'nin uygun değişkene göre türevini bulun.

13. $y = 6\sinh \frac{x}{3}$

14. $y = \frac{1}{2}\sinh(2x+1)$

15. $y = 2\sqrt{t}\tanh\sqrt{t}$

16. $y = t^2 \tanh\frac{1}{t}$

17. $y = \ln(\sinh z)$

18. $y = \ln(\cosh z)$

19. $y = \operatorname{sech}\theta(1 - \ln \operatorname{sech}\theta)$

20. $y = \operatorname{csch}\theta(1 - \ln \operatorname{csch}\theta)$

21. $y = \ln\cosh v - \frac{1}{2}\tanh^2 v$

22. $y = \ln\sinh v - \frac{1}{2}\coth^2 v$

23. $y = (x^2+1)\operatorname{sech}(\ln x)$

(*İpucu:* Türev almadan önce, eksponansiyel cinsinden ifade edin ve sadeleştirin.)

24. $y = (4x^2 - 1)\operatorname{csch}(\ln 2x)$

25–36 alıştırmalarında, y'nin uygun değişkene göre türevini bulun.

25. $y = \sinh^{-1}\sqrt{x}$

26. $y = \cosh^{-1} 2\sqrt{x+1}$

27. $y = (1-\theta)\tanh^{-1}\theta$

28. $y = (\theta^2 + 2\theta)\tanh^{-1}(\theta+1)$

29. $y = (1-t)\coth^{-1}\sqrt{t}$

30. $y = (1-t^2)\coth^{-1} t$

31. $y = \cos^{-1} x - x\operatorname{sech}^{-1} x$

32. $y = \ln x + \sqrt{1-x^2}\operatorname{sech}^{-1} x$

33. $y = \operatorname{csch}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\theta}$

34. $y = \operatorname{csch}^{-1} 2^{\theta}$

35. $y = \sinh^{-1}(\tan x)$

36. $y = \cosh^{-1}(\sec x), \quad 0 < x < \pi/2$

İntegrasyon Formülleri

37–40 alıştırmalarındaki integralleri doğrulayın.

37. a. $\int \operatorname{sech} x\, dx = \tan^{-1}(\sinh x) + C$

b. $\int \operatorname{sech} x\, dx = \sin^{-1}(\tanh x) + C$

38. $\int x \operatorname{sech}^{-1} x\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sech}^{-1} x - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C$

39. $\int x\coth^{-1} x\, dx = \frac{x^2-1}{2}\coth^{-1} x + \frac{x}{2} + C$

40. $\int \tanh^{-1} x\, dx = x\tanh^{-1} x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$

Belirsiz İntegraller

41–50 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

41. $\int \sinh 2x\, dx$

42. $\int \sinh\frac{x}{5}\, dx$

43. $\int 6\cosh\left(\frac{x}{2} - \ln 3\right) dx$

44. $\int 4\cosh(3x - \ln 2)\, dx$

45. $\int \tanh\frac{x}{7}\, dx$

46. $\int \coth\frac{\theta}{\sqrt{3}}\, d\theta$

47. $\int \operatorname{sech}^2\left(x - \frac{1}{2}\right) dx$

48. $\int \operatorname{csch}^2(5-x)\, dx$

49. $\int \frac{\operatorname{sech}\sqrt{t}\tanh\sqrt{t}\, dt}{\sqrt{t}}$

50. $\int \frac{\operatorname{csch}(\ln t)\coth(\ln t)\, dt}{t}$

Belirli İntegraller

51–60 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

51. $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \coth x\, dx$

52. $\int_0^{\ln 2} \tanh 2x\, dx$

53. $\int_{-\ln 4}^{-\ln 2} 2e^{\theta}\cosh\theta\, d\theta$

54. $\int_0^{\ln 2} 4e^{-\theta}\sinh\theta\, d\theta$

55. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cosh(\tan\theta)\sec^2\theta\, d\theta$

56. $\int_0^{\pi/2} 2\sinh(\sin\theta)\cos\theta\, d\theta$

57. $\int_1^2 \frac{\cosh(\ln t)}{t}\, dt$

58. $\int_1^4 \frac{8\cosh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

59. $\int_{-\ln 2}^{0} \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

60. $\int_0^{\ln 10} 4\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Ters Hiperbolik Fonksiyonları ve Bunlarla İlgili İntegralleri Hesaplamak

Bir hesap makinesinde hiperbolik fonksiyon tuşları yoksa, ters hiperbolik fonksiyonları aşağıdaki tabloda gösterildiği şekilde logaritmalar cinsinden ifade edilerek hesaplanabilir.

$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$,	$-\infty < x < \infty$
$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$,	$x \geq 1$
$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$,	$\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$,	$0 < x \leq 1$
$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{\lvert x\rvert}\right)$,	$x \neq 0$
$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$,	$\lvert x\rvert > 1$

Bu tablodaki formülleri kullanarak 61–66 alıştırmalarındaki sayıları doğal logaritmalar cinsinden ifade edin.

61. $\sinh^{-1}(-5/12)$ **62.** $\cosh^{-1}(5/3)$

63. $\tanh^{-1}(-1/2)$ **64.** $\coth^{-1}(5/4)$

65. $\operatorname{sech}^{-1}(3/5)$ **66.** $\operatorname{csch}^{-1}(-1/\sqrt{3})$

67–74 alıştırmalarındaki integralleri

a. ters hiperbolik fonksiyonlar

b. doğal logaritmalar cinsinden hesaplayın.

67. $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$ **68.** $\int_0^{1/3} \frac{6\,dx}{\sqrt{1+9x^2}}$

69. $\int_{5/4}^{2} \frac{dx}{1-x^2}$ **70.** $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$

71. $\int_{1/5}^{3/13} \frac{dx}{x\sqrt{1-16x^2}}$ **72.** $\int_1^{2} \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$

73. $\int_0^{\pi} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ **74.** $\int_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$

Uygulamalar ve Teori

75. a. Bir f fonksiyonu orijin etrafında simetrik bir aralıkta tanımlıysa (yani f x'te tanımlıysa $-x$'te de tanımlıdır),

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} \qquad (1)$$

olduğunu gösterin. Sonra, $(f(x)+f(-x))/2$'nin çift, $(f(x)-f(-x))/2$ 'nin tek olduğunu gösterin.

b. f'nin kendisi (i) çift veya (ii) tek ise (1) denklemi oldukça basitleşir. Yeni denklemler nedir? Yanıtınızı açıklayın.

76. $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $-\infty < x < \infty$ formülünü elde edin. Elde ederken karekökte neden eksi yerine artı işareti kullandığınızı açıklayın.

77. Paraşütle atlama Durgun konumdan yerçekiminin etkisi ile düşen m kütleli bir cisim hızının karesiyle orantılı bir dirençle karşılaşırsa, düşüşün t saniyesinde cismin hızı, k cismin aerodinamik özeliklerine ve havanın yoğunluğuna bağlı bir sabit olmak üzere,

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

diferansiyel denklemini sağlar. (Düşüşün, havanın yoğunluğundaki değişimin düşüşü etkilemeyecek kadar kısa olduğunu kabul ediyoruz.

a.

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t\right)$$

ifadesinin diferansiyel denklemi ve $t = 0$ iken $v = 0$ başlangıç koşulunu sağladığını gösterin.

b. Cismin *sınır hızı*, $\lim_{t\to\infty} v$'yi bulun.

c. 160 lb'lik ($mg = 160$) bir paraşütçü için, zaman saniye ve mesafe fit olarak verilmek üzere, k'nin tipik değeri 0.005'tir. Paraşütçünün sınır hızı nedir?

78. Büyüklükleri yerdeğiştirmeyle orantılı ivmeler t anında bir koordinat ekseninde ilerleyen bir cismin konumunun

a. $s = a\cos kt + b\sin kt$

b. $s = a\cosh kt + b\sinh kt$

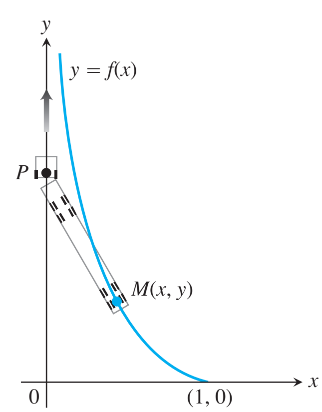
olduğunu varsayın. İki durumda da, d^2s/dt^2 ivmesinin s ile orantılı, fakat birinci durumda orijine yönelmişken ikinci durumda orijinden uzaklaşıyor olduğunu gösterin.

79. Traktör römorkları ve traktriks Bir traktör römorku bir yan caddeye veya yola geçerken, arka tekerlekleri aşağıdaki gibi bir eğri izler (Bazen arka tekerleklerin kaldırıma çıkmalarının nedeni budur). Arka tekerlekleri x-ekseninde, birim uzunluklu bir çubukla orijindeki arabayı temsil eden P noktasına bağlanmış olan (1, 0) noktasındaki bir M kütlesi olarak kabul edersek, eğri için bir denklem bulabiliriz. P noktası y-ekseninde ilerlerken, M'yi de arkasından sürükler. Latince "çekmek" anlamına gelen tractrum kelimesinden türetilmiş traktriks adı verilen M'nin izlediği eğrinin aşağıdaki başlangıç değer problemini çözen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği olduğu gösterilebilir:

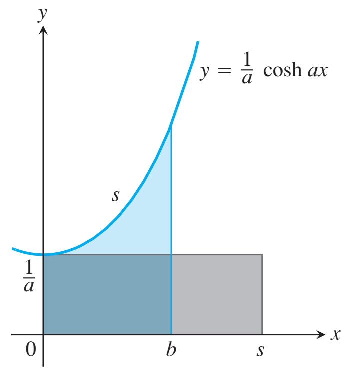
Diferansiyel denklem: $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Başlangıç koşulu: $y = 0$ when $x = 1$.

Başlangıç değer problemini çözerek eğrinin denklemini bulun. (Bir ters hiperbolik fonksiyona ihtiyacınız vardır).



80. Alan Birinci dörtte bir bölgede bulunan ve $y = (1/a)\cosh ax$ eğrisi, koordinat eksenleri ve $x = b$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin alanının, yüksekliği $1/a$ ve s, $x = 0$'dan $x = b$' ye kadar eğrinin uzunluğu olmak üzere, uzunluğu s olan bir dikdörtgenin alanıyla eşit olduğunu gösterin.(Şekle bakın.)

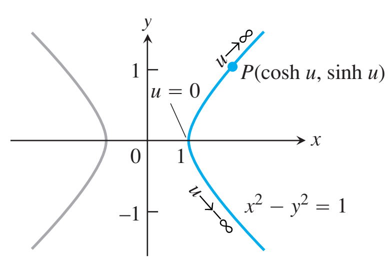


81. Hacim Birinci dörtte bir bölgede bulunan bir bölge, üstten $y = \cosh x$ eğrisi, alttan $y = \sinh x$ eğrisi, soldan ve sağdan y-ekseni ve $x = 2$ doğrusuyla sınırlanmaktadır. Bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilecek cismin hacmini bulun.

82. Hacim $y = \operatorname{sech} x$, x-ekseni ve $x = \pm \ln \sqrt{3}$ doğrularıyla sınırlanan bölge x-ekseni etrafında döndürülerek bir cisim üretiliyor. Cismin hacmini bulun.

83. Yay uzunluğu $(1/2)\cosh 2x$ eğrisinin $x = 0$'dan $x = \ln\sqrt{5}$'e kadar olan parçasının uzunluğunu bulun.

84. Hiperbolik fonksiyonlardaki hiperbolik *Hiperbolik* isminin nereden geldiğini merak ediyorsanız, yanıtı şudur: $x = \cos u$ ve $y = \sin u$ birim çember üzerindeki (x, y) noktalarıyla belirlenirken, $x = \cosh u$ ve $y = \sinh u$ fonksiyonları $x^2 - y^2 = 1$ birim hiperbolünün sağ taraftaki dalının üzerindeki (x, y) noktalarıyla belirlenirler.



$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ olduğundan, $(\cosh u, \sinh u)$ noktası, her u değeri için, $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolünün sağ taraftaki dalında bulunur (Alıştırma 84).

Hiperbolik ve dairesel fonksiyonlar arasındaki başka bir benzerlik de, $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolünün sağ taraftaki dalının noktalarının $(\cosh u, \sinh u)$ koordinatlarındaki u değişkeninin, şekildeki AOP bölgesinin alanının iki katı olmasıdır. Bunun nedenini anlamak için, aşağıdaki adımları gerçekleştirin.

a. AOP bölgesinin alanının aşağıdaki formülle verildiğini gösterin:

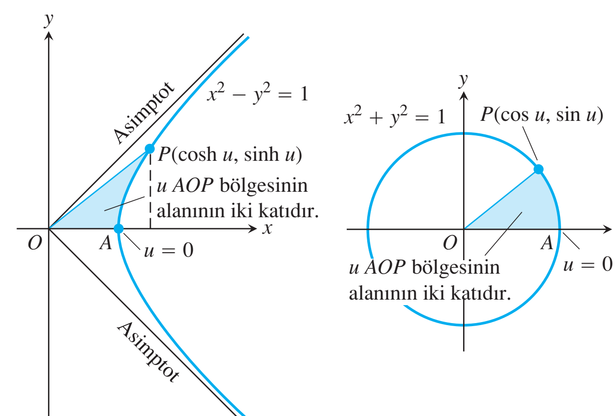
$$A(u) = \frac{1}{2}\cosh u \sinh u - \int_1^{\cosh u} \sqrt{x^2 - 1}\, dx.$$

b. (a) şıkkındaki denklemin iki tarafının da u'ya göre türevini alarak

$$A'(u) = \frac{1}{2}$$

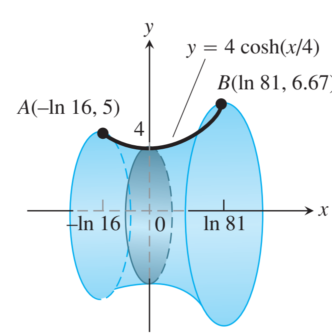
olduğunu gösterin.

c. Bu son denklemden $A(u)$'yu çözün. $A(0)$'ın değeri nedir? Çözümünüzdeki integrasyon sabiti C'nin değeri nedir? C biliniyorsa, çözümünüz u ile $A(u)$ arasındaki ilişki hakkında ne söyler?



Hiperbolik ve dairesel fonksiyonlar arasındaki benzerliklerden biri bu iki diyagramla ortaya konur (Alıştırma 84).

85. Minimal bir yüzey $y = 3\cosh(x/4)$, $-\ln 16 \le x \le \ln 81$, eğrisinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle taranan yüzeyin alanını bulun.



Şekildeki A ve B noktalarını birleştiren bütün türevlenebilir fonksiyonların arasında, $y = 4\cosh(x/4)$ eğrisinin en küçük alanlı yüzeyi oluşturacağı gösterilebilinir. A ve B'deki uç çemberlerin telden yapılmış olduğunu ve bunları bir sabun-film çözeltisine soktuğunuzu varsayarsanız, çemberleri birleştiren yüzey, eğrinin taradığı yüzey olacaktır.

T **86. a.** $y = \cosh x$, $-\ln 2 \le x \le \ln 2$, eğrisinin merkezini bulun.

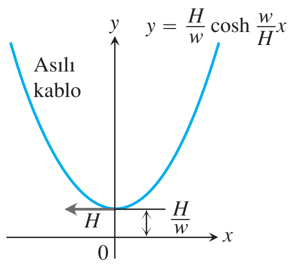
b. Koordinatları 2 ondalık basamak hassaslıkta hesaplayın. Sonra eğriyi çizin ve merkezin eğriyle olan ilişkisini göstermek için merkezi işaretleyin.

Asılı Kablolar

87. Bir destekten diğerine uzanan ve serbetçe sarkan, telefon veya TV kablosu gibi bir kablo hayal edin. Kablonun birim uzunluktaki ağırlığı w ve en alt noktasındaki yatay gerilim, uzunluğu H olan bir vektördür. Kablonun bulunduğu düzlem için, yatay eksen x-ekseni, yerçekimi kuvveti aşağı doğru, pozitif y-ekseni yukarı doğru ve kablonun en alt noktası y-ekseni üzerindeki $y = H/w$ noktasında olacak şekilde bir koordinat sistemi seçersek (Şekle bakın), kablonun

$$y = \frac{H}{w}\cosh\frac{w}{H}x$$

kosinüs hiperbolik eğrisi üzerinde bulunduğu gösterilebilir.

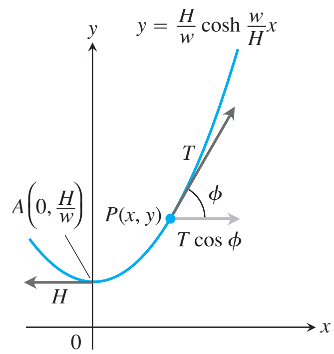


Böyle bir eğriye bazen **zincir eğrisi** veya Latince'de "zincir" anlamına gelen *catena* kelimesinden üretilmiş olan **katener** denir.

a. $P(x, y)$ kablodaki herhangi bir noktayı temsil etsin. 2. Şekil P'deki gerilimi, uzunluğu (büyüklüğü) T olan bir vektör olarak göstermenin yanı sıra en alt A noktasındaki H gerilimini de gösterir. Kablonun P noktasındaki eğiminin aşağıdaki gibi olduğunu gösterin:

$$\tan\phi = \frac{dy}{dx} = \sinh\frac{w}{H}x$$

b. (a) şıkkındaki sonucu ve P'deki gerilimin H'deki gerilime eşit olması gerektiğini (kablo hareket etmiyor) kullanarak, $T = wy$ olduğunu gösterin. Bu $P(x, y)$'deki gerilimin kablonun y biriminin ağırlığına eşit olduğunu gösterir.



88. (*Alıştırma 87'nin devamı*) Alıştırma 87'nin şeklindeki AP yayının uzunluğu, $a = w/H$ olmak üzere, $s = (1/a)\sinh ax$' tir. P'nin koordinatlarının s cinsinden

$$x = \frac{1}{a}\sinh^{-1} as, \qquad y = \sqrt{s^2 + \frac{1}{a^2}}$$

olarak ifade edilebileceğini gösterin.

89. Bir kablodaki sarkma ve yatay gerilim 32 ft uzunluğunda ve 2 lb/ft ağırlığında bir kablo 30 ft aralıklı iki direğe aynı seviyede bağlanmıştır.

a. Kabloyu

$$y = \frac{1}{a}\cosh ax, \quad -15 \le x \le 15$$

denklemiyle modelleyin. Alıştırma 88'deki bilgiyi kullanarak a'nın aşağıdaki denklemi sağldığını gösterin.

$$16a = \sinh 15a \qquad (2)$$

T **b.** (2) denklemini grafik olarak, $y = 16a$ ve $y = \sinh 15a$ denklemlerinin ay-düzleminde nerede kesiştiklerini tahmin ederek çözün.

T **c.** (2) denkleminden a'yı sayısal olarak çözün. Çözümünüzü (b) şıkkında bulduğunuz değerle karşılaştırın.

d. Kablonun en alt ucundaki yatay gerilimi hesaplayın.

T **e.** (c) de bulduğunuz a değerlerini kullanarak

$$y = \frac{1}{a}\cosh ax$$

katenerini $-15 \le x \le 15$ aralığında çizin. Kablonun merkezindeki sarkmayı tahmin edin.

Bölüm 7 Tekrar Soruları

1. Hangi fonksiyonların tersi vardır? f ve g gibi iki fonksiyonun birbirinin tersi olduğunu nereden biliyorsunuz? Birbirinin tersi olan (olmayan) fonksiyonlara örnekler verin.

2. Fonksiyonların ve terslerinin tanım aralıkları, değer aralıkları ve grafikleri arasındaki ilişki nedir? Örnek verin.

3. x'i bir fonksiyonunun tersini, bazen x'in bir fonksiyonu olarak nasıl ifade edebilirsiniz?

4. Hangi koşullar altında bir f fonksiyonunun tersinin türevlenebilir olduğuna karar verirsiniz? f'nin ve f^{-1}'in türevleri arasındaki ilişki nedir?

5. Doğal logaritma fonksiyonu nedir? Tanım aralığı, değer aralığı ve türevi nelerdir? Hangi aritmetik özellikleri vardır? Grafiğini yorumlayın.
6. Logaritmik türev alma nedir? Bir örnek verin.
7. Hangi integraller logaritma verir? Örnek verin. tan x ve cot x'in integralleri nedir?
8. Eksponansiyel fonksiyon e^x nasıl tanımlanır? Tanım aralığı, değer aralığı ve türevi nedir? Hangi üs kurallarına uyar? Grafiğini yorumlayın.
9. a^x ve $\log_a x$ fonksiyonları nasıl tanımlanır? a üzerinde kısıtlamalar var mıdır? $\log_a x$'in grafiği ile $\ln x$'in grafiği arasında nasıl bir ilişki vardır? Aslında tek bir üstel fonksiyon ve tek bir logaritma olduğu ifadesi neden doğrudur?
10. 10 tabanlı logaritmaların bazı uygulamalarını tanımlayın.
11. Eksponansiyel değişim yasası nedir? Bir başlangıç değer probleminden nasıl türetilebilir? Yasanın bazı uygulamaları nelerdir?
12. $x \to \infty$ iken pozitif fonksiyonların değişim oranlarını nasıl karşılaştırırsınız?
13. Büyüme karşılaştırmalarında e^x ve $\ln x$ fonksiyonlarının rolleri nedir?
14. Büyük o ve küçük o gösterimini tanımlayın. Örnekler verin.
15. Hangisi daha etkilidir—sıralı yoksa ikili arama mı? Açıklayın.
16. Ters trigonometrik fonksiyonlar nasıl tanımlanır? Bu fonksiyonların değerlerini bulmak için bazen dik üçgenleri nasıl kullanırsınız? Örnekler verin.
17. Ters trigonometrik fonksiyonların türevleri nedir? Türevlerin tanım aralıkları ile fonksiyonların türev aralıkları arasından nasıl bir ilişki vardır?
18. Hangi integraller ters trigonometrik fonksiyonları verir? Değişken değiştirme ve tam kareye tamamlama yöntemleri bu integrallerin uygulamalarını nasıl genişletir?
19. Altı temel hiperbolik fonksiyon nedir? Tanım aralıklarını, değer aralıklarını ve grafiklerini yorumlayın. Aralarındaki bazı bağıntılar nedir?
20. Altı temel hiperbolik fonksiyonun türevleri nedir? Bunlara karşılık gelen integraller nelerdir? Altı temel trigonometrik fonksiyonla ne gibi benzerlikleri vardır?
21. Ters hiperbolik fonksiyonlar nasıl tanımlanır? Tanım aralıklarını, değer aralıklarını ve grafiklerini yorumlayın. Bir hesap makinesinin $\text{sech}^{-1} x$, $\text{csch}^{-1} x$ ve $\coth^{-1} x$ tuşlarıyla $\cosh^{-1} x$, $\sinh^{-1} x$ ve $\tanh^{-1} x$'i nasıl bulursunuz?
22. Hangi integraller ters hiperbolik fonksiyonları verir?

Bölüm 7 Problemler

Türev Alma

1–24 alıştırmalarında, y'nin uygun değişkene göre türevini bulun.

1. $y = 10e^{-x/5}$
2. $y = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}x}$
3. $y = \frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x}$
4. $y = x^2e^{-2/x}$
5. $y = \ln(\sin^2\theta)$
6. $y = \ln(\sec^2\theta)$
7. $y = \log_2(x^2/2)$
8. $y = \log_5(3x - 7)$
9. $y = 8^{-t}$
10. $y = 9^{2t}$
11. $y = 5x^{3.6}$
12. $y = \sqrt{2}x^{-\sqrt{2}}$
13. $y = (x + 2)^{x+2}$
14. $y = 2(\ln x)^{x/2}$
15. $y = \sin^{-1}\sqrt{1 - u^2}, \quad 0 < u < 1$
16. $y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right), \quad v > 1$
17. $y = \ln\cos^{-1} x$
18. $y = z\cos^{-1} z - \sqrt{1 - z^2}$
19. $y = t\tan^{-1} t - \frac{1}{2}\ln t$
20. $y = (1 + t^2)\cot^{-1} 2t$
21. $y = z\sec^{-1} z - \sqrt{z^2 - 1}, \quad z > 1$
22. $y = 2\sqrt{x - 1}\,\sec^{-1}\sqrt{x}$
23. $y = \csc^{-1}(\sec\theta), \quad 0 < \theta < \pi/2$
24. $y = (1 + x^2)e^{\tan^{-1} x}$

Logaritmik Türev Almak

25–30 alıştırmalarında, logaritmik türev almayla y'nin uygun değişkene göre türevini bulun.

25. $y = \dfrac{2(x^2 + 1)}{\sqrt{\cos 2x}}$
26. $y = \sqrt[10]{\dfrac{3x + 4}{2x - 4}}$
27. $y = \left(\dfrac{(t + 1)(t - 1)}{(t - 2)(t + 3)}\right)^5, \quad t > 2$
28. $y = \dfrac{2u2^u}{\sqrt{u^2 + 1}}$
29. $y = (\sin\theta)^{\sqrt{\theta}}$
30. $y = (\ln x)^{1/(\ln x)}$

İntegrasyon

31-78 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

31. $\int e^x \sin(e^x)\,dx$
32. $\int e^t \cos(3e^t - 2)\,dt$

33. $\int e^x \sec^2 (e^x - 7)\, dx$

34. $\int e^y \csc (e^y + 1) \cot (e^y + 1)\, dy$

35. $\int \sec^2 (x) e^{\tan x}\, dx$

36. $\int \csc^2 x\, e^{\cot x}\, dx$

37. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{3x - 4}$

38. $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx$

39. $\int_0^{\pi} \tan \frac{x}{3}\, dx$

40. $\int_{1/6}^{1/4} 2 \cot \pi x\, dx$

41. $\int_0^4 \frac{2t}{t^2 - 25}\, dt$

42. $\int_{-\pi/2}^{\pi/6} \frac{\cos t}{1 - \sin t}\, dt$

43. $\int \frac{\tan (\ln v)}{v}\, dv$

44. $\int \frac{dv}{v \ln v}$

45. $\int \frac{(\ln x)^{-3}}{x}\, dx$

46. $\int \frac{\ln (x - 5)}{x - 5}\, dx$

47. $\int \frac{1}{r} \csc^2 (1 + \ln r)\, dr$

48. $\int \frac{\cos (1 - \ln v)}{v}\, dv$

49. $\int x 3^{x^2}\, dx$

50. $\int 2^{\tan x} \sec^2 x\, dx$

51. $\int_1^7 \frac{3}{x}\, dx$

52. $\int_1^{32} \frac{1}{5x}\, dx$

53. $\int_1^4 \left(\frac{x}{8} + \frac{1}{2x}\right) dx$

54. $\int_1^8 \left(\frac{2}{3x} - \frac{8}{x^2}\right) dx$

55. $\int_{-2}^{-1} e^{-(x+1)}\, dx$

56. $\int_{-\ln 2}^{0} e^{2w}\, dw$

57. $\int_0^{\ln 5} e^r (3e^r + 1)^{-3/2}\, dr$

58. $\int_0^{\ln 9} e^{\theta} (e^{\theta} - 1)^{1/2}\, d\theta$

59. $\int_1^e \frac{1}{x} (1 + 7 \ln x)^{-1/3}\, dx$

60. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}}\, dx$

61. $\int_1^3 \frac{(\ln (v + 1))^2}{v + 1}\, dv$

62. $\int_2^4 (1 + \ln t) t \ln t\, dt$

63. $\int_1^8 \frac{\log_4 \theta}{\theta}\, d\theta$

64. $\int_1^e \frac{8 \ln 3 \log_3 \theta}{\theta}\, d\theta$

65. $\int_{-3/4}^{3/4} \frac{6\, dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$

66. $\int_{-1/5}^{1/5} \frac{6\, dx}{\sqrt{4 - 25x^2}}$

67. $\int_{-2}^{2} \frac{3\, dt}{4 + 3t^2}$

68. $\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dt}{3 + t^2}$

69. $\int \frac{dy}{y \sqrt{4y^2 - 1}}$

70. $\int \frac{24\, dy}{y \sqrt{y^2 - 16}}$

71. $\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{dy}{|y| \sqrt{9y^2 - 1}}$

72. $\int_{-2/\sqrt{5}}^{-\sqrt{6}/\sqrt{5}} \frac{dy}{|y| \sqrt{5y^2 - 3}}$

73. $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x - x^2}}$

74. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 4x - 1}}$

75. $\int_{-2}^{-1} \frac{2\, dv}{v^2 + 4v + 5}$

76. $\int_{-1}^{1} \frac{3\, dv}{4v^2 + 4v + 4}$

77. $\int \frac{dt}{(t + 1)\sqrt{t^2 + 2t - 8}}$

78. $\int \frac{dt}{(3t + 1)\sqrt{9t^2 + 6t}}$

Logaritmik veya Eksponansiyel Terimler İçeren Denklemleri Çözmek

79–84 alıştırmalarında, y'yi çözün.

79. $3^y = 2^{y+1}$

80. $4^{-y} = 3^{y+2}$

81. $9e^{2y} = x^2$

82. $3^y = 3 \ln x$

83. $\ln (y - 1) = x + \ln y$

84. $\ln (10 \ln y) = \ln 5x$

Limit Hesaplamak

85–96 alıştırmalarındaki limitleri bulun.

85. $\lim_{x \to 0} \frac{10^x - 1}{x}$

86. $\lim_{\theta \to 0} \frac{3^{\theta} - 1}{\theta}$

87. $\lim_{x \to 0} \frac{2^{\sin x} - 1}{e^x - 1}$

88. $\lim_{x \to 0} \frac{2^{-\sin x} - 1}{e^x - 1}$

89. $\lim_{x \to 0} \frac{5 - 5 \cos x}{e^x - x - 1}$

90. $\lim_{x \to 0} \frac{4 - 4e^x}{xe^x}$

91. $\lim_{t \to 0^+} \frac{t - \ln (1 + 2t)}{t^2}$

92. $\lim_{x \to 4} \frac{\sin^2 (\pi x)}{e^{x-4} + 3 - x}$

93. $\lim_{t \to 0^+} \left(\frac{e^t}{t} - \frac{1}{t}\right)$

94. $\lim_{y \to 0^+} e^{-1/y} \ln y$

95. $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$

96. $\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$

Fonksiyonların Büyüme Oranını Karşılaştırmak

97. $x \to \infty$ iken, f g'den daha mı hızlı, daha mı yavaş yoksa g ile aynı oranda mı büyür? Yanıtlarınızı açıklayın.

a. $f(x) = \log_2 x, \quad g(x) = \log_3 x$

b. $f(x) = x, \quad g(x) = x + \frac{1}{x}$

c. $f(x) = x/100, \quad g(x) = xe^{-x}$

d. $f(x) = x, \quad g(x) = \tan^{-1} x$

e. $f(x) = \csc^{-1} x, \quad g(x) = 1/x$

f. $f(x) = \sinh x, \quad g(x) = e^x$

98. $x \to \infty$ iken f g'den daha mı hızlı, daha mı yavaş yoksa g ile aynı oranda mı büyür? Yanıtlarınızı açıklayın.

a. $f(x) = 3^{-x}, \quad g(x) = 2^{-x}$

b. $f(x) = \ln 2x, \quad g(x) = \ln x^2$

c. $f(x) = 10x^3 + 2x^2, \quad g(x) = e^x$

d. $f(x) = \tan^{-1}(1/x), \quad g(x) = 1/x$

e. $f(x) = \sin^{-1}(1/x), \quad g(x) = 1/x^2$

f. $f(x) = \operatorname{sech} x, \quad g(x) = e^{-x}$

99. Doğru mu, yanlış mı? Yanıtlarınızı açıklayın.

a. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ **b.** $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} = O\left(\frac{1}{x^4}\right)$

c. $x = o(x + \ln x)$ **d.** $\ln(\ln x) = o(\ln x)$

e. $\tan^{-1} x = O(1)$ **f.** $\cosh x = O(e^x)$

100. Doğru mu, yanlış mı? Yanıtlarınızı açıklayın.

a. $\frac{1}{x^4} = O\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)$ **b.** $\frac{1}{x^4} = o\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)$

c. $\ln x = o(x + 1)$ **d.** $\ln 2x = O(\ln x)$

e. $\sec^{-1} x = O(1)$ **f.** $\sinh x = O(e^x)$

Teori ve Uygulamalar

101. Türevlenebilir ve bire-bir olan $f(x) = e^x + x$ fonksiyonunun türevlenebilir bir tersi, $f^{-1}(x)$, vardır. $f(\ln 2)$ noktasında df^{-1}/dx'in değerini bulun.

102. $f(x) = 1 + (1/x)$, $x \neq 0$, fonksiyonunun türevini bulun. Sonra, $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$ ve

$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{f(x)} = \frac{1}{f'(x)}$$

olduğunu gösterin.

103 ve 104 alıştırmalarında, her fonksiyonun verilen aralıktaki mutlak maksimum ve minimum değerlerini bulun.

103. $y = x \ln 2x - x$, $\left[\frac{1}{2e}, \frac{e}{2}\right]$

104. $y = 10x(2 - \ln x)$, $(0, e^2]$

105. Alan $x = 1$'den $x = e$'ye kadar $y = 2(\ln x)/x$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan alanı bulun.

106. Alan

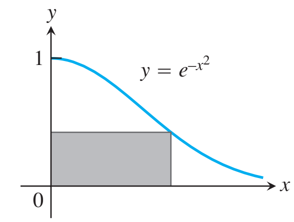
a. $x = 10$'dan $x = 20$'ye kadar $y = 1/x$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan alanın, $x = 1$'den $x = 2$'ye kadar eğri ile x-ekseni arasında kalan alana eşit olduğunu gösterin.

b. ka'dan kb'ye kadar $y = 1/x$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan alanın, a'dan b'ye kadar eğri ile x-ekseni arasında kalan alana eşit olduğunu gösterin.

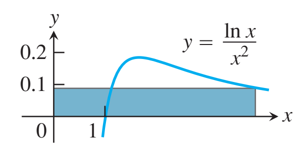
107. Bir parçacık $y = \ln x$ eğrisi boyunca yukarı, sağa doğru hareket etmektedir. x-koordinatı $(dx/dt) = \sqrt{x}$ m/s hızıyla değişmektedir. $(e^2, 2)$ noktasında y-koordinatı ne hızla değişir?

108. Bir kız $y = 9e^{-x/3}$ eğrisi şeklinde bir yokuştan kaymaktadır. y-koordinatı $(dy/dt) = (-1/4)\sqrt{9 - y}$ ft/s hızla değişmektedir. $x = 9$ ft'te yokuşun dibine vardığında, x-koordinatı yaklaşık hangi hızla değişir? (e^3'ü 20 olarak alın ve yanıtınızı en yakın tamsayıya yuvarlayın.)

109. Aşağıda gösterilen dikdörtgenin bir kenarı pozitif y ekse-ninde ve üst sağ köşesi $y = e^{-x^2}$ eğrisi üzerindedir. Hangi boyutlar dikdörtgenin alanını en büyük yapar ve bu alan nedir?



110. Aşağıda gösterilen dikdörtgenin bir kenarı pozitif y ekse-ninde, bir kenarı pozitif x-ekseninde ve üst sağ kösesi $y = (\ln x)/x^2$ eğrisinin üzerindedir. Hangi boyutlar dikdörtgenin alanını en büyük yapar ve bu alan nedir?



111. $f(x) = \ln 5x$ ve $g(x) = \ln 3x$ fonksiyonları arasında sadece bir sabit farkı vardır? Bu sabit nedir? Yanıtınızı açıklayın.

112. a. $(\ln x)/x = (\ln 2)/2$ ise $x = 2$ olmak zorunda mıdır?

b. $(\ln x)/x = -2 \ln 2$ ise $x = 1/2$ olmak zorunda mıdır?

113. $(\log_4 x)/(\log_2 x)$ bölümünün sabit bir değeri vardır. Bu değer nedir? Yanıtınızı açıklayın.

T **114. $\log_x(2)$ ve $\log_2(x)$** $f(x) = \log_x(2)$ ve $g(x) = \log_x(x)$ nasıl karşılaştırılır? Bunu bulmanın bir yolu aşağıdadır?

a. $f(x)$ ve $g(x)$'i doğal logaritma olarak ifade etmek için $\log_a b = (\ln b)/\ln a$ denklemini kullanın.

b. f ve g'nin grafiklerini birlikte çizin. f'nin davranışının g'nin değer ve işaretleriyle ilişkisini yorumlayın.

T **115.** Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çizin ve gördüklerinizi kullanarak ekstrem değerleri tahmin edin, büküm noktalarının koordinatlarını belirleyin ve grafiklerin yukarı konkav ve aşağı konkav oldukları aralıkları tanımlayın Sonra, fonksiyonların türevleriyle çalışarak bulduklarınızı doğrulayın.

a. $y = (\ln x)/\sqrt{x}$ **b.** $y = e^{-x^2}$ **c.** $y = (1 + x)e^{-x}$

T **116.** $f(x) = x \ln x$'in grafiğini çizin. Fonksiyonun bir mutlak minimum değeri var mıdır? Yanıtınızı analizle doğrulayın.

117. Başlangıçtaki karbon-14 miktarının %90'ı bozunmuş olan bir örnek kaç yaşındadır?

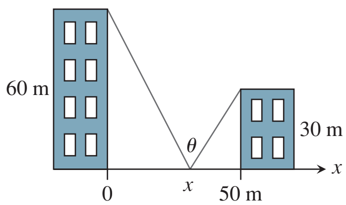
118. Turta soğutmak Fırından çıkarıldığında iç sıcaklığı 220°F olan derin bir elmalı turta kalıbı 40°F sıcaklıktaki pencere önüne konulmuştur. On beş dakika sonra iç sıcaklığı 180°F'ye düşer. Turtanın 70°F'ye soğuması için ne kadar zaman geçer?

119. Bir güneş istasyonunun yerini belirlemek Aşağıda gösterilen iki binanın arasındaki doğu-batı çizgisinde, toprak seviyesinde bir güneş istasyonu kurmak için anlaşma yaptınız. Güneşin tam tepeden geçtiği bir günde, güneşte kalacağı saat

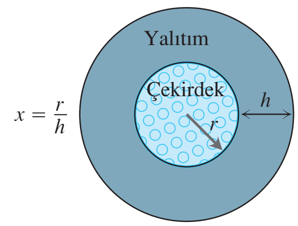
sayısını maksimize etmek için istasyonu yüksek binadan ne kadar uzağa yerleştirmelisiniz?

$$\theta = \pi - \cot^{-1}\frac{x}{60} - \cot^{-1}\frac{50 - x}{30}$$

olduğunu gözlemleyerek işe başlayın. Sonra v'yı maksimize eden x değerini bulun.



120. Yuvarlak bir su altı verici kablosu bakır tellerden oluşan bir çekirdek ve onları çevreleyen iletken olmayan bir yalıtımdan oluşmaktadır. x, çekirdeğin yarıçapının yalıtımın kalınlığına oranını belirtiyorsa, iletim sinyalinin süratinin $v = x^2 \ln(1/x)$ ile verildiği bilinmektedir. Çekirdeğin yarı-çapı 1 cm ise, hangi h yalıtım kalınlığı iletim süratini en büyük yapacaktır?



Bölüm 7 Ek ve İleri Alıştırmalar

Limitler

1–6 alıştırmalarındaki limitleri bulun.

1. $\lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \tan^{-1} t\, dt$

3. $\lim_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{1/x}$

4. $\lim_{x\to\infty}(x + e^x)^{2/x}$

5. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$

6. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{1/n} + e^{2/n} + \cdots + e^{(n-1)/n} + e^{n/n}\right)$

7. $A(t)$, birinci bölgede koordinat eksenleri, $y = e^{-x}$ eğrisi ve dikey $x = t,\ t > 0$ doğrusuyla sınırlanan bölgenin alanı olsun. $V(t)$ de bu bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen cismin hacmi olsun. Aşağıdaki limitleri bulun.

a. $\lim_{t\to\infty} A(t)$ **b.** $\lim_{t\to\infty} V(t)/A(t)$ **c.** $\lim_{t\to 0^+} V(t)/A(t)$

8. Bir logaritmanın tabanını değiştirmek

a. $a \to 0^+, 1^-, 1^+$ ve ∞ iken $\lim \log_a 2$'yi bulun.

T **b.** $0 < a \le 4$ aralığında $y = \log_a 2$'nin grafiğini, a'nın bir fonksiyonu olarak çizin.

Teori ve Örnekler

9. $x = 1$'den $x = e$'ye kadar $y = 2(\log_2 x)/x$ ve $y = 2(\log_4 x)/x$ eğrileri ile x-ekseni arasında kalan bölgelerin alanlarını bulun. Büyük alanın küçüğüne oranı nedir?

T **10.** $-5 \le x \le 5$ için $f(x) = \tan^{-1} x + \tan^{-1}(1/x)$'in grafiğini çizin. Analiz kullanarak gördüklerinizi açıklayın. f'nin $[-5, 5]$ aralığının dışında nasıl davranmasını beklersiniz? Yanıtınızı açıklayın.

11. Hangi $x > 0$ için, $x^{(x^x)} = (x^x)^x$ olur? Yanıtınızı açıklayın.

T **12.** $[0, 3\pi]$ aralığında $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$'in grafiğini çizin. Gördüklerinizi açıklayın.

13. $f(x) = e^{g(x)}$ ve $g(x) = \int_2^x \frac{t}{1 + t^4}\,dt$ ise, $f'(2)$'yi bulun.

14. a. $f(x) = \int_1^{e^x} \frac{2\ln t}{t}\,dt$ ise, df/dx'i bulun.

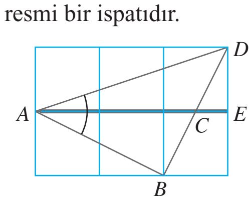
b. $f(0)$'ı bulun.

c. f'nin grafiği hakkında nasıl bir sonuç çıkarırsınız? Yanıtınızı açıklayın.

15. Aşağıdaki şekil

$$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

olduğunun gayri resmi bir ispatıdır.

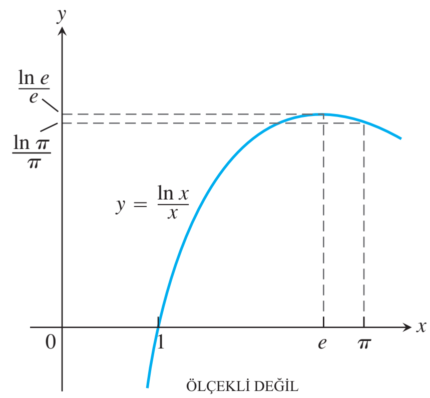


Bu nasıl anlatılabilir? (Kaynak: "Behold! Sums of Arctan," Edward M. Harris, *College Mathematics Journal*, Vol. 18, No. 2, March 1987, sayfa. 141.)

16. $\pi^e < e^\pi$

a. Şekil, (arka sayfada) neden $\pi^e < e^\pi$ olduğunu "ispatlar"? (Kaynak: "Proof Without Words," Fouad Nakhil, *Mathematics Magazine*, Vol.60, No.3, June 1987, sayfa 165.)

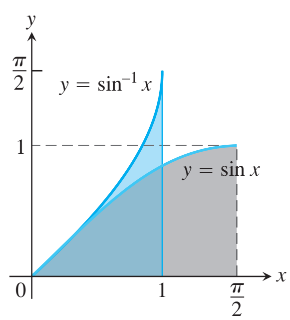
b. Şekil (arka sayfada) $f(x) = (\ln x)/x$ fonksiyonunun $x = e$'de bir mutlak maksimum değeri olduğunu varsayar. Gerçekten bulunduğunu nasıl anlarsınız?



17. Aşağıdaki şekli kullanarak

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \sin^{-1} x\, dx$$

olduğunu gösterin.

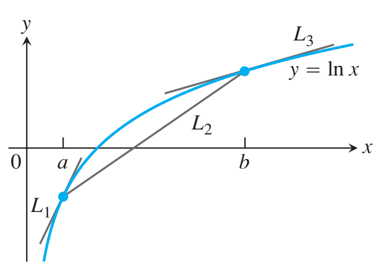


18. Napier eşitsizliği Aşağıda

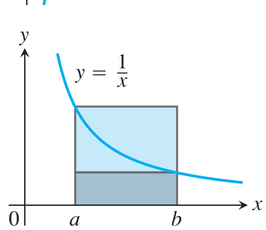
$$b > a > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}.$$

olduğunun iki resimli ispatı bulunmaktadır. Her durumda neler olduğunu açıklayın.

a.



b.



(*Kaynak:* Roger B. Nelson, *College Mathematics Journal*, Vol. 24, No. 2, March 1993, sayfa 165.)

19. Çift-tek ayrışımları

a. g'nin bir çift, h'nin ise bir tek fonksiyon olduğunu varsayın. Her x için $g(x) + h(x) = 0$ ise, her x için $g(x) = 0$ ve $h(x) = 0$ olduğunu gösterin.

b. (a) şıkkındaki sonucu kullanarak, $f_Ç(x)$ bir çift fonksiyon ve $f_T(x)$ bir tek fonksiyon olmak üzere $f(x) = f_Ç(x) + f_T(x)$ ise

$$f_Ç(x) = (f(x) + f(-x))/2 \text{ ve } f_T(x) = (f(x) - f(-x))/2$$

olduğunu gösterin.

c. (b) şıkkındaki sonucun önemi nedir?

20. g, orijini de içeren açık bir aralıkta türevlenebilir bir fonksiyon olsun. g'nin aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu varsayın.

i. g'nin tanım aralığındaki her reel x, y ve $x + y$ sayısı için,

$$g(x + y) = \frac{g(x) + g(y)}{1 - g(x)g(y)}\text{'dir.}$$

ii. $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$

iii. $\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h} = 1$

a. $g(0) = 0$ olduğunu gösterin.

b. $g'(x) = 1 + [g(x)]^2$ olduğunu gösterin.

c. (b)'deki diferansiyel denklemi çözerek $g(x)$'i bulun.

Uygulamalar

21. Kütle merkezi Birinci ve dördüncü bölgelerde, $y = 1/(1 + x^2)$ ve $y = -1/(1 + x^2)$ eğrileri ile $x = 0$ ve $x = 1$ doğrularıyla sınırlanan bölgeyi kaplayan sabit yoğunluklu ince plakanın kütle merkezini bulun.

22. Dönel cisim $x = 1/4$'ten $x = 4$'e kadar $y = 1/(2\sqrt{x})$ eğrisi ile x-ekseni arasındaki bölge x-ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretiliyor.

a. Cismin hacmini bulun.

b. Bölgenin merkezini bulun.

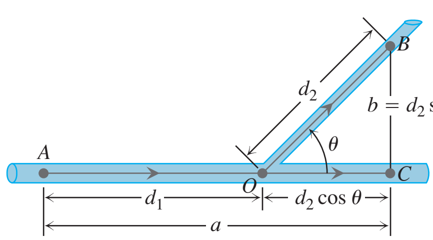
23. 70 kuralı (0.69314… yerine) $\ln 2 \approx 0.70$ yaklaşımını kullanırsanız, "Sürekli bileşik % r faizle yatırdığınız bir miktar paranın iki katına çıkması için kaç yıl gerektiğini tahmin etmek üzere, 70'i r'ye bölün," diyen bir kural türetebilirsiniz. Örneğin, %5 sürekli faizle yatırılan bir para yaklaşık $70/5 = 14$ yılda iki katına çıkacaktır. Paranın 10 yılda iki katına çıkmasını istiyorsanız $70/10 = \%7$ faizle yatırmanız gerekir. 70 kuralının nasıl türetildiğini gösterin. (70 kuralı yerine benzer bir 72 kuralı da kullanılır, çünkü daha fazla tamsayı basamağı vardır.)

24. Ondördüncü yüzyılda serbest düşme Ondördüncü yüzyılın ortasında, Saksonyalı Albert (1316-1390) düşen bir cismin hızının düşülen mesafeyle orantılı olduğunu varsayan bir serbest düşme modeli önerdi. 20 ft düşmüş olan bir cismin 10 ft düşmüş olan bir cisimden iki kat hızlı hareket etmiş olabileceğini düşünmek mantıklıydı. Ayrıca, o zaman kullanılan araçların hiçbirisi bunun aksini ispatlayacak kadar hassas değildi. Bugün, Saksonyalı Al-

bert'in modelinin gerçeklerden ne kadar uzak olduğunu, modelindeki kapalı başlangıç değer problemini çözerek görebiliriz. Problemi çözün ve sonucunuzu $s = 16t^2$ denklemiyle grafik olarak karşılaştırın. Başlangıçta çok yavaş ilerleyen, sonra çok kısa zamanda gerçek olamayacak kadar fazla hızlanan bir hareketi tanımladığını göreceksiniz.

25. Borular ve kan damarları için en iyi dallanma açıları Bir akış sisteminde, büyük bir borudan daha ince bir boru dallanırsa, işin enerji tasarrufu yönünden bakılınca en uygun açıda ayrılmasını isteriz. Örneğin, aşağıdaki şekilde AOB hattı boyunca sürtünmeden doğan enerji kaybının minimum olmasını isteyebiliriz. Bu diyagramda, B ince borunun ulaşması gereken verilmiş bir nokta, A büyük boruda akışın yolunda bir nokta ve O da dallanmanın oluştuğu noktadır. Poiseuille'den gelen bir teorem türbülans olmayan bir akıştaki sürtünmeden doğan enerji kaybının yolun uzunluğu ile orantılı ve yarıçapın dördüncü kuvvetiyle ters orantılı olduğunu söyler. Yani, kayıp AO boyunca $(kd_1)/R^4$ ve OB boyunca $(kd_2)/r^4$'tür. Burada k bir sabit, d_1 AO'nun uzunluğu, d_2 OB'nin uzunluğu, R büyük borunun yarıçapı ve r de ince borunun yarıçapıdır. θ açısı bu iki kaybın toplamını minimize edecek şekilde seçilir:

$$L = k\frac{d_1}{R^4} + k\frac{d_2}{r^4}.$$



Modelimizde, $AC = a$ ve $BC = b$'nin sabit olduklarını varsayıyoruz, dolayısıyla

$$d_1 + d_2 \cos\theta = a \quad d_2 \sin\theta = b$$

bağıntılarını buluruz ve böylece

$$d_2 = b \csc\theta$$
$$d_1 = a - d_2\cos\theta = a - b\cot\theta$$

olur. Toplam kayıp L'yi θ'nın bir fonksiyonu olarak ifade edebiliriz:

$$L = k\left(\frac{a - b\cot\theta}{R^4} + \frac{b\csc\theta}{r^4}\right)$$

a. $dL/d\theta$'nın sıfıra eşitlendiği kritik değerin

$$\theta_c = \cos^{-1}\frac{r^4}{R^4}$$

olduğunu gösterin.

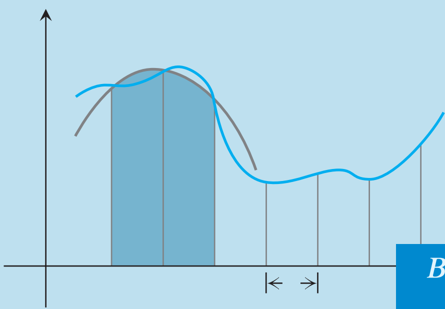
b. Boru yarıçapları oranı $r/R = 5/6$ ise, (a) şıkkında verilen optimal dallanma açısını en yakın dereceye kadar hesaplayın.

Burada tanımlanan matematiksel analiz bir hayvanın vücudundaki damarların dallandıkları açıları tanımlamakta da kullanılır. (I*ntroduction to Mathematics for Life Scientists*, İkinci Baskı, E. Batschelet [New York:Springer-Verlag, 1976]'ya bakın.)

T **26. Grup kan testi** II. Dünya Savaşı sırasında, çok sayıda askerin kan testinin yapılması gerekliydi. N kişiye kan testi uygulamanın iki standart yöntemi vardır. Yöntem 1'de, her kişi ayrı ayrı test edilir. Yöntem 2'de, x kişinin kanları karıştırılır ve tek bir örnek olarak test edilir. Test negatifse, bu tek test x kişi için yeterlidir. Test pozitifse, x kişinin her biri ayrı ayrı test edilir ve toplam $x + 1$ test gerekir. İkinci yöntem ve biraz olasılık teorisi kullanılarak, ortalama olarak toplam test sayısı y'nin

$$y = N\left(1 - q^x + \frac{1}{x}\right)$$

olacağı gösterilebilinir. $q = 0.99$ ve $N = 1000$ alarak, y'yi minimize eden x'in tamsayı değerini bulun. Ayrıca y'yi maksimize eden x'in tamsayı değerini de bulun. (İkinci sonuç gerçek hayattaki durumlarda önemli değildir.) Grup testi yöntemi II. Dünya savaşında bireysel test yönteminden %80 daha verimli olarak kullanıldı, fakat verilen q değeriyle değil.



Bölüm

8 İNTEGRASYON TEKNİKLERİ

GİRİŞ Temel Teorem, ters türevlerle belirli integrali birbirine bağlar.

$$\int f(x)\,dx$$

integralini hesaplamak, $F'(x) = f(x)$ olacak şekilde bir F fonksiyonu bulmak ve sonra bir C sabiti eklemekle eşdeğerdir.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Bu bölümde, daha önce gördüklerimizden daha karmaşık olan belirsiz integrallerin bulunması için önemli tekniklerden bir kısmını göreceğiz. Bu bölümün amacı tanımadığımız integralleri, tanıdığımız, tablolardan bulabileceğimiz veya bilgisayarla hesaplayabileceğimiz integrallere nasıl dönüştürüldüğünü göstermektir. Ayrıca, belirli integral kavramını, integrandın integrasyon aralığında sınırlı olmayabildiği veya aralığın sınırlı olmadığı, *genelleştirilmiş integrallere* genişletiyoruz.

8.1 Temel İntegrasyon Formülleri

Önceki bölümlerde yaptığımız gibi, belirsiz integralleri bulmada bize yardımcı olması için, türev formüllerini tersine çevirerek bir integral formülleri tablosu hazırlamak faydalıdır. Sonra, bizi standart tiplerden birisi ile karşılaştıran bir integrale uymaya çalışırız. Bu, Değişken Dönüşümü Kuralını kullanmanın yanı sıra genellikle birkaç cebirsel işlem gerektirir.

Bölüm 5.5'teki Dönüşüm Kuralını hatırlayın:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Burada, $u = g(x)$ değer kümesi bir I aralığı olan türevlenebilir bir fonksiyon ve de I üzerinde sürekli bir fonksiyondur. İntegrasyondaki başarı, çoğu kez bilinen bir formülü uygulamak için integrandın hangi kısmına u deneceğini seçebilmeye dayanır. Bu seçim, du da bulunabilecek şekilde olmalıdır. Bunun anlamı şudur; integrasyonda beceri için ilk şart türev formüllerinde tam bir hakimiyettir.

Tablo 8.1, şimdiye kadar hesapladığımız temel integral formlarını göstermektedir. Bu bölümde, bu tabloyu kullanmakta bize yardımcı olacak birkaç cebirsel veya değişken dönüşümü yöntemini tanıtıyoruz. Kitabın arkasında, kullanımını Bölüm 8.6'da göreceğimiz daha kapsamlı bir tablo vardır.

TABLO 8.1 Temel İntegrasyon Formülleri

1. $\int du = u + C$
2. $\int k\,du = ku + C$ (herhangi bir k sayısı
3. $\int (du + dv) = \int du + \int dv$
4. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
6. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$
7. $\int \cos u\,du = \sin u + C$
8. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
9. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
10. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
11. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
12. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$
    $= \ln|\sec u| + C$
13. $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$
    $= -\ln|\csc u| + C$
14. $\int e^u\,du = e^u + C$
15. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C \qquad (a > 0, a \neq 1)$
16. $\int \sinh u\,du = \cosh u + C$
17. $\int \cosh u\,du = \sinh u + C$
18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
19. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
20. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$
21. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad (a > 0)$
22. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad (u > a > 0)$

Bir integrali standart bir formüle uydurmak için genellikle integrali yeniden düzenlememiz gerekir.

ÖRNEK 1 Sadeleştirici Bir Değişken Dönüşümü Yapmak

$$\int \frac{2x - 9}{\sqrt{x^2 - 9x + 1}}\,dx$$

integralini hesaplayın.

Çözüm

$$\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,dx = \int \frac{du}{\sqrt{u}} \qquad u = x^2 - 9x + 1,\; du = (2x-9)\,dx.$$

$$= \int u^{-1/2}\,du$$

$$= \frac{u^{(-1/2)+1}}{(-1/2)+1} + C \qquad \text{Tablo 8.1, } n = -1/2 \text{ ile Formül 4}$$

$$= 2u^{1/2} + C$$

$$= 2\sqrt{x^2-9x+1} + C$$

■

ÖRNEK 2 Kareye Tamamlama

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$$

integralini hesaplayın.

Çözüm Kareye tamamlayarak kök içindeki ifadeyi şu şekilde yazarız:

$$8x - x^2 = -(x^2 - 8x) = -(x^2 - 8x + 16 - 16)$$

$$= -(x^2 - 8x + 16) + 16 = 16 - (x-4)^2$$

Sonra

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16-(x-4)^2}}$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} \qquad a = 4,\; u = (x-4),\; du = dx$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad \text{Tablo 8.1, Formül 18}$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x-4}{4}\right) + C$$

buluruz. ■

ÖRNEK 3 Bir kuvveti açmak ve tirgonometrik bir bağıntı kullanmak

$$\int (\sec x + \tan x)^2\,dx$$

integralini hesaplayın.

Çözüm İntegrandı açar ve

$$(\sec x + \tan x)^2 = \sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x$$

buluruz. Sağ taraftaki ilk iki terim eski dostlardır; onları hemen integre edebiliriz. Peki ya $\tan^2 x$? Onu da $\sec^2 x$ ile ilişkilendiren bir bağıntı vardır:

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x, \qquad \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$\tan^2 x$ yerine $\sec^2 x - 1$ yazar ve

$$\int (\sec x + \tan x)^2\, dx = \int (\sec^2 x + 2\sec x \tan x + \sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= 2\int \sec^2 x\, dx + 2\int \sec x \tan x\, dx - \int 1\, dx$$

$$= 2\tan x + 2\sec x - x + C$$ ■

ÖRNEK 4 Bir karekökten kurtulmak

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x}\, dx$$

integralini hesaplayın.

Çözüm

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \qquad \text{veya} \qquad 1 + \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta.$$

bağıntısını kullanırız. $\theta = 2x$ alırsak, bu

$$1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x$$

halini alır. Dolayısıyla

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x}\, dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\sqrt{\cos^2 2x}\, dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} |\cos 2x|\, dx \qquad \sqrt{u^2} = |u|$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\, dx \qquad [0, \pi/4] \text{ üzerinde } \cos 2x \geq 0 \text{ bu nedenle } |\cos 2x| = \cos 2x.$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/4} \qquad \text{Tablo 8.1, } u = 2x \text{ ve } du = 2\,dx \text{ ile Formül 7}$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{1}{2} - 0\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ ■

buluruz.

ÖRNEK 5 Bir Bileşik Kesri Basitleştirmek

$$\int \frac{3x^2 - 7x}{3x + 2}\, dx$$

integralini hesaplayın.

$$\begin{array}{r} x - 3 \\ 3x + 2 \overline{)\, 3x^2 - 7x} \\ \underline{3x^2 + 2x} \\ -9x \\ \underline{-9x - 6} \\ +6 \end{array}$$

Çözüm İntengrand basit olmayan bir kesirdir (payın derecesi paydanın derecesinden büyük veya ona eşit). İntegre edebilmek için, önce böler ve bir bölüm artı basit bir kesir olan bir kalan elde ederiz:

$$\frac{3x^2 - 7x}{3x + 2} = x - 3 + \frac{6}{3x + 2}$$

Buradan da

$$\int \frac{3x^2 - 7x}{3x + 2}\, dx = \int \left(x - 3 + \frac{6}{3x + 2}\right) dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 2\ln|3x + 2| + C$$ ■

buluruz.

Uzun bir bölmeyle bir bileşik kesri sadeleştirmek (Örnek 5) her zaman doğrudan integre edebileceğimiz bir ifade vermez. Bu durumda ne yapmamız gerektiğini Bölüm 8.5'te göreceğiz.

ÖRNEK 6 Bir Kesri Ayrıştırmak

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

integralini hesaplayın.

Çözüm Önce integrandı ayırarak

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 3\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

elde ederiz. Bu yeni integrallerin birincisinde

$$u = 1-x^2, \qquad du = -2x\,dx, \qquad \text{ve} \qquad x\,dx = -\frac{1}{2}\,du$$

dönüşümü yapar ve

$$\begin{aligned} 3\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} &= 3\int \frac{(-1/2)\,du}{\sqrt{u}} = -\frac{3}{2}\int u^{-1/2}\,du \\ &= -\frac{3}{2}\cdot\frac{u^{1/2}}{1/2} + C_1 = -3\sqrt{1-x^2} + C_1 \end{aligned}$$

buluruz. İntegrallerden ikincisi standart formdadır:

$$2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sin^{-1}x + C_2$$

Bu sonuçları birleştirerek ve $C_1 + C_2$ toplamına C diyerek,

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -3\sqrt{1-x^2} + 2\sin^{-1}x + C$$ ■

elde ederiz.

Bu bölümün son örneği, integrali integre edebileceğimiz bir hale dönüştürmek için integrandı 1'in bir formu ile çarpmaktan ibaret olan cebirsel teknikle önemli bir integrali hesaplamaktadır.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

George David Birkhoff (1884–1944)

ÖRNEK 7 $y = \sec x$'in integrali; 1 ile çarpmak

$$\int \sec x\,dx$$

integralini hesaplayın.

Çözüm

$$\begin{aligned} \int \sec x\,dx &= \int (\sec x)(1)\,dx = \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx \\ &= \int \frac{du}{u} \qquad u = \tan x + \sec x,\ du = (\sec^2 x + \sec x \tan x)\,dx \\ &= \ln|u| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C \end{aligned}$$ ■

Sekant ve tanjant yerine kosekant ve kotanjantla, Örnek 7'deki yöntem kosekantın integrali için benzer bir formüle yol açar (Alıştırma 95'e bakın).

TABLO 8.2 Sekant ve kosekant integralleri

1. $\int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + C$

2. $\int \csc u \, du = -\ln |\csc u + \cot u| + C$

İntegrallerle Temel Formülleri Eşleştirme Prosedürleri

PROSEDÜR	ÖRNEK
Sadeleştirici bir değişken dönüşümü uygulamak	$\dfrac{2x - 9}{\sqrt{x^2 - 9x + 1}}\,dx = \dfrac{du}{\sqrt{u}}$
Kareye tamamlama	$\sqrt{8x - x^2} = \sqrt{16 - (x - 4)^2}$
Trigonometrik bir bağıntı kullanmak	$(\sec x + \tan x)^2 = \sec^2 x + 2 \sec x \tan x + \tan^2 x$ $= \sec^2 x + 2 \sec x \tan x + (\sec^2 x - 1)$ $= 2 \sec^2 x + 2 \sec x \tan x - 1$
Bir kare kökten kurtulmak	$\sqrt{1 + \cos 4x} = \sqrt{2 \cos^2 2x} = \sqrt{2}\,|\cos 2x|$
Bir bileşik kesri sadeleştirmek	$\dfrac{3x^2 - 7x}{3x + 2} = x - 3 + \dfrac{6}{3x + 2}$
Bir kesri ayrıştırmak	$\dfrac{3x + 2}{\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{3x}{\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$
1 ile çarpmak	$\sec x = \sec x \cdot \dfrac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} = \dfrac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}$

ALIŞTIRMALAR 8.1

Temel Dönüşümler

1–36 alıştırmalarındaki integralleri, standart formlarına dönüştürecek değişken dönüşümleri yaparak hesaplayın.

1. $\displaystyle\int \frac{16x\,dx}{\sqrt{8x^2 + 1}}$

2. $\displaystyle\int \frac{3 \cos x\,dx}{\sqrt{1 + 3 \sin x}}$

3. $\displaystyle\int 3\sqrt{\sin v} \cos v \, dv$

4. $\displaystyle\int \cot^3 y \csc^2 y \, dy$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{16x\,dx}{8x^2 + 2}$

6. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec^2 z}{\tan z}\,dz$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$

8. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$

9. $\int \cot(3-7x)\,dx$

10. $\int \csc(\pi x-1)\,dx$

11. $\int e^{\theta}\csc(e^{\theta}+1)\,d\theta$

12. $\int \frac{\cot(3+\ln x)}{x}\,dx$

13. $\int \sec\frac{t}{3}\,dt$

14. $\int x\sec(x^2-5)\,dx$

15. $\int \csc(s-\pi)\,ds$

16. $\int \frac{1}{\theta^2}\csc\frac{1}{\theta}\,d\theta$

17. $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} 2x\,e^{x^2}\,dx$

18. $\int_{\pi/2}^{\pi} (\sin y)e^{\cos y}\,dy$

19. $\int e^{\tan v}\sec^2 v\,dv$

20. $\int \frac{e^{\sqrt{t}}\,dt}{\sqrt{t}}$

21. $\int 3^{x+1}\,dx$

22. $\int \frac{2^{\ln x}}{x}\,dx$

23. $\int \frac{2^{\sqrt{w}}\,dw}{2\sqrt{w}}$

24. $\int 10^{2\theta}\,d\theta$

25. $\int \frac{9\,du}{1+9u^2}$

26. $\int \frac{4\,dx}{1+(2x+1)^2}$

27. $\int_0^{1/6} \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

28. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$

29. $\int \frac{2s\,ds}{\sqrt{1-s^4}}$

30. $\int \frac{2\,dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$

31. $\int \frac{6\,dx}{x\sqrt{25x^2-1}}$

32. $\int \frac{dr}{r\sqrt{r^2-9}}$

33. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

34. $\int \frac{dy}{\sqrt{e^{2y}-1}}$

35. $\int_1^{e^{\pi/3}} \frac{dx}{x\cos(\ln x)}$

36. $\int \frac{\ln x\,dx}{x+4x\ln^2 x}$

Kareye Tamamlama

37–42 alıştırmalarındaki integralleri, kareye tamamlayarak ve standart forma gelmelerini sağlayacak değişken dönüşümleri kullanarak hesaplayın.

37. $\int_1^2 \frac{8\,dx}{x^2-2x+2}$

38. $\int_2^4 \frac{2\,dx}{x^2-6x+10}$

39. $\int \frac{dt}{\sqrt{-t^2+4t-3}}$

40. $\int \frac{d\theta}{\sqrt{2\theta-\theta^2}}$

41. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

42. $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$

Trigonometrik Özdeşlikler

43–46 alıştırmalarındaki integralleri trigonometrik özdeşlikler kullanarak ve standart forma gelmeleri için değişken dönüşümleri yaparak hesaplayın.

43. $\int (\sec x+\cot x)^2\,dx$

44. $\int (\csc x-\tan x)^2\,dx$

45. $\int \csc x\sin 3x\,dx$

46. $\int (\sin 3x\cos 2x-\cos 3x\sin 2x)\,dx$

Bileşik Kesirler

47–52 alıştırmalarındaki integralleri, bileşik kesri sadeleştirerek ve (gerekliyse) standart forma sokmak için değişken dönüşümü kullanarak hesaplayın.

47. $\int \frac{x}{x+1}\,dx$

48. $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

49. $\int_{\sqrt{2}}^3 \frac{2x^3}{x^2-1}\,dx$

50. $\int_{-1}^3 \frac{4x^2-7}{2x+3}\,dx$

51. $\int \frac{4t^3-t^2+16t}{t^2+4}\,dt$

52. $\int \frac{2\theta^3-7\theta^2+7\theta}{2\theta-5}\,d\theta$

Kesirleri Ayrıştırmak

53–56 alıştırmalarındaki integralleri, kesirleri ayrıştırarak ve (gerekliyse) standart forma sokmak için değişken dönüşümü yaparak hesaplayın.

53. $\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

54. $\int \frac{x+2\sqrt{x-1}}{2x\sqrt{x-1}}\,dx$

55. $\int_0^{\pi/4} \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

56. $\int_0^{1/2} \frac{2-8x}{1+4x^2}\,dx$

1 ile Çarpmak

57–62 alıştırmalarındaki integralleri, 1'in bir formu ile çarparak ve (gerekli ise) standart forma sokmak için değişken dönüşümü yaparak hesaplayın.

57. $\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$

58. $\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$

59. $\int \frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}\,d\theta$

60. $\int \frac{1}{\csc\theta+\cot\theta}\,d\theta$

61. $\int \frac{1}{1-\sec x}\,dx$

62. $\int \frac{1}{1-\csc x}\,dx$

Kareköklerden Kurtulmak

63–70 alıştırmalarındaki integralleri, karaköklerden kurtularak hesaplayın.

63. $\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\,dx$

64. $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$

65. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\sqrt{1+\cos 2t}\,dt$ **66.** $\displaystyle\int_{-\pi}^{0}\sqrt{1+\cos t}\,dt$

67. $\displaystyle\int_{-\pi}^{0}\sqrt{1-\cos^2\theta}\,d\theta$ **68.** $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\sqrt{1-\sin^2\theta}\,d\theta$

69. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sqrt{1+\tan^2 y}\,dy$ **70.** $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{0}\sqrt{\sec^2 y-1}\,dy$

Karışık İntegraller

71-82 alıştırmalarındaki integralleri, hangi yöntemi uygun buluyorsanız onunla hesaplayın.

71. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4}(\csc x-\cot x)^2\,dx$ **72.** $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4}(\sec x+4\cos x)^2\,dx$

73. $\displaystyle\int \cos\theta\csc(\sin\theta)\,d\theta$ **74.** $\displaystyle\int\left(1+\frac{1}{x}\right)\cot(x+\ln x)\,dx$

75. $\displaystyle\int(\csc x-\sec x)(\sin x+\cos x)\,dx$

76. $\displaystyle\int 3\sinh\left(\frac{x}{2}+\ln 5\right)dx$

77. $\displaystyle\int\frac{6\,dy}{\sqrt{y}(1+y)}$ **78.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$

79. $\displaystyle\int\frac{7\,dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x-48}}$ **80.** $\displaystyle\int\frac{dx}{(2x+1)\sqrt{4x^2+4x}}$

81. $\displaystyle\int\sec^2 t\tan(\tan t)\,dt$ **82.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{3+x^2}}$

Trigonometrik Kuvvetler

83. a. $\int\cos^3\theta\,d\theta$ hesaplayın. (*İpucu:* $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$)

b. $\int\cos^5\theta\,d\theta$ 'yı hesaplayın.

c. İntegrali gerçekten hesaplamadan, $\int\cos^9\theta\,d\theta$ 'yı nasıl bulacağınızı açıklayın.

84. a. $\int\sin^3\theta\,d\theta$ 'yı hesaplayın. (*İpucu:* $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$)

b. $\int\sin^5\theta\,d\theta$ 'yı hesaplayın.

c. $\int\sin^7\theta\,d\theta$ 'yı hesaplayın.

d. İntegrali gerçekten hesaplamadan, $\int\sin^{13}\theta\,d\theta$ 'yı nasıl bulacağınızı açıklayın.

85. a. $\int\tan^3\theta\,d\theta$'yı $\int\tan\theta\,d\theta$ cinsinden ifade edin. Sonra $\int\tan^3\theta\,d\theta$ 'yı hesaplayın. (*İpucu:* $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$)

b. $\int\tan^5\theta\,d\theta$'yı $\int\tan^3\theta\,d\theta$ cinsinden ifade edin.

c. $\int\tan^7\theta\,d\theta$'yı $\int\tan^5\theta\,d\theta$ cinsinden ifade edin.

d. k pozitif bir tamsayı olmak üzere, $\int\tan^{2k+1}\theta\,d\theta$ 'yı $\int\tan^{2k-1}\theta\,d\theta$ cinsinden ifade edin.

86. a. $\int\cot^3\theta\,d\theta$'yı $\int\cot\theta\,d\theta$ cinsinden ifade edin. Sonra $\int\cot^3\theta\,d\theta$ 'yı hesaplayın. (*İpucu:* $\cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$)

b. $\int\cot^5\theta\,d\theta$'yı $\int\cot^3\theta\,d\theta$ cinsinden ifade edin.

c. $\int\cot^7\theta\,d\theta$'yı $\int\cot^5\theta\,d\theta$ cinsinden ifade edin.

d. k pozitif bir tamsayı olmak üzere, $\int\cot^{2k+1}\theta\,d\theta$ 'yı $\int\cot^{2k-1}\theta\,d\theta$ cinsinden ifade edin.

Teori ve Örnekler

87. Alan Üstten $y = 2\cos x$ ve alttan $y = \sec x$, $-\pi/4 \le x \le \pi/4$ ile sınırlı bölgenin alanını bulun.

88. Alan Üstten ve alttan $y = \csc x$ ve $y = \sin x$, $-\pi/6 \le x \le \pi/6$ eğrileri ve soldan $x = \pi/6$ doğrusuyla sınırlı "üçgensel" bölgenin alanını bulun.

89. Hacim Alıştırma 87'deki bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen cismin hacmini bulun.

90. Hacim Alıştırma 88'deki bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen cismin hacmini bulun.

91. Yay uzunluğu $y = \ln(\cos x)$, $0 \le x \le \pi/3$ eğrisinin uzunluğunu bulun.

92. Yay uzunluğu $y = \ln(\sec x)$, $0 \le x \le \pi/4$ eğrisinin uzunluğunu bulun.

93. Kütle merkezi x-ekseni, $y = \sec x$ eğrisi ve $x = -\pi/4$, $x = \pi/4$ doğrularıyla sınırlı bölgenin kütle merkezini bulun.

94. Kütle merkezi x-ekseni, $y = \csc x$ eğrisi ve $x = \pi/6$, $x = 5\pi/6$ doğrularıyla sınırlı bölgenin kütle merkezini bulun.

95. csc *x*'in integrali Kofonksiyonları kullanıp Örnek 7'deki türetmeyi tekrarlayarak

$$\int\csc x\,dx = -\ln|\csc x+\cot x| + C.$$

olduğunu gösterin.

96. Farklı dönüşümler kullanmak

$$\int((x^2-1)(x+1))^{-2/3}\,dx$$

integralinin aşağıdaki değişken dönüşümlerinden herhangi biriyle hesaplanabileceğini gösterin.

a. $u = 1/(x+1)$

b. $u = ((x-1)/(x+1))^k$ $k = 1, 1/2, 1/3, -1/3, -2/3$ ve -1 için

c. $u = \tan^{-1}x$

d. $u = \tan^{-1}\sqrt{x}$ **e.** $u = \tan^{-1}((x-1)/2)$

f. $u = \cos^{-1}x$ **g.** $u = \cosh^{-1}x$

İntegralin değeri nedir? (*Kaynak*: "Problems and Solutions," *College Mathematics Journal*, Vol. 21., No.5, Nov.1990, sayfa 425-426.)

8.2 Kısmi İntegrasyon

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

ve

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

olduğundan

$$\int x \cdot x\,dx \neq \int x\,dx \cdot \int x\,dx$$

olduğu açıktır. Başka bir deyişle, bir çarpımın integrali genelde integrallerin çarpımı *değildir*:

$$\int f(x)g(x)\,dx \quad \text{integrali} \quad \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx \text{ çarpımına eşit değildir.}$$

Kısmi integrasyon,

$$\int f(x)g(x)\,dx$$

şeklinde integralleri basitleştirmek için bir tekniktir.
Yöntem, f'nin tekrar tekrar türevinin alınabildiği ve g'nin de zorlanılmadan tekrar tekrar integre edilebildiği hallerde kullanışlıdır.

$$\int xe^x\,dx$$

böyle bir integraldir, çünkü $f(x) = x$ iki kere türevlenerek sıfır olur ve $g(x) = e^x$ zorlanılmadan tekrar tekrar integre edilebilir. Kısmi integrasyon ayrıca, tekrar tekrar integrasyondan veya türev alamdan sonra integrandın her parçasının yeniden göründüğü

$$\int e^x \sin x\,dx$$

şeklindeki integrallerde de kullanılabilir.

Bu bölümde, kısmi integrasyonu tanımlayacak ve nasıl uygulandığını göstereceğiz.

İntegral Formu İçin Çarpım Kuralı

f ve g x'in türevlenebilir fonksiyonları ise, Çarpım Kuralı

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

olduğunu söyler. Belirsiz integraller cinsinden bu eşitlik

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx = \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\,dx$$

haline gelir

veya

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

Bu son eşitlikte terimleri yeniden düzenlemekle

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx - \int f'(x)g(x)\,dx$$

elde ederiz. Bu eşitlik **kısmi integrasyon** formülüne yol açar.

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \qquad (1)$$

Formülü diferansiyel formda yazarsak bazen hatırlamak daha kolay olur. $u = f(x)$ ve $v = g(x)$ olsun. Bu durumda, $du = f'(x)dx$ ve $dv = g'(x)dx$ olur. Dönüşüm Kuralını kullanarak kısmi integrasyon formülü aşağıdaki şekle dönüşür.

Kısmi İntegrasyon Formülü

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad (2)$$

Bu formül, $\int u\,dv$ gibi bir integrali $\int v\,du$ gibi ikinci bir integral cinsinden ifade eder. u ve v'nin özel bir seçimi ile ikinci integralin hesabı birinciye göre daha kolay olabilir. Formülün kullanımında u ve dv için çeşitli seçimler söz konusu olabilir. Aşağıdaki örnekler yöntemi açıklamaktadırlar.

ÖRNEK 1 Kısmi İntegrasyonu Kullanmak

$$\int x\cos x\,dx$$

integralini bulun.

Çözüm

$$u = x, \qquad dv = \cos x\,dx,$$
$$du = dx, \qquad v = \sin x. \qquad \text{cos } x\text{'in en basit ters türevi}$$

ile

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \text{ formülünü kullanırız.}$$

Bu durumda

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$ ■

Örnek 1'de, u ve dv olarak alınabilecek seçimleri inceleyelim.

ÖRNEK 2 Örnek 1'e Geri Dönüş

$$\int x\cos x\,dx = \int u\,dv$$

integraline kısmi integrasyon uygulamak için, dört olası seçimimiz vardır.

Bunlar

1. $u = 1$ ve $dv = x \cos x\, dx$
2. $u = x$ ve $dv = \cos x\, dx$
3. $u = x \cos x$ ve $dv = dx$
4. $u = \cos x$ ve $dv = x\, dx$

seçenekleridir. Her birini tek tek inceleyelim.

Seçim 1 işe yaramayacaktır, çünkü v'yi bulmak için $dv = x \cos x$'i nasıl integre edeceğimizi bilmiyoruz.

Seçim 2, Örnek 1'de gördüğümüz gibi işe yarar.

Seçim 3

$$u = x \cos x, \qquad dv = dx,$$
$$du = (\cos x - x \sin x)\, dx, \qquad v = x$$

verir ve yeni integral

$$\int v\, du = \int (x \cos x - x^2 \sin x)\, dx$$

olur. Bu başlangıçtaki integralden de kötü bir integraldir.

Seçim 4

$$u = \cos x, \qquad dv = x\, dx,$$
$$du = -\sin x\, dx, \qquad v = x^2/2,$$

verir ve yeni integral

$$\int v\, du = -\int \frac{x^2}{2} \sin x\, dx$$

olur. Bu da çok kötüdür. ■

Kısmi integrasyonla integral almanın amacı, nasıl hesaplayacağımızı bilmediğimiz bir $\int u\, dv$ integralinden hesaplayabildiğimiz bir $\int v\, du$ integraline gitmektir. Genellikle, önce integrandın, dx'i de içeren ve kolayca integre edebileceğiniz olabildiği kadar geniş bir bölümünü dv olarak seçin; u, geriye kalan kısımdır. Kısmi integrasyonun her zaman işe yaramadığını aklınızdan çıkarmayın.

ORNEK 3 Doğal Logaritmanın İntegrali

$$\int \ln x\, dx$$

integralini bulun.

Çözüm $\int \ln x\, dx$ integrali $\int \ln x \cdot 1\, dx$ olarak yazılabileceğinden,

$u = \ln x$ — Türevi alındığında basitleşir; $dv = dx$ — İntegre edilmesi kolay

$du = \frac{1}{x} dx,$; $v = x$ — En basit ters türev

ile $\int u\, dv = uv - \int v\, du$ formülünü kullanırız. Böylece

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$ ■

buluruz.

Bazı hallerde kısmi integrasyonu bir kereden fazla kullanmak zorunda kalırız

ÖRNEK 4 Arka Arkaya Kullanım

$$\int x^2 e^x \, dx$$

integralini hesaplayın.

Çözüm $u = x^2$, $dv = e^x\, dx$, $du = 2x\, dx$ ve $v = e^x$
ile

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x \, dx$$

buluruz. Yeni integral başlangıçtakine göre daha kolaydır çunkü x'in derecesi bir azalmıştır. Sağdaki integrali hesaplamak için kısmi integrasyonu $u = x$ ve $dv = e^x\, dx$ ile bir kere daha kullanırız. Bu durumda $du = dx$ ve $v = e^x$ olur ve

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x + C$$

buluruz. Böylece,

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x \, dx &= x^2 e^x - 2\int xe^x \, dx \\ &= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Örnek 4'teki teknik, n herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere herhangi bir $\int x^n e^x \, dx$ integrali için çalışır çunkü x^n'nin türevlerini alarak eninde sonunda sıfıra ulaşırız ve e^x'i integre etmek kolaydır. Bu bölümde daha ileride, *tablolu integrasyonu* incelerken bu konuda daha fazla şey söyleyeceğiz.

Aşağıdaki örnekte verilen integral gibi integraller elektrik mühendisliğinde ortaya çıkar. İntegrallerin hesaplanması, iki defa kısmi integrasyon ile elde edilen denklemden bilinmeyen integralin çekilmesini gerektirir.

ÖRNEK 5 Bilinmeyen İntegrali Çekmek

$$\int e^x \cos x \, dx$$

integralini hesaplayın.

Çözüm $u = e^x$ ve $dv = \cos x\, dx$ olsun. Bu durumda, $du = e^x\, dx$ ve $v = \sin x$ olur. Bunlar

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

verir. İkinci integral, $\cos x$ yerine $\sin x$ bulunması dışında birincisinin aynısıdır. Bunu hesaplamak için,

$$u = e^x, \qquad dv = \sin x\, dx, \qquad v = -\cos x, \qquad du = e^x\, dx$$

ile kısmi integrasyon uygularız. Böylece

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x \, dx &= e^x \sin x - \left(-e^x \cos x - \int (-\cos x)(e^x \, dx)\right) \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx.\end{aligned}$$

elde ederiz.

Bilinmeyen integral artık denklemin iki tarafında da bulunmaktadır. İntegrali iki tarafa da eklemek ve integrasyon sabitini ilave etmek

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x + C_1$$

verir. 2 ile böler ve integrasyon sabitini yeniden isimlendirirsek,

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + C$$

elde ederiz. ■

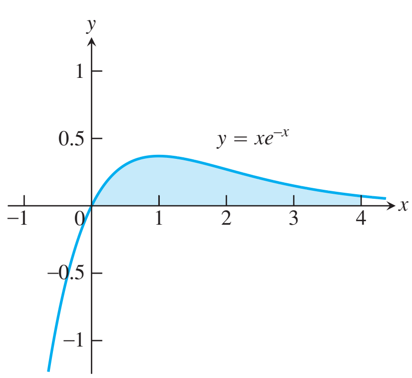
Belirli İntegralleri Kısmi İntegrasyonla Hesaplamak

Belirli integralleri kısmi integrasyonla hesaplamak üzere (1) Denklemindeki kısmi integrasyon formülü, Temel Teoremin 2. Kısmı ile birleştirilebilir. f' ve g''nün ikisinin de $[a,\ b]$ aralığı üzerinde sürekli olduklarını varsayarsak, Temel Teoremin 2. Kısmı

Belirli İntegraller İçin Kısmi İntegrasyon Formülü

$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\, dx \qquad (3)$$

verir. (3) denklemini uygularken normalde, Denklem (2)'deki u ve v notasyonunu kullanırız, çünkü hatırlaması daha kolaydır. Aşağıda bir örnek verilmektedir.



ŞEKİL 8.1 Örnek 6'daki bölge.

ORNEK 6 Alan Bulmak

$y = xe^{-x}$ eğrisi ile x-ekseni arasındaki bölgenin, $x = 0$'dan $x = 4$'e kadar alanını bulun.

Çözüm Bölge, Şekil 8.1'de renkli olarak gösterilmiştir. Alanı,

$$\int_0^4 xe^{-x}\, dx$$

dir.

$u = x,\ dv = e^x\, dx,\ v = -e^x$ ve $du = dx$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}\int_0^4 xe^{-x}\, dx &= -xe^{-x}\Big]_0^4 - \int_0^4 (-e^{-x})\, dx \\ &= [-4e^{-4} - (0)] + \int_0^4 e^{-x}\, dx \\ &= -4e^{-4} - e^{-x}\Big]_0^4 \\ &= -4e^{-4} - e^{-4} - (-e^0) = 1 - 5e^{-4} \approx 0.91\end{aligned}$$

bulunur. ■

Tablolu İntegraller

f'nin sıfır verecek şekilde art arda türevinin alınabildiği ve g'nin zorluk çıkarmadan art arda integre edilebildiği $\int f(x)g(x)\, dx$ şeklindeki integrallerin, kısmi integrasyonun doğal adayları olduklarını gördük. Ancak çok fazla tekrar gerekliyse, hesaplamalar zahmetli olabilir. Bu gibi durumlarda, hesaplamaları bir sürü zahmetten kurtulacak şekilde düzenle-

mek mümkündür. Buna **tablolu integrasyon** denir ve aşağıdaki örneklerde nasıl yapılacağı gösterilmektedir.

ORNEK 7 Tablolu İntegrasyon Kullanmak

Tablolu integrasyonla

$$\int x^2 e^x \, dx.$$

integralini bulun.

Çözüm $f(x) = x^2$ ve $g(x) = e^x$ ile aşağıdaki listeyi yaparız.

***f*(*x*) ve türevleri**		***g*(*x*) ve integralleri**
x^2	$(+)$	e^x
$2x$	$(-)$	e^x
2	$(+)$	e^x
0		e^x

Oklarla birleştirilmiş fonksiyonların çarpımlarını ortadaki işaretlerle birbirlerine ekleyerek

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

elde ederiz. Bunu, Örnek 4'teki sonuçla karşılaştırın. ■

ÖRNEK 8 Tablolu İntegrasyon Kullanmak

Tablolu integrasyonla

$$\int x^3 \sin x \, dx$$

integralini bulun.

Çözüm $f(x) = x^3$ ve $g(x) = \sin x$ ile aşağıdaki listeyi yaparız.

***f*(*x*) ve türevleri**		***g*(*x*) ve integralleri**
x^3	$(+)$	$\sin x$
$3x^2$	$(-)$	$-\cos x$
$6x$	$(+)$	$-\sin x$
6	$(-)$	$\cos x$
0		$\sin x$

Yine, oklarla birleştirilmiş fonksiyonların çarpımlarını aradaki işaretlerle birbirlerine ekleyerek

$$\int x^3 \sin x \, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C$$ ■

elde ederiz.

Bu bölümün sonundaki Ek Alıştırmalar, f'nin veya g'nin sıfır elde edilecek şekilde art arda türetilemediği durumlarda Tablolu İntegrasyonun nasıl kullanıldığını göstermektedir.

Özet

Değişken dönüşümü işe yaramadığında kısmi integrasyonu deneyin. İntegrand'ın iki fonksiyonun çarpımı şeklinde olduğu bir integralle başlayın,

$$\int f(x)g(x)\,dx.$$

(Örnek 3'teki gibi, g'nin sabit fonksiyon 1 olabileceğini hatırlayın.) dv'yi $f(x)$ veya $g(x)$ ile birlikte dx'i de içerecek şekilde seçerek, İntegrali

$$\int u\,dv$$

formuna uyarlayın.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

formülünün sağ tarafını elde etmek için, dv'yi kolayca integre ederek v'yi bulabilmemiz gerektiğini hatırlayın. Sağ taraftaki yeni integral baştaki integrale göre daha karmaşık ise, u ve dv için farklı seçenekler deneyin.

ÖRNEK 9 Bir İndirgeme Formülü

$$\int \cos^n x\,dx$$

integralini $\cos x$'in daha küçük bir kuvvetinin integrali olarak ifade eden bir indirgeme formülü bulun.

Çözüm $\cos^n x$'i $\cos^{n-1} x \cdot \cos x$ olarak düşünebiliriz. Sonra

$$u = \cos^{n-1} x \qquad \text{ve} \qquad dv = \cos x\,dx$$

olarak alalım.

$$du = (n-1)\cos^{n-2} x\,(-\sin x\,dx) \qquad \text{ve} \qquad v = \sin x$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned}\int \cos^n x\,dx &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \sin^2 x \cos^{n-2} x\,dx\\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x\,dx,\\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \cos^n x\,dx.\end{aligned}$$

buluruz. Bu eşitliğin her iki tarafına

$$(n-1)\int \cos^n x\,dx$$

eklersek

$$n\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx$$

buluruz. Her iki tarafı da n ile bölerek sonucu elde ederiz;

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

Bu sonuç, cos x'in kuvvetini 2 düşürür ve çok kullanışlı bir formüldür. n'nin pozitif tamsayı olması durumunda

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \quad \text{veya} \quad \int \cos^0 x\,dx = \int dx = x + C$$ ■

integrallerinden birini elde edene kadar formülü tekrar tekrar kullanabiliriz.

ÖRNEK 10 Bir İndirgeme Formülünü Kullanmak

$$\int \cos^3 x\,dx$$

integralini hesaplayın.

Çözüm Örnek 9'daki sonuçtan,

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3}\int \cos x\,dx \\ &= \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\sin x + C\end{aligned}$$ ■

ALIŞTIRMALAR 8.2

Kısmi İntegrasyon

1–24 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

1. $\int x \sin \frac{x}{2}\,dx$
2. $\int \theta \cos \pi\theta\,d\theta$
3. $\int t^2 \cos t\,dt$
4. $\int x^2 \sin x\,dx$
5. $\int_1^2 x \ln x\,dx$
6. $\int_1^e x^3 \ln x\,dx$
7. $\int \tan^{-1} y\,dy$
8. $\int \sin^{-1} y\,dy$
9. $\int x \sec^2 x\,dx$
10. $\int 4x \sec^2 2x\,dx$
11. $\int x^3 e^x\,dx$
12. $\int p^4 e^{-p}\,dp$
13. $\int (x^2 - 5x)e^x\,dx$
14. $\int (r^2 + r + 1)e^r\,dr$
15. $\int x^5 e^x\,dx$
16. $\int t^2 e^{4t}\,dt$
17. $\int_0^{\pi/2} \theta^2 \sin 2\theta\,d\theta$
18. $\int_0^{\pi/2} x^3 \cos 2x\,dx$
19. $\int_{2/\sqrt{3}}^{2} t \sec^{-1} t\,dt$
20. $\int_0^{1/\sqrt{2}} 2x \sin^{-1}(x^2)\,dx$
21. $\int e^\theta \sin\theta\,d\theta$
22. $\int e^{-y} \cos y\,dy$
23. $\int e^{2x} \cos 3x\,dx$
24. $\int e^{-2x} \sin 2x\,dx$

Değişken Dönüşümü ve Kısmi İntegrasyon

25–30 alıştırmalarında kısmi integrasyondan önce bir değişken dönüşümü kullanın.

25. $\int e^{\sqrt{3s+9}}\,ds$

26. $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$

27. $\int_0^{\pi/3} x\tan^2 x\,dx$

28. $\int \ln(x+x^2)\,dx$

29. $\int \sin(\ln x)\,dx$

30. $\int z(\ln z)^2\,dz$

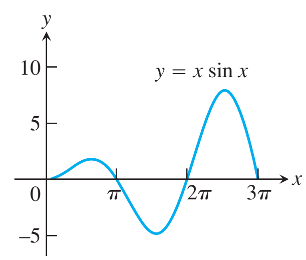
Teori ve Örnekler

31. Alan bulma $y = x\sin x$ eğrisi ve x-ekseni arasındaki bölgenin (şekle bakın) alanını

a. $0 \le x \le \pi$ **b.** $\pi \le x \le 2\pi$ **c.** $2\pi \le x \le 3\pi$

için bulun.

d. Nasıl bir kalıp görüyorsunuz? n negatif olmayan keyfi bir tamsayı olmak üzere, $n\pi \le x \le (n+1)\pi$ için eğri ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanı nedir? Yanıtınızı açıklayın.



32. Alan bulma $y = x\cos x$ eğrisi ile x-ekseni arasındaki bölgenin (şekle bakın) alanını

a. $\pi/2 \le x \le 3\pi/2$ **b.** $3\pi/2 \le x \le 5\pi/2$

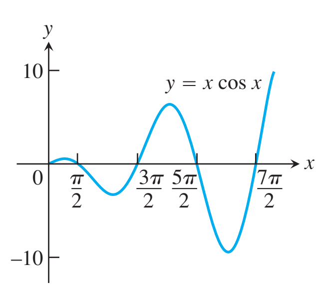
c. $5\pi/2 \le x \le 7\pi/2$

için bulun.

d. Ne gibi bir kalıp görüyorsunuz? n negatif olmayan keyfi bir tamsayı olmak üzere

$$\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi \le x \le \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi$$

aralığında eğri ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanı nedir? Yanıtınızı açıklayın.



33. Hacim bulmak Birinci bölgede, koordinat eksenleri, $y = e^x$ eğrisi ve $x = \ln 2$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin $x = \ln 2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen cismin hacmini bulun.

34. Hacim bulmak Birinci bölgede, koordinat eksenleri, $y = e^x$ eğrisi ve $x = 1$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin

a. y-ekseni, **b.** $x = 1$ doğrusu

etrafında döndürülmesiyle üretilen cismin hacmini bulun.

35. Hacim bulmak Birinci bölgede, koordinat eksenleri ve $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi/2$, eğrisiyle sınırlanan bölgenin

a. y-ekseni, **b.** $x = \pi/2$ doğrusu

etrafında döndürülmesiyle üretilen cismin hacmini bulun.

36. Hacim bulmak x-ekseni ve $y = x\sin x$, $0 \le x \le \pi$, eğrisiyle sınırlanan bölgenin

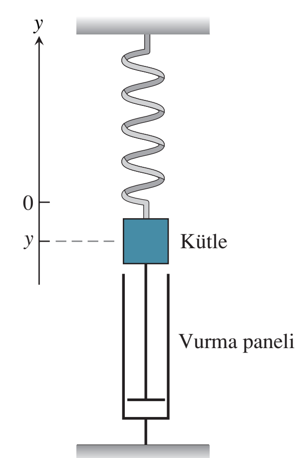
a. y-ekseni **b.** $x = \pi$ eğrisi

etrafında döndürülmesi ile üretilen cismin hacmini bulun. (Grafik için Alıştırma 31'e bakın.)

37. Ortalama değer Aşağıdaki şekilde, bir vurma paneliyle sembolize edilen bir geciktirici kuvvet, ağırlıklandırılmış yayın hareketini, kütlenin t anındaki konumu

$$y = 2e^{-t}\cos t, \quad t \ge 0$$

olacak şekilde yavaşlatır. $0 \le t \le 2\pi$ aralığında y'nin ortalama değerini bulun.



38. Ortalama değer Alıştırma 37'deki gibi bir yay-kütle-vurma paneli sisteminde, kütlenin t anındaki konumu

$$y = 4e^{-t}(\sin t - \cos t), \quad t \ge 0$$

olarak verilmektedir. $0 \le t \le 2\pi$ aralığında y'nin ortalama değerini bulun.

İndirgeme Formülleri

39–42 alıştırmalarında, *indirgeme formülünü* doğrulamak için kısmi integrason kullanın.

39. $\int x^n \cos x\, dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1} \sin x\, dx$

40. $\int x^n \sin x\, dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1} \cos x\, dx$

41. $\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\, dx, \quad a \neq 0$

42. $\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\, dx$

Fonksiyonların Terslerini İntegre Etmek

Kısmi integrasyon, fonksiyonların terslerini integre etmek için genellikle iyi sonuç veren bir kurala yol açar:

$$\int f^{-1}(x)\, dx = \int y f'(y)\, dy \qquad y = f^{-1}(x),\quad x = f(y),\quad dx = f'(y)\, dy$$

$$= yf(y) - \int f(y)\, dy \qquad u = y,\ dv = f'(y)\, dy \text{ ile kısmi integrasyon}$$

$$= xf^{-1}(x) - \int f(y)\, dy$$

Ana fikir integralin en karmaşık kısmını almak, ki bu durumda $f^{-1}(x)$'dir, ve ilk önce onu basitleştirmektir. ln x'in integrali için

$$\int \ln x\, dx = \int y e^y\, dy \qquad y = \ln x,\quad x = e^y,\quad dx = e^y\, dy$$

$$= ye^y - e^y + C$$

$$= x\ln x - x + C$$

buluruz. $\cos^{-1} x$'in integrali içinse

$$\int \cos^{-1} x\, dx = x\cos^{-1} x - \int \cos y\, dy \qquad y = \cos^{-1} x$$

$$= x\cos^{-1} x - \sin y + C$$

$$= x\cos^{-1} x - \sin(\cos^{-1} x) + C$$

elde ederiz.

43-46 alıştırmalarındaki integralleri hesaplamak için,

$$\int f^{-1}(x)\, dx = xf^{-1}(x) - \int f(y)\, dy \qquad y = f^{-1}(x) \tag{4}$$

formülünü kullanın. Yanıtlarınızı x cinsinden ifade edin.

43. $\int \sin^{-1} x\, dx$

44. $\int \tan^{-1} x\, dx$

45. $\int \sec^{-1} x\, dx$

46. $\int \log_2 x\, dx$

$f^{-1}(x)$'i integre etmenin başka bir yolu (tabii f^{-1} integre edilebiliyorsa), $u = f^{-1}(x)$ ve $dv = dx$ ile kısmi integrasyon kullanarak, f^{-1}'in integralini

$$\int f^{-1}(x)\, dx = xf^{-1}(x) - \int x\left(\frac{d}{dx} f^{-1}(x)\right) dx \tag{5}$$

olarak yeniden yazmaktır.

47 ve 48 alıştırmaları (4) ve (5) denklemlerini kullanmanın sonuçlarını karşılaştırmaktadır.

47. (4) ve (5) denklemleri $\cos^{-1} x$'in integrali için farklı formüller verir:

a. $\int \cos^{-1} x\, dx = x\cos^{-1} x - \sin(\cos^{-1} x) + C$ (4) Denklemi

b. $\int \cos^{-1} x\, dx = x\cos^{-1} x - \sqrt{1 - x^2} + C$ (5) Denklemi

İki denklem de doğru olabilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

48. (4) ve (5) denklemleri $\tan^{-1} x$'in integrali için farklı formüller verir:

a. $\int \tan^{-1} x\, dx = x\tan^{-1} x - \ln\sec(\tan^{-1} x) + C$ (4) Denklemi

b. $\int \tan^{-1} x\, dx = x\tan^{-1} x - \ln\sqrt{1 + x^2} + C$ (5) Denklemi

İki denklem de doğru olabilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

49 ve 50 alıştırmalarındaki integralleri **(a)** (4) denklemiyle ve **(b)** (5) denklemiyle hesaplayın. Her bir durumda, cevabınızın x'e göre türevini alarak yaptıklarınızı kontrol edin.

49. $\int \sinh^{-1} x\, dx$

50. $\int \tanh^{-1} x\, dx$

8.3 Rasyonel Fonksiyonların Kısmi Kesirlerle İntegrasyonu

Bu bölüm, bir rasyonel fonksiyonun (polinomların bir kesri), *kısmi kesirler* denen ve kolaylıkla integre edilebilen daha basit kesirlerin toplamı olarak nasıl yazılabildiğini göstermektedir. Örneğin, $(5x - 3)/(x^2 - 2x - 3)$ kesri

$$\frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{2}{x + 1} + \frac{3}{x - 3}$$

olarak yeniden yazılabilir. Bunu, sağ taraftaki kesirleri $(x + 1)(x - 3)$ ortak paydası altında toplayarak cebirsel olarak doğrulayabiliriz. Rasyonel fonksiyonları böyle bir toplam olarak yazmakta elde edilen başarı, diğer konularda da kullanışlıdır (örneğin, diferansiyel denklemleri çözerken belirli dönüşümler kullanıldığında). Yukarıdaki ifadenin sol tarafındaki $(5x - 3)/(x + 1)(x - 3)$ kesrini integre etmek için, basitçe sağ taraftaki kesirlerin integrallerini toplarız:

$$\int \frac{5x - 3}{(x + 1)(x - 3)}\,dx = \int \frac{2}{x + 1}\,dx + \int \frac{3}{x - 3}\,dx$$

$$= 2 \ln |x + 1| + 3 \ln |x - 3| + C.$$

Rasyonel fonksiyonları, daha basit kesirlerin bir toplam olarak, yeniden yazma yöntemine **kısmi kesirler yöntemi** denir. Yukarıdaki örnek durumunda

$$\frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 3} \qquad (1)$$

olacak şekilde A ve B sabitlerini bulmaktır. (Bir an için $A = 2$ ve $B = 3$'ün işe yarayacağını bilmediğimizi varsayın.) $A/(x + 1)$ ve $B/(x - 3)$ kesirlerine **kısmi kesirler** deriz, çünkü paydaları esas payda $x^2 - 2x - 3$'ün parçalarıdır. A ve B'ye, uygun değerlerini buluncaya kadar, **belirsiz katsayılar** diyeceğiz.

A ve B'yi bulmak için, (2) denklemini kesir halinden çıkararak,

$$5x - 3 = A(x - 3) + B(x + 1) = (A + B)x - 3A + B$$

şeklinde yazarız. Bu, ancak ve ancak iki tarafta da x'in kuvvetlerinin katsayıları eşitse bir özdeşlik olacaktır:

$$A + B = 5, \quad -3A + B = -3$$

Bu denklemleri bir arada çözersek, $A = 2$ ve $B = 3$ buluruz.

Yöntemin Genel Tanımı

Bir $f(x)/g(x)$ rasyonel fonksiyonunu kısmi kesirlerin bir toplamı olarak yazmanın başarısı iki şeye bağlıdır:

- *$f(x)$'in derecesi $g(x)$'in derecesinden küçük olmalıdır.* Yani kesir, basit kesir olmalıdır. Değilse, $f(x)$'i $g(x)$ ile bölün ve kalan terimiyle çalışın. Bu bölümde Örnek 3'e bakın
- *$g(x)$'in çarpanlarını bilmeliyiz.* Teorik olarak, reel katsayılı herhangi bir polinom reel lineer çarpanların ve reel kuadratik çarpanların bir çarpımı olarak yazılabilir. Pratikte, çarpanları bulmak zor olabilir.

Aşağıda, g'nin çarpanlarının bilinmesi durumunda, bir $f(x)/g(x)$ basit kesrinin kısmi kesirlerinin nasıl bulunacağı açıklanmaktadır.

Kısmi Kesirler Yöntemi ($f(x)/g(x)$ Basit)

1. $x - r$, $g(x)$'in lineer bir çarpanı olsun. $(x - r)^m$'nin $x - r$'nin $g(x)$'i bölen en büyük kuvveti olduğunu varsayın. Sonra, bu çarpanı aşağıdaki gibi m tane kısmi kesre atayın:

$$\frac{A_1}{x - r} + \frac{A_2}{(x - r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x - r)^m}.$$

   Bunu $g(x)$'in farklı her lineer çarpanı için tekrarlayın.

2. $x^2 + px + q$, $g(x)$'in indirgenemez bir kuadratik çarpanı olsun. Bu çarpanın $g(x)$'i bölen en büyük kuvvetinin $(x^2 + px + q)^n$ olduğunu varsayın. Sonra bu çarpana aşağıdaki gibi n tane kısmi kesrin toplamını karşılık getirin:

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(x^2 + px + q)^n}$$

   Bunu $g(x)$'in reel katsayılı lineer çarpanlara ayrılamayan her farklı kuadratik çarpanı için tekrarlayın.

3. Orijinal $f(x)/g(x)$ kesrini bütün bu kısmi kesirlerin toplamına eşitleyin. Ortaya çıkan denklemi kesirlerden arındırın ve terimleri x'in azalan kuvvetleri şeklinde düzenleyin.

4. x'in kuvvetlerinin katsayılarını birbirine eşitleyin ve ortaya çıkan denklemlerden belirlenmemiş katsayıları çözün.

ÖRNEK 1 Farklı Lineer Çarpanlar

$$\int \frac{x^2 + 4x + 1}{(x - 1)(x + 1)(x + 3)}\,dx$$

integralini kısmi kesirler kullanarak bulun.

Çözüm Kısmi kesirlere ayrıştırma

$$\frac{x^2 + 4x + 1}{(x - 1)(x + 1)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x + 3}$$

şeklindedir. A, B ve C belirsiz katsayılarını bulmak için paydaları eşitler ve

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 1 &= A(x + 1)(x + 3) + B(x - 1)(x + 3) + C(x - 1)(x + 1) \\ &= (A + B + C)x^2 + (4A + 2B)x + (3A - 3B - C) \end{aligned}$$

elde ederiz. Eşitliğin iki tarafındaki polinomlar özdeştirler. Aynı kuvvetteki x'lerin katsayılarını eşitleyerek

x^2'nin katsayıları: $A + B + C = 1$
x^1'in katsayıları: $4A + 2B = 4$
x^0'ın katsayıları: $3A - 3B - C = 1$

elde ederiz.

A, B ve C bilinmeyenleri için böyle bir denklem sistemini çözmenin, bilinmeyenleri elemek veya bir hesap makinesi ve bilgisayar kullanmak gibi birkaç yolu vardır. Hangi yöntem kullanılırsa kullanılsın, çözüm $A = 3/4$, $B = 1/2$ ve $C = -1/4$'tür. Böylece,

$$\int \frac{x^2 + 4x + 1}{(x-1)(x+1)(x+3)}\,dx = \int \left[\frac{3}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+3}\right] dx$$

$$= \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + K,$$

Burada K integrasyon sabitidir (belirsiz katsayı C ile karıştırmaktan kaçınmak için) ■

ÖRNEK 2 Tekrar Eden Bir Lineer Çarpan

$$\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\,dx.$$

integralini hesaplayın.

Çözüm Önce integrandı belirsiz katsayılarla kısmi kesirlerin bir toplamı olarak ifade ederiz.

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

$$6x + 7 = A(x+2) + B \qquad \text{Her iki tarafı } (x+2)^2 \text{ ile çarpın}$$

$$= Ax + (2A + B)$$

x'in aynı kuvvetteki katsayılarını eşitlemek,

$$A = 6 \quad \text{ve} \quad 2A + B = 12 + B = 7 \quad \text{veya} \quad A = 6 \quad \text{ve} \quad B = -5$$

verir. Dolayısıyla

$$\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\,dx = \int \left(\frac{6}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2}\right) dx$$

$$= 6\int \frac{dx}{x+2} - 5\int (x+2)^{-2}\,dx$$

$$= 6\ln|x+2| + 5(x+2)^{-1} + C$$ ■

ÖRNEK 3 Bir Bileşik Kesri İntegre Etmek

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}\,dx.$$

integralini hesaplayın.

Çözüm Önce payı paydaya bölerek bir polinom artı bir basit kesir elde ederiz.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 4x^2 - x - 3 & x - 2x - 3 \\ \underline{2x^3 - 4x^2 - 6x\phantom{{}-3}} & 2x \\ 5x - 3 & \end{array}$$

Sonra bileşik kesri bir polinomla bir basit kesrin toplamı olarak yazarız

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} = 2x + \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}$$

Sağ taraftaki kesrin kısmi kesirlere ayrılışını giriş örneğinde bulmuştuk. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}\,dx &= \int 2x\,dx + \int \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}\,dx \\ &= \int 2x\,dx + \int \frac{2}{x + 1}\,dx + \int \frac{3}{x - 3}\,dx \\ &= x^2 + 2\ln|x + 1| + 3\ln|x - 3| + C\end{aligned}$$

buluruz. ■

Kuadratik bir polinom, reel katsayılı lineer iki çarpanın çarpımı olarak yazılamazsa, polinoma **indirgenemez** polinom denir.

ÖRNEK 4 Paydada Kuadratik İndirgenemez Bir Çarpan

$$\int \frac{-2x + 4}{(x^2 + 1)(x - 1)^2}\,dx$$

integralini hesaplayın.

Çözüm Paydada tekrarlanan bir çarpanın yanısıra, indirgenemez bir çarpan da bulunmaktadır, dolayısıyla

$$\frac{-2x + 4}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{(x - 1)^2} \tag{2}$$

yazarız. Denklemi kesirlerden arındırmak

$$\begin{aligned}-2x + 4 &= (Ax + B)(x - 1)^2 + C(x - 1)(x^2 + 1) + D(x^2 + 1) \\ &= (A + C)x^3 + (-2A + B - C + D)x^2 \\ &\quad + (A - 2B + C)x + (B - C + D)\end{aligned}$$

verir. Aynı kuvvetten terimlerin katsayılarını eşitlersek,

x^3'ün katsayıları : $0 = A + C$

x^2'nin katsayıları : $0 = -2A + B - C + D$

x^1'in katsayıları : $-2 = A - 2B + C$

x^0'ın katsayıları : $4 = B - C + D$

verir. Bu denklemleri birlikte çözerek, A, B, C ve D'nin değerlerini buluruz:

$-4 = -2A, \quad A = 2$ İkinci denklemden dördüncü denklemi çıkartın.

$C = -A = -2$ Birinci denklemden

$B = 1$ Üçüncü denklemde $A = 2$ ve $C = -2$

$D = 4 - B + C = 1$ Dördüncü denklemden

Bu değerleri (2) denkleminde yerine koyarsak,

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

buluruz. Son olarak, yukarıdaki açılımı kullanarak integrali bulabiliriz:

$$\begin{aligned}\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx &= \int \left(\frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx \\ &= \int \left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx \\ &= \ln(x^2+1) + \tan^{-1} x - 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C\end{aligned}$$ ■

ÖRNEK 5 Tekrar Eden Kuadratik İndirgenemez Bir Çarpan

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}.$$

integralini hesaplayın.

Çözüm Kısmi kesirlere ayırma

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

şeklindedir. $x(x^2+1)^2$ ile çarparak

$$\begin{aligned}1 &= A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x \\ &= A(x^4+2x^2+1) + B(x^4+x^2) + C(x^3+x) + Dx^2 + Ex \\ &= (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A\end{aligned}$$

buluruz. Katsayıları eşitlersek

$$A+B=0, \quad C=0, \quad 2A+B+D=0, \quad C+E=0, \quad A=1$$

denklem sistemini elde ederiz. Sistemi çözerek $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = -1$ ve $E = 0$ buluruz. Böylece,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} &= \int \left[\frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2}\right] dx \\ &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{x^2+1} - \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} \\ &= \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} \qquad u = x^2+1,\ du = 2x\,dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|u| + \frac{1}{2u} + K \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + K \\ &= \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2(x^2+1)} + K\end{aligned}$$

bulunur. ■

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Oliver Heaviside
(1850–1925)

Lineer Çarpanlar İçin Heaviside "Örtme" Yöntemi

$f(x)$ polinomunun derecesi $g(x)$'in derecesinden küçük ve

$$g(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$$

her birinin kuvveti bir olan n farklı lineer çarpanın bir çarpımı ise, $f(x)/g(x)$'i kısmi kesirlere ayırmanın çabuk bir yolu vardır.

ÖRNEK 6 Heaviside Yöntemini Kullanmak

Aşağıdaki kısmi kesir açılımında A, B ve C'yi bulun:

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3} \tag{3}$$

Çözüm (3) denkleminin iki tarafını da $(x - 1)$ ile çarparsak,

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 2)(x - 3)} = A + \frac{B(x - 1)}{x - 2} + \frac{C(x - 1)}{x - 3}$$

ve $x = 1$ alırsak, ortaya çıkan denklem A'nın değerini verir:

$$\frac{(1)^2 + 1}{(1 - 2)(1 - 3)} = A + 0 + 0,$$

$$A = 1$$

Yani, A'nın değeri, orijinal

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} \tag{4}$$

denkleminde$(x - 1)$ çarpanının üstünü örtüp, geri kalanını $x = 1$'de hesaplarsak bulacağımız değerdir:

$$A = \frac{(1)^2 + 1}{\boxed{(x - 1)}\,(1 - 2)(1 - 3)} = \frac{2}{(-1)(-2)} = 1$$

$\Uparrow$ Örtün

Aynı şekilde, (3) denklemindeki B'nin değerini, (4) denklemindeki $(x - 2)$ çarpanının üstünü örtüp, geri kalanını $x = 2$'de hesaplayarak bulabiliriz:

$$B = \frac{(2)^2 + 1}{(2 - 1)\,\boxed{(x - 2)}\,(2 - 3)} = \frac{5}{(1)(-1)} = -5$$

$\Uparrow$ Örtün

Son olarak C de (4) denkleminde $(x - 3)$ örtülüp, geri kalanı $x = 3$'te hesaplanarak bulunur:

$$C = \frac{(3)^2 + 1}{(3 - 1)(3 - 2)\,\boxed{(x - 3)}} = \frac{10}{(2)(1)} = 5$$ ■

$\Uparrow$ Örtün

buluruz.

Heaviside Yöntemi

1. *g(x)'i çarpanlarına ayırıp, bölümü yazın:*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)}.$$

2. *g(x)'in $(x - r_i)$ çarpanlarını,* her defasında bir tanesi olmak üzere, örtün ve örtülmemiş x'lerin yerine r_i yazın. Bu her r_i kökü için bir A_i sayısı verir:

$$A_1 = \frac{f(r_1)}{(r_1 - r_2)\cdots(r_1 - r_n)}$$

$$A_2 = \frac{f(r_2)}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)\cdots(r_2 - r_n)}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{f(r_n)}{(r_n - r_1)(r_n - r_2)\cdots(r_n - r_{n-1})}.$$

3. *$f(x)/g(x)$'in kısmi kesir açılımını*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x - r_1)} + \frac{A_2}{(x - r_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x - r_n)}$$

şeklinde yazın.

ÖRNEK 7 Aşağıdaki integrali hesaplayın.

$$\int \frac{x + 4}{x^3 + 3x^2 - 10x}\,dx$$

integralini hesaplayın.

Çözüm $f(x) = x + 4$'ün derecesi $g(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$'in derecesinden küçüktür ve $g(x)$'i çarpanlarına ayırırsak,

$$\frac{x + 4}{x^3 + 3x^2 - 10x} = \frac{x + 4}{x(x - 2)(x + 5)}$$

buluruz. $g(x)$'in kökleri, $r_1 = 0$, $r_2 = 2$ ve $r_3 = -5$'tir. Buradan

$$A_1 = \frac{0 + 4}{\boxed{x}\,(0 - 2)(0 + 5)} = \frac{4}{(-2)(5)} = -\frac{2}{5}$$

⇑ Örtün

$$A_2 = \frac{2 + 4}{2\,\boxed{(x - 2)}\,(2 + 5)} = \frac{6}{(2)(7)} = \frac{3}{7}$$

⇑ Örtün

$$A_3 = \frac{-5 + 4}{(-5)(-5 - 2)\,\boxed{(x + 5)}} = \frac{-1}{(-5)(-7)} = -\frac{1}{35}$$

⇑ Örtün

buluruz.

Dolayısıyla,

$$\frac{x+4}{x(x-2)(x+5)} = -\frac{2}{5x} + \frac{3}{7(x-2)} - \frac{1}{35(x+5)}$$

ve

$$\int \frac{x+4}{x(x-2)(x+5)}\,dx = -\frac{2}{5}\ln|x| + \frac{3}{7}\ln|x-2| - \frac{1}{35}\ln|x+5| + C \quad ■$$

olur.

Katsayıları Belirlemenin Başka Yolları

Kısmi kesirlerde ortaya çıkan katsayıları belirlemenin bir başka yolu, aşağıdaki örnekte olduğu gibi, türev almaktır. Bir diğeri ise, x'e sayısal değerler vermektir.

ÖRNEK 8 Türev Almak

Aşağıdaki denklemde A, B ve C'yi bulun:

$$\frac{x-1}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

Çözüm Önce kesirlerden kurtuluruz:

$$x-1 = A(x+1)^2 + B(x+1) + C$$

$x = -1$ koymak $C = -2$ verir. Sonra iki tarafın da x'e göre türevini alarak

$$1 = 2A(x+1) + B$$

elde ederiz. $x = -1$ yazmak $B = 1$ olduğunu gösterir. Yine türev alarak, $0 = 2A$, yani $A = 0$ buluruz. Dolayısıyla

$$\frac{x-1}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3} \quad ■$$

bulunur.

Bazı problemlerde, A, B ve C cinsinden denklemler elde etmek için, x'e $x = 0, \pm 1, \pm 2$ gibi ufak değerler vermek diğer yöntemlerden hızlı bir alternatif sağlar.

ÖRNEK 9 x'e Sayısal Değerler Vermek

Aşağıdaki denklemde A, B, C ve D'yi bulun.

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

Çözüm Kesirlerden kurtularak,

$$x^2 + 1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

elde edin.

Sonra sırasıyla A, B ve C'yi bulmak için $x = 1, 2, 3$ alın:

$$\begin{aligned}
x = 1: \quad (1)^2 + 1 &= A(-1)(-2) + B(0) + C(0)\\
2 &= 2A\\
A &= 1\\
x = 2: \quad (2)^2 + 1 &= A(0) + B(1)(-1) + C(0)\\
5 &= -B\\
B &= -5\\
x = 3: \quad (3)^2 + 1 &= A(0) + B(0) + C(2)(1)\\
10 &= 2C\\
C &= 5.
\end{aligned}$$

Sonuç:

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}.$$

ALIŞTIRMALAR 8.3

Kesirleri Kısmi Kesirlere Açmak

1-8 alıştırmalarındaki kesirleri kısmi kesirlere ayırın.

1. $\dfrac{5x-13}{(x-3)(x-2)}$

2. $\dfrac{5x-7}{x^2-3x+2}$

3. $\dfrac{x+4}{(x+1)^2}$

4. $\dfrac{2x+2}{x^2-2x+1}$

5. $\dfrac{z+1}{z^2(z-1)}$

6. $\dfrac{z}{z^3-z^2-6z}$

7. $\dfrac{t^2+8}{t^2-5t+6}$

8. $\dfrac{t^4+9}{t^4+9t^2}$

Tekrarlanmayan Lineer Çarpanlar

9-16 alıştırmalarında, integrandları kısmi kesirlerin bir toplamı olarak ifade edin ve integralleri hesaplayın.

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x}$

11. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+5x-6}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-7x+12}\,dx$

13. $\displaystyle\int_4^8 \frac{y\,dy}{y^2-2y-3}$

14. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{y+4}{y^2+y}\,dy$

15. $\displaystyle\int \frac{dt}{t^3+t^2-2t}$

16. $\displaystyle\int \frac{x+3}{2x^3-8x}\,dx$

Tekrarlanan Lineer Çarpanlar

17-20 alıştırmalarında, integrandları kısmi kesirlerin bir toplamı olarak ifade edin ve integralleri hesaplayın.

17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{x^2+2x+1}$

18. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3\,dx}{x^2-2x+1}$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

20. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)(x^2+2x+1)}$

İndirgenemez Kuadratik Çarpanlar

21-28 alıştırmalarında, integrandları kısmi kesirlerin bir toplamı olarak ifade edin ve integralleri hesaplayın.

21. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

22. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t^2+t+4}{t^3+t}\,dt$

23. $\displaystyle\int \frac{y^2+2y+1}{(y^2+1)^2}\,dy$

24. $\displaystyle\int \frac{8x^2+8x+2}{(4x^2+1)^2}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{2s+2}{(s^2+1)(s-1)^3}\,ds$

26. $\displaystyle\int \frac{s^4+81}{s(s^2+9)^2}\,ds$

27. $\displaystyle\int \frac{2\theta^3+5\theta^2+8\theta+4}{(\theta^2+2\theta+2)^2}\,d\theta$

28. $\displaystyle\int \frac{\theta^4-4\theta^3+2\theta^2-3\theta+1}{(\theta^2+1)^3}\,d\theta$

Bileşik Kesirler

29–34 alıştırmalarında, integranda uzun bölme uygulayın, basit kesri kısmi kesirlerin bir toplamı olarak yazın ve sonra integrali hesaplayın.

29. $\displaystyle\int \frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2-1}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{9x^3-3x+1}{x^3-x^2}\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{16x^3}{4x^2-4x+1}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{y^4+y^2-1}{y^3+y}\,dy$

34. $\displaystyle\int \frac{2y^4}{y^3-y^2+y-1}\,dy$

İntegral Hesaplamak

35–40 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

35. $\displaystyle\int \frac{e^t\,dt}{e^{2t} + 3e^t + 2}$

36. $\displaystyle\int \frac{e^{4t} + 2e^{2t} - e^t}{e^{2t} + 1}\,dt$

37. $\displaystyle\int \frac{\cos y\,dy}{\sin^2 y + \sin y - 6}$

38. $\displaystyle\int \frac{\sin\theta\,d\theta}{\cos^2\theta + \cos\theta - 2}$

39. $\displaystyle\int \frac{(x-2)^2\tan^{-1}(2x) - 12x^3 - 3x}{(4x^2+1)(x-2)^2}\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2\tan^{-1}(3x) + 9x^3 + x}{(9x^2+1)(x+1)^2}\,dx$

Başlangıç Değer Problemleri

41–44 alıştırmalarındaki başlangıç değer problemlerinden x'i t'nin bir fonksiyonu olarak çözünüz.

41. $(t^2 - 3t + 2)\dfrac{dx}{dt} = 1 \quad (t > 2), \quad x(3) = 0$

42. $(3t^4 + 4t^2 + 1)\dfrac{dx}{dt} = 2\sqrt{3}, \quad x(1) = -\pi\sqrt{3}/4$

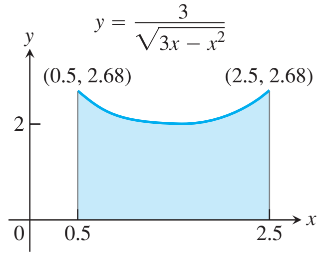
43. $(t^2 + 2t)\dfrac{dx}{dt} = 2x + 2 \quad (t, x > 0), \quad x(1) = 1$

44. $(t + 1)\dfrac{dx}{dt} = x^2 + 1 \quad (t > -1), \quad x(0) = \pi/4$

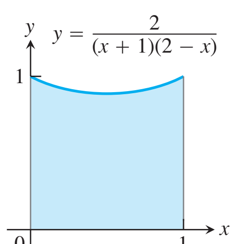
Uygulama ve Örnekler

45 ve 46 alıştırmalarında, renkli bölgenin belirtilen eksen etrafında döndürülmesiyle üretilen cismin hacmini bulun.

45. x-ekseni etrafında

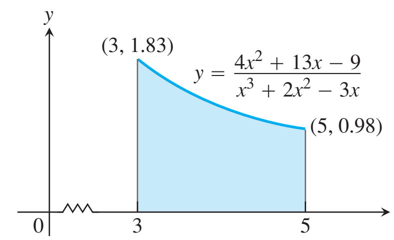


46. y-ekseni etrafında.



47. 2 ondalık basamak hassaslıkta, birinci bölgede, x-ekseni, $y = \tan^{-1} x$ eğrisi ve $x = \sqrt{3}$ doğrusuyla sınırlanan bölgenin kütle merkezinin x-koordinatını bulun.

48. 2 ondalık basamak hassaslıkla, aşağıdaki bölgenin merkezinin x-koordinatını bulun.



49. Sosyal difüzyon Sosyologlar bazen "sosyal difüzyon" terimini bilginin bir toplulukta nasıl yayıldığını tanımlamakta kullanırlar. Bilgi bir söylenti, kültürel bir olay veya teknik bir yenilik hakkında haber olabilir. Yeterince büyük bir toplulukta, bilgiye sahip olan kişilerin sayısı x'e t zamanının bir fonksiyonu olarak bakılır ve difüzyon hızı, dx/dt'nin bilgiye sahip insanların sayısı kere bilgisi olmayan insanların sayısıyla orantılı olduğu varsayılmaktadır. Bu, N topluluktaki kişilerin sayısı olmak üzere,

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x)$$

denklemine yol açar.

t'nin gün, $k = 1/250$ olduğunu ve $t = 0$ anında $N = 1000$ kişilik bir toplulukta iki kişinin bir söylenti başlattığını varsayın.

a. x'i t'nin bir fonksiyonu olarak bulun.

b. Ne zaman topluluğun yarısı söylentiyi duyar? (Bu söylentinin en hızlı yayılacağı zamandır.)

50. İkinci derece kimyasal reaksiyonlar Çoğu kimyasal reaksiyon yeni bir ürün ortaya çıkaracak şekilde bir değişiklik geçiren iki molekülün etkileşmesinin sonucudur. Reaksiyon hızı tipik olarak iki molekül tipinin konsantrasyonlarına bağlıdır. $t = 0$ anında, A maddesinin miktarı a ve B maddesinin miktarı b ise, ve x de t anındaki ürünün mikrtarı ise, x'in oluşum hızı

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

veya

$$\frac{1}{(a - x)(b - x)}\frac{dx}{dt} = k$$

diferansiyel denklemiyle verilebilir. Burada k reaksiyon sabitidir. Bu denklemin iki tarafını da x'e göre integre ederek, **(a)** $a = b$ ve **(b)** $a \neq b$ ise x ile t arasında bir bağıntı kurun. Her durumda, $t = 0$ iken $x = 0$ olduğunu varsayın.

51. π sayısını 22/7'ye bağlayan integral.

a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(x-1)^4}{x^2+1}\,dx$ 'i hesaplayın.

b. $\pi \approx 22/7$ yaklaşımı ne kadar iyidir? Bunu $\left(\dfrac{22}{7} - \pi\right)$'yi π'nin bir yüzdesi şeklinde ifade ederek bulun.

c. $0 \leq x \leq 1$ aralığında $y = \dfrac{x^4(x-1)^4}{x^2+1}$ fonksiyonunun grafiğini çizin. y-ekseninin ölçeğini önce 0 ile 1 arasına, sonra 0 ile 0.5 arasına, sonra da grafiğin görülebileceği kadar küçülterek deneyler yapın. Eğrinin altında kalan alan hakkında nasıl bir sonuç çıkarırsınız?

52. $P(0) = 1$, $P'(0) = 0$ ve

$$\int \frac{P(x)}{x^3(x-1)^2}\,dx$$

rasyonel bir fonksiyon olmak üzere, ikinci derece $P(x)$ polinomunu bulun.

8.4 Trigonometrik İntegraller

Trigonometrik integraller, altı temel trigonometrik fonksiyonun cebirsel kombinasyonlarını içerirler. Prensip olarak, böyle integralleri sinüs ve kosinüs cinsinden daima ifade edebiliriz, fakat çoğunlukla

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

integralinde olduğu gibi diğer fonksiyonlarla çalışmak daha basittir. Genel fikir, bulmak istediğimiz integralleri, çalışması daha kolay olan integrallere dönüştürmek için özdeşlikler kullanmaktır.

Sinüs ve Kosinüs Kuvvetlerinin Çarpımları

m ve n negatif olmayan (pozitif veya sıfır) tamsayılar olmak üzere

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx$$

formundaki integrallerle başlıyoruz. İşi üç duruma ayırabiliriz.

Durum 1 m tek ise, m'yi $2k+1$ olarak yazar ve

$$\sin^m x = \sin^{2k+1} x = (\sin^2 x)^k \sin x = (1-\cos^2 x)^k \sin x \tag{1}$$

elde etmek için $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ özdeşliğini kullanırız. Sonra, tek kalan $\sin x$'i integraldeki dx ile birleştirerek $\sin x\,dx$ yerine $-d(\cos x)$ yazarız.

Durum 2 $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ integralinde m çift ve n tek ise, n'yi $2k+1$ olarak yazar ve

$$\cos^n x = \cos^{2k+1} x = (\cos^2 x)^k \cos x = (1-\sin^2 x)^k \cos x$$

elde etmek için $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ özdeşliğini kullanırız. Sonra, tek kalan $\cos x$'i integraldeki dx ile birleştirerek $\cos x\,dx$ yerine $d(\sin x)$ yazarız.

Durum 3 $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ integralinde hem m ve n hem de çift ise

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \tag{2}$$

dönüşümlerini kullanırız.

ÖRNEK 1 m Tek

$$\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$$

integralini hesaplayın.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x \, dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \, (-d(\cos x)) \\
&= \int (1 - u^2)(u^2)(-du) \qquad u = \cos x \\
&= \int (u^4 - u^2)\, du \\
&= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C \\
&= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C
\end{aligned}$$

■

ÖRNEK 2 *m* Çift *n* Tek

$$\int \cos^5 x \, dx$$

integralini hesaplayın.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\int \cos^5 x \, dx &= \int \cos^4 x \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \, d(\sin x) \qquad m = 0 \\
&= \int (1 - u^2)^2 \, du \qquad u = \sin x \\
&= \int (1 - 2u^2 + u^4)\, du \\
&= u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C
\end{aligned}$$

■

ÖRNEK 3 *m* ve *n*'nin Her İkisi de Çift

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$$

integralini hesaplayın.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1 - \cos 2x)(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{8}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x - \int (\cos^2 2x + \cos^3 2x)\, dx\right].
\end{aligned}$$

$\cos^2 2x$'i içeren terim için

$$\int \cos^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) \qquad \text{Sonuca kadar integrasyon sabitini ihmal ederek}$$

kullanırız. $\cos^3 2x$'i içeren terim için

$$\int \cos^3 2x\, dx = \int (1 - \sin^2 2x)\cos 2x\, dx \qquad u = \sin 2x,\ du = 2\cos 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (1 - u^2)\, du = \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \frac{1}{3}\sin^3 2x\right) \qquad C\text{'yi tekrar ihmal ederek}$$

Her şeyi birleştirmekle

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{3}\sin^3 2x\right) + C$$

elde ederiz. ■

Kare Köklerden Kurtulmak

Aşağıdaki örnekte bir kare kökten kurtulmak için $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ özdeşliğini kullanıyoruz.

ÖRNEK 4

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x}\, dx$$

integralini hesaplayın.

Çözüm Kare kökten kurtulmak için

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \qquad \text{veya} \qquad 1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$$

özdeşliğini kullanıyoruz. $\theta = 2x$ ile

$$1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x$$

elde ederiz. Bu nedenle,

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x}\, dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2\cos^2 2x}\, dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\sqrt{\cos^2 2x}\, dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} |\cos 2x|\, dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\, dx \qquad \cos 2x \geq 0 \text{ on } [0, \pi/4]$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}[1 - 0] = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

■

tan *x* ve sec *x*'in Kuvvetlerinin İntegralleri

tanjant, sekant ve karelerinin integrallerinin nasıl integre edildiğini biliyoruz. Daha büyük kuvvetlerini integre etmek için $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ve $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ özdeşliklerini kullanarak, büyük kuvvetlerden küçük kuvvetlere indirgeme gerekirse kısmi integrasyonla integre ederiz.

ÖRNEK 5

$$\int \tan^4 x\, dx$$

integralini hesaplayın.

Çözüm

$$\begin{aligned}\int \tan^4 x\, dx &= \int \tan^2 x \cdot \tan^2 x\, dx = \int \tan^2 x \cdot (\sec^2 x - 1)\, dx \\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^2 x\, dx \\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int (\sec^2 x - 1)\, dx \\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int \sec^2 x\, dx + \int dx\end{aligned}$$

İlk integralde,

$$u = \tan x, \qquad du = \sec^2 x\, dx$$

alırız ve

$$\int u^2\, du = \frac{1}{3}u^3 + C_1$$

elde ederiz. Diğer integraller standart formdadırlar, dolayısıyla

$$\int \tan^4 x\, dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$$ ■

bulunur.

ÖRNEK 6

$$\int \sec^3 x\, dx$$

integralini hesaplayın.

Çözüm Kısmi integrasyonla integre ederiz:

$$u = \sec x, \qquad dv = \sec^2 x\, dx, \qquad v = \tan x, \qquad du = \sec x \tan x\, dx$$

Buradan

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\, dx &= \sec x \tan x - \int (\tan x)(\sec x \tan x\, dx) \\ &= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x\, dx \\ &= \sec x \tan x + \int \sec x\, dx - \int \sec^3 x\, dx\end{aligned}$$

$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

Sekant küp integrallerini birleştirerek

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \int \sec x\, dx$$

ve

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$$ ■

elde edilir.

Sinüs ve Kosinüslerin Çarpımları

Matematik ve bilimde, problemlere trigonometrik fonksiyonların uygulandığı birçok yerde

$$\int \sin mx \sin nx\,dx, \qquad \int \sin mx \cos nx\,dx, \qquad \text{ve} \qquad \int \cos mx \cos nx\,dx$$

integralleri ortaya çıkar. Bu integralleri kısmi integrasyonla hesaplayabiliriz, fakat her bir durumda iki integrasyon gerekir. Aşağıdaki özdeşlikleri kullanmak daha basittir.

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x], \tag{3}$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x], \tag{4}$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]. \tag{5}$$

Bunlar, sinüs ve kosinüs için açı toplamı formüllerinden gelir (Bölüm 1.6). Ters türevleri kolayca bulunan fonksiyonlar verirler.

ÖRNEK 7

$$\int \sin 3x \cos 5x\,dx$$

integralini hesaplayın.

Çözüm $m = 3$ ve $n = 5$ ile (4) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\int \sin 3x \cos 5x\,dx &= \frac{1}{2}\int [\sin(-2x) + \sin 8x]\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int (\sin 8x - \sin 2x)\,dx \\ &= -\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C\end{aligned}$$ ■

buluruz.

ALIŞTIRMALAR 8.4

Sinüsler ve Kosinüslerin Kuvvetlerinin Çarpımları

1–14 Alıştırmalarında integralleri hesaplayın.

1. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\,dx$

2. $\int_0^{\pi} \sin^5 \frac{x}{2}\,dx$

3. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$

4. $\int_0^{\pi/6} 3\cos^5 3x\,dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \sin^7 y\,dy$

6. $\int_0^{\pi/2} 7\cos^7 t\,dt$

7. $\int_0^{\pi} 8\sin^4 x\,dx$

8. $\int_0^{1} 8\cos^4 2\pi x\,dx$

9. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 16\sin^2 x\cos^2 x\,dx$

10. $\int_0^{\pi} 8\sin^4 y\cos^2 y\,dy$

11. $\int_0^{\pi/2} 35\sin^4 x\cos^3 x\,dx$

12. $\int_0^{\pi} \sin 2x\cos^2 2x\,dx$

13. $\int_0^{\pi/4} 8\cos^3 2\theta\sin 2\theta\,d\theta$

14. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta\cos^3 2\theta\,d\theta$

Kareköklü İntegraller

15–22 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

15. $\int_0^{2\pi} \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}\,dx$

16. $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$

17. $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin^2 t}\,dt$

18. $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos^2\theta}\,d\theta$

19. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2 x}\,dx$

20. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x-1}\,dx$

21. $\int_0^{\pi/2} \theta\sqrt{1-\cos 2\theta}\,d\theta$

22. $\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos^2 t)^{3/2}\,dt$

Tan x ve Sec x'in Kuvvetleri

23–32 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

23. $\int_{-\pi/3}^{0} 2\sec^3 x\,dx$

24. $\int e^x\sec^3 e^x\,dx$

25. $\int_0^{\pi/4} \sec^4\theta\,d\theta$

26. $\int_0^{\pi/12} 3\sec^4 3x\,dx$

27. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^4\theta\,d\theta$

28. $\int_{\pi/2}^{\pi} 3\csc^4\dfrac{\theta}{2}\,d\theta$

29. $\int_0^{\pi/4} 4\tan^3 x\,dx$

30. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 6\tan^4 x\,dx$

31. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cot^3 x\,dx$

32. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} 8\cot^4 t\,dt$

Sinüs ve Kosinüslerin Çarpımları

33–38 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

33. $\int_{-\pi}^{0} \sin 3x\cos 2x\,dx$

34. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x\cos 3x\,dx$

35. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 3x\sin 3x\,dx$

36. $\int_0^{\pi/2} \sin x\cos x\,dx$

37. $\int_0^{\pi} \cos 3x\cos 4x\,dx$

38. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\cos 7x\,dx$

Teori ve Örnekler

39. Yüzey alanı Aşağıdaki yayın x-ekseni etrafında döndürülmesi ile elde edilen yüzeyin alanını bulunuz.

$$x = t^{2/3},\quad y = t^2/2,\quad 0 \le t \le 2$$

40. Yay uzunluğu Aşağıdaki yayın uzunluğunu bulunuz

$$y = \ln(\cos x),\quad 0 \le x \le \pi/3$$

41. Yay uzunluğu Aşağıdaki yayın uzunluğunu bulunuz

$$y = \ln(\sec x),\quad 0 \le x \le \pi/4.$$

42. Çekim Merkezi x-ekseni, $y = \sec x$ eğrisi ve $x = -\pi/4$, $x = \pi/4$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin çekim merkezini bulunuz.

43. Hacim $y = \sin x$ eğrisinin bir yayının, x-ekseni etrafında döndürülmesi ile elde edilen hacmi bulunuz.

44. Alan x-ekseni $y = \sqrt{1+\cos 4x}$, $0 \le x \le \pi$. eğrisi arasındaki alanı bulunuz.

45. Ortogonal fonksiyonlar $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ ise f ve g fonksiyonlarına $a \le x \le b$ aralığı üzerimde **ortogonal** dirler (dik) denir.

a. m ve n tamsayılar ve $m^2 \neq n^2$ olmak üzere, 2π uzunluğundaki herhangi bir aralık üzerinde $\sin mx$ ve $\sin nx$ fonksiyonlarının ortogonal olduklarını ispat edin.

b. Aynısını $\cos mx$ ve $\cos nx$ için ispat edin.

c. Aynısını, $m = n$ dahil $\sin mx$ ve $\cos nx$ için ispat edin.

46. Fourier Serileri Sonlu bir Fourier serisi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n\sin nx$$
$$= a_1\sin x + a_2\sin 2x + \cdots + a_N\sin Nx$$

ile verilir. m. katsayı a_m'nin

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx$$

formülü ile bulunduğunu gösterin

8.5 Trigonometrik Dönüşümler

Trigonometrik dönüşümler, $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, ve $\sqrt{x^2-a^2}$ içeren integralleri doğrudan hesaplayabildiğimiz integrallere dönüştürmekte etkili olabilir.

Üç Temel Değişken Dönüşümü

En yaygın değişken dönüşümleri $x = a \tan \theta$, $x = a \sin \theta$ ve $x = a \sec \theta$'dır. Bunlar Şekil 8.2'deki referans üçgenlerinden gelirler.

$x = a \tan \theta$ ile

$$a^2 + x^2 = a^2 + a^2 \tan^2 \theta = a^2(1 + \tan^2 \theta) = a^2 \sec^2 \theta.$$

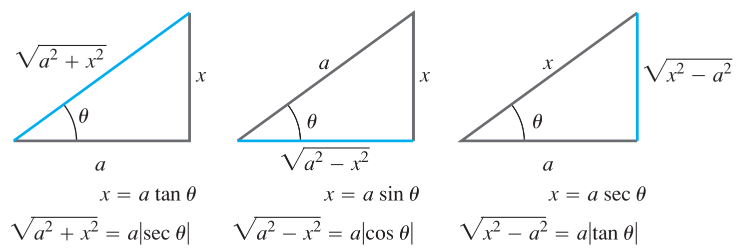
$x = a \sin \theta$ ile

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \sin^2 \theta = a^2(1 - \sin^2 \theta) = a^2 \cos^2 \theta$$

$x = a \sec \theta$ ile

$$x^2 - a^2 = a^2 \sec^2 \theta - a^2 = a^2(\sec^2 \theta - 1) = a^2 \tan^2 \theta.$$

elde edilir.



ŞEKİL 8.2 Her bir dönüşüm için x ve a ile işaretli kenarları tanımlayan referans üçgenler.

Bir integrasyonda kullandığımız herhangi bir değişken dönüşümünün, daha sonra esas değişkenlere dönebilmemiz için tersinir olmasını isteriz. Örneğin, $x = a \tan \theta$ ise, integrasyon yapıldıktan sonra $\theta = \tan^{-1}(x/a)$ yazabilmeyi isteriz. $x = a \sin \theta$ ise, işimiz bittikten sonra $\theta = \sin^{-1}(x/a)$ yazabilmeyi ve aynı işlemleri $x = a \sec \theta$ için de yapabilmeyi isteriz.

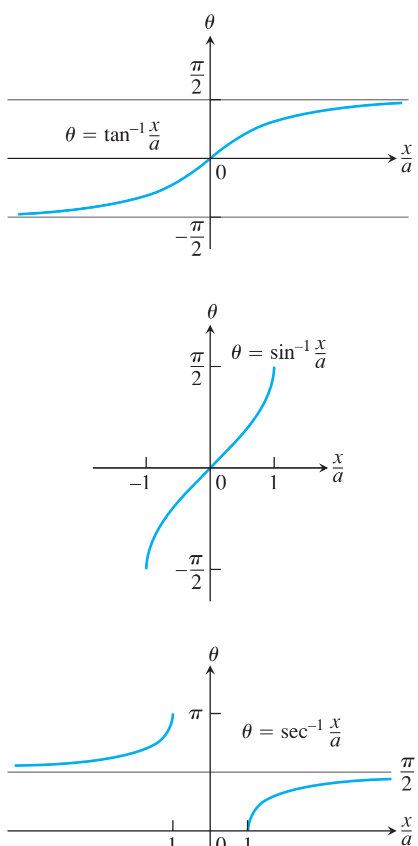
Bölüm 7.7'den bildiğimiz gibi, bu değişken dönüşümlerindeki fonksiyonların sadece seçilmiş θ değerleri için tersleri bulunur (Şekil 8.3). Tersinirlik için,

$$x = a \tan \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{olmak üzere} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{gerektirir.}$$

$$x = a \sin \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \quad \text{olmak üzere} \quad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{gerektirir.}$$

$$x = a \sec \theta, \quad \begin{cases} 0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2} & \dfrac{x}{a} \ge 1 \text{ ise} \\[2ex] \dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi & \dfrac{x}{a} \le -1 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{olmak üzere} \quad \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{gerektirir.}$$

$x = a \sec \theta$ değişken dönüşümündeki hesaplamaları kolaylaştırmak için, bunun kullanımını $x/a \ge 1$ olan integrallerle sınırlayacağız. Bu θ'yı $[0, \pi/2]$ aralığına kısıtlayacak ve $\tan \theta \ge 0$ yapacaktır. Böylece, $a > 0$ kabulü ile, mutlak değerlerden bağımsız, $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \tan^2 \theta} = |a \tan \theta| = a \tan \theta$ sonucunu elde ederiz.

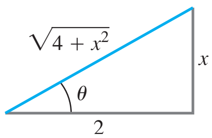


ŞEKİL 8.3 x/a'nın arktanjantı, arksinüsü ve arksekantı'nın grafikleri (x/a'nın fonksiyonu olarak çizilmiş).

ÖRNEK 1 $x = a \tan \theta$ Dönüşümünü Kullanmak

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$$

integralini hesaplayın.



ŞEKİL 8.4 $x = 2\tan\theta$ için (Örnek 1) referans üçgeni:

$$\tan\theta = \frac{x}{2}$$

ve

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{2}$$

Çözüm

$$x = 2\tan\theta, \qquad dx = 2\sec^2\theta\, d\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$4 + x^2 = 4 + 4\tan^2\theta = 4(1 + \tan^2\theta) = 4\sec^2\theta$$

alırız. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}} &= \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{|\sec\theta|} && \sqrt{\sec^2\theta} = |\sec\theta| \\
&= \int \sec\theta\, d\theta && -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ için } \sec\theta > 0 \\
&= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{4 + x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C && \text{Şek. 8.4'ten} \\
&= \ln\left|\sqrt{4 + x^2} + x\right| + C' && C' = C - \ln 2 \text{ alarak}
\end{aligned}$$

buluruz. $\ln|\sec\theta + \tan\theta|$'yı x cinsinden nasıl ifade etiğimize dikkat edin: Orijinal $x = 2\tan\theta$ dönüşümü için bir referans üçgeni çizdik (Şekil 8.4) ve oranları üçgenden okuduk. ■

ÖRNEK 2 $x = a\sin\theta$ Dönüşümünü Kullanmak

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{9 - x^2}}$$

integralini hesaplayın.

Çözüm

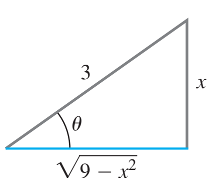
$$x = 3\sin\theta, \qquad dx = 3\cos\theta\, d\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$9 - x^2 = 9 - 9\sin^2\theta = 9(1 - \sin^2\theta) = 9\cos^2\theta$$

alırız. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{9 - x^2}} &= \int \frac{9\sin^2\theta \cdot 3\cos\theta\, d\theta}{|3\cos\theta|} && -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ için } \cos\theta > 0 \\
&= 9\int \sin^2\theta\, d\theta \\
&= 9\int \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\, d\theta \\
&= \frac{9}{2}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + C \\
&= \frac{9}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta) + C && \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \\
&= \frac{9}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}\right) + C && \text{Şekil 8.5} \\
&= \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{2}\sqrt{9 - x^2} + C
\end{aligned}$$

buluruz. ■



ŞEKİL 8.5 $x = 3\sin\theta$ için (Örnek 1) referans üçgeni:

$$\sin\theta = \frac{x}{3}$$

ve

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}$$

ÖRNEK 3 $x = a \sec\theta$ Dönüşümünü Kullanmak

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}}, \qquad x > \frac{2}{5}$$

integralini hesaplayın.

Çözüm Önce karekökün içini $x^2 - a^2$ şekline sokmak için karekökü

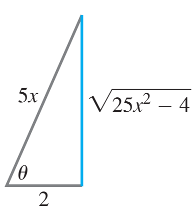
$$\sqrt{25x^2 - 4} = \sqrt{25\left(x^2 - \frac{4}{25}\right)}$$
$$= 5\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2}$$

olarak yazarız. Sonra aşağıdaki değişken dönüşümünü yaparız:

$$x = \frac{2}{5}\sec\theta, \qquad dx = \frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta\, d\theta, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}\sec^2\theta - \frac{4}{25}$$
$$= \frac{4}{25}(\sec^2\theta - 1) = \frac{4}{25}\tan^2\theta$$

$$\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}|\tan\theta| = \frac{2}{5}\tan\theta \qquad \begin{array}{l}0 < \theta < \pi/2 \\ \text{için } \tan\theta > 0\end{array}$$



ŞEKİL 8.6 $x = (2/5)\sec\theta$ $0 < \theta < \pi/2$ ise, $\theta = \sec^{-1}(5x/2)$ $x = (2/5)\sec\theta$, olur ve θ'nın diğer trigonometrik fonksiyonlarının değerlerini bu dik üçgenden okuyabiliriz (Örnek 3).

Bu dönüşümlerle

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}} = \int \frac{dx}{5\sqrt{x^2 - (4/25)}} = \int \frac{(2/5)\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{5 \cdot (2/5)\tan\theta}$$
$$= \frac{1}{5}\int \sec\theta\, d\theta = \frac{1}{5}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$
$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5x}{2} + \frac{\sqrt{25x^2 - 4}}{2}\right| + C \qquad \text{Şekil 8.6}$$

elde ederiz. ■

Bir trigonometrik değişken dönüşümü bazen aşağıdaki örnekte olduğu gibi kuadratik bir binomiyelin tamsayı katlarını içeren integralleri hesaplamaya da yardımcı olur.

ÖRNEK 4 Bir Dönel Cismin Hacmini Bulmak

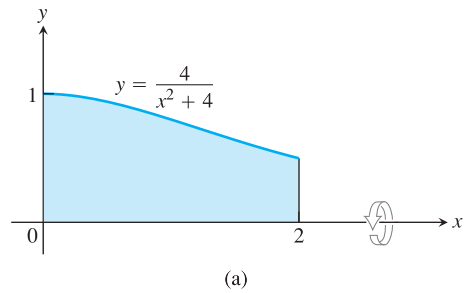
$y = 4/(x^2 + 4)$ eğrisi, x-ekseni ve $x = 0$, $x = 2$ doğrularıyla sınırlanan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen cismin hacmini bulun.

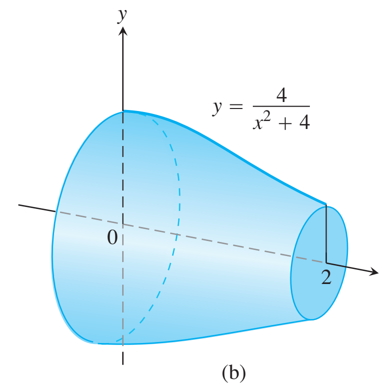
Çözüm Bölgeyi çizer (Şekil 8.7) ve disk yöntemini kullanırız:

$$V = \int_0^2 \pi[R(x)]^2\, dx = 16\pi\int_0^2 \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} \qquad R(x) = \frac{4}{x^2 + 4}$$

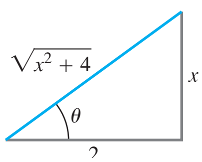
İntegrali hesaplamak için,

$$x = 2\tan\theta, \qquad dx = 2\sec^2\theta\, d\theta, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{x}{2},$$
$$x^2 + 4 = 4\tan^2\theta + 4 = 4(\tan^2\theta + 1) = 4\sec^2\theta$$





ŞEKİL 8.7 Örnek 4'teki bölge (a) ve dönel cisim (b).



ŞEKİL 8.8 $x = 2 \tan \theta$ için referans üçgeni (Örnek 4).

Bu dönüşümlerle,

$$V = 16\pi \int_0^2 \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}$$

$$= 16\pi \int_0^{\pi/4} \frac{2 \sec^2 \theta \, d\theta}{(4 \sec^2 \theta)^2}$$

$x = 0$ iken, $\theta = 0$; $x = 2$ iken, $\theta = \pi/4$

$$= 16\pi \int_0^{\pi/4} \frac{2 \sec^2 \theta \, d\theta}{16 \sec^4 \theta} = \pi \int_0^{\pi/4} 2 \cos^2 \theta \, d\theta$$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta = \pi \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/4}$$

$2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta$

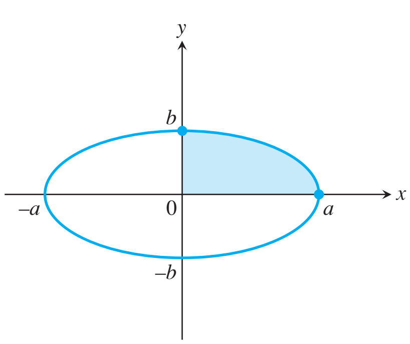
$$= \pi \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right] \approx 4.04.$$

buluruz.

ÖRNEK 5 Bir Elipsin Alanını Bulmak

Aşağıda verilen elipsin sınırladığı alanı bulunuz

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



ŞEKİL 8.9 Örnek 5'teki $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi.

Çözüm Elips her iki eksene göre de simetrik olduğundan, toplam alan A, birinci bölgedeki alanın dört katıdır Şekil 8.9. Denklemi $y \geq 0$ için çözersek

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2},$$

veya

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \qquad 0 \leq x \leq a$$

elde ederiz.

Elipsin alanı

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx \\ &= 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a\cos\theta \cdot a\cos\theta\,d\theta \\ &= 4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta \\ &= 4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta \\ &= 2ab\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} \\ &= 2ab\left[\frac{\pi}{2}+0-0\right] = \pi ab. \end{aligned}$$

$x = a\sin\theta,\ dx = a\cos\theta d\theta$
$x = 0$ iken, $\theta = 0$
$x = a$ iken $\theta = \pi/2$

olarak bulunur. $a = b = r$ olursa r yarıçaplı çemberin alanı buluruz, πr^2. ■

ALIŞTIRMALAR 8.5

Temel Trigonometrik Dönüşümler

1–28 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

1. $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{9+y^2}}$

2. $\displaystyle\int \frac{3\,dy}{\sqrt{1+9y^2}}$

3. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{4+x^2}$

4. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{8+2x^2}$

5. $\displaystyle\int_0^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

6. $\displaystyle\int_0^{1/2\sqrt{2}} \frac{2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

7. $\displaystyle\int \sqrt{25-t^2}\,dt$

8. $\displaystyle\int \sqrt{1-9t^2}\,dt$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-49}},\quad x > \frac{7}{2}$

10. $\displaystyle\int \frac{5\,dx}{\sqrt{25x^2-9}},\quad x > \frac{3}{5}$

11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{y^2-49}}{y}\,dy,\quad y > 7$

12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{y^2-25}}{y^3}\,dy,\quad y > 5$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}},\quad x > 1$

14. $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{x^3\sqrt{x^2-1}},\quad x > 1$

15. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

17. $\displaystyle\int \frac{8\,dw}{w^2\sqrt{4-w^2}}$

18. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-w^2}}{w^2}\,dw$

19. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{4x^2\,dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

20. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}}$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}},\quad x > 1$

22. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-1)^{5/2}},\quad x > 1$

23. $\displaystyle\int \frac{(1-x^2)^{3/2}}{x^6}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{(1-x^2)^{1/2}}{x^4}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{8\,dx}{(4x^2+1)^2}$

26. $\displaystyle\int \frac{6\,dt}{(9t^2+1)^2}$

27. $\displaystyle\int \frac{v^2\,dv}{(1-v^2)^{5/2}}$

28. $\displaystyle\int \frac{(1-r^2)^{5/2}}{r^8}\,dr$

29–36 alıştırmalarında, bir değişken dönüşümü yapın, sonra integralleri hesaplamak için trigonometrik dönüşüm kullanın.

29. $\displaystyle\int_0^{\ln 4} \frac{e^t\,dt}{\sqrt{e^{2t}+9}}$

30. $\displaystyle\int_{\ln(3/4)}^{\ln(4/3)} \frac{e^t\,dt}{(1+e^{2t})^{3/2}}$

31. $\displaystyle\int_{1/12}^{1/4} \frac{2\,dt}{\sqrt{t}+4t\sqrt{t}}$

32. $\displaystyle\int_1^{e} \frac{dy}{y\sqrt{1+(\ln y)^2}}$

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$

35. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$

36. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Başlangıç Değer Problemleri

37–40 alıştırmalarındaki başlangıç değer problemlerinde y'yi x' in bir fonksiyonu olarak bulun.

37. $x\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x^2-4},\quad x \ge 2,\quad y(2) = 0$

38. $\sqrt{x^2-9}\,\dfrac{dy}{dx} = 1,\quad x > 3,\quad y(5) = \ln 3$

39. $(x^2+4)\dfrac{dy}{dx} = 3,\quad y(2) = 0$

40. $(x^2+1)^2\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x^2+1},\quad y(0) = 1$

Uygulamalar

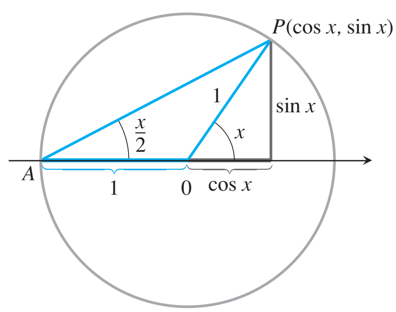
41. Birinci bölgede, $y = \sqrt{9 - x^2}/3$ eğrisi ve koordinat eksenleriyle çevrelenen bölgenin alanını bulun.

42. Birinci bölgede, koordinat eksenleri, $y = 2/(1 + x^2)$ eğrisi ve $x = 1$ doğrusuyla sınırlanan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen cismin hacmini bulun.

$z = \tan(x/2)$ Dönüşümü

$$z = \tan\frac{x}{2} \tag{1}$$

dönüşümü, $\sin x$ ve $\cos x$ içeren rasyonel bir fonksiyonun integrasyonu problemini z'nin bir rasyonel fonksiyonunu integre etme problemine indirger. Bu da kısmi kesirlerle hesaplanabilir.



Yukarıdaki şekilden

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

bağıntısını çıkarabiliriz. Dönüşümün etkisini görmek için, aşağıdaki hesapları gerçekleştiririz:

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{\sec^2(x/2)} - 1$$

$$= \frac{2}{1 + \tan^2(x/2)} - 1 = \frac{2}{1 + z^2} - 1$$

$$\cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \tag{2}$$

ve

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\sec^2(x/2)} = \frac{2\tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}$$

$$\sin x = \frac{2z}{1 + z^2}. \tag{3}$$

Son olarak, $x = 2\tan^{-1} z$'dir, dolayısıyla

$$dx = \frac{2\,dz}{1 + z^2}. \tag{4}$$

Örnekler

a.
$$\int \frac{1}{1 + \cos x}\,dx = \int \frac{1 + z^2}{2}\,\frac{2\,dz}{1 + z^2}$$
$$= \int dz = z + C$$
$$= \tan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

b.
$$\int \frac{1}{2 + \sin x}\,dx = \int \frac{1 + z^2}{2 + 2z + 2z^2}\,\frac{2\,dz}{1 + z^2}$$
$$= \int \frac{dz}{z^2 + z + 1} = \int \frac{dz}{(z + (1/2))^2 + 3/4}$$
$$= \int \frac{du}{u^2 + a^2}$$
$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2z + 1}{\sqrt{3}} + C$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{1 + 2\tan(x/2)}{\sqrt{3}} + C$$

(1)–(4) denklemlerindeki dönüşümleri kullanarak 43–50 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın. Bunlara benzer integraller, giriş ve çıkış şaftları aynı seviyede olmadıklarında, evrensel bir birleşmenin çıkış şaftının ortalama açısal hızını hesaplamakta kullanılır.

43. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \sin x}$

44. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$

45. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x}$

46. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{1 - \cos x}$

47. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}$

48. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin\theta\cos\theta + \sin\theta}$

49. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sin t - \cos t}$

50. $\displaystyle\int \frac{\cos t\,dt}{1 - \cos t}$

$z = \tan(\theta/2)$ dönüşümünü kullanarak 51 ve 52 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

51. $\displaystyle\int \sec\theta\,d\theta$

52. $\displaystyle\int \csc\theta\,d\theta$

8.6 İntegral Tabloları ve Bilgisayar Cebir Sistemleri

Görmüş olduğumuz gibi, integrasyonun temel teknikleri değişken dönüşümü ve kısmi integrasyondur. Tanımadığımız integralleri tanıdığımız veya bir tablodan bulabileceğimiz şekildeki integrallere çevirmek için bu teknikleri uygularız. Fakat tablolardaki integraller nereden gelir? Bunlar değişken dönüşümü ve kısmi integrasyon uygulamaktan veya (Tablo 8.1'i oluştururken yaptığımız gibi) pratikte veya uygulamalarda ortaya çıkan önemli fonksiyonların türevlerini almak ve sonuçlarını tablolamaktan gelirler. Bir integral, tablodaki bir integrale uyarsa veya cebir, trigonometri, değişken dönüşümü ve analizin uygun bir karışmıyla tablodaki integrallerden birine dönüştürülebilirse, elimizdeki problemin hazır bir cevabı var demektir.

Bir integrali hesaplamak için ayrıca bir Bilgisayar Cebir Sistemi (BCS) de kullanılabilir (böyle bir sisteminiz varsa). Ancak şuna dikkat edin, sin (x^2) veya $1/\ln x$ gibi birçok nispeten basit fonksiyonun açık ters türev formülleri, en güçlü bilgisayarlar tarafından bile bulunamaz çünkü böyle formüller yoktur.

Bu bölümde, tabloların ve bilgisayar cebir sistemlerinin, integral hesaplamak için nasıl kullanıldığını inceleyeceğiz.

İntegral Tabloları

Kitabın sonunda indeks'ten sonra kısa bir integral tablosu vardır. (Daha geniş tablolar, binlerce integral içeren *CRC Matemetiksel Tablolar* gibi derlemelerde bulunabilir.) İntegrasyon formülleri *a, b, c, m, n* vs. gibi sabitler cinsinden ifade edilmektedir. Bu sabitler genelde herhangi bir reel değer alırlar ve tamsayı olmaları gerekmez. Değerlerinde bazen gören kısıtlamalar formüllerde belirtilmiştir. Örneğin, Formül 5 $n \neq -1$ olmasını gerektirirken, Formül 11 $n \neq 2$ olmasını gerektirir.

Formüller ayrıca sabitlerin sıfırla bölme veya negatif sayıların çift kuvvetlerini almayı gerektirmeyecek değerler aldıklarını varsayar. Örneğin, Formül 8 $a \neq 0$ olduğunu varsayar ve Formül 13(a) ve (b), *b* pozitif olmadıkça kullanılamaz.

Bu bölümdeki 1-5 Örnekleri, cebirsel işlemler, dönüşümler veya kısmi integrasyon kullanılarak hesaplanabilir. Burada, Kısa İntegral Tablosu kullanılarak integrallerin nasıl bulunduğunu gösteriyoruz.

ÖRNEK 1 $\int x(2x+5)^{-1}\,dx$ 'i bulun.

Çözüm Formül 8'i ($n \neq -1$ olmasını gerektiren Formül 7'yi değil) kullanırız:

$$\int x(ax+b)^{-1}\,dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C$$

$a = 2$ ve $b = 5$ ile,

$$\int x(2x+5)^{-1}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{5}{4}\ln|2x+5| + C$$ ■

buluruz.

ÖRNEK 2 $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+4}}$ 'ü bulun.

Çözüm Formül 13(b)'yi kullanırız:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}} \right| + C \qquad b > 0 \text{ ise}$$

$a = 2$ ve $b = 4$ ile,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+4}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \ln \left| \frac{\sqrt{2x+4}-\sqrt{4}}{\sqrt{2x+4}+\sqrt{4}} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2x+4}-2}{\sqrt{2x+4}+2} \right| + C$$

elde ederiz.

$b < 0$ olmasını gerektiren Formül 13(a) burada uygun olmazdı. Ancak, aşağıdaki örnekte uygundur.

ÖRNEK 3 $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}}$ 'ü bulun.

Çözüm Formül 13(a)'yı kullanırız:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax-b}} = \frac{2}{\sqrt{b}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{ax-b}{b}} + C$$

$a = 2$ ve $b = 4$ ile,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}} = \frac{2}{\sqrt{4}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{2x-4}{4}} + C = \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$$

buluruz.

ÖRNEK 4 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}}$

Çözüm Formül 15'le işe başlarız:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$$

$a = 2$ ve $b = -4$ ile,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}} = -\frac{\sqrt{2x-4}}{-4x} + \frac{2}{2\cdot 4}\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}} + C$$

buluruz. Sonra, sağdaki integrali hesaplamak için Formül 13(a)'yı kullanarak (Örnek 3)

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}} = \frac{\sqrt{2x-4}}{4x} + \frac{1}{4} \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$$

elde ederiz.

ÖRNEK 5 $\int x \sin^{-1} x \, dx$ 'i bulun.

Çözüm Formül 99'u kullanırız:

$$\int x^n \sin^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sin^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1-a^2x^2}}, \qquad n \neq -1$$

$n = 1$ ve $a = 1$ ile,

$$\int x \sin^{-1} x\, dx = \frac{x^2}{2}\sin^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

elde ederiz. Sağ taraftaki integral tabloda Formül 33 olarak görülür:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C$$

$a = 1$ ile,

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\sin^{-1} x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

buluruz. Sonuçları bir araya getirirsek,

$$\begin{aligned}\int x \sin^{-1} x\, dx &= \frac{x^2}{2}\sin^{-1} x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin^{-1} x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C\right)\\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\sin^{-1} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C'\end{aligned}$$

elde ederiz. ■

İndirgeme Formülleri

Art arda kısmi integrasyon için gereken zaman bazen

$$\int \tan^n x\, dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\, dx \tag{1}$$

$$\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\, dx \tag{2}$$

$$\int \sin^n x \cos^m x\, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^{n-2} x \cos^m x\, dx \qquad (n \neq -m) \tag{3}$$

gibi formüller uygulayarak kısaltılabilir. Bu gibi formüllere indirgeme formülleri denir, çünkü bir fonksiyonun herhangi bir kuvvetini bulunduran bir integrali aynı formda kuvveti indirgenmiş bir integrale dönüştürürler. Böyle bir formülü üst üste uygulayarak, orijinal integrali doğrudan hesaplanabilecek kadar düşük bir kuvvet cinsinden ifade edebiliriz.

ÖRNEK 6 Bir İndirgeme Formülü Kullanmak

$$\int \tan^5 x\, dx.$$

integralini hesaplayın.

Çözüm $n = 5$ ile (1) denklemini uygular ve

$$\int \tan^5 x\,dx = \frac{1}{4}\tan^4 x - \int \tan^3 x\,dx$$

elde ederiz. Sonra $n = 3$ ile (1) denklemini yeniden uygulayarak kalan integrali hesaplarız:

$$\int \tan^3 x\,dx = \frac{1}{2}\tan^2 x - \int \tan x\,dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$$

Sonuçları birleştirirsek,

$$\int \tan^5 x\,dx = \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + C' \qquad ■$$

buluruz.

Formlarından görüldüğü gibi, indirgeme formülleri kısmi integrasyonla bulunur.

ÖRNEK 7 Bir İndirgeme Formülünü Elde Etmek

Herhangi bir pozitif n tamsayısı için

$$\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$$

olduğunu gösterin.

Çözüm

$$u = (\ln x)^n, \qquad du = n(\ln x)^{n-1}\frac{dx}{x}, \qquad dv = dx, \qquad v = x$$

ile

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

kısmi integrasyon formülünü kullanarak

$$\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx \qquad ■$$

elde ederiz.

Bazen iki indirgeme formülü gerekebilir.

ÖRNEK 8 $\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx$ 'i bulun.

Çözüm 1 $n = 2$ ve $m = 3$ ile (3) denklemini uygulayarak

$$\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx = -\frac{\sin x\cos^4 x}{2+3} + \frac{1}{2+3}\int \sin^0 x\cos^3 x\,dx$$

$$= -\frac{\sin x\cos^4 x}{5} + \frac{1}{5}\int \cos^3 x\,dx$$

elde ederiz. Geriye kalan integrali Formül 61'le (başka bir indirgeme formülü) hesaplayabiliriz:

$$\int \cos^n ax\,dx = \frac{\cos^{n-1}ax\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}ax\,dx$$

$n = 3$ ve $a = 1$ ile,

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3}\int \cos x\,dx$$
$$= \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3}\sin x + C$$

elde ederiz. Sonuçları birleştirirsek,

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx = -\frac{\sin x \cos^4 x}{5} + \frac{1}{5}\left(\frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3}\sin x + C\right)$$
$$= -\frac{\sin x \cos^4 x}{5} + \frac{\cos^2 x \sin x}{15} + \frac{2}{15}\sin x + C'$$

buluruz.

Çözüm 2 (3) denklemi tablodaki 68 denklemine karşılık gelir, fakat kullanabileceğimiz başka bir formül, yani Formül 69 vardır. $a = 1$ ile, Formül 69

$$\int \sin^n x \cos^m x\,dx = \frac{\sin^{n+1} x \cos^{m-1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^n x \cos^{m-2} x\,dx$$

verir. Bizim durumumuzda, $n = 2$ ve $m = 3$'tür, dolayısıyla

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx = \frac{\sin^3 x \cos^2 x}{5} + \frac{2}{5}\int \sin^2 x \cos x\,dx$$
$$= \frac{\sin^3 x \cos^2 x}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{\sin^3 x}{3}\right) + C$$
$$= \frac{\sin^3 x \cos^2 x}{5} + \frac{2}{15}\sin^3 x + C$$

buluruz. Gördüğünüz gibi, Formül 69'u kullanmak daha hızlıdır, fakat çoğunlukla önceden işlerin nasıl yürüyeceğini söyleyemeyiz. "En iyi" formülü bulmak için zaman harcamayın. İşe yarayacak bir tane bulun ve hesabınızı yapın.

Ayrıca Formül 68 (Çözüm 1) ve Fomül 69'un (Çözüm 2) farklı sonuçlar verdiğine de dikkat edin. Trigonometrik integrallerde buna çok sık rastlanır ve endişelenecek bir neden yoktur. Sonuçların ikisi de eşdeğerdir, dolayısıyla hangisini istersek onu kullanabiliriz. ■

Temel Olmayan İntegraller

Ters türevleri sembolik hesaplamalarla bulan hesap makinelerinin ve bilgisayarların gelişimi hangi ters türevlerin temel fonksiyonların (bizim incelediğimiz fonksiyonlar) sonlu kombinasyonları olarak ifade edilebileceğini ve hangilerinin edilemeyeceğini belirleme isteği doğurmuştur. Temel ters türevleri olmayan fonksiyonların integrallerine **temel olmayan integraller** denir. Hesaplanmaları için sonsuz seriler (Bölüm 8) veya sayısal yöntemler gerekir. Temel olmayan integraller arasında

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

hata fonksiyonu ile mühendislikte ve fizikte karşılaşılan

$$\int \sin x^2\,dx \qquad \text{ve} \qquad \int \sqrt{1 + x^4}\,dx$$

gibi integraller vardır.

Bunlar ve

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx, \qquad \int e^{(e^x)}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx, \qquad \int \ln(\ln x)\,dx, \qquad \int \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

$$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\,dx, \qquad 0 < k < 1$$

gibi bir çok integral o kadar basit görünürler ki, bizi ne olacağını görmeyi denemeye kışkırtırlar. Ancak, bu integralleri temel foksiyonların sonlu kombinasyonları olarak ifade etmenin bir yolu yoktur. Aynı şey değişken dönüşümüyle böyle integrallere çevrilen integraller için de geçerlidir. İntengrandların ters türevleri vardır—ne de olsa, süreklidirler— fakat ters türevlerin hiçbiri temel değildir.

Bu bölümde hesaplamanız istenen integrallerden hiçbiri bu kategoride değildir, fakat başka çalışmalarınızda zaman zaman böyle integrallerle karşılaşabilirsiniz.

Bir Bilgisayar Cebir Sistemi (BCS) ile İntegrasyon

Bilgisayar Cebir Sistemlerinin güçlü bir özellikleri sembolik olarak hesap yapabilmeleridir. Bu, sistemin kendine özgü **integre et komutu** (Örneğin, Maple'da **int**, Mathematica'da **Integrate**) ile gerçekleştirilir.

ÖRNEK 9 İsimlendirilmiş Bir Fonksiyon İle Bir BCS kullanmak

$$f(x) = x^2\sqrt{a^2 + x^2}$$

fonksiyonunun belirsiz integralini hesaplamak istediğinizi varsayın. Maple kullanarak, önce fonksiyonu tanımlarsınız veya isimlendirirsiniz:

$$> f := x\text{^}2 * \text{sqrt}\,(a\text{^}2 + x\text{^}2)$$

Sonra integrasyon değişkenini tanımlayarak, f'ye integre et komutunu uygularsınız:

$$> \text{int}(f, x)$$

Maple'ın yanıtı şöyle olur:

$$\frac{1}{4}x(a^2 + x^2)^{3/2} - \frac{1}{8}a^2x\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{1}{8}a^4\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$$

Yanıtın sadeleştirilip sadeleştirilmeyeceğini merak ediyorsanız,

$$> \text{simplify}(\%);$$

yazın. Maple'ın yanıtı şöyledir:

$$\frac{1}{8}a^2x\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{4}x^3\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{1}{8}a^4\ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$$

$0 \le x \le \pi/2$ için belirli integrali istiyorsanız,

$$> \text{int}(f, x = 0..\text{Pi}/2)$$

formatını kullanabilirsiniz. Maple (Version 5.1) şu ifadeyi verir:

$$\frac{1}{64}\pi(4a^2 + \pi^2)^{(3/2)} - \frac{1}{32}a^2\pi\sqrt{4a^2 + \pi^2} + \frac{1}{8}a^4\ln(2)$$
$$- \frac{1}{8}a^4\ln\left(\pi + \sqrt{4a^2 + \pi^2}\right) + \frac{1}{16}a^4\ln(a^2)$$

Ayrıca, belirli integrali a sabitinin özel bir değeri için de bulabilirsiniz:

$$> a := 1$$

$$> \text{int}(f, x = 0..1)$$

Maple'ın sayısal yanıtı şöyledir:

$$\frac{3}{8}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{2} - 1\right)$$ ■

ÖRNEK 10 Fonksiyonu İsimlendirmeden Bir BCS Kullanmak

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$$

integralini bulmak için bir BCS kullanın.

Çözüm Maple'la,

$$> \text{int}\,((\sin\text{^}2)(x) * (\cos\text{^}3)(x), x)$$

girersek, hemen Örnek 8'deki

$$-\frac{1}{5}\sin(x)\cos(x)^4 + \frac{1}{15}\cos(x)^2\sin(x) + \frac{2}{15}\sin(x)$$ ■

sonucunu alırız.

ÖRNEK 11 Bir BCS Kapalı Formda Bir Çözüm Vermeyebilir

$$\int (\cos^{-1} ax)^2\, dx$$

integralini bulmak için bir BCS kullanın.

Çözüm Maple kullanarak,

$$> \text{int}((\text{arccos}(a * x))\text{^}2, x)$$

ifadesini gireriz ve Maple kapalı formda bir çözüm olmadığını belirtmek için

$$\int \arccos(ax)^2\, dx$$

ifadesini verir. Bölüm 11'de, seri açılımının böyle bir integrali hesaplamaya nasıl yardıncı olabileceğini göreceksiniz. ■

Bilgisayar Cebir Sistemleri integrasyonları nasıl yaptıklarına göre ayrılırlar. 9–11 alıştırmalarında Maple kullandık. Mathematica 4 biraz farklı sonuçlar verebilirdi:

1. Örnek 9'da

$$\textit{In [1]:=}\ \text{Integrate}\,[x\text{^}2 * \text{Sqrt}\,[a\text{^}2 + x\text{^}2], x]$$

yazarsak Mathematica, sonucu basitleştirmeye gerek bırakmayan

$$\textit{Out [1]=}\ \sqrt{a^2 + x^2}\left(\frac{a^2 x}{8} + \frac{x^3}{4}\right) - \frac{1}{8}a^4\,\text{Log}\left[x + \sqrt{a^2 + x^2}\right]$$

yanıtını verir.

Yanıt integral tablolarındaki Formül 22'ye yakındır.

2. Örnek 10'daki

In [2]:= Integrate [Sin [x]^2 * Cos [x]^3, x]

integraline Mathematica'nın yanıtı

$$Out\ [2]= \frac{\text{Sin}\,[x]}{8} - \frac{1}{48}\,\text{Sin}\,[3\,x] - \frac{1}{80}\,\text{Sin}\,[5\,x]$$

hem Maple'ın hem de Örnek 8'deki yanıtlardan farklıdır.

3. Mathematica Örnek 11'deki

In [3]:= Integrate [ArcCos [a * x]^2, x]

integrali için bir çözüm verir, $a \neq 0$ kabul ederek:

$$Out\ [3]= -2x - \frac{2\sqrt{1 - a^2 x^2}\ \text{ArcCos}\,[a\,x]}{a} + x\ \text{ArcCos}\,[a\,x]^2$$

BCS oldukça güçlü olduğu ve zor problemleri çözmemizde yardım ettiği halde, her BCS'nin kendi kısıtlamaları vardır. Bir BCS'nin problemi daha da karmaşıklaştırdığı (verdiği sonucun kullanmasının veya yorumlanmasının çok zor olması bakımından) durumlar da vardır. Diğer yönden, kendi kendinize yapacağınız biraz matematiksel düşünme problemi başa çıkması çok kolay bir hale getirebilir. Alıştırma 111'de buna bir örnek veriyoruz.

ALIŞTIRMALAR 8.6

İntegral Tablolarını Kullanmak

Kitabın arkasındaki integral tablosunu kullanarak 1–38 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-3}}$ **2.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}}$

3. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-2}}$ **4.** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(2x+3)^{3/2}}$

5. $\displaystyle\int x\sqrt{2x-3}\,dx$ **6.** $\displaystyle\int x(7x+5)^{3/2}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-4x}}{x^2}\,dx$ **8.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x-9}}$

9. $\displaystyle\int x\sqrt{4x-x^2}\,dx$ **10.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{7+x^2}}$ **12.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{7-x^2}}$

13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$ **14.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$

15. $\displaystyle\int \sqrt{25-p^2}\,dp$ **16.** $\displaystyle\int q^2\sqrt{25-q^2}\,dq$

17. $\displaystyle\int \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}}\,dr$ **18.** $\displaystyle\int \frac{ds}{\sqrt{s^2-2}}$

19. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{5+4\sin 2\theta}$ **20.** $\displaystyle\int \frac{d\theta}{4+5\sin 2\theta}$

21. $\displaystyle\int e^{2t}\cos 3t\,dt$ **22.** $\displaystyle\int e^{-3t}\sin 4t\,dt$

23. $\displaystyle\int x\cos^{-1}x\,dx$ **24.** $\displaystyle\int x\tan^{-1}x\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{ds}{(9-s^2)^2}$ **26.** $\displaystyle\int \frac{d\theta}{(2-\theta^2)^2}$

27. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4x+9}}{x^2}\,dx$ **28.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9x-4}}{x^2}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3t-4}}{t}\,dt$ **30.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3t+9}}{t}\,dt$

31. $\displaystyle\int x^2\tan^{-1}x\,dx$ **32.** $\displaystyle\int \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx$

33. $\displaystyle\int \sin 3x\cos 2x\,dx$ **34.** $\displaystyle\int \sin 2x\cos 3x\,dx$

35. $\int 8 \sin 4t \sin \frac{t}{2}\, dt$ **36.** $\int \sin \frac{t}{3} \sin \frac{t}{6}\, dt$

37. $\int \cos \frac{\theta}{3} \cos \frac{\theta}{4}\, d\theta$ **38.** $\int \cos \frac{\theta}{2} \cos 7\theta\, d\theta$

Değişken Dönüşümleri ve İntegral Tabloları

39–52 alıştırmalarında, bir değişken dönüşümüyle integralleri tabloda bulabileceğiniz bir hale getirin. Sonra çözün.

39. $\int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 + 1)^2}\, dx$ **40.** $\int \frac{x^2 + 6x}{(x^2 + 3)^2}\, dx$

41. $\int \sin^{-1} \sqrt{x}\, dx$ **42.** $\int \frac{\cos^{-1} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

43. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x}}\, dx$ **44.** $\int \frac{\sqrt{2 - x}}{\sqrt{x}}\, dx$

45. $\int \cot t \sqrt{1 - \sin^2 t}\, dt, \quad 0 < t < \pi/2$

46. $\int \frac{dt}{\tan t \sqrt{4 - \sin^2 t}}$ **47.** $\int \frac{dy}{y\sqrt{3 + (\ln y)^2}}$

48. $\int \frac{\cos \theta\, d\theta}{\sqrt{5 + \sin^2 \theta}}$ **49.** $\int \frac{3\, dr}{\sqrt{9r^2 - 1}}$

50. $\int \frac{3\, dy}{\sqrt{1 + 9y^2}}$ **51.** $\int \cos^{-1} \sqrt{x}\, dx$

52. $\int \tan^{-1} \sqrt{y}\, dy$

İndirgeme Formülleri Kullanmak

53–72 alıştırmalarındaki integralleri hesaplamak için indirgeme formülleri kullanın.

53. $\int \sin^5 2x\, dx$ **54.** $\int \sin^5 \frac{\theta}{2}\, d\theta$

55. $\int 8 \cos^4 2\pi t\, dt$ **56.** $\int 3 \cos^5 3y\, dy$

57. $\int \sin^2 2\theta \cos^3 2\theta\, d\theta$ **58.** $\int 9 \sin^3 \theta \cos^{3/2} \theta\, d\theta$

59. $\int 2 \sin^2 t \sec^4 t\, dt$ **60.** $\int \csc^2 y \cos^5 y\, dy$

61. $\int 4 \tan^3 2x\, dx$ **62.** $\int \tan^4 \left(\frac{x}{2}\right) dx$

63. $\int 8 \cot^4 t\, dt$ **64.** $\int 4 \cot^3 2t\, dt$

65. $\int 2 \sec^3 \pi x\, dx$ **66.** $\int \frac{1}{2} \csc^3 \frac{x}{2}\, dx$

67. $\int 3 \sec^4 3x\, dx$ **68.** $\int \csc^4 \frac{\theta}{3}\, d\theta$

69. $\int \csc^5 x\, dx$ **70.** $\int \sec^5 x\, dx$

71. $\int 16x^3 (\ln x)^2\, dx$ **72.** $\int (\ln x)^3\, dx$

x'in Kuvvetleri Kere Eksponansiyeller

73–80 alıştırmalarındaki integralleri tablodaki 103–106 formüllerini kullanarak hesaplayın. Bu integraller ayrıca tablolu integrasyonla da çözülebilir (Bölüm 8.2).

73. $\int xe^{3x}\, dx$ **74.** $\int xe^{-2x}\, dx$

75. $\int x^3 e^{x/2}\, dx$ **76.** $\int x^2 e^{\pi x}\, dx$

77. $\int x^2\, 2^x\, dx$ **78.** $\int x^2\, 2^{-x}\, dx$

79. $\int x\pi^x\, dx$ **80.** $\int x 2^{\sqrt{2}x}\, dx$

İndirgeme Formülleriyle Değişken Dönüşümleri

81–86 alıştırmalarındaki integralleri bir değişken dönüşümü (muhtemelen trigonometrik) yapıp, sonra bir indirgeme formülü kullanarak hesaplayın.

81. $\int e^t \sec^3 (e^t - 1)\, dt$ **82.** $\int \frac{\csc^3 \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}}\, d\theta$

83. $\int_0^1 2\sqrt{x^2 + 1}\, dx$ **84.** $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dy}{(1 - y^2)^{5/2}}$

85. $\int_1^2 \frac{(r^2 - 1)^{3/2}}{r}\, dr$ **86.** $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dt}{(t^2 + 1)^{7/2}}$

Hiperbolik Fonksiyonlar

87–92 alıştırmalarındaki integralleri hesaplamak için integral tablosu kullanın.

87. $\int \frac{1}{8} \sinh^5 3x\, dx$ **88.** $\int \frac{\cosh^4 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

89. $\int x^2 \cosh 3x\, dx$ **90.** $\int x \sinh 5x\, dx$

91. $\int \operatorname{sech}^7 x \tanh x\, dx$ **92.** $\int \operatorname{csch}^3 2x \coth 2x\, dx$

Teori ve Örnekler

93–100 alıştırmaları kitabın sonundaki integral tablosundan alınmıştır.

93. $u = ax + b$ değişken dönüşümüyle

$$\int \frac{x}{(ax + b)^2}\, dx$$

integralini hesaplayarak Formül 9'u çıkarın.

94. Bir trigonometrik değişken dönüşümüyle

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}.$$

integralini hesaplayarak Formül 17'yi çıkarın.

95. Bir trigonometrik değişken dönüşümüyle

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

integralini hesaplayarak, Formül 29'u çıkarın.

96. Bir trigonometrik değişken dönüşümüyle

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

integralini hesaplayarak, Formül 46'yı çıkarın.

97. Kısmi integrasyonla

$$\int x^n \sin ax\, dx$$

integralini hesaplayarak Formül 80'i çıkarın.

98. Kısmi integrasyonla

$$\int x^n (\ln ax)^m\, dx$$

integralini hesaplayarak Formül 110'u çıkarın.

99. Kısmi integrasyonla

$$\int x^n \sin^{-1} ax\, dx$$

integralini hesaplayarak Formül 99'u çıkarın.

100. Kısmi integrasyonla

$$\int x^n \tan^{-1} ax\, dx$$

integralini hesaplayarak Formül 101'i çıkarın.

101. Yüzey alanı $y = \sqrt{x^2 + 2}$, $0 \le x \le \sqrt{2}$ eğrisinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin alanını bulun.

102. Yay uzunluğu $y = x^2$, $0 \le x \le \sqrt{3}/2$ eğrisinin uzunluğunu bulun.

103. Kütle Merkezi Birinci bölgeden, $y = 1/\sqrt{x + 1}$ eğrisi ve $x = 3$ doğrusuyla kesilen bölgenin kütle merkezini bulun.

T

104. *y*-eksenine göre moment Sabit $\delta = 1$ yoğunluklu ince bir plaka, birinci bölgede, $y = 36/(2x + 3)$ eğrisi ve $x = 3$ doğrusuyla çevrelenen bölgeyi kaplamaktadır. Plakanın y-ekseni etrafındaki momentini bulun.

105. Bir integral tablosu ve hesap makinesi kullanarak $y = x^2$, $-1 \le x \le 1$, eğrisinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin alanını 2 ondalık basamak hassaslıkta bulun.

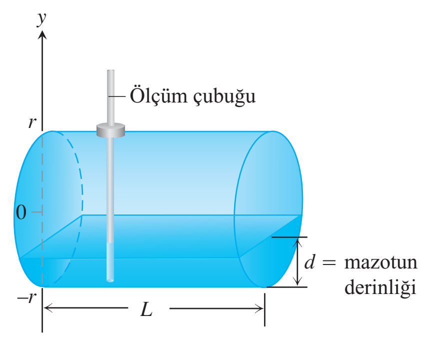
106. Hacim Firmanızın muhasebe bölümünün şefi, şirketin depolarındaki mazotun yıl sonu envanterini hesaplamak için bir bilgisayar programında kullanabileceği bir formül bulmanızı istemektedir. Tipik bir depo, gösterildiği gibi yatay olarak yerleştirilmiş r yarıçaplı ve L uzunluklu bir dik silindirdir. Veriler muhasebe bölümüne santimetrelere bölünmüş dikey bir ölçüm çubuğundan alınan derinlik ölçümleri olarak ulaşmaktadır.

a. Aşağıdaki şeklin gösterimiyle, depoyu bir d derinliğine kadar dolduran mazot hacminin

$$V = 2L \int_{-r}^{-r+d} \sqrt{r^2 - y^2}\, dy.$$

olduğunu gösterin.

b. İntegrali hesaplayın.



107. $\displaystyle\int_a^b \sqrt{x - x^2}\, dx$

integralinin herhangi a ve b değerleri için alabileceği en büyük değer nedir? Yanıtınızı açıklayın.

108. $\displaystyle\int_a^b x\sqrt{2x - x^2}\, dx$

integralinin herhangi a ve b değerleri için alabileceği en büyük değer nedir? Yanıtınızı açıklayın.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

109–110 alıştırmalarında, integrasyon için bir BCS kullanın.

109. Aşağıdaki integralleri heaplayın.

a. $\displaystyle\int x \ln x\, dx$ **b.** $\displaystyle\int x^2 \ln x\, dx$ **c.** $\displaystyle\int x^3 \ln x\, dx$

d. Nasıl bir kalıp görüyorsunuz? $\int x^4 \ln x\, dx$ için bir formül öngörün ve bunu bir BCS ile hesaplayarak doğru tahmin edip edemediğinize bakın.

e. $\int x^n \ln x\, dx$, $n \ge 1$ 'in formülü nedir? Yanıtınızı bir BCS ile kontrol edin.

110. Aşağıdaki integralleri hesaplayın.

a. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$ **b.** $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx$ **c.** $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^4}\, dx$

d. Nasıl bir kalıp görüyorsunuz?

$$\int \frac{\ln x}{x^5}\, dx$$

için bir formül öngörün. Bir BCS ile kontrol edin.

e. Aşağıdaki integralin formülü nedir?

$$\int \frac{\ln x}{x^n}\, dx, \quad n \geq 2$$

Bir BCS ile cevabınızı kontrol edin.

111. a. n keyfi bir pozitif tamsayı olmak üzere,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\, dx$$

integralini hesaplamak için bir BCS kullanın. BCS'niz sonucu buluyor mu?

b. Sonra, integrali $n = 1, 2, 3, 5, 7$ için bulun. Sonuçların karmaşıklığını yorumlayın.

c. Şimdi $x = (\pi/2) - u$ alarak yeni ve eski integralleri toplayın.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\, dx$$

integralinin değeri nedir?

Bu alıştırma, biraz matematiksel dehanın bir BCS'nin hemencecik bulamadığı bir problemi nasıl çözdüğünü göstermektedir.

8.7 Sayısal İntegrasyon

Daha önce gördüğümüz gibi, bir $\int_a^b f(x)\, dx$ belirli integralini hesaplamanın ideal yolu $f(x)$'in ters türevlerinden biri için bir $F(x)$ formülü bulmak ve $F(b) - F(a)$ sayısını hesaplamaktır. Fakat bazı ters türevlerin bulunması zordur ve sin (x^2), $1/\ln x$ ve $\sqrt{1 + x^4}$ gibi fonksiyonların ters türevlerininki gibi bazılarının da elemanter formülleri yoktur.

Başka bir durum da, deneysel olarak elde edilen verilerden oluşan bir tablo ile fonksiyonun tanımlanmasıdır. Böyle bir durumda fonksiyon için bir formül bile bulunmayabilir.

Neden ne olursa olsun, belirli bir integrali bir ters türevle hesaplayamıyorsak, bu bölümde tanımlanan *Yamuklar Kuralı* ve *Simpson Kuralı* gibi sayısal yöntemlere başvururuz. Bölüm 5.1 ve 5.2 de tanıtılan değişik dikdörtgen kuralları ile karşılaştırıldığında, bu kurallarla doğru sonuçlar elde etmek için integrasyon aralığını çok daha az sayıda alt aralıklara ayırmak yeterlidir. Ayrıca, bu yaklaşım yöntemlerini kullanırken elde edilen hatayı da tahmin ediyoruz.

Yamuklarla Yaklaşımlar

İntegre etmemiz gereken f fonksiyonu için çalışılabilir bir ters türev bulamadığımızda, integrasyon aralığını parçalara böler, her alt aralıkta f fonksiyonu yerine uygun bir polinom yazar, polinoları integre eder ve sonuçları toplayarak f'nin integraline bir yaklaşım buluruz. Bizim çalışmamızda f'nin pozitif olduğunu varsayıyoruz, fakat f üzerindeki tek koşul $[a, b]$ integrasyon aralığında sürekli olmasıdır.

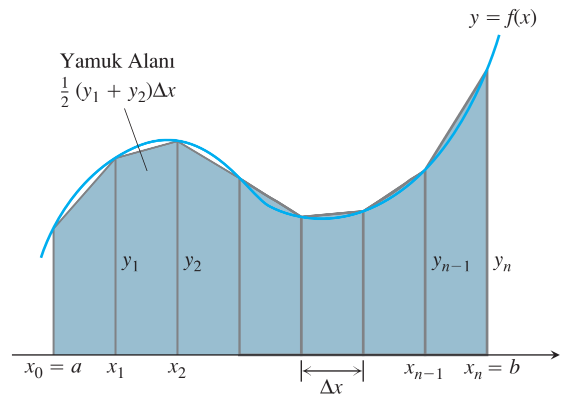
Bir belirli integralin değeri için, Yamuklar Kuralı, Şekil 8.10 da olduğu gibi bir eğri ile x-ekseni arasındaki bölgeye, dikdörtgenler yerine yamuklarla yaklaşımda bulunmak temeline dayanır. Şekildeki $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ bölünüş noktalarının eşit olarak yerleştirilmeleri gerekmemektedir, fakat aralıklar eşit olursa sonuçta elde edilen formül basit olur. Bu nedenle her alt aralığın uzunluğunun

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

olduğunu varsayıyoruz. $\Delta x = (b - a)/n$ uzunluğuna adım büyüklüğü denir. i. alt aralık üzerindeki yamuğun alanı, $y_{i-1} = f(x_{i-1})$ ve $y_i = f(x_i)$ olmak üzere

$$\Delta x \left(\frac{y_{i-1} + y_i}{2}\right) = \frac{\Delta x}{2}(y_{i-1} + y_i)$$

dir.



ŞEKİL 8.10 Yamuklar Kuralı $y = f(x)$ eğrisinin kısa yaylarına doğru parçalarıyla yaklaşımda bulunur. f'nin a'dan b'ye integralini tahmin etmek için, doğru parçalarının uçlarından x-eksenine doğrular uzatılarak elde edilen yamukların alanlarını toplarız.

Bu alan, yamuğun yatay "yüksekliği" Δx ile iki dikey tabanının ortalaması çarpımıdır. (Şekil 8.10'a bakın.) $y = f(x)$ eğrisinin altında ve x-ekseninin üstündeki alana, bütün yamukların alanlarını toplayarak bir yaklaşımda bulunulur:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(y_0 + y_1)\Delta x + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta x + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{2}(y_{n-2} + y_{n-1})\Delta x + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\Delta x \\ &= \Delta x\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) \\ &= \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) \end{aligned}$$

Burada

$$y_0 = f(a), \qquad y_1 = f(x_1), \qquad \ldots, \qquad y_{n-1} = f(x_{n-1}), \qquad y_n = f(b) \quad \text{dir.}$$

Yamuklar Kuralı, "f'nin a'dan b'ye integralini bulmak için T'yi kullanın" der.

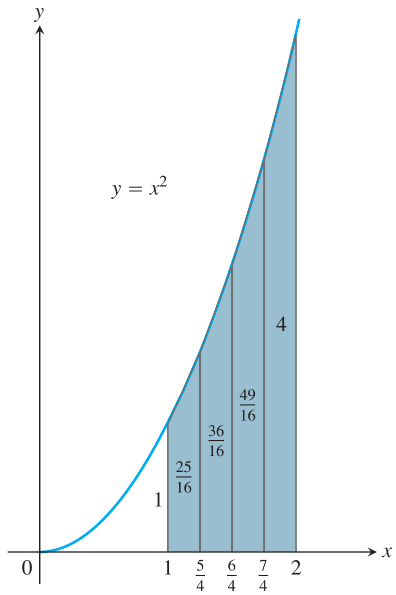
Yamuklar Kuralı

$\int_a^b f(x)\,dx$ 'e yaklaşımda bulunmak için,

$$T = \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right)$$

kullanın. Burada y'ler, $\Delta x = (b - a)/n$ ler, olmak üzere, fonksiyonun

$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \ldots, x_{n-1} = a + (n - 1)\Delta x, x_n = b$
bölünüş noktalarındaki değerleridir.



ŞEKİL 8.11 $x = 1$'den $x = 2$'ye kadar $y = x^2$ grafiğinin altındaki alana yamuklarla yapılan yaklaşım, alanın biraz fazlasını verir.

TABLO 8.3

x	$y = x^2$
1	1
$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{16}$
$\frac{6}{4}$	$\frac{36}{16}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{49}{16}$
2	4

ÖRNEK 1 Yamuklar Kuralını uygulamak

$\int_1^2 x^2\,dx$ integralini hesaplamak etmek için Yamuklar Kuralını $n = 4$ alarak kullanın. Bulduğunuzu integralin geçek değeriyle karşılaştırın.

Çözüm [1, 2] aralığını eşit uzunluklu dört alt aralığa bölün (Şekil 8.11). Sonra her bölünüş noktasında $y = x^2$'yi hesaplayın (Tablo 8.3).

Bu y değerlerini, $n = 4$ ve $\Delta x = (2-1)/4 = 1/4$ 'ü Yamuklar Kuralında kullanarak

$$\begin{aligned} T &= \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(1 + 2\left(\frac{25}{16}\right) + 2\left(\frac{36}{16}\right) + 2\left(\frac{49}{16}\right) + 4\right) \\ &= \frac{75}{32} = 2.34375. \end{aligned}$$

buluruz. İntegralin gerçek değeri

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Bigg]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

olarak bulunur. T yaklaşımı integralin gerçek değerinin yaklaşık olarak yüzde yarımı kadar fazla tahmin vermektedir. Hata yüzdesi $(2.34375 - 7/3)(7/3) \approx 0.00446$ veya %0.446'dır. ■

Şekil 8.11'in geometrisini göz önüne alarak, Yamuklar Kuralının Örnek 1'deki integral için fazla tahmin vereceğini öngörebilirdik. Parabol yukarıya konkav olduğundan yaklaşım doğruları eğrinin üstünde kalır ve her yamuk eğrinin altında, karşı gelen şeridin alanından biraz daha fazla alan verir. Şekil 8.10'da eğrinin *aşağıya* konkav olduğu aralıklarda doğru parçalarının eğrinin *altında* kaldıklarını görürüz. Bu aralıklarda Yamuklar Kuralı integralin değerinden *daha az* bir tahmin verir.

ÖRNEK 2 Ortalama Sıcaklık

Bir gözlemci, öğleden gece yarısına kadar dış sıcaklığı ölçüp aşağıdaki tabloya kaydetmektedir.

Zaman	Ö	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	G.Y.
Sıcaklık	63	65	66	68	70	69	68	68	65	64	62	58	55

12 saatlik periyot için ortalama sıcaklık nedir?

Çözüm Bir birim uzaklıkta ayrık zamanlardaki değerlerini bildiğimiz sürekli bir fonksiyonun (sıcaklık) ortalama değerini arıyoruz. $f(x)$ için bir formül olmadan

$$\text{av}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

değerini bulmamız gerekiyor. Bununla birlikte, tablodaki sıcaklıkları 12-saatlik aralığın ($\Delta x = 1$ ile) 12-alt aralıklı bir bölünüşünün noktalarındaki fonksiyon değerleri olarak kullanmakla, Yamuklar Kuralı ile integrale yaklaşımda bulunabiliriz.

$$\begin{aligned} T &= \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{11} + y_{12}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(63 + 2\cdot 65 + 2\cdot 66 + \cdots + 2\cdot 58 + 55\right) \\ &= 782 \end{aligned}$$

T'yi $\int_a^b f(x)\,dx$,'ye yaklaşım için kullanarak

$$\text{av}(f) \approx \frac{1}{b-a}\cdot T = \frac{1}{12}\cdot 782 \approx 65.17$$

buluruz. Verilen girdilerin doğruluk hassasiyetine uygun olarak yuvarlamakla ortalama sıcaklığı 65 derece olarak buluruz. ■

Yamuklarla Yaklaşımda Hatayı Kontrol Etme

n artarken ve $\Delta x = (b-a)/n$ adım büyüklüğü sıfıra yaklaşırken, T, $\int_a^b f(x)\,dx$ integralinin gerçek değerine yaklaşır. Nedenini görmek için

$$\begin{aligned} T &= \Delta x\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) \\ &= (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)\Delta x + \frac{1}{2}(y_0 - y_n)\,\Delta x \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x + \frac{1}{2}[f(a) - f(b)]\,\Delta x. \end{aligned}$$

$n \to \infty$ ve $\Delta x \to 0$ iken

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \to \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{ve} \qquad \frac{1}{2}[f(a) - f(b)]\Delta x \to 0$$

dır. Bu nedenle

$$\lim_{n\to\infty} T = \int_a^b f(x)\,dx + 0 = \int_a^b f(x)\,dx$$

bulunur. Bunun anlamı şudur; Teoride n'yi yeteri kadar büyük alarak ve sadece f'nin integre edilebildiğini kabul ederek, T ile integral arasındaki farkı istediğimiz kadar küçük yapabiliriz. Bununla birlikte, pratikte, verilen bir tolerans için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini nasıl söyleriz?

Bu soruyu ileri analizden, f'' türevi $[a, b]$ üzerinde sürekli ise a ile b arasındaki bir c için

$$\int_a^b f(x)\,dx = T - \frac{b-a}{12}\cdot f''(c)(\Delta x)^2$$

olduğunu söyleyen bir sonuçla cevaplarız. Böylece, Δx sıfıra yaklaşırken

$$E_T = -\frac{b-a}{12}\cdot f''(c)(\Delta x)^2$$

ile tanımlanan hata, Δx'in *karesi* gibi sıfıra yaklaşır.

max ifadesi $[a, b]$ aralığında söz konusu olmak üzere

$$|E_T| \le \frac{b-a}{12}\max|f''(x)|(\Delta x)^2$$

eşitsizliği, hatanın büyüklüğü için bir üst sınır verir. Pratikte, genellikle $\max|f''(x)|$'in tam değerini bulamayız ve onun yerine bir üst sınır tahmininde bulunuruz. M, $[a, b]$ üzerinde $|f''(x)| \le M$ olacak şekilde, $|f''(x)|$'nin $[a, b]$ üzerindeki değerleri için herhangi bir üst sınır ise

$$|E_T| \le \frac{b-a}{12}M(\Delta x)^2$$

dir.

Δx yerine $(b-a)/n$ koyarsak

$$|E_T| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

elde ederiz. Bu, normalde $|E_T|$'yi tahmin etmekte kullandığımız eşitsizliktir. Bulabildiğimiz en iyi M'yi buluruz ve buradan $|E_T|$'yi tahmin ederiz. Bu dikkatsizce gibi gözükebilir, fakat işe yarar. Verilen bir $|E_T|$'ye karşı M'yi küçük yapmak için sadece n'yi büyütürüz.

Yamuklar Kuralı İçin Hata Tahmini

f'' sürekliyse ve $|f''|$'nin $[a, b]$ aralığındaki değerlerinin herhangi bir üst sınırı M ise, f'nin a'dan b'ye integrali için, n adımlı, yamuklarla yaklaşımdaki E_T hatası aşağıdaki eşitsizliği sağlar

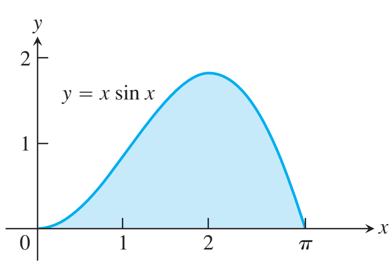
$$|E_T| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

ÖRNEK 3 Yamuklar Kuralı Hatasını Sınırlamak

$n = 10$ adım ile Yamuklar Kuralı kullanılarak

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$$

integralinin değerinin tahmininde ortaya çıkan hata için bir üst sınır bulun (Şekil 8.12).



ŞEKİL 8.12 Örnek 3'teki integrandın grafiği

Çözüm $a = 0$, $b = \pi$ ve $n = 10$ ile hata tahmini

$$|E_T| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2} = \frac{\pi^3}{1200} M$$

verir. M, $[0, \pi]$ aralığında $f(x) = x \sin x$'in ikinci türevinin büyüklüğünün herhangi bir üst sınırı olabilir. Olağan bir hesaplama

$$f''(x) = 2\cos x - x \sin x,$$

verir, dolayısıyla

$$\begin{aligned} |f''(x)| &= |2\cos x - x\sin x| \\ &\leq 2|\cos x| + |x||\sin x| \\ &\leq 2 \cdot 1 + \pi \cdot 1 = 2 + \pi \end{aligned}$$

$|\cos x|$ ve $|\sin x|$ asla 1'i geçmez ve $0 \leq x \leq \pi$

bulunur. Rahatlıkla $M = 2 + \pi$ alabiliriz. Buradan

$$|E_T| \leq \frac{\pi^3}{1200} M = \frac{\pi^3(2+\pi)}{1200} < 0.133$$

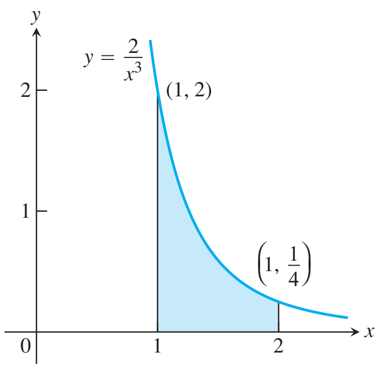
Yuvarlatılmış değer

elde ederiz. Mutlak hata 0.133'ten büyük değildir.

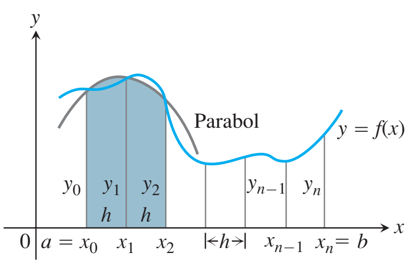
Daha fazla hassaslık için, M'yi daha iyi bulmaya değil, daha fazla adım almaya çalışmalıyız. Örneğin, $n = 100$ adımda

$$|E_T| \leq \frac{(2+\pi)\pi^3}{120{,}000} < 0.00133 = 1.33 \times 10^{-3}$$ ■

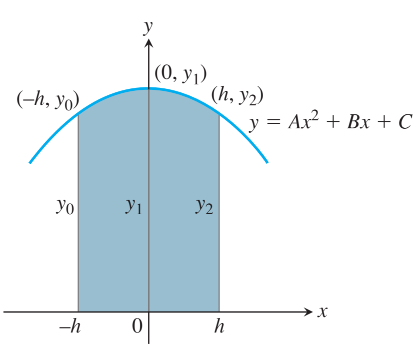
bulunur.



ŞEKİL 8.13 $y = 2/x^3$ sürekli fonksiyonunun üzerindeki maksimumu $[1, 2]$ de $x = 1$ dir.



ŞEKİL 8.14 Simpson Kuralı eğrinin kısa yaylarına parabollerle yaklaşımda bulunur.



ŞEKİL 8.15 $-h$'den h'ye integre etmekle renkli alanı

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

olarak buluruz.

ÖRNEK 4 Belirli Bir Hassasiyet İçin Kaç Adım Gerektiğini Bulmak

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$$

integraline, mutlak değeri 10^{-4}'ten küçük bir hatayla yaklaşımda bulunmak için Yamuklar Kuralında kaç alt aralık (adım) alınmalıdır?

Çözüm $a = 1$ ve $b = 2$ ile tahmini hata

$$|E_T| \le \frac{M(2-1)^3}{12n^2} = \frac{M}{12n^2}$$

dir. Bu durum bir M üst sınırı ayarlamak yerine $\max|f''|$'i gerçekten bulabileceğimiz ender durumlardan biridir. $f(x) = 1/x$ ile

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}(x^{-1}) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

buluruz. $[1, 2]$ üzerinde, $y = 2/x^3$ bir $y = 2$ maksimumundan bir $y = 1/4$ minimumuna doğru düzgün olarak azalmaktadır. Bu nedenle $M = 2$ dir, ve

$$|E_T| \le \frac{2}{12n^2} = \frac{1}{6n^2}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\frac{1}{6n^2} < 10^{-4}, \qquad \frac{10^4}{6} < n^2, \qquad \frac{100}{\sqrt{6}} < n \qquad \text{veya} \qquad 40.83 < n$$

ise hatanın mutlak değeri 10^{-4}'ten küçük olacaktır.
40.83'ten sonraki ilk tamsayı 41'dir. $n = 41$ alt aralık alarak, ln 2'yi büyüklüğü 10^{-4}'ten küçük bir hatayla hesaplamayı garantileyebiliriz. Daha büyük bir n sayısı da işe yarar. ■

Simpson Kuralı; Parabollerle Yaklaşım

Riemann toplamları ve Yamuklar Kuralı, kapalı bir aralık üzerinde sürekli olan bir fonksiyonun integraline anlamlı yaklaşımlar verirler. Küçük n değerleri için daha iyi bir yaklaşım verdiğinden Yamuklar Kuralı daha etkilidir ve sayısal integrasyon için daha hızlı bir algoritmadır.

Başka bir kural, bir sürekli fonksiyonun belirli integraline yaklaşım için, yamuklar üreten doğru parçaları yerine, paraboller kullanmakla elde edilir. Önceki gibi, $[a, b]$ aralığını eşit $h = \Delta x = (b - a)/n$ uzunluklu n alt aralığa böleriz, fakat bu defa n'nin bir çift sayı olmasını gerekli kılarız. Her ardışık aralık çifti üzerinde, $y = f(x) \ge 0$ eğrisine, Şekil 8.14'te gösterildiği gibi, bir parabolle yaklaşımda bulunuruz. Tipik bir parabol, eğri üzerindeki (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i) ve (x_{i+1}, y_{i+1}) ardışık noktalarından geçer.

Ardışık üç noktadan geçen bir parabol altındaki renkli alanı hesaplayalım. Hesabımızı basitleştirmek için önce, $h = \Delta x = (b - a)/n$ olmak üzere $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ ve $x_2 = h$ (Şekil 8.15) olduğu durumu alırız. y eksenini sola veya sağa kaydırırsak, parabol altındaki alan aynı kalacaktır. Parabolün

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

formunda bir denklemi vardır.

Dolayısıyla, $x = -h$'den $h = 2$'ye kadar altındaki alan

$$A_p = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx$$

$$= \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx \Big]_{-h}^{h}$$

$$= \frac{2Ah^3}{3} + 2Ch = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C)$$

dir. Eğri, $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ ve (h, y_2) noktalarından geçtiğinden, ayrıca

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C, \qquad y_1 = C, \qquad y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

dir. Buradan,

$$C = y_1,$$

$$Ah^2 - Bh = y_0 - y_1,$$

$$Ah^2 + Bh = y_2 - y_1,$$

$$2Ah^2 = y_0 + y_2 - 2y_1.$$

elde ederiz. Böylece, A_p alanını y_0, y_1 ve y_2 cinsinden ifade etmekle

$$A_p = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C) = \frac{h}{3}((y_0 + y_2 - 2y_1) + 6y_1) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

buluruz. Şimdi, parabolü yatay olarak Şekil 8.14'teki renkli konumuna kaydırmak altındaki alanı değiştirmez. Böylece, Şekil 8.14'teki (x_0, y_0), (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarından geçen parabolün altındaki alan halâ

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

dir. Benzer şekilde, (x_2, y_2), (x_3, y_3) ve (x_4, y_4) noktalarından geçen parabolün altındaki alan

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

tür. Bütün parabollerin altındaki alanları hesaplayıp sonuçlarını toplamak

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots$$

$$+ \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

yaklaşımını verir. Sonuç, Simpson Kuralı olarak bilinir ve herhangi bir $y = f(x)$ sürekli fonksiyonu için geçerlidir (Alıştırma 38). Fonksiyonun, bizim çıkardığımızdaki gibi pozitif olması gerekli değildir. Her parabolik yay iki alt aralık kullandığından, kuralı uygulamak için n sayısı çift olmak zorundadır.

TARİHSEL BIYOGRAFİ

Thomas Simpson
(1720–1761)

Simpson Kuralı

$\int_a^b f(x)\,dx$ 'e yaklaşımda bulunmak için,

$$S = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

kullanın. y'ler f'nin

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \ldots, x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x, x_n = b$$

bölünüş noktalarındaki değerleridir. n sayısı çifttir ve $\Delta x = (b - a)/n$'dir.

Yukarıdaki kuralda katsayıların düzenine dikkat edin: 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2, . . . , 4, 2, 1 .

TABLO 8.4

x	$y = 5x^4$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{16}$
1	5
$\frac{3}{2}$	$\frac{405}{16}$
2	80

ÖRNEK 5 Simpson Kuralını Uygulamak

$\int_0^2 5x^4\,dx$ integraline yaklaşımda bulunmak için $n = 4$ ile Simpson kuralını kullanın.

Çözüm [0, 2] aralığını dört alt aralığa bölün ve $y = 5x^4$'ü bölünüş noktalarında hesaplayın (Tablo 8.4). Sonra, $n = 4$ ve $\Delta x = 1/2$ ile Simpson Kuralını kullanın :

$$\begin{aligned} S &= \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(0 + 4\left(\frac{5}{16}\right) + 2(5) + 4\left(\frac{405}{16}\right) + 80\right) \\ &= 32\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Bu yaklaşım gerçek değerden (32) sadece $1/12$ kadar fark etmektedir. Sadece dört alt aralıkla binde-üç ten daha küçük bir hata yüzdesi. ■

Simpson Kuralı İçin Hata Tahmini

Simpson kuralındaki hatayı tahmin etmek için, ileri analizden, $f^{(4)}$ türevi sürekli ise a ile b arasındaki bir c noktası için

$$\int_a^b f(x)\,dx = S - \frac{b-a}{180}\cdot f^{(4)}(c)(\Delta x)^4$$

olduğunu söyleyen bir sonuç ile başlıyoruz. Böylece, Δx sıfıra yaklaşırken,

$$E_S = -\frac{b-a}{180}\cdot f^{(4)}(c)(\Delta x)^4,$$

hatası da Δx'in *dördüncü kuvveti* gibi sıfıra yaklaşır (Bu, Simpson Kuralının Yamuklar Kuralına göre neden daha iyi sonuçlar verdiğini açıklamakta yardımcı olur.)
max ifadesi [*a, b*] aralığında söz konusu olmak üzere

$$|E_S| \le \frac{b-a}{180}\max|f^{(4)}(x)|\,(\Delta x)^4$$

eşitsizliği, hatanın büyüklüğü için bir üst sınır verir. Yamuklar Kuralında, hata formülündeki $\max|f''|$ için olduğu gibi genelde $\max|f^{(4)}(x)|$ 'in tam değerini bulamayız ve bunu

bir M üst sınırı ile değiştirmemiz gerekir. $|f^{(4)}|$ 'ün $[a, b]$ aralığındaki değerleri için herhangi bir üst sınır ise

$$|E_S| \leq \frac{b-a}{180} M(\Delta x)^4$$

olur. Bu son ifadede Δx yerine $(a-b)/n$ yazmak

$$|E_S| \leq \frac{M(b-a)^5}{180n^4}$$

verir. Bu, Simpson Kuralındaki hatayı tahmin etmekte genellikle kullandığımız formüldür. M için kabul edilebilir bir değer buluruz ve oradan $|E_S|$ hatasını bulmak için devam ederiz.

Simpson Kuralı İçin Hata Tahmini

$f^{(4)}$ sürekli ise ve $|f^{(4)}|$'ün $[a, b]$ aralığındaki değerlerinin herhangi bir üst sınırı M ise, f'nin a'dan b'ye integrali için, n adımlı, Simpson Kuralı yaklaşımındaki E_S hatası aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$|E_S| \leq \frac{M(b-a)^5}{180n^4}.$$

Yamuklar Kuralındaki gibi, çoğunlukla M için mümkün olan en küçük değeri bulamayız. Bulabildiğimiz en iyi değeri bulur ve oradan devam ederiz.

ÖRNEK 6 Simpson Kuralındaki Hatayı Sınırlamak

Simpson Kuralı ile $n = 4$ alarak, $\int_0^2 5x^4\,dx$ integralini hesaplamada ortaya çıkan hata için bir üst sınır bulun (Örnek 5).

Çözüm Hatayı hesaplamak üzere, önce $0 \leq x \leq 2$ aralığında $f(x) = 5x^4$'ün dördüncü türevinin büyüklüğü için bir M üst sınırı buluruz. Dördüncü türevin değeri, $f^{(4)}(x) = 120$, sabit olduğundan, $M = 120$ alırız. $b - a = 2$ ve $n = 4$ ile Simpson Kuralı için hata tahmini

$$|E_S| \leq \frac{M(b-a)^5}{180n^4} = \frac{120(2)^5}{180 \cdot 4^4} = \frac{1}{12}$$ ■

ÖRNEK 7 Yamuklar Kuralı ve Simpson Kuralı Yaklaşımlarını Karşılaştırmak

Bölüm 7'de gördüğümüz gibi, ln 2'nin değeri

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

integrali ile hesaplanabilir. Tablo 8.5, $\int_1^2 (1/x)\,dx$ integralinin çeşitli n'ler kullanan yaklaşımlarının T ve S değerlerini göstermektedir. Simpson Kuralının Yamuklar Kuralına göre nasıl öne çıktığına dikkat edin. Özel olarak, n'nin değerini iki katına çıkardığımızda (bunun sonucu $h = \Delta x$'i yarıya düşürdüğümüzde), T hatasının 2'nin *karesi*'ne bölündüğüne, oysa S hatasının 2'nin dördüncü kuvvetine bölündüğüne dikkat edin.

TABLO 8.5 $\ln 2 = \int_1^2 (1/x)\,dx$ ' in Yamuklar Kuralı Yaklaşımları (T_n) ve Simpson Kuralı Yaklaşımları (S_n)

n	T_n	| Hata | …dan küçük	S_n	| Hata | …dan küçük
10	0.6937714032	0.0006242227	0.6931502307	0.0000030502
20	0.6933033818	0.0001562013	0.6931473747	0.0000001942
30	0.6932166154	0.0000694349	0.6931472190	0.0000000385
40	0.6931862400	0.0000390595	0.6931471927	0.0000000122
50	0.6931721793	0.0000249988	0.6931471856	0.0000000050
100	0.6931534305	0.0000062500	0.6931471809	0.0000000004

Bunun, $\Delta x = (2-1)/n$ küçüldükçe dramatik bir etkisi vardır. $n = 50$ için Simpson yaklaşımı, 7 ondalık basamağa kadar doğru olur. $n = 100$ için ise 9 ondalık basamağa kadar doğru olur. ■

$f(x)$ derecesi dörtten küçük bir polinom ise dördüncü mertebeden türevi sıfırdır ve

$$E_S = -\frac{b-a}{180} f^{(4)}(c)(\Delta x)^4 = -\frac{b-a}{180}(0)(\Delta x)^4 = 0$$

olur. Böylece, f'nin herhangi bir integralinin Simpson yaklaşımında hata olmayacaktır. Başka bir deyişle, f bir sabit ise, bir lineer fonksiyon ise, kuadratik veya kübik bir polinom ise, alt aralıkların sayısı ne olursa olsun, Simson Kuralı f'nin herhangi bir integralinin değerini tam olarak verecektir. Benzer şekilde, f bir sabit ise veya bir lineer fonksiyon ise ikinci mertebeden türevi sıfırdır ve

$$E_T = -\frac{b-a}{12} f''(c)(\Delta x)^2 = -\frac{b-a}{12}(0)(\Delta x)^2 = 0$$

olur. Bu nedenle, Yamuklar Kuralı f'nin herhangi bir integralinin değerini tam olarak verecektir. Yamuklar grafiğe kusursuzca uyduğundan bu sürpriz değildir. Teoride, Δx adım büyüklüğünü küçültmek, Simpson ve Yamuklar yaklaşımlarındaki hatayı küçültmesine rağmen pratikte bu olmayabilir.

Δx çok küçük iken, örneğin $\Delta x = 10^{-5}$, bilgisayar veya hesap makinesi, S ve T'yi hesaplamak için gereken aritmetikteki yuvarlama hatalarını öyle bir dereceye kadar biriktirebilir ki hata formülleri neler olduğunu açıklayamaz hale gelir. Δx'i belirli bir ölçünün altına küçültmek işleri daha da kötüye götürebilir. Bu kitabın bir konusu olmamakla birlikte, yuvarlama hatalarıyla ilgili problemleriniz olursa, alternatif yöntemler için nümerik analiz konusunda bir kitaba başvurmalısınız.

ÖRNEK 8 Simpson Kuralı ile

$$\int_0^2 x^3\,dx$$

integralini tahmin edin.

Çözüm $f(x) = x^3$'in dördüncü mertebeden türevi sıfırdır, dolayısıyla Simpson Kuralının, herhangi (çift) sayıda adımla integralin değerini tam olarak vermesini bekleriz. Gerçekten, $n = 2$ ve $\Delta x = (2 - 0)/2 = 1$ ile

$$S = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$
$$= \frac{1}{3}((0)^3 + 4(1)^3 + (2)^3) = \frac{12}{3} = 4$$

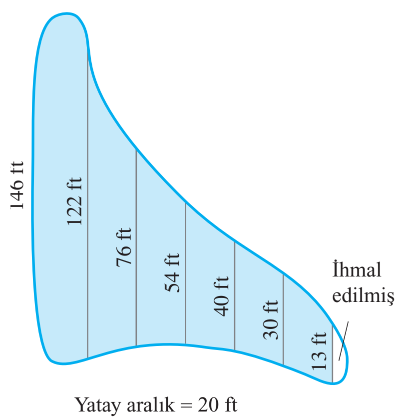
olurken,

$$\int_0^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big]_0^2 = \frac{16}{4} - 0 = 4$$

tür. ■

ÖRNEK 9 Bir Bataklığı Kurutmak

Bir kasaba küçük, kirli bir bataklığı kurutup doldurmak istemektedir (Şekil 8.16). Bataklık ortalama 5 ft derinliğindedir. Bataklık kurutulduktan sonra doldurulması için ne kadar yard küp çöp gerekecektir?



ŞEKİL 8.16 Örnek 9'daki bataklığın boyutları

Çözüm Bataklığın hacmini hesaplamak için, yüzey alanını tahmin eder ve 5 ile çarparız. Alanı tahmin etmek için, $\Delta x = 20$ ft ve y'ler, Şekil 8.16'da gösterildiği gibi, bataklığın kenarları arasında ölçülen uzaklıklar olmak üzere Simpson Kuralını kullanacağız.

$$S = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)$$
$$= \frac{20}{3}(146 + 488 + 152 + 216 + 80 + 120 + 13) = 8100$$

Hacim yaklaşık olarak (8100)(5) = 40.500 ft^3 veya 1500 yd^3'tür. ■

ALIŞTIRMALAR 8.7

İntegral Hesaplama

1–10 alıştırmalarındaki integraller için verilenler iki kısımdır: biri Yamuklar Kuralı, diğeri Simpson Kuralı için.

I. Yamuk kuralını kullanmak

a. $n = 4$ adımla integrali tahmin edin ve $|E_T|$ için bir üst sınır bulun.

b. İntegrali doğrudan hesaplayın ve $|E_T|$'yi bulun.

c. $|E_T|$'yi integralin gerçek değerinin bir yüzdesi olarak bulmak için $(|E_T|/(\text{gerçek değer})) \times 100$ formülünü kullanın.

II. Simpson Kuralını kullanmak

a. $n = 4$ adımla integrali tahmin edin ve $|E_S|$ için bir üst sınır bulun.

b. İntegrali doğrudan hesaplayın ve $|E_S|$'yi bulun.

c. $|E_S|$'yi integralin gerçek değerinin bir yüzdesi olarak bulmak için $(|E_S|/(\text{gerçek değer})) \times 100$ formülünü kullanın.

1. $\int_1^2 x\,dx$

2. $\int_1^3 (2x - 1)\,dx$

3. $\int_{-1}^1 (x^2 + 1)\,dx$

4. $\int_{-2}^0 (x^2 - 1)\,dx$

5. $\int_0^2 (t^3 + t)\,dt$

6. $\int_{-1}^1 (t^3 + 1)\,dt$

7. $\int_1^2 \frac{1}{s^2}\,ds$

8. $\int_2^4 \frac{1}{(s-1)^2}\,ds$

9. $\int_0^\pi \sin t\,dt$

10. $\int_0^1 \sin \pi t\,dt$

11–14 alıştırmalarında, integrandın tabloda verilen değerlerini kullanarak integrali **(a)** Yamuklar Kuralı ile ve **(b)** Simpson Kuralı ile $n = 8$ adım alarak hesaplayın. Cevaplarınızı 5 ondalık basamağa yuvarlayın.Sonra, **(c)** integralin gerçek değerini ve E_T veya E_S yaklaşım hatasını bulun.

11. $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\,dx$

x	$x\sqrt{1 - x^2}$
0	0.0
0.125	0.12402
0.25	0.24206
0.375	0.34763
0.5	0.43301
0.625	0.48789
0.75	0.49608
0.875	0.42361
1.0	0

12. $\displaystyle\int_0^3 \frac{\theta}{\sqrt{16 + \theta^2}}\,d\theta$

θ	$\theta/\sqrt{16 + \theta^2}$
0	0.0
0.375	0.09334
0.75	0.18429
1.125	0.27075
1.5	0.35112
1.875	0.42443
2.25	0.49026
2.625	0.58466
3.0	0.6

13. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{3\cos t}{(2 + \sin t)^2}\,dt$

t	$(3\cos t)/(2 + \sin t)^2$
−1.57080	0.0
−1.17810	0.99138
−0.78540	1.26906
−0.39270	1.05961
0	0.75
0.39270	0.48821
0.78540	0.28946
1.17810	0.13429
1.57080	0

14. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\csc^2 y)\sqrt{\cot y}\,dy$

y	$(\csc^2 y)\sqrt{\cot y}$
0.78540	2.0
0.88357	1.51606
0.98175	1.18237
1.07992	0.93998
1.17810	0.75402
1.27627	0.60145
1.37445	0.46364
1.47262	0.31688
1.57080	0

Minimum Alt Aralık Sayısı

15–26 alıştırmalarında, **(a)** Yamuklar Kuralı ile ve **(b)** Simpson Kuralı ile büyüklüğü 10^{-4}'ten küçük bir hatayla integrali tahmin edin. (15–22 alıştırmalarındaki integraller 1–8 alıştırmalarındaki integrallerdir.)

15. $\displaystyle\int_1^2 x\,dx$

16. $\displaystyle\int_1^3 (2x - 1)\,dx$

17. $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^2 + 1)\,dx$

18. $\displaystyle\int_{-2}^0 (x^2 - 1)\,dx$

19. $\displaystyle\int_0^2 (t^3 + t)\,dt$

20. $\displaystyle\int_{-1}^1 (t^3 + 1)\,dt$

21. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{s^2}\,ds$

22. $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{(s - 1)^2}\,ds$

23. $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{x + 1}\,dx$

24. $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x + 1}}\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^2 \sin(x + 1)\,dx$

26. $\displaystyle\int_{-1}^1 \cos(x + \pi)\,dx$

Uygulamalar

27. Bir yüzme havuzundaki suyun hacmi Dikdörtgen şeklindeki bir yüzme havuzu 30 ft genişliğinde ve 50 ft uzunluğundadır. Tablo, havuzun bir ucundan diğerine 5 ft aralıklarla $h(x)$ derinliğini göstermektedir. Yamuklar Kuralını $n = 10$ ile

$$V = \int_0^{50} 30 \cdot h(x)\,dx$$

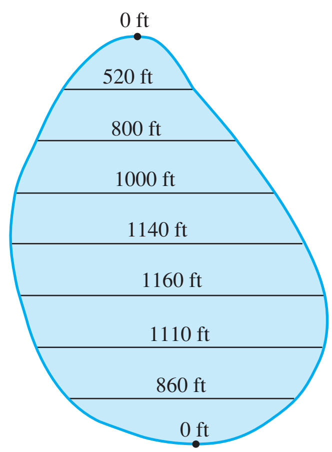
integraline uygulayarak havuzdaki suyun hacmini tahmin edin.

Konum (ft) x	**Derinlik (ft)** $h(x)$	**Konum (ft)** x	**Derinlik (ft)** $h(x)$
0	6.0	30	11.5
5	8.2	35	11.9
10	9.1	40	12.3
15	9.9	45	12.7
20	10.5	50	13.0
25	11.0		

28. Bir balık gölünü doldurmak Kasabanızın balıkçılık komisyonu başkanı olarak, kasaba gölünü avlanma sezonuna kadar balıkla doldurmak zorundasınız. Gölün ortalama derinliği 20 ft'tir. Ölçekli bir harita kullanarak, şekilde gösterildiği gibi, 200 ft aralıklarla gölün bir kıyısından diğerine uzunluklar ölçüyorsunuz.

a. Gölün hacmini tahmin etmek için Yamuklar Kuralını kullanın.

b. Sezona 1000 ft^3'te bir balık ile başlamayı planlıyorsunuz. Sezon sonunda gölde açılış gününde bulanan balık miktarının en azından %25'inin kalmasını bekliyorsunuz. Lisans başına ortalama sezonluk av sayısı 20 balık ise, kasabanın satabileceği maksimum lisans sayısı kaçtır?



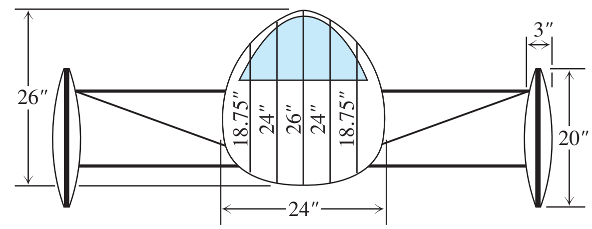
Dikey aralık = 200 ft

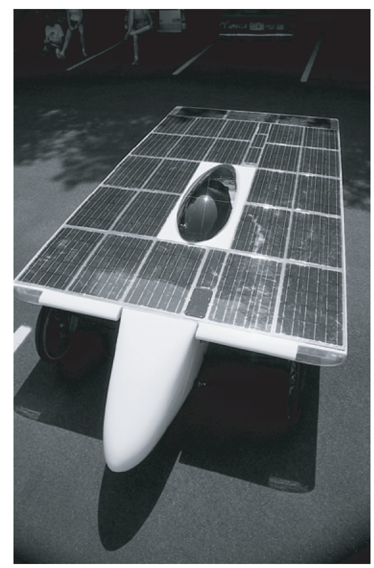
29. Ford® Mustang Cobra™ Aşağıdaki tablo durgun konumdan 130 mph'ye ivmelenen bir 1994 model Ford Mustang Cobra'nın zamana karşı süratini vermektedir. Bu sürate eriştiğinde, Mustang ne kadar yol almıştır?

Sürat Değişimi	Saniye
Sıfırdan 30 mph	2.2
40 mph	3.2
50 mph	4.5
60 mph	5.9
70 mph	7.8
80 mph	10.2
90 mph	12.7
100 mph	16.0
110 mph	20.6
120 mph	26.2
130 mph	37.1

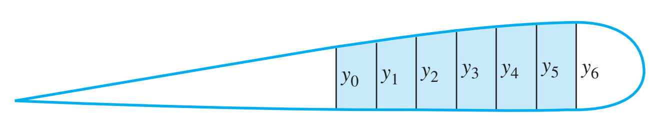
Kaynak: Car and Driver, Nisan 1994.

30. Aerodinamik direnç Bir aracın aerodinamik direnci kısmen kesit alanı ile belirlenir ve, diğer bütün şeyler eşitse, mühendisler bu alanı olabildiğince küçük yapmaya çalışırlar. Simpson Kuralını kullanarak James Worden'ın MIT'deki güneş gücüyle çalışan Solectria arabasının kesit alanını bulun (Aşağıdaki diyagramı kullanın).





31. Kanat dizaynı Yeni bir uçağın tasarımı her kanatta sabit kesit alanlı bir yakıt tankı gerektirmektedir. Bir kesit ölçekli olarak aşağıda görülmektedir. Tank yoğunluğu 42 lb/ft^3 olan yakıttan 5000 lb taşımalıdır. Tankın uzunluğunu tahmin edin.



$y_0 = 1.5$ ft, $y_1 = 1.6$ ft, $y_2 = 1.8$ ft, $y_3 = 1.9$ ft,
$y_4 = 2.0$ ft, $y_5 = y_6 = 2.1$ ft Yatay aralık = 1 ft

32. Bir jeneratörün yağ tüketimi Bir dizel jeneratör, filtrelerini değiştirmek için geçici olarak durdurulana kadar sürekli olarak çalışmakta ve aşamalı olarak artan bir oranda yağ tüketmektedir.

Jeneratörün bir hafta boyunca tükettiği yağ miktarını tahmin etmek için Yamuklar Kuralını kullanın.

Gün	Yağ tüketim oranı (litre/h)
Pazar	0.019
Pzt.	0.020
Salı	0.021
Çarş.	0.023
Perş.	0.025
Cuma	0.028
Cmt.	0.031
Pazar	0.035

Teori ve Örnekler

33. Sinüs integral fonksiyonunun kullanılabilir değerleri *Sinüs integral fonksiyonu,*

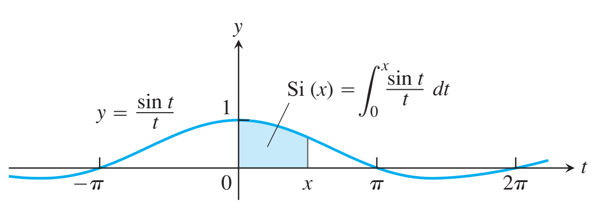
$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad \text{“}x\text{'in sinüs integrali”}$$

mühendisliğin formülleri basitleştirilemeyen birçok fonksiyonundan biridir. $(\sin t)/t$'nin elementer bir ters türevi yoktur. Ancak, $\mathrm{Si}(x)$'in değerleri sayısal integrasyonla kolayca hesaplanabilir.

Gösterim açıkça belirtmese de, integre edilen fonksiyon $(\sin t)/t$'nin $[0, x]$ aralığına sürekli genişletilmesi olan

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

fonksiyonudur. Fonksiyonun tanım aralığının her noktasında her dereceden türevi vardır. Grafiği düzgündür ve Simpson Kuralının iyi sonuçlar vermesini bekleyebilirsiniz.



a. $[0, \pi/2]$ aralığında $|f^{(4)}| \leq 1$ olduğunu kullanarak,

$$\mathrm{Si}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

integrali $n = 4$ alınarak Simpson Kuralıyla hesaplanırsa oluşacak hataya bir üst sınır bulun.

b. Simpson Kuralıyla $n = 4$ ile $\mathrm{Si}(\pi/2)$'yi hesaplayın.

c. (a) şıkkında bulduğunuz hata sınırını (b)'de bulduğunuz değerin bir yüzdesi olarak ifade edin.

34. Hata fonksiyonu (The error function)

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt,$$

hata fonksiyonu, olasılıkta, ısı akışı ve sinyal transferi teorilerinde önemlidir ve e^{-t^2}'nin ters türevi için elementer bir ifade bulunmadığından sayısal olarak hesaplanmalıdır.

a. $n = 10$ ile Simpson Kuralını kullanarak erf(1)'i bulun.

b. [0, 1]'de

$$\left|\frac{d^4}{dt^4}\left(e^{-t^2}\right)\right| \leq 12.$$

dir. (a) da bulduğunuz yaklaşımın hata büyüklüğü için bir üst sınır bulun.

35. (*Örnek 3'ün devamı*) E_T ve E_S için hata sınırları "en kötü" tahminlerdir ve Yamuklar ile Simpson kuralları genelde bu sınırların belirttiğinden daha kesindir. Örnek 3'teki

$$\int_0^{\pi} x \sin x\,dx$$

integraline Yamuklarla yaklaşım buna bir örnektir.

a. $n = 10$ ile Yamuklar Kuralını kullanarak integralin değerine yaklaşımda bulunun. Sağdaki tablo gerekli y değerlerini vermektedir.

x	$x \sin x$
0	0
$(0.1)\pi$	0.09708
$(0.2)\pi$	0.36932
$(0.3)\pi$	0.76248
$(0.4)\pi$	1.19513
$(0.5)\pi$	1.57080
$(0.6)\pi$	1.79270
$(0.7)\pi$	1.77912
$(0.8)\pi$	1.47727
$(0.9)\pi$	0.87372
π	0

b. İntegralin değeri ve π, ile (a) şıkkında bulduğunuz yaklaşım arasındaki farkın büyüklüğünü bulun. Farkın Örnek 3'te hesaplanan üst sınır 0.133'ten çok daha küçük olduğunu göreceksiniz.

T **c.** Örnek 3'te $|E_T|$ için bulunan 0.133 üst sınırı, $[0, \pi]$ aralığında

$$|f''(x)| = |2\cos x - x \sin x|$$

için daha iyi bir üst sınır bulunarak iyileştirilebilirdi. Kullanılan üst sınır $2 + \pi$'ydi. $[0, \pi]$ aralığında f'''nün grafiğini çizin ve TRACE veya ZOOM kullanarak bu üst sınırı iyileştirin

Bulduğunuz üst sınırı M yerine kullanarak, daha iyi bir $|E_T|$ değeri bulun. (a)'da bulduğunuz Yamuklar Kuralı yaklaşımının bu iyileştirilmiş değerden de daha iyi olduğuna dikkat edin.

T **36.** (*Alıştırma 35'in devamı*)

a. $f(x) = x \sin x$ fonksiyonunun dördüncü türevinin

$$f^{(4)}(x) = -4\cos x + x \sin x$$

olduğunu gösterin. TRACE veya ZOOM kullanarak $[0, \pi]$ aralığında $|f^{(4)}|$'ün değerlerinin bir M üst sınırını bulun.

b. (a)'da bulduğunuz M değerini kullanarak $n = 10$ adımlı Simpson Kuralıyla

$$\int_0^{\pi} x \sin x\, dx$$

integralinin değeri hesaplanırken yapılan hatanın büyüklüğü için bir üst sınır bulun.

c. Alıştırma 35'teki tablodaki verileri ve $n = 10$ ile Simpson Kuralını kullanarak $\int_0^{\pi} x \sin x\, dx$'i bulun.

d. (c)'deki sonucunuz ile integralin geçek değeri π arasındaki farkın büyüklüğünü 6 ondalık basamak hassaslıkla bulun. (b)'de bulunan hata değerinin oldukça iyi olduğunu göreceksiniz.

37. $[a, b]$ aralığında sürekli f fonksiyonunun $\int_a^b f(x)\, dx$ integrali için Yamuklar Kuralındaki T toplamının bir Riemann toplamı olduğunu ispat ediniz. (*Yol gösterme:* $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığında $f(c_k) = (f(x_{k-1}, x_k) + f(x_k))/2$ eşitliğini sağlayan bir noktasının bulunduğunu göstermek için Ara Değer Teoremini kullanın.)

38. $[a, b]$ üzerinde sürekli f fonksiyonunun $\int_a^b f(x)\, dx$ integrali için Simpson Kuralındaki S toplamının bir Riemann toplamı olduğunu gösterin. (Alıştırma 37'ye bakın.)

T Sayısal İntegrasyon

Bu bölümün başında bahsettiğimiz gibi, birçok sürekli fonksiyonun belirli integrali Analizin Temel Teoremi ile hesaplanamaz, çünkü ters türevlerinin elemanter formülleri yoktur. Sayısal integrasyon çoğunlukla *temel olmayan integraler* denilen bu integrallerin değerlerinin tahmin edilmesi için pratik bir yol sunar. Hesap makinenizin veya bilgisayarınızın bir sayısal integral hesaplama fonksiyonu varsa, bunu 39–42 alıştırmalarındaki integralleri hesaplamakta kullanın.

39. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\, dx$ — Newton'un araştırmasında ortaya çıkan temel olmayan bir integral.

40. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx$ — Alıştırma 33'deki integral. Sıfırla bölmeyi engellemek için, integrasyona 0 yerine 10^{-6} gibi küçük bir pozitif sayıyla başlayabilirsiniz.

41. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin (x^2)\, dx$ — Işığın kırılmasıyla ilgili bir integral.

42. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 40\sqrt{1 - 0.64 \cos^2 t}\, dt$ — $(x^2/25) + (y^2/9) = 1$ elipsinin uzunluğu

T 43. $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$ integralini göz önüne alın.

a. $n = 10$, 100 ve 1000 için Yamuklar Kuralı yaklaşımlarını bulun.

b. Yazabildiğiniz basamağa kadar hassaslıkta hataları kaydedin.

c. Nasıl bir düzen görüyorsunuz.

d. E_T'nin hata sınırının bu düzen için neler anlattığını açıklayın.

T 44. (*Alıştırma 43'ün devamı*) Alıştırma 43'ü Simpson Kuralı ve E_S ile tekrarlayın.

45. $\int_{-1}^{1} \sin (x^2)\, dx$ integralini göz önüne alın.

a. $f(x) = \sin (x^2)$ için f'''nü bulun.

b. $[-1, 1]$'e $[-3, 3]$ penceresinde $y = f''(x)$'i çizin.

c. $-1 \le x \le 1$ için (b)'deki grafiğin neden $|f''(x)| \le 3$ önerdiğini açıklayın.

d. Bu durumda, Yamuklar Kuralı için hata tahmininin

$$|E_T| \le \frac{(\Delta x)^2}{2}$$

haline geldiğini gösterin.

e. $\Delta x \le 0.1$ ise Yamuklar Kuralında hata büyüklüğünün 0.01 den küçük veya eşit olacağını gösterin.

f. $\Delta x \le 0.1$ olması için n ne kadar büyük olmalıdır?

46. $\int_{-1}^{1} \sin (x^2)\, dx$ integralini göz önüne alın.

a. $f(x) = \sin (x^2)$ için $f^{(4)}$ türevini bulun (Bir BCS'niz varsa cevabınızı kontrol edebilirsiniz).

b. $[-1, 1]$'e $[-30, 10]$ penceresinde $y = f^{(4)}(x)$'ü çizin.

c. $-1 \le x \le 1$ için (b)'deki grafiğin neden $|f^{(4)}(x)| \le 30$ önerdiğini açıklayın.

d. Bu durumda, Simpson Kuralı için hata tahmininin

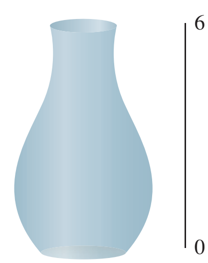
$$|E_S| \le \frac{(\Delta x)^4}{3}$$

haline geldiğini gösterin.

e. $\Delta x \le 0.4$ ise Simpson Kuralında hata büyüklüğünün 0.01 den küçük veya eşit olacağını gösterin.

f. $\Delta x \le 0.4$ olması için n ne kadar büyük olmalıdır?

T 47. Bir vazo Bir çiçek vazosunun hacmini, sadece bir hesap makinesi, bir ip ve birde cetvel kullanarak hesaplamak istiyoruz. Vazonun yüksekliğini 6 inç olarak ölçüyoruz. Sonra, yarım inç aralıklarla vazonun çevresini bulmak için (inç olarak) ipi ve cetveli kullanıyoruz. (Bunları yukarıdan aşağıya vazonun resmine karşı gelecek şekilde listeliyoruz.)



Çevre	
5.4	10.8
4.5	11.6
4.4	11.6
5.1	10.8
6.3	9.0
7.8	6.3
9.4	

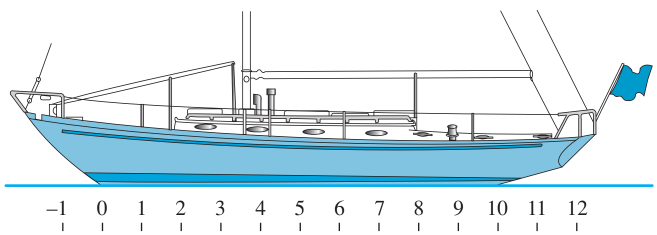
a. Verilen çevrelere karşı gelen dik kesitlerin alanlarını bulun.

b. Vasonun hacmini $[0, 6]$ aralığı üzerinde y'ye göre bir integral olarak ifade edin.

c. Yamuklar Kuralını $n = 12$ ile kullanarak integrale yaklaşımda bulunun.

d. Simpson Kuralını $n = 12$ ile kullanarak integrale yaklaşımda bulunun. Hangi cevabın daha doğru olduğunu düşünüyorsunuz. Cevabınızın nedenini açıklayın.

T **48. Bir yelkenlinin yerdeğiştirmesi** Bir yelkenli tarafından yer değiştirilen suyun hacmini bulmak için ortak uygulama, su çizgisini eşit uzunluklu 10 alt aralığa bölmek, her bölünüş noktasında gövdenin su altındaki bölümünün $A(x)$ dikey kesit alanını ölçmek, sonra da su çizgisinin bir ucundan diğerine $A(x)$'in integralini hesaplamak için Simpson Kuralını kullanmaktır. Aşağıdaki tablo, 0'dan 10'a kadar "İstasyonlar" denen bölünüş noktalarında, şekilde gösterilen *Pipedream* yelkenlisi için alan ölçümlerini listelemektedir. Ortak alt aralık uzunluğu (ardışık istasyonlar arasındaki uzaklık) $\Delta x = 2.54$ ft dir (yaklaşık 2 ft. 6-1/2 inç., imalatçıya uygunluk için seçilmiş).



a. *Pipedream*'in yerdeğiştirdiği hacmi ft. küp hassalığında bulun.

İstasyon	Su altındaki alan ft^2
0	0
1	1.07
2	3.84
3	7.82
4	12.20
5	15.18
6	16.14
7	14.00
8	9.21
9	3.24
10	0

b. Tablodaki figürler 64 lb/ft^3 ağırlığındaki deniz suyu içindir. Pipedream tarafından yer değiştirilen su kaç pounds dur? (Yerdeğiştirme, küçük gemiler için pounds olarak büyük gemiler için ise büyük ton (1 büyük ton = 2240 lb) olarak verilir.) (Veriler *Skene's Elements of Yacht Design* by Francis S. Kinney (Dodd, Mead, 1962.) den.)

c. Prizmatik katsayılar Bir geminin prizmatik katsayısı, yerdeğiştirme hacminin, yüksekliği su çizgisinin uzunluğuna ve tabanı geminin en büyük su altı kesitinin alanına eşit olan bir prizma hacmine oranıdır. En iyi yelkenlilerin prizmatik katsayıları 0.51 ile 0.54 arasında değişir. Su çizgisinin uzunluğu 25.4 ft ve en geniş su altı kesitinin alanı 16.14 ft^2 (6. İstasyonda) olduğuna göre *Pipedream*'in prizmatik katsayısını bulun.

T **49. Elliptic integrals** Eliptik integraller

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

elipsinin uzunluğu, e elipsin dışmerkezliği olmak üzere

$$\text{Uzunluk} = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2\cos^2 t}\, dt,$$

olarak karşımıza çıkar. Bu formüldeki integrale bir *eliptik integral* denir. $e = 0$ veya 1 dışında elemanter değildir.

a. $a = 1$ ve $e = 1/2$ iken elipsin uzunluğunu hesaplamak için, Yamuklar Kuralını $n = 10$ ile kullanın.

b. $f(t) = \sqrt{1 - e^2\cos^2 t}$ 'nin ikinci türevinin mutlak değerinin 1'den küçük olduğunu kullanarak (a) daki hesabınızdaki hata için bir üst sınır bulun.

T **50.** $y = \sin x$ eğrisinin bir yayının uzunluğu

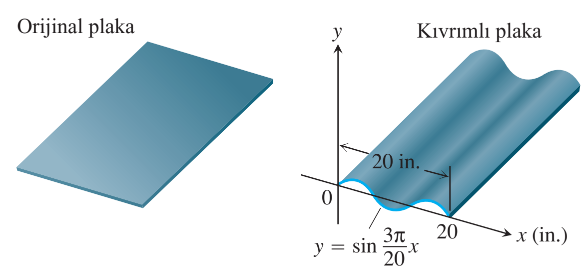
$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx.$$

ile verilir. Simpson Kuralını $n = 8$ ile kullanarak L'yi bulun.

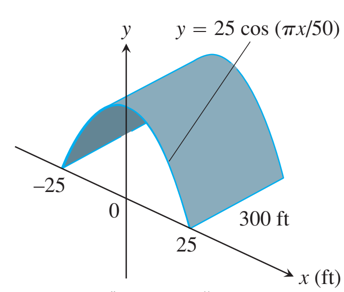
T **51.** Metal üretim şirketiniz yanda gösterilen gibi kıvrımlı demir çatı kaplaması plakaları yapmak için bir anlaşma yapmak üzeredir. Kıvrımlı plakaların dik kesitleri

$$y = \sin\frac{3\pi}{20}x, \quad 0 \le x \le 20 \text{ in}.$$

eğrisine uymak zorundadır. Eğer çatı kaplamaları düz plakalardan malzmeyi germeyecek bir işlemle sıkıştırılarak yapılacaksa, orijinal malzemenin genişliği ne olmalıdır? Bulmak için, sinüs eğrisine 2 ondalık basamak hassaslıkla yaklaşımda bulunmak üzere sayısal integrasyon kullanın.



T **52.** Mühendislik firmanız aşağıda görülen tüneli inşa etmek için teklif vermektedir. Tünel 300 ft uzunluğunda ve tabanda 50 ft genişliğindedir. Dik kesiti $y = 25\cos(\pi x/50)$ eğrisinin yaylarından birinin şeklindedir. Tamamlandığında, tünelin iç yüzeyine (yol hariç) uygulaması 1.75 \$/ft olan bir su geçirmez kaplama yapılacaktır. Kaplamayı uygulamanın masrafı nedir? (*İpucu*: Kosinüs eğrisinin uzunluğunu bulmak için sayısal integrasyon kullanın.)



Yüzey Alanı

53–56 alıştırmalarında verilen eğrilerin x-ekseni etrafında döndürülmeleri ile üretilen dönel cisimlerin yüzey alanlarını iki ondalık basamağa kadar.

53. $y = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi$

54. $y = x^2/4, \quad 0 \le x \le 2$

55. $y = x + \sin 2x, \quad -2\pi/3 \le x \le 2\pi/3$ (Bölüm 4.4, Alıştırma 5'teki eğri)

56. $y = \dfrac{x}{12}\sqrt{36 - x^2},\ 0 \le x \le 6$ (Bölüm 6.1, Alıştırma 56'daki çekül yüzeyi)

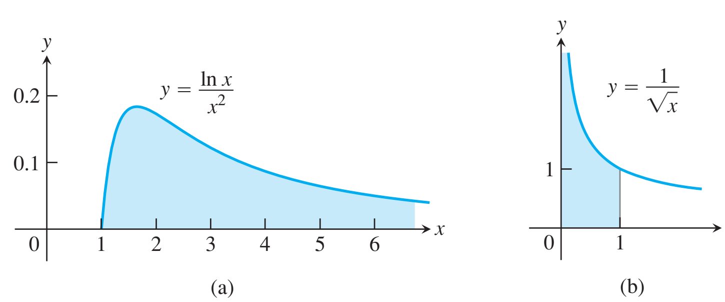
Fonksiyon Değerlerini Tahmin Etmek

57. $\sin^{-1} 0.6 = \displaystyle\int_0^{0.6} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ değerini hesaplamak için sayısal integrasyon kullanın. Referans için, $\sin^{-1} 0.6 = 0.64350$.

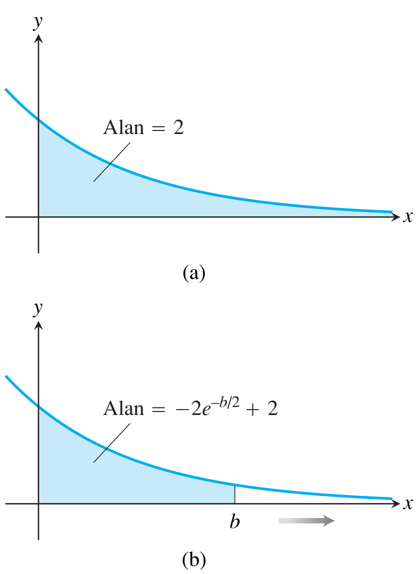
58. $\pi = 4\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx$ değerini hesaplamak için sayısal integrasyon kullanın.

8.8 Genelleştirilmiş İntegraller

Şimdiye kadar, belirli integrallerimizin iki özelliği olmasını istedik. Birincisi, $[a, b]$ integrasyon aralığının sonlu olmasıydı. İkincisi ise, bu aralıkta intengrandın değer aralığının sonlu olmasıydı. Ancak pratikte, çoğunlukla bu koşulların birini veya ikisini de sağlamayan integrallerle karşılaşırız. Sonsuz integral aralığına bir örnek olarak, $x = 1$'den $x = \infty$'a kadar $y = (\ln x)/x^2$ eğrisinin altında kalan alan integralini ele alabiliriz (Şekil 8.17a). Sonsuz değer aralığına bir örnek olarak ise, $x = 0$'dan $x = 1$'e kadar $y = 1/\sqrt{x}$ eğrisinin altındaki alan integralini düşünebiliriz (Şekil 8.17b). Her iki durumdaki integrallere de *genelleştirilmiş integraller* denir ve limit olarak hesaplanırlar. Bölüm 11'de, bazı sonsuz serilerin yakınsaklıklarının incelenmesinde, genelleştirilmiş integrallerin önemli bir rol oynadıklarını göreceğiz.



ŞEKİL 8.17 Bu sonsuz eğrilerin altındaki alanlar sonlu mudur?



ŞEKİL 8.18 (a) Birinci bölgede $y = e^{-x/2}$ eğrisinin altındaki alan (b) birinci tipte bir genelleştirilmiş integraldir.

Sonsuz İntegrasyon Sınırları

Birinci bölgede $y = e^{-x/2}$ eğrisi altında kalan sonsuz bölgeyi göz önüne alın (Şekil 8.18a). Bu bölgenin alanının sonsuz olduğunu düşünebilirsiniz, fakat bu alana karşılık getirilecek değerin sonlu olduğunu göreceğiz. Bu alana bir değerin nasıl karşılık getirildiği aşağıdadır. Önce bölgenin sağdan $x = b$ ile sınırlı kısmının alanı $A(b)$'yi bulun (Şekil 8.18b)

$$A(b) = \int_0^b e^{-x/2}\,dx = -2e^{-x/2}\Big]_0^b = -2e^{-b/2} + 2$$

Sonra, $b \to \infty$ iken $A(b)$'nin limitini bulun.

$$\lim_{b\to\infty} A(b) = \lim_{b\to\infty} (-2e^{-b/2} + 2) = 2$$

0'dan ∞'a kadar eğrinin altındaki alana karşılık getireceğimiz değer

$$\int_0^{\infty} e^{-x/2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-x/2}\,dx = 2$$

dir.

TANIM I. Tip Genelleştirilmiş İntegraller

İntegrasyon sınırları sonsuz olan integrallere I. Tip **genelleştirilmiş integraller** denir.

1. $f(x)$ fonksiyonu $[a, \infty)$ aralığında sürekliyse,

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^{b} f(x)\,dx.$$

2. $f(x)$ fonksiyonu $(-\infty, b]$ aralığında sürekliyse,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{b} f(x)\,dx$$

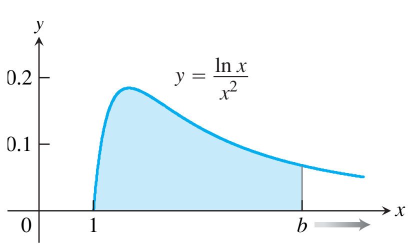
3. $f(x)$ fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ aralığında sürekliyse, c bir reel sayı olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx,$$

Her bir durumda, limit sonluysa genelleştirilmiş integralin **yakınsadığını** ve bu limit değerinin genelleştirilmiş integralin **değeri** olduğunu söyleriz. Eğer limit yoksa, genelleştirilmiş integral **ıraksar**.

Tanımın 3. şıkkındaki c'nin seçiminin önemli olmadığı gösterilebilir. Herhangi uygun bir seçimle $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$'i hesaplayabilir veya yakınsaklığını veya ıraksaklığını belirleyebiliriz.

Tanımdaki herbir integral, integrasyon aralığı üzerinde $f \geq 0$ ise bir alan olarak yorumlanabilir. Örneğin, Şekil 8.18'deki genelleştirilmiş integrali bir alan olarak yorumladık. Söz konusu durumda alanın değeri sonlu ve 2 dir. $f \geq 0$ ise ve genelleştirilmiş integral ıraksarsa eğrinin altındaki alan **sonsuzdur** deriz.



ŞEKİL 8.19 Bu eğrinin altındaki alan bir genelleştirilmiş integraldir.

ÖRNEK 1 $[1, \infty)$ Üzerinde Bir Genelleştirilmiş İntegral Hesaplamak

$x = 1$'den $x = \infty$'a kadar $y = (\ln x)/x^2$ eğrisinin altındaki alan sonlu mudur? Sonluysa, nedir?

Çözüm $x = 1$'den $x = b$'ye kadar eğrinin altında kalan alanı bulur ve $b \to \infty$ iken limitini inceleriz. Limit sonluysa, bunu sonsuz eğrinin altındaki alan olarak kabul ederiz (Şekil 8.19). 1'den b'ye kadar alan şöyledir:

$$\int_1^{b} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[(\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^{b} - \int_1^{b}\left(-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$u = \ln x,\ dv = dx/x^2,$ $du = dx/x,\ v = -1/x.$ ile kısmi integrasyon.

$$= -\frac{\ln b}{b} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^{b}$$

$$= -\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1.$$

$b \to \infty$ iken bölgenin alanı ise

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1\right]$$

$$= -\left[\lim_{b\to\infty} \frac{\ln b}{b}\right] - 0 + 1$$

$$= -\left[\lim_{b\to\infty} \frac{1/b}{1}\right] + 1 = 0 + 1 = 1 \qquad \text{l'Hôpital's Kuralı}$$

olarak bulunur. Böylece, genelleştirilmiş integral yakınsaktır ve değeri 1 dir. ■

ÖRNEK 2 $(-\infty, \infty)$ Üzerinde Bir İntegral Hesaplamak

Aşağıdaki integrali hesaplayın

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Çözüm Tanıma göre (3. Kısım)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

yazabiliriz. Şimdi, eşitliğin sağ tarafındaki her iki genelleştirilmiş integrali hesaplayalım.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \tan^{-1} x \Big]_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty} (\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} a) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \tan^{-1} x \Big]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} (\tan^{-1} b - \tan^{-1} 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

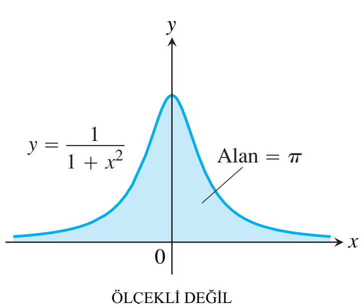
Böylece,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

bulunur. $1/(1+x^2) > 0$ olduğundan genelleştirilmiş integral, eğrinin altında ve x-ekseninin üstündeki (sonlu) alan olarak yorumlanabilir (Şekil 8,20). ■

TARİHSEL BIYOGRAFİ

Lejeune Dirichlet
(1805–1859)



ŞEKİL 8.20 Bu eğrinin altındaki alan sonludur (Örnek 2).

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ İntegrali

$y = 1/x$ fonksiyonu, integrandı $y = 1/x^p$ formunda olan yakınsak ve ıraksak genelleştirilmiş integraller arasındaki sınırdır. Aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi, genelleştirilmiş integral, $p > 1$ ise yakınsak ve $p \leq 1$ ise ıraksaktır.

ÖRNEK 3 Yakınsaklığı Belirlemek

p'nin hangi değerleri için $\int_1^{\infty} dx/x^p$ integrali yakınsar? İntegral yakınsak olduğunda değeri nedir?

Çözüm $p \neq 1$

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\bigg]_1^b = \frac{1}{1-p}(b^{-p+1} - 1) = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right)$$

dir. Böylece,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right)\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p < 1 \end{cases}$$

olur, çünkü

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^{p-1}} = \begin{cases} 0, & p > 1 \\ \infty, & p < 1 \end{cases}$$

dir.

Bu nedenle, $p > 1$ ise integral $1/(p-1)$ değerine yakınsar ve $p < 1$ ise ıraksar.

$p = 1$ ise integral yine ıraksaktır:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$$

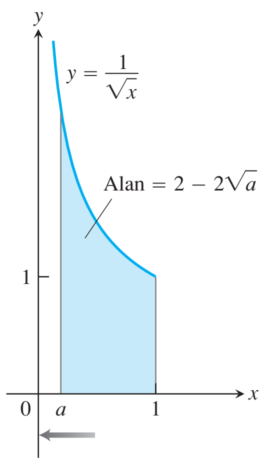
$$= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln x\bigg]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1) = \infty$$ ■

Dikey Asimptotu Bulunan İntegrandlar

Genelleştirilmiş integrallerin başka bir tipi, integrandın, bir integrasyon sınırında veya integrasyon sınırları arasındaki bir noktada bir dikey asimptotu var olduğunda—bir sınırsız süreksizlik—ortaya çıkar. İntegrasyon aralığı üzerinde f integrandı pozitif ise genelleştirilmiş integrali yine, integrasyon sınırları arasında f'nin grafiğinin altında ve x-ekseni üzerindeki alan olarak yorumlayabiliriz.



ŞEKİL 8.21 Bu eğrinin altındaki alan

$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = 2$$

dir. İkinci tip bir genelleştirilmiş integral.

Birinci bölgede, $x = 0$'dan $x = 1$'e kadar $y = 1/\sqrt{x}$ eğrisi altında kalan bölgeyi düşünün (Şekil 8.17b). Önce a'dan 1'e kadar olan kısmının alanını bulalım (Şekil 8.21)

$$\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big]_a^1 = 2 - 2\sqrt{a}$$

Sonra, $a \to 0^+$ iken bu alanın limitini buluruz:

$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+}\left(2 - 2\sqrt{a}\right) = 2$$

Eğrinin altında, 0'dan 1'e kadar olan alan sonludur ve

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

dir.

TANIM II. Tip Genelleştirilmiş İntegraller

İntegrasyon aralığının bir noktasında sonsuz olan fonksiyonların integrallerine **II Tip genelleştirilmiş integraller** denir.

1. $f(x)$ fonksiyonu $(a, b]$ aralığında sürekli ve a'da süreksiz ise,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx.$$

2. $f(x)$ fonksiyonu $[a, b)$ aralığında sürekli ve b'de süreksiz ise,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx.$$

3. $f(x)$ fonksiyonu bir c, $a < c < b$, noktasında süreksiz ve $[a, c) \cup (c, b]$ üzerinde sürekli ise,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

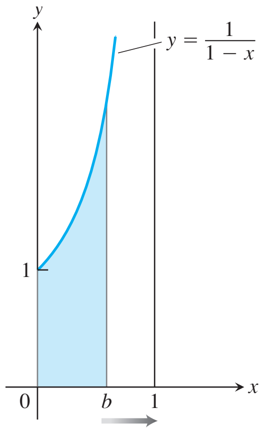
Her bir durumda, limit sonluysa genelleştirilmiş integralin **yakınsadığını** ve bu limit değerinin genelleştirilmiş integralin **değeri** olduğunu söyleriz. Eğer limit yoksa, genelleştirilmiş integral **ıraksar**.

Tanımın 3. şıkkında, eşitliğin sağındaki *her iki* integral de yakınsak ise sol taraftaki integral yakınsak, aksi halde ıraksaktır.

ÖRNEK 4 Iraksak Bir Genelleştirilmiş İntegral

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$$

İntegralinin yakınsaklığını inceleyin.



ŞEKİL 8.22 Limit yoktur:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-x}\right) dx = \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{1}{1-x}\, dx = \infty$$

[0, 1) için eğrinin altında ve x-ekseninin üstünde kalan alan bir reel sayı değildir (Örnek 4).

Çözüm $f(x) = 1/(1-x)$ integrandı [0, 1) üzerinde süreklidir fakat $x = 1$'de süreksizdir ve $x \to 1^-$ iken sonsuz olmaktadır (Şekil 8.22).

$$\lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{1}{1-x}\, dx = \lim_{b\to 1^-} \Big[-\ln|1-x|\Big]_0^b$$

$$= \lim_{b\to 1^-} [-\ln(1-b) + 0] = \infty$$

olarak hesaplarız. Limit sonsuzdur, dolayısıyla integral ıraksar. ■

ÖRNEK 5 Bir İç Noktada Dikey Asimptot

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

integralini hesaplayın.

Çözüm İntegrandın $x = 1$'de bir dikey asimptotu vardır ve [0, 1) ile (1, 3] aralıklarında süreklidir (Şekil 8.23). Yukarıdaki tanımın 3. kısmına göre,

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

dir. Şimdi bu eşitliğin sağ tarafındaki her iki integrali hesaplayalım.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$= \lim_{b\to 1^-} 3(x-1)^{1/3}\Big]_0^b$$

$$= \lim_{b\to 1^-} [3(b-1)^{1/3} + 3] = 3$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c\to 1^+} \int_c^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

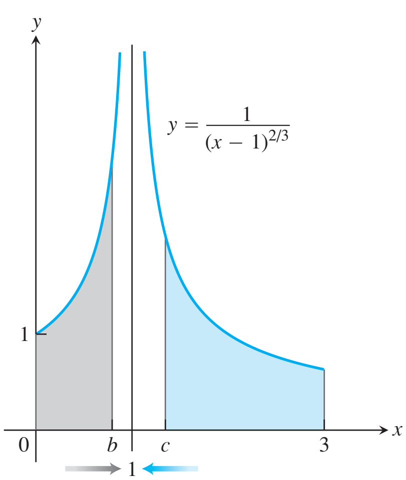
$$= \lim_{c\to 1^+} 3(x-1)^{1/3}\Big]_c^3$$

$$= \lim_{c\to 1^+} \left[3(3-1)^{1/3} - 3(c-1)^{1/3}\right] = 3\sqrt[3]{2}$$

Buradan

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3 + 3\sqrt[3]{2}$$

sonucunu çıkarırız. ■



ŞEKİL 8.23 Örnek 5

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\, dx = 3 + 3\sqrt[3]{2}$$

İntegralinin yakınsaklığını göstermektedir. Dolayısıyla, eğrinin altındaki alan vardır (bir reel sayıdır)

ÖRNEK 6 Yakınsak Bir Genelleştirilmiş İntegral

Aşağıdaki integrali hesaplayın.

$$\int_2^\infty \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\, dx$$

Çözüm

$$\int_2^\infty \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_2^b \left(\frac{2}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+1}\right)dx \qquad \text{Kısmi kesirler}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\Big[2\ln(x-1) - \ln(x^2+1) - \tan^{-1}x\Big]_2^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} - \tan^{-1}x\right]_2^b \qquad \text{Logaritmaları birleştirin.}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\ln\left(\frac{(b-1)^2}{b^2+1}\right) - \tan^{-1}b\right] - \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \tan^{-1}2$$

$$= 0 - \frac{\pi}{2} + \ln 5 + \tan^{-1}2 \approx 1.1458$$

Ters türevde logaritmaları $b \to \infty$ iken limiti hesaplamadan *önce* birleştirdiğimize dikkat edin. Böyle yapmasaydık,

$$\lim_{b\to\infty}\left(2\ln(b-1) - \ln(b^2+1)\right) = \infty - \infty$$

belirsiz formuyla karşılaşırdık. Elbette, belirsiz formdan kurtulmanın yolu logaritmaları birleştirmektir, o yüzden sonuç olarak aynı yanıtı bulacaktık. ■

Bilgisayar Cebir Sistemleri birçok yakınsak genelleştirilmiş integrali hesaplayabilir. Örnek 6'daki integrali Maple ile hesaplamak için

```
> f:= (x + 3)/((x – 1) * (x^2 + 1))
```

girin. Sonra,

```
> int(f, x = 2..infintity)
```

integral komutunu kullanın. Maple'in cevabı

$$-\frac{1}{2}\pi + \ln(5) + \arctan(2)$$

olur. Sayısal bir değer elde etmek için **evalf** hesaplama komutunu kullanın ve basamak sayısını

```
> evalf(%, 6)
```

şeklinde belirleyin. % sembolü bilgisayara ekrandaki son ifadeyi, bu durumda $(-1/2\pi) + \ln(5) + \arctan(2)$, hesaplaması için talimat verir. Maple'in cevabı 1.14579 olur.

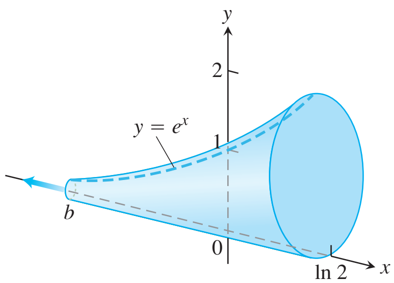
Mathematica kullanarak,

```
In [1]:= Integrate [(x + 3)/((x – 1)(x^2 + 1)), {x, 2, Infinity}]
```

girmek,

$$\textit{Out [1]=}\ \frac{-\text{Pi}}{2} + \text{ArcTan}[2] + \text{Log}[5]$$

cevabını verir. Altı basamaklı sayısal bir sonuç elde etmek için "N[%,6]" komutunu girin; burada da sonuç 1.14579 olur.



ŞEKİL 8.24 The calculation in Example 7 shows that this infinite horn has a finite volume.

ÖRNEK 7 Sonsuz Bir Katı Cismin Hacmini Bulmak

Şekil 8.24'teki katı borunun x-eksenine dik kesitleri, çapları x-ekseninden $y = e^x$, $-\infty < x \le \ln 2$, eğrisine kadar uzanan dairesel disklerdir. Borunun hacmini bulun.

Çözüm Tipik bir dik kesitin alanı

$$A(x) = \pi(\text{yarıçap})^2 = \pi\left(\frac{1}{2}y\right)^2 = \frac{\pi}{4}e^{2x}.$$

olarak bulunur. Borunun hacmini $b \to -\infty$ iken b'den ln 2'ye kadar olan kısmın hacmi olarak tanımlarız. Bölüm 6.1'de olduğu gibi (dilimleme yöntemi), bu kısmın hacmi

$$V = \int_b^{\ln 2} A(x)\,dx = \int_b^{\ln 2} \frac{\pi}{4}e^{2x}\,dx = \frac{\pi}{8}e^{2x}\Big]_b^{\ln 2}$$

$$= \frac{\pi}{8}(e^{\ln 4} - e^{2b}) = \frac{\pi}{8}(4 - e^{2b}).$$

bulunur. $b \to -\infty$ iken $e^{2b} \to 0$ ve $V \to (\pi/8)(4 - 0) = \pi/2$ olur. Borunun hacmi $\pi/2$'dir. ■

ÖRNEK 8 Yanlış Bir Hesaplama

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$$

integralini hesaplayın.

Çözüm İntegrandın, integrasyon aralığı içindeki $x = 1$ de süreksiz olduğunu fark etmediğimizi varsayın. İntegrali sıradan bir integral olarak hesaplarsak

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big]_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

buluruz. Bu sonuç *yanlıştır* çünkü integral bir genelleştirilmiş integraldir. Doğru hesaplama limitler kullanır:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

dir. Burada

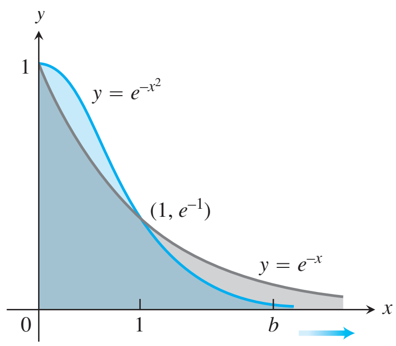
$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{dx}{x-1} = \lim_{b\to 1^-} \ln|x-1|\Big]_0^b$$

$$= \lim_{b\to 1^-}(\ln|b-1| - \ln|-1|)$$

$$= \lim_{b\to 1^-}\ln(1-b) = -\infty \qquad b \to 1^- \text{ iken } 1-b \to 0^+$$

dur. $\int_0^1 dx/(x-1)$ ıraksak olduğundan, $\int_0^3 dx/(x-1)$ integrali ıraksaktır. ■

Örnek 8, bir genelleştirilmiş integrali sıradan bir integralle karıştırırsak nelerin yanlış olabileceğini göstermektedir. Bir $\int_a^b f(x)\,dx$ integrali ile karşılaştığınızda $[a, b]$ üzerinde f fonksiyonunu incelemeniz ve sonra integralin genelleştirilmiş olup olmadığına karar vermeniz gerekir. f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ise sıradan bir integraldir.



ŞEKİL 8.25 $x > 1$ için e^{-x^2}'nin grafiği e^{-x}'in grafiğinin altında kalır (Örnek 9).

Yakınsaklık ve Iraksaklık Testleri

Bir genelleştirilmiş integral doğrudan hesaplanamazsa yakınsak veya ıraksak olup olmadığını belirlemeye çalışırız. İntegral ıraksak ise yapılacak bir şey yoktur. İntegral yakınsak ise değerine yaklaşımda bulunmak için sayısal yöntemler kullanabiliriz. Yakınsaklık ve ıraksaklık için temel testler Doğrudan Karşılaştırma Testi ve Limit Karşılaştırma Testi dir.

ÖRNEK 9 Yakınsaklığı Araştırmak

$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ integrali yakınsak mıdır?

Çözüm Tanımdan

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x^2}\,dx$$

olur. İkinci integrali doğrudan hesaplayamayız, çünkü temel değildir. Fakat $b \to \infty$ iken limitinin sonlu olduğunu gösterebiliriz. $\int_1^b e^{-x^2}\,dx$'in b'nin artan bir fonksiyonu olduğunu biliyoruz. Bu yüzden, $b \to \infty$ iken ya sonsuz olur ya da sonlu bir limiti vardır. Sonsuz olmaz: Her $x \geq 1$ değeri için, $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ olur (Şekil 8.25), böylece

$$\int_1^b e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^b e^{-x}\,dx = -e^{-b} + e^{-1} < e^{-1} \approx 0.36788$$

olur. Böylece

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x^2}\,dx$$

integrali belirli bir sonlu değere yakınsar. 0.37'den daha küçük olduğu dışında, bu değer hakkında hiçbir şey bilmiyoruz. Burada, Ek 4'te incelenen reel sayıların tamlık özelliğine güveniyoruz. ■

Örnek 9'daki e^{-x^2} ve e^{-x} karşılaştırılması aşağıdaki testin bir özel halidir.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Karl Weierstrass
(1815–1897)

TEOREM 1 Doğrudan Karşılaştırma Testi

f ve g fonksiyonları [a, ∞) aralığında sürekli olsunlar ve $x \geq a$ için $0 \leq f(x) \leq g(x)$ olsun.

1. $\int_a^\infty f(x)\,dx$ yakınsarsa $\int_a^\infty g(x)\,dx$ de yakınsar.

2. $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ıraksarsa $\int_a^\infty f(x)\,dx$ de ıraksar.

Teorem 1'i kuran düşüncenin arkasındaki akıl yürütme Örnek 9'dakine benzerdir.

$x \geq a$ için $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ise

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx, \qquad b > a$$

dir.

Buradan, Örnek 9'da olduğu gibi

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ yakınsarsa } \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ de yakınsar}$$

sonucu çıkarılabilir.
Bunu tersine çevirmek şunu söyler:

$$\int_a^\infty g(x)\,dx \text{ ıraksarsa } \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ de ıraksar.}$$

ÖRNEK 10 Doğrudan Karşılaştırma Testini Kullanmak

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ yakınsar, çünkü

$[1, \infty)$ aralığında $\dfrac{\sin^2 x}{x^2} \le \dfrac{1}{x^2}$ dir ve $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ yakınsar. Örnek 3

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2 - 0.1}}\,dx$ ıraksar, çünkü

$[1, \infty)$ aralığında $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-0.1}} \ge \dfrac{1}{x}$ dir ve $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ ıraksar. Örnek 3

TEOREM 2 Limit Karşılaştırma Testi

Pozitif f ve g fonksiyonları $[a, \infty)$ aralığında sürekli iseler ve

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \qquad 0 < L < \infty$$

ise

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \qquad \text{ve} \qquad \int_a^\infty g(x)\,dx$$

integrallerinin ikisi de yakınsar veya ikisi de ıraksar.

Teorem 2'nin bir ispatı ileri analizde verilmektedir.

İki fonksiyonun a'dan ∞'a genelleştirilmiş integralleri yakınsak olmalarına rağmen bu, aşağıdaki örneğin de belirttiği gibi, integrallerinin değerlerinin aynı olacağını göstermez.

ÖRNEK 11 Limit Karşılaştırma Testini Kullanmak

$\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$ ile karşılaştırarak

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

integralinin yakınsadığını gösterin. İki integralin değerlerini bulun ve karşılaştırın.

Çözüm $f(x) = 1/x^2$ ve $g(x) = 1/(1+x^2)$ fonksiyonları $[1, \infty)$ üzerinde pozitif ve süreklidirler. Ayrıca,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x^2}{1/(1+x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^2}+1\right) = 0+1 = 1,$$

pozitif sonlu bir limittir (Şekil 8.26). Bu nedenle $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ yakınsar, çünkü $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ yakınsar.

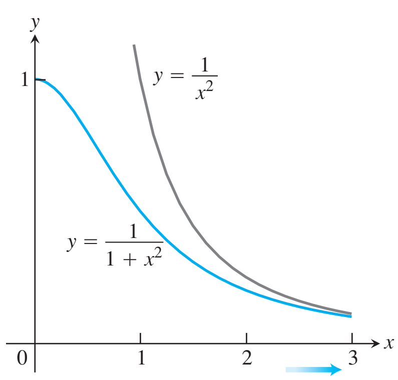
Ancak integraller farklı değerlere yakınsarlar.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2-1} = 1 \qquad \text{Örnek 3}$$

ve

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{b\to\infty} [\tan^{-1} b - \tan^{-1} 1] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$ ■



ŞEKİL 8.26 Örnek 11'deki fonksiyonlar

ÖRNEK 12 Limit Karşılaştırma Testini Kullanmak

$$\int_1^\infty \frac{3}{e^x+5}\,dx$$

integralin yakınsadığını gösterin

Çözüm Örnek 9'dan $\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \int_1^\infty (1/e^x)\,dx$'in yakınsadığını görmek kolaydır.

Üstelik,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1/e^x}{3/(e^x+5)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+5}{3e^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{3}+\frac{5}{3e^x}\right) = \frac{1}{3},$$

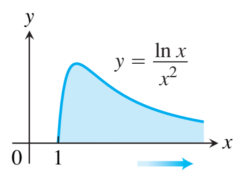
pozitif sonlu bir limittir. Genelleştirilmiş integralin yakınsaklığı söz konusu olduğu sürece $3/(e^x+5)$ fonksiyonu $1/e^x$ gibi davranır. ■

Bu Bölümde Tartışılan Genelleştirilmiş İntegral Tipleri

SONSUZ İNTEGRASYON SINIRLARI: I. TIP

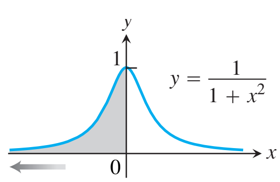
1. Üst sınır

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$



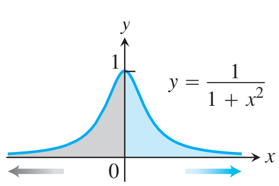
2. Alt sınır

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1 + x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1 + x^2}$$



3. Her iki sınır

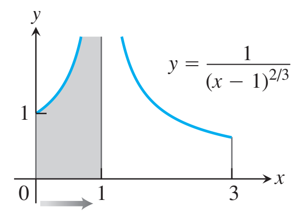
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \lim_{b\to-\infty} \int_b^0 \frac{dx}{1 + x^2} + \lim_{c\to\infty} \int_0^c \frac{dx}{1 + x^2}$$



İNTEGRAND SONSUZ OLUR: II. TIP

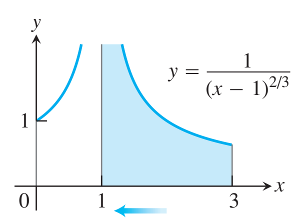
4. Üst uç nokta

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



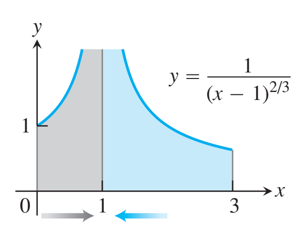
5. Alt uç nokta

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{d\to1^+} \int_d^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



6. İç nokta

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



ALIŞTIRMALAR 8.8

Genelleştirilmiş İntegralleri Hesaplamak

1–34 alıştırmalarındaki integralleri tablo kullanmadan hesaplayın.

1. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

2. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1.001}}$

3. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

4. $\int_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

5. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{2/3}}$

6. $\int_{-8}^{1} \frac{dx}{x^{1/3}}$

7. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

8. $\int_0^{1} \frac{dr}{r^{0.999}}$

9. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{2\,dx}{x^2-1}$

10. $\int_{-\infty}^{2} \frac{2\,dx}{x^2+4}$

11. $\int_2^{\infty} \frac{2}{v^2-v}\,dv$

12. $\int_2^{\infty} \frac{2\,dt}{t^2-1}$

13. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}$

14. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4)^{3/2}}$

15. $\int_0^{1} \frac{\theta+1}{\sqrt{\theta^2+2\theta}}\,d\theta$

16. $\int_0^{2} \frac{s+1}{\sqrt{4-s^2}}\,ds$

17. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

18. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$

19. $\int_0^{\infty} \frac{dv}{(1+v^2)(1+\tan^{-1} v)}$

20. $\int_0^{\infty} \frac{16\tan^{-1} x}{1+x^2}\,dx$

21. $\int_{-\infty}^{0} \theta e^{\theta}\,d\theta$

22. $\int_0^{\infty} 2e^{-\theta}\sin\theta\,d\theta$

23. $\int_{-\infty}^{0} e^{-|x|}\,dx$

24. $\int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2}\,dx$

25. $\int_0^{1} x\ln x\,dx$

26. $\int_0^{1} (-\ln x)\,dx$

27. $\int_0^{2} \frac{ds}{\sqrt{4-s^2}}$

28. $\int_0^{1} \frac{4r\,dr}{\sqrt{1-r^4}}$

29. $\int_1^{2} \frac{ds}{s\sqrt{s^2-1}}$

30. $\int_2^{4} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-4}}$

31. $\int_{-1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$

32. $\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$

33. $\int_{-1}^{\infty} \frac{d\theta}{\theta^2+5\theta+6}$

34. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

Yakınsaklığı Test Etmek

35–64 alıştırmalarında, integrasyon, Doğrudan Karşılaştırma Testi ve Limit Karşılaştırma Testi kullanarak integrallerin yakınsaklığını test edin. Birden fazla yöntem uygulanabiliyorsa, istediğinizi kullanın.

35. $\int_0^{\pi/2} \tan\theta\,d\theta$

36. $\int_0^{\pi/2} \cot\theta\,d\theta$

37. $\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{\pi-\theta}}$

38. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta\,d\theta}{(\pi-2\theta)^{1/3}}$

39. $\int_0^{\ln 2} x^{-2}e^{-1/x}\,dx$

40. $\int_0^{1} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

41. $\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t}+\sin t}$

42. $\int_0^{1} \frac{dt}{t-\sin t}$ (*İpucu:* $t \ge 0$ için $t \ge \sin t$)

43. $\int_0^{2} \frac{dx}{1-x^2}$

44. $\int_0^{2} \frac{dx}{1-x}$

45. $\int_{-1}^{1} \ln|x|\,dx$

46. $\int_{-1}^{1} -x\ln|x|\,dx$

47. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$

48. $\int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$

49. $\int_2^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{v-1}}$

50. $\int_0^{\infty} \frac{d\theta}{1+e^{\theta}}$

51. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$

52. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

53. $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}\,dx$

54. $\int_2^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}$

55. $\int_{\pi}^{\infty} \frac{2+\cos x}{x}\,dx$

56. $\int_{\pi}^{\infty} \frac{1+\sin x}{x^2}\,dx$

57. $\int_4^{\infty} \frac{2\,dt}{t^{3/2}-1}$

58. $\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x}\,dx$

59. $\int_1^{\infty} \frac{e^x}{x}\,dx$

60. $\int_{e^e}^{\infty} \ln(\ln x)\,dx$

61. $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-x}}\,dx$

62. $\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x-2^x}\,dx$

63. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$

64. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

Teori ve Örnekler

65. Her integralin yakınsak olduğu p değerini bulun.

a. $\int_1^{2} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ **b.** $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$

66. **$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, $\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} f(x)\,dx$'e eşit olmayabilir.**

$$\int_0^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$$

integralinin ıraksadığını ve bundan dolayı

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$$

integralinin de ıraksadığını gösterin. Sonra

$$\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}\frac{2x\,dx}{x^2+1}=0$$

olduğunu gösterin.

67–70 alıştırmaları birinci dörtte bir bölgedeki $y = e^{-x}$ eğrisi ve x-ekseni arasında kalan sonsuz bölgeyle ilgilidir.

67. Bölgenin alanını bulun.

68. Bölgenin kütle merkezini bulun.

69. Bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen cismin hacmini bulun.

70. Bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen cismin hacmini bulun.

71. $x = 0$'dan $x = \pi/2$'ye kadar $y = \sec x$ ve $y = \tan x$ eğrilerinin arasında kalan bölgenin alanını bulun.

72. Alıştırma 71'deki bölge x-ekseni etrafında döndürülerek bir cisim üretiliyor.

a. Cismin hacmini bulun.

b. Cismin iç ve dış yüzeylerinin alanlarının sonsuz olduğunu gösterin.

73. Tanım aralığı sonsuz olan yakınsak bir genelleştirilmiş integralin değerini tahmin etme.

a.
$$\int_{3}^{\infty}e^{-3x}\,dx=\frac{1}{3}e^{-9}<0.000042$$

olduğunu ve dolayısıyla $\int_3^\infty e^{-x^2}\,dx < 0.000042$ olduğunu gösterin. Bunun, $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ yerine $\int_0^3 e^{-x^2}\,dx$ yazmanın neden 0.000042'den daha büyük bir hata değeri vermeyeceği anlamına geldiğini açıklayın.

T **b.** $\int_0^3 e^{-x^2}\,dx$'i sayısal olarak hesaplayın.

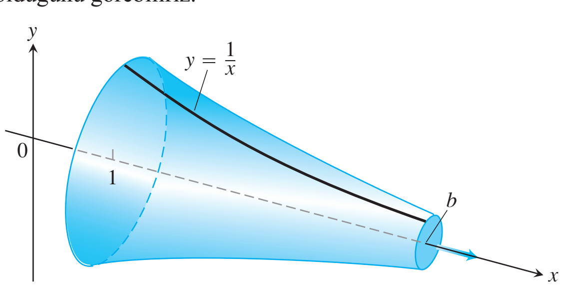
74. Sonsuz boya kabı veya Gabriel'in borusu Örnek 3'te gösterildiği gibi, $\int_1^\infty (dx/x)$ integrali ıraksar. Bu aynı zamanda, $y = 1/x$, $1 \le x$, eğrisinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen dönel cismin *yüzey alanını* ölçen

$$\int_{1}^{\infty}2\pi\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx$$

integralinin de ıraksadığını gösterir. İki integrali karşılaştırarak, her sonlu $b > 1$ sayısı için

$$\int_{1}^{b}2\pi\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx>2\pi\int_{1}^{b}\frac{1}{x}\,dx$$

olduğunu görebiliriz.



Ancak, cismin *hacmini* veren

$$\int_{1}^{\infty}\pi\left(\frac{1}{x}\right)^2dx$$

integrali yakınsar. **(a)** İntegrali hesaplayın. **(b)** Bu dönel cisim bazen kendi içini boyayacak kadar boya alamayan bir kap olarak tanımlanır. Bir an için bunu düşünün. Sağduyu sonlu miktarda boyanın sonsuz bir yüzeyi boyayamayacağını söyler. Fakat boruyu boyayla doldurursak (sonlu bir miktar), sonsuz bir yüzeyi kaplamış oluruz. Bu açık tezatı açıklayın.

75. Sinüs-integral fonksiyonu *sinüs-integral* fonksiyonu denen

$$\text{Si}(x)=\int_{0}^{x}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

integralinin optikte önemli uygulamaları vardır.

a. $t > 0$ için $(\sin t)/t$'yi çizin. Si fonksiyonu her yerde artan yada azalan mıdır? $x > 0$ için $\text{Si}(x) = 0$ olacağını düşünürmüsünüz?
T Si (x)fonksiyonunu $0 \le x \le 25$ için çizerek cevabınızı kontrol edin.

b. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ 'nin yakınsaklığını inceleyin. Yakınsak ise değeri nedir?

76. Hata (error) fonksiyonu *Hata fonksiyonu* denen

$$\text{erf}(x)=\int_{0}^{x}\frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\,dt$$

fonksiyonunun olasılık ve istatistikte önemli uygulamaları vardır.

a. $0 \le x \le 25$ için hata fonksiyonunu çizin.

b. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\,dt$ 'nin yakınsaklığını inceleyin. Yakınsak ise değeri ne olarak gözüküyor? Bölüm 15.3 Alıştırma 37 de
T tahmininizin nasıl doğrulanacağını göreceksiniz.

77. Normal olasılık dağılım fonksiyonu

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

fonksiyonuna *normal olasılık yoğunluk fonksiyonu* denir. burada μ ortalama ve σ da standart sapma dır. μ, dağılımın merkezinin neresi olduğunu söyler. σ'da ortalamanın etrafındaki "dağılma"yı ölçer.

Olasılık teorisinden

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1$$

olduğu biliniyor. Aşağıdakilerde $\mu = 0$ ve $\sigma = 1$ olsun.

a. f'nin grafiğini çizin. f'nin artan olduğu aralıkları, f'nin azalan olduğu aralıkları, yerel ekstremum değerlerini ve nerede ortaya çıktıklarını bulun.

T **b.** $n = 1, 2, 3$ için

$$\int_{-n}^{n} f(x)\,dx$$

integralini hesaplayın.

c. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ olduğuna dair inandırıcı bir fikir söyleyin. (*İpucu*: $1 > x$ için $0 < f(x) < e^{-x/2}$ olduğunu ve $b > 1$ için, $b \to \infty$ iken

$$\int_{b}^{\infty} e^{-x/2}\,dx \to 0$$

olduğunu gösterin.)

78. Aşağıda ln 3'ün $\infty - \infty$'a eşit olduğunu gösteren bir fikir yürütme bulunmaktadır. Fikir yürütme nerede yanlıştır? Yanıtınızı açıklayın.

$$\begin{aligned}
\ln 3 &= \ln 1 + \ln 3 = \ln 1 - \ln \frac{1}{3} \\
&= \lim_{b\to\infty} \ln\left(\frac{b-2}{b}\right) - \ln\frac{1}{3} \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\ln\frac{x-2}{x}\right]_3^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\ln(x-2) - \ln x\right]_3^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_3^b \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right) dx \\
&= \int_3^\infty \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right) dx \\
&= \int_3^\infty \frac{1}{x-2}\,dx - \int_3^\infty \frac{1}{x}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\ln(x-2)\right]_3^b - \lim_{b\to\infty} \left[\ln x\right]_3^b \\
&= \infty - \infty.
\end{aligned}$$

79. $f(x)$ her reel sayı aralığında integre edilebiliyorsa ve a ile b, $a < b$ olmak üzere, reel sayılarsa, aşağıdakileri gösterin.

a. Ancak ve yalnız $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ ve $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$'in ikisi de yakınsarsa, $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ ve $\int_{b}^{\infty} f(x)\,dx$'in ikisi de yakınsar.

b. İntegraller yakınsıyorsa,
$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{\infty} f(x)\,dx$

80. a. f çiftse ve gerekli integraller varsa,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$$

b. f tekse ve gerekli integraller varsa

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0$$

doğrudan hesaplama, karşılaştırma testleri ve Alıştırma 80'deki sonuçları uygun şekilde kullanarak, 81-88 alıştırmalarındaki integrallerin yakınsaklığını veya ıraksaklığını belirleyin. Birden fazla yöntem uygulanabiliyorsa, istediğinizi kullanın.

81. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

82. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$

83. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

84. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{x^2+1}$

85. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx$

86. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2}$

87. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\sin x| + |\cos x|}{|x|+1}\,dx$

(*İpucu:* $|\sin\theta| + |\cos\theta| \geq \sin^2\theta + \cos^2\theta$.)

88. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

$x^p \ln x$ İntegrallerinin İncelenmesi

89–92 alıştırmalarındaki integralleri bir BCS kullanarak p'nin değişik değerleri için (tamsayı olmayan değerler de dahil) araştırın. Hangi p değerleri için integraller yakınsar? Yakınsadığında integralin değeri nedir? İntegrandın grafiğini değişik p değerlerinde çizin.

89. $\displaystyle\int_{0}^{e} x^p \ln x\,dx$

90. $\displaystyle\int_{e}^{\infty} x^p \ln x\,dx$

91. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x^p \ln x\,dx$

92. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^p \ln |x|\,dx$

Bölüm 8 Tekrar Soruları

1. Hangi temel integrasyon formüllerini biliyorsunuz?
2. İntegralleri temel formüllere bağlayacak hangi prosedürleri biliyorsunuz?
3. Kısmi integrasyon formülü nedir? Nereden çıkar? Neden bu formülü kullanmak isteyesiniz?
4. Kısmi integrasyon formülünü uygularken, u ve dv'yi nasıl seçersiniz? $\int f(x)\,dx$ şeklinde bir integrale kısmi integrasyonu nasıl uygularsınız?
5. Tablolu integrasyon nedir? Bir örnek verin.
6. Kısmi kesirler yönteminin amacı nedir?

7. Bir $f(x)$ polinomunun derecesi bir $g(x)$ polinomunun derecesinden küçükken, $g(x)$ aşağıdaki şekilde bir fonksiyonsa, $f(x)/g(x)$'i bir kısmi kesirler toplamı olarak nasıl yazarsınız?
   a. $g(x)$ farklı lineer çarpanların bir çarpımıdır.
   b. $g(x)$ tekrarlanan lineer çarpanlardan oluşur.
   c. $g(x)$ indirgenemez bir kuadratik çarpan içerir.
   f'nin derecesi g'nin derecesinden küçük *değilse* ne yaparsınız?
8. Bir integrand m ve n negatif olmayan tamsayılar olmak üzere $\sin^n x \cos^m x$ şeklinde bir çarpım ise integrali nasıl hesaplarsınız? Her durum için özel bir örnek verin.
9. $\sin mx \sin nx$, $\sin mx \cos nx$ ve $\cos mx \cos nx$'in integrallerini hesaplamak için hangi dönüşümler yapılır? Her duruma bir örnek verin.
10. $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ ve $\sqrt{x^2 - a^2}$ içeren integralleri doğrudan hesaplanabilen integrallere dönüştürmek için bazen hangi dönüşümler kullanılır? Her duruma bir örnek verin.
11. Değişken dönüşümlerinin tersinir olduklarından (terslerinin bulunduğundan) emin olmak için, üç temel trigonometrik dönüşümdeki değişkenler üzerine hangi kısıtlamaları koyabilirsiniz?
12. İntegral tabloları nasıl kullanılır? Hesaplamak istediğiniz özel bir integral tabloda yoksa ne yaparsınız?
13. Bir indirgeme formülü nedir? İndirgeme formülleri genelde nasıl türetilirler? İndirgeme formülleri nasıl kullanılırlar? Bir örnek verin.
14. Sayısal integrasyon için kısa bir "nasıl-yapılır" el kitabı hazırlıyorsunuz ve Yamuklar Kuralı hakkında yazıyorsunuz. **(a)** Kuralın kendisi ve nasıl kullanıldığı hakkında ne söylersiniz? Doğruluğu nasıl sağladığı konusunda? **(b)** Simpson Kuralı hakkında yazıyor olsaydınız ne söylerdiniz?
15. Simpson Kuralı ve Yamuklar kuralının ilgili değerlerini nasıl karşılaştırırsınız?
16. I. Tip bir genelleştirilmiş integral nedir? Ya II. Tip? Değişik genelleştirilmiş integral çeşitlerinin değerleri nasıl hesaplanır? Örnekler verin.
17. Doğrudan hesaplanamayan genelleştirilmiş integrallerin yakınsaklık ve ıraksaklıklarını belirlemek için hangi testler vardır? Kullanımlarına örnekler verin.

Bölüm 8 Problemler

Değişken Dönüşümüyle İntegrasyon

1–82 Problemlerindeki integralleri hesaplayın. Her integrali tanınabilir temel bir forma sokmak için, cebirsel değişken dönüşümü, kareye tamamlama, kesirleri ayırma, uzun bölme veya trigonometrik değişken dönüşümü gibi bir veya birden fazla yöntem kullanmak gerekebilir.

1. $\int x\sqrt{4x^2 - 9}\,dx$
2. $\int 6x\sqrt{3x^2 + 5}\,dx$
3. $\int x(2x + 1)^{1/2}\,dx$
4. $\int x(1 - x)^{-1/2}\,dx$
5. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8x^2 + 1}}$
6. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$
7. $\int \frac{y\,dy}{25 + y^2}$
8. $\int \frac{y^3\,dy}{4 + y^4}$
9. $\int \frac{t^3\,dt}{\sqrt{9 - 4t^4}}$
10. $\int \frac{2t\,dt}{t^4 + 1}$
11. $\int z^{2/3}(z^{5/3} + 1)^{2/3}\,dz$
12. $\int z^{-1/5}(1 + z^{4/5})^{-1/2}\,dz$
13. $\int \frac{\sin 2\theta\,d\theta}{(1 - \cos 2\theta)^2}$
14. $\int \frac{\cos\theta\,d\theta}{(1 + \sin\theta)^{1/2}}$
15. $\int \frac{\sin t}{3 + 4\cos t}\,dt$
16. $\int \frac{\cos 2t}{1 + \sin 2t}\,dt$
17. $\int \sin 2x\, e^{\cos 2x}\,dx$
18. $\int \sec x \tan x\, e^{\sec x}\,dx$
19. $\int e^{\theta} \sin(e^{\theta}) \cos^2(e^{\theta})\,d\theta$
20. $\int e^{\theta} \sec^2(e^{\theta})\,d\theta$
21. $\int 2^{x-1}\,dx$
22. $\int 5^{x\sqrt{2}}\,dx$
23. $\int \frac{dv}{v \ln v}$
24. $\int \frac{dv}{v(2 + \ln v)}$
25. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(2 + \tan^{-1} x)}$
26. $\int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$
27. $\int \frac{2\,dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$
28. $\int \frac{dx}{\sqrt{49 - x^2}}$
29. $\int \frac{dt}{\sqrt{16 - 9t^2}}$
30. $\int \frac{dt}{\sqrt{9 - 4t^2}}$
31. $\int \frac{dt}{9 + t^2}$
32. $\int \frac{dt}{1 + 25t^2}$
33. $\int \frac{4\,dx}{5x\sqrt{25x^2 - 16}}$
34. $\int \frac{6\,dx}{x\sqrt{4x^2 - 9}}$
35. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$
36. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$
37. $\int \frac{dy}{y^2 - 4y + 8}$
38. $\int \frac{dt}{t^2 + 4t + 5}$
39. $\int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{x^2 - 2x}}$
40. $\int \frac{dv}{(v + 1)\sqrt{v^2 + 2v}}$
41. $\int \sin^2 x\,dx$
42. $\int \cos^2 3x\,dx$

43. $\int \sin^3 \frac{\theta}{2}\, d\theta$

44. $\int \sin^3 \theta \cos^2 \theta\, d\theta$

45. $\int \tan^3 2t\, dt$

46. $\int 6 \sec^4 t\, dt$

47. $\int \frac{dx}{2 \sin x \cos x}$

48. $\int \frac{2\, dx}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

49. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{\csc^2 y - 1}\, dy$

50. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\cot^2 t + 1}\, dt$

51. $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos^2 2x}\, dx$

52. $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{x}{2}}\, dx$

53. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos 2t}\, dt$

54. $\int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{1 + \cos 2t}\, dt$

55. $\int \frac{x^2}{x^2 + 4}\, dx$

56. $\int \frac{x^3}{9 + x^2}\, dx$

57. $\int \frac{4x^2 + 3}{2x - 1}\, dx$

58. $\int \frac{2x}{x - 4}\, dx$

59. $\int \frac{2y - 1}{y^2 + 4}\, dy$

60. $\int \frac{y + 4}{y^2 + 1}\, dy$

61. $\int \frac{t + 2}{\sqrt{4 - t^2}}\, dt$

62. $\int \frac{2t^2 + \sqrt{1 - t^2}}{t\sqrt{1 - t^2}}\, dt$

63. $\int \frac{\tan x\, dx}{\tan x + \sec x}$

64. $\int \frac{\cot x}{\cot x + \csc x}\, dx$

65. $\int \sec (5 - 3x)\, dx$

66. $\int x \csc (x^2 + 3)\, dx$

67. $\int \cot \left(\frac{x}{4}\right) dx$

68. $\int \tan (2x - 7)\, dx$

69. $\int x\sqrt{1 - x}\, dx$

70. $\int 3x\sqrt{2x + 1}\, dx$

71. $\int \sqrt{z^2 + 1}\, dz$

72. $\int (16 + z^2)^{-3/2}\, dz$

73. $\int \frac{dy}{\sqrt{25 + y^2}}$

74. $\int \frac{dy}{\sqrt{25 + 9y^2}}$

75. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1 - x^2}}$

76. $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

77. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

78. $\int \sqrt{4 - x^2}\, dx$

79. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}}$

80. $\int \frac{12\, dx}{(x^2 - 1)^{3/2}}$

81. $\int \frac{\sqrt{w^2 - 1}}{w}\, dw$

82. $\int \frac{\sqrt{z^2 - 16}}{z}\, dz$

Kısmi İntegrasyon

83–90 Problemlerindeki integralleri kısmi integrasyonla bulun.

83. $\int \ln (x + 1)\, dx$

84. $\int x^2 \ln x\, dx$

85. $\int \tan^{-1} 3x\, dx$

86. $\int \cos^{-1} \left(\frac{x}{2}\right) dx$

87. $\int (x + 1)^2 e^x\, dx$

88. $\int x^2 \sin (1 - x)\, dx$

89. $\int e^x \cos 2x\, dx$

90. $\int e^{-2x} \sin 3x\, dx$

Trigonometrik Değişken Dönüşümleri

91-110 Problemlerindeki integralleri **(a)** trigonometrik dönüşüm kullanmadan ve **(b)** trigonometrik dönüşümle hesaplayın

91. $\int \frac{x\, dx}{x^2 - 3x + 2}$

92. $\int \frac{x\, dx}{x^2 + 4x + 3}$

93. $\int \frac{dx}{x(x + 1)^2}$

94. $\int \frac{x + 1}{x^2(x - 1)}\, dx$

95. $\int \frac{\sin \theta\, d\theta}{\cos^2 \theta + \cos \theta - 2}$

96. $\int \frac{\cos \theta\, d\theta}{\sin^2 \theta + \sin \theta - 6}$

97. $\int \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^3 + x}\, dx$

98. $\int \frac{4x\, dx}{x^3 + 4x}$

99. $\int \frac{v + 3}{2v^3 - 8v}\, dv$

100. $\int \frac{(3v - 7)\, dv}{(v - 1)(v - 2)(v - 3)}$

101. $\int \frac{dt}{t^4 + 4t^2 + 3}$

102. $\int \frac{t\, dt}{t^4 - t^2 - 2}$

103. $\int \frac{x^3 + x^2}{x^2 + x - 2}\, dx$

104. $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x}\, dx$

105. $\int \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 + 4x + 3}\, dx$

106. $\int \frac{2x^3 + x^2 - 21x + 24}{x^2 + 2x - 8}\, dx$

107. $\int \frac{dx}{x\left(3\sqrt{x} + 1\right)}$

108. $\int \frac{dx}{x\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)}$

109. $\int \frac{ds}{e^s - 1}$

110. $\int \frac{ds}{\sqrt{e^s + 1}}$

Trigonometrik Değişken Dönüşümleri

111–114 Problemlerindeki integralleri (a) trigonometrik dönüşüm kullanmadan ve (b) trigonometrik dönüşümle hesaplayın.

111. $\int \frac{y\, dy}{\sqrt{16 - y^2}}$

112. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{4 + x^2}}$

113. $\int \frac{x\, dx}{4 - x^2}$

114. $\int \frac{t\, dt}{\sqrt{4t^2 - 1}}$

Kuadratik Terimler

115–118 Problemlerindeki integralleri hesaplayın.

115. $\int \frac{x\, dx}{9 - x^2}$

116. $\int \frac{dx}{x(9 - x^2)}$

117. $\int \frac{dx}{9 - x^2}$

118. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

Trigonometrik İntegraller

119–126 Problemlerindeki integralleri hesaplayın.

119. $\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx$

120. $\int \cos^5 x \sin^5 x\, dx$

121. $\int \tan^4 x \sec^2 x\, dx$

122. $\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx$

123. $\int \sin 5\theta \cos 6\theta\, d\theta$

124. $\int \cos 3\theta \cos 3\theta\, d\theta$

125. $\int \sqrt{1 + \cos(t/2)}\, dt$

126. $\int e^t \sqrt{\tan^2 e^t + 1}\, dt$

Sayısal İntegrasyon

127. Simpson kuralının hata sınırı formülüne göre,

$$\ln 3 = \int_1^3 \frac{1}{x}\, dx$$

değerini Simpson kuralıyla hatanın mutlak değeri en fazla 10^{-4} olacak şekilde hesapladığınızdan emin olmak için kaç tane alt aralık kullanmanız gerekir? (Simpson kuralında alt aralıkların sayısının çift olması gerektiğini unutmayın.)

128. Kısa bir hesap, $0 \le x \le 1$ ise, $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$ fonksiyonunun ikinci türevinin 0 ile 8 arasında bulunduğunu gösterir. Buna göre, f'nin 0'dan 1'e kadar integralini yamuklar kuralıyla hatanın mutlak değeri 10^{-3}'ten büyük olmayacak şekilde hesaplamak için kaç alt aralık kullanmanız gerekir?

129. Doğrudan bir hesap

$$\int_0^{\pi} 2\sin^2 x\, dx = \pi.$$

olduğunu gösterir. $n = 6$ alarak Yamukler ve Simpson kurallarını kullanırsanız, bu sonuca ne kadar yaklaşırsınız? Deneyin ve bulun.

130. Simpson kuralını kullanarak,

$$\int_1^2 f(x)\, dx$$

integralinin değerini 10^{-5}'ten küçük bir hatayla bulmayı tasarlıyorsunuz. İntegrasyon aralığında $|f^{(4)}(x)| \le 3$ olduğunu belirlediniz. İstenen hassaslığı yakalamak için kaç tane alt aralık kullanmanız gerekir? (Simpson kuralında alt aralıkların sayısının çift olması gerektiğini unutmayın.)

131. Ortalama Sıcaklık 365 günlük bir yıl için

$$f(x) = 37 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right) + 25$$

sıcaklık fonksiyonunun ortalama değerini hesaplayın. Bu Fairbanks, Alaska'daki yıllık ortalama hava sıcaklığını bulmanın bir yoludur. Ulusal Hava Servisi'nin resmi rakamı, günlük normal ortalama hava sıcaklıklaının sayısal ortalaması, $f(x)$'in ortalama değerinden biraz daha yüksek olan 25.7°F'dir.

132. Bir gazın özgül ısısı cal/°mol (kalori bölü derece gram molekül) birimiyle ölçülen özgül ısı C_v verilen bir miktar sabit hacimli gazın sıcaklığını 1°C arttırmak için gerekli ısı miktarıdır. Oksijenin özgül ısısı T'ye bağlıdır ve

$$C_v = 8.27 + 10–5\,(26T - 1.87T^2)$$

formülünü sağlar. $20° \le T \le 675$ °C için C_v'nin ortalama değerini ve bu değerin hangi sıcaklıkta alındığını bulun.

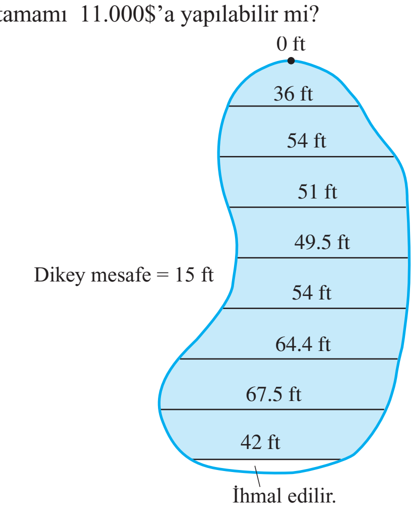
133. Yakıt verimliliği Bir otomobil bilgisayarı dijital göstergede saat başına galon olarak yakıt tüketimini vermektesir. Bir yolculuk sırasında, bir yolcu bir saat boyunca 5 dakikada bir yakıt tüketimini kaydetmiştir.

Zaman	Gal/s	Zaman	Gal/s
0	2.5	35	2.5
5	2.4	40	2.4
10	2.3	45	2.3
15	2.4	50	2.4
20	2.4	55	2.4
25	2.5	60	2.3
30	2.6		

a. Bir saat boyunca tüketilen toplam yakıta yaklaşımda bulunmak için Yamuklar Kuralını kullanın.

b. Otomobil bir saatte 60 mil yol aldıysa, yolculuğun bu bölümündeki yakıt verimliliği neydi (mil başına galon olarak)

134. Yeni bir park yeri Park yeri ihtiyacını karşılamak için, kasabanız aşağıda görülen alanı ayırmıştır. Kasaba mühendisi olarak, kasaba konseyi sizden park yerinin 11.000$'a yapılıp yapılamayacağını bulmanızı istemektedir. Alanı temizlemenin masrafı ft başına 0.10$'dır ve park yerinin inşaatı ft başına 2.00$ tutacaktır. İşin tamamı 11.000$'a yapılabilir mi?



Genelleştirilmiş İntegraller

135–144 alıştırmalarındaki genelleştirilmiş intergalleri hesaplayın.

135. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

136. $\int_0^1 \ln x\, dx$

137. $\int_{-1}^1 \frac{dy}{y^{2/3}}$

138. $\int_{-2}^0 \frac{d\theta}{(\theta+1)^{3/5}}$

139. $\int_3^\infty \frac{2\, du}{u^2-2u}$

140. $\int_1^\infty \frac{3v-1}{4v^3-v^2}\, dv$

141. $\int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx$

142. $\int_{-\infty}^0 xe^{3x}\, dx$

143. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{4x^2+9}$

144. $\int_{-\infty}^\infty \frac{4dx}{x^2+16}$

Yakınsaklık veya Iraksaklık

145–150 alıştırmalarındaki genelleştirilmiş integrallerden hangileri yakınsaktır, hangileri ıraksaktır?

145. $\int_6^\infty \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^2+1}}$

146. $\int_0^\infty e^{-u}\cos u\, du$

147. $\int_1^\infty \frac{\ln z}{z}\, dz$

148. $\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$

149. $\int_{-\infty}^\infty \frac{2\, dx}{e^x+e^{-x}}$

150. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$

Karışık İntegraller

151–218 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın. İntegraller karışık sıradadır.

151. $\int \frac{x\, dx}{1+\sqrt{x}}$

152. $\int \frac{x^3+2}{4-x^2}\, dx$

153. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$

154. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

155. $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x-x^2}}$

156. $\int \frac{(t-1)\, dt}{\sqrt{t^2-2t}}$

157. $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$

158. $\int e^t \cos e^t\, dt$

159. $\int \frac{2-\cos x+\sin x}{\sin^2 x}\, dx$

160. $\int \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$

161. $\int \frac{9\, dv}{81-v^4}$

162. $\int \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x}$

163. $\int \theta\cos(2\theta+1)\, d\theta$

164. $\int_2^\infty \frac{dx}{(x-1)^2}$

165. $\int \frac{x^3\, dx}{x^2-2x+1}$

166. $\int \frac{d\theta}{\sqrt{1+\sqrt{\theta}}}$

167. $\int \frac{2\sin\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x}\sec\sqrt{x}}$

168. $\int \frac{x^5\, dx}{x^4-16}$

169. $\int \frac{dy}{\sin y\cos y}$

170. $\int \frac{d\theta}{\theta^2-2\theta+4}$

171. $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\, dx$

172. $\int \frac{dr}{(r+1)\sqrt{r^2+2r}}$

173. $\int \frac{(r+2)\, dr}{\sqrt{-r^2-4r}}$

174. $\int \frac{y\, dy}{4+y^4}$

175. $\int \frac{\sin 2\theta\, d\theta}{(1+\cos 2\theta)^2}$

176. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

177. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos 4x}\, dx$

178. $\int (15)^{2x+1}\, dx$

179. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{2-x}}$

180. $\int \frac{\sqrt{1-v^2}}{v^2}\, dv$

181. $\int \frac{dy}{y^2-2y+2}$

182. $\int \ln\sqrt{x-1}\, dx$

183. $\int \theta^2\tan(\theta^3)\, d\theta$

184. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{8-2x^2-x^4}}$

185. $\int \frac{z+1}{z^2(z^2+4)}\, dz$

186. $\int x^3 e^{(x^2)}\, dx$

187. $\int \frac{t\, dt}{\sqrt{9-4t^2}}$

188. $\int_0^{\pi/10} \sqrt{1+\cos 5\theta}\, d\theta$

189. $\int \frac{\cot\theta\, d\theta}{1+\sin^2\theta}$

190. $\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2}\, dx$

191. $\int \frac{\tan\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}\, dy$

192. $\int \frac{e^t\, dt}{e^{2t}+3e^t+2}$

193. $\int \frac{\theta^2 d\theta}{4-\theta^2}$

194. $\int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\, dx$

195. $\int \frac{\cos(\sin^{-1} x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

196. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x-\sin x}$

197. $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\, dx$

198. $\int \frac{x^2-x+2}{(x^2+2)^2}\, dx$

199. $\int \frac{e^t\, dt}{1+e^t}$

200. $\int \tan^3 t\, dt$

201. $\int_1^\infty \frac{\ln y}{y^3}\, dy$

202. $\int \frac{3+\sec^2 x+\sin x}{\tan x}\, dx$

203. $\int \frac{\cot v\, dv}{\ln\sin v}$

204. $\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x^2-x}}$

205. $\int e^{\ln\sqrt{x}}\, dx$

206. $\int e^\theta\sqrt{3+4e^\theta}\, d\theta$

207. $\int \frac{\sin 5t\, dt}{1+(\cos 5t)^2}$

208. $\int \frac{dv}{\sqrt{e^{2v}-1}}$

209. $\int (27)^{3\theta+1}\, d\theta$

210. $\int x^5\sin x\, dx$

211. $\int \frac{dr}{1+\sqrt{r}}$

212. $\int \frac{4x^3-20x}{x^4-10x^2+9}\, dx$

213. $\int \frac{8\, dy}{y^3(y+2)}$

214. $\int \frac{(t+1)\, dt}{(t^2+2t)^{2/3}}$

215. $\int \frac{8\, dm}{m\sqrt{49m^2-4}}$

216. $\displaystyle\int \frac{dt}{t(1+\ln t)\sqrt{(\ln t)(2+\ln t)}}$

217. $\displaystyle\int_0^1 3(x-1)^2\left(\int_0^x \sqrt{1+(t-1)^4}\,dt\right)dx$

218. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{4v^3+v-1}{v^2(v-1)(v^2+1)}\,dv$

219. Belirli bir f fonksiyonu için şunların bilindiğini varsayın:

$$f'(x)=\frac{\cos x}{x},\quad f(\pi/2)=a,\quad \text{ve}\quad f(3\pi/2)=b.$$

Aşağıdaki integrali kısmi integrasyonla hesaplayın.

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x)\,dx.$$

220. Aşağıdaki eşitliği sağlayan pozitif bir a değeri bulun.

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x^2}=\int_a^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

Bölüm 8 Ek-İleri Alıştırmalar

Uğraştırıcı İntegraller

1–10 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

1. $\displaystyle\int (\sin^{-1}x)^2\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}$

3. $\displaystyle\int x\sin^{-1}x\,dx$

4. $\displaystyle\int \sin^{-1}\sqrt{y}\,dy$

5. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{1-\tan^2\theta}$

6. $\displaystyle\int \ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)dx$

7. $\displaystyle\int \frac{dt}{t-\sqrt{1-t^2}}$

8. $\displaystyle\int \frac{(2e^{2x}-e^x)\,dx}{\sqrt{3e^{2x}-6e^x-1}}$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+4}$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6-1}$

Limitler

11 ve 12 alıştırmalarındaki limitleri hesaplayın.

11. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_{-x}^{x}\sin t\,dt$

12. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt$

13 ve 14 alıştırmalarındaki limitleri, onları birer belirli integral olarak tanımlayıp sonra integralleri hesaplayarak bulun.

13. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}$

14. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$

Teori ve Uygulamalar

15. Yay uzunluğu bulmak Aşağıdaki eğrinin uzunluğunu bulun.

$$y=\int_0^x \sqrt{\cos 2t}\,dt,\quad 0\le x\le \pi/4.$$

16. Yay uzunluğu bulmak $y=\ln(1-x^2)$, $0\le x\le 1/2$ eğrisinin uzunluğunu bulun.

17. Hacim bulmak Birinci bölgede x-ekseni ve $y=3x\sqrt{1-x}$ eğrisi ile sınırlanan bölge y-ekseni etrafında döndürülerek bir cisim üretiliyor. Cismin hacmini bulun.

18. Hacim bulmak Birinci bölgede x-ekseni, $y=5/\left(x\sqrt{5-x}\right)$ eğrisi, $x=1$ ve $x=4$ doğrularıyla çevrelenen bölge x-ekseni etrafında döndürülerek bir cisim üretiliyor. Cismin hacmini bulun.

19. Hacim bulmak Birinci bölgede koordinat eksenleri, $y=e^x$ eğrisi ve $x=1$ doğrusuyla çevrelenen bölge y-ekseni etrafında döndürülerek bir cisim üretiliyor. Cismin hacmini bulun.

20. Hacim bulmak Birinci bölgede üstten $y=e^x-1$ eğrisi, alttan x-ekseni ve sağdan $x=\ln 2$ doğrusu ile sınırlanan bölge $x=\ln 2$ doğrusu etrafında döndürülerek bir cisim üretiliyor. Cismin hacmini bulun.

21. Hacim bulmak R, birinci bölgede üstten $y=1$ doğrusu, alttan $y=\ln x$ eğrisi ve soldan $x=1$ doğrusu ile sınırlanan "üçgensel" bölge olsun. R'nin

a. x-ekseni **b.** $y=1$ doğrusu

22. Hacim bulmak (*Alıştırma 21'in devamı*) R bölgesinin

a. y-ekseni **b.** $x=1$ doğrusu

etrafında döndürülmesiyle elde edilen cisimlerin hacimlerini bulun.

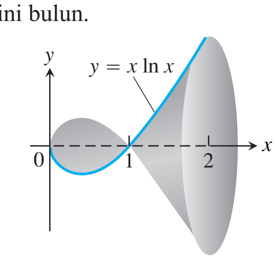
23. Hacim bulmak x-ekseni ve

$$y=f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ x\ln x, & 0<x\le 2\end{cases}$$

eğrisi arasında kalan bölge x-ekseni etrafında döndürülerek aşağıda gösterilen cisim üretiliyor.

a. f'nin $x=0$'da sürekli olduğunu gösterin.

b. Cismin hacmini bulun.



24. Hacim bulmak Birinci bölgede koordinat eksenleri ve $y = -\ln x$ eğrisi ile sınırlanan sonsuz bölge x-ekseni etrafında döndürülerek bir cisim üretiliyor. Cismin hacmini bulun.

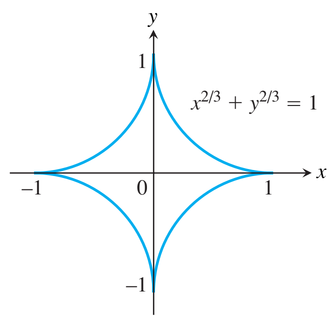
25. Bir bölgenin kütle merkezi Birinci bölgede alttan x-ekseni, üstten $y = \ln x$ eğrisi ve sağdan $x = e$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin kütle merkezini bulun.

26. Bir bölgenin kütle merkezi $y = \pm(1 - x^2)^{-1/2}$ eğrileri ile $x = 0$ ve $x = 1$ doğrularıyla sınırlı bölgenin kütle merkezini bulun.

27. Bir eğrinin uzunluğu $y = \ln x$ eğrisinin $x = 1$'den $x = e$'ye kadar olan uzunluğunu bulun.

28. Yüzey alanı bulmak Alıştırma 27'deki eğrinin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşturulan yüzeyin alanını bulun.

29. Bir astroidin uzunluğu $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ denkleminin grafiği yıldıza benzer şekillerinden dolayı *astroid* ("asteroid" değil) denilen bir eğri ailesinden biridir (Şekle bakın). Bu özel astroidin uzunluğunu bulun.



30. Bir astroidin oluşturduğu yüzey Alıştırma 29'daki eğrinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin alanını bulun.

31. Orijinden geçen ve uzunluğu

$$\int_0^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\,dx.$$

olan bir eğri bulun.

32. İntegrallerden hiçbirini hesaplamadan, neden

$$2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

olduğunu açıklayın.

T **33. a.** $f(x) = e^{(x - e^x)}$, $-5 \le x \le 3$ fonksiyonunun grafiğini çizin.

b. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$'in yakınsadığını gösterin ve değerini bulun.

34. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{ny^{n-1}}{1 + y}\,dy$ 'yi bulun.

35. Aşağıdaki integral formülünü elde edin.

$$\int x\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^n dx = \frac{\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^{n+2}}{n + 2} + C, \qquad n \ne -2$$

36. Aşağıdaki ifadeyi ispatlayın.

$$\frac{\pi}{6} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}} < \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

(*İpucu*: $0 < x < 1$ için, $4 - x^2 > 4 - x^2 - x^3 > 4 - 2x^2$ olduğuna dikkat edin. Sol taraf $x = 0$ için, sağ taraf da $x = 1$ için bir eşitliğe dönüşür.)

37. Hangi a değeri veya değerleri için

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{ax}{x^2 + 1} - \frac{1}{2x}\right) dx$$

yakınsar? Karşılık gelen integral(ler)i hesaplayın.

38. Her $x > 0$ için, $G(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt}\,dt$ olsun. Her $x > 0$ için, $xG(x) = 1$ olduğunu ispatlayın.

39. Sonsuz alan ve sonlu hacim Hangi p değerlerinde aşağıdaki özellik bulunur: $y = x^{-p}$, $1 \le x < \infty$, eğrisi ve x-ekseni arasında kalan bölgenin alanı sonsuzdur, fakat bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen cismin hacmi sonludur.

40. Sonsuz alan ve sonlu hacim Hangi p değerlerinde aşağıdaki özellik bulunur: Birinci bölgede $y = x^{-p}$ eğrisi, y-ekseni, $x = 1$ doğrusu ve x-eksenindeki [0, 1] aralığı ile sınırlanan bölgenin alanı sonsuzdur, fakat bölgenin koordinat eksenlerinden biri etrafında döndürülmesiyle üretilen cismin hacmi sonludur.

Tablolu İntegrasyon

Tablolu integrasyon fonksiyonlardan herhangi birinin sıfır olana kadar art arda türevinin alınamadığı durumlarda da, $\int f(x)g(x)\,dx$ şeklindeki integrallere uygulanabilir. Örneğin,

$$\int e^{2x} \cos x\,dx$$

integralini hesaplamak için, önceki gibi e^{2x}'in art arda türevlerini ve $\cos x$'in art arda integrallerini içeren bir tabloyla işe başlarız:

e^{2x} ve türevleri		$\cos x$ ve integralleri
e^{2x}	(+)	$\cos x$
$2e^{2x}$	(−)	$\sin x$
$4e^{2x}$	(+)	$-\cos x$

← *Burada durum:* Satır çarpım sabitleri dışında (solda 4, sağda –1) birinci satırın aynısıdır.

Sabit çarpanlar dışında birinci satırla aynı olan bir satıra rastlar rastlamaz türev almayı ve integre etmeyi bırakırız. Tabloyu

$$\int e^{2x} \cos x\,dx = +(e^{2x} \sin x) - (2e^{2x}(-\cos x)) + \int (4e^{2x})(-\cos x)\,dx.$$

diyerek yorumlarız. Köşegen oklarla gösterilen işaretlendirilmiş çarpımları alır ve son yatay ok için de işaretlendirilmiş bir integral yazarız. Sağdaki integrali sol tarafa geçirmek

$$5\int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x$$

veya 5 ile bölüp integrasyon sabitini ekledikten sonra

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = \frac{e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x}{5} + C$$

verir.

41–48 alıştırmalarındaki integralleri hesaplamak için tablolu integrasyon kullanın.

41. $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ **42.** $\int e^{3x}\sin 4x\,dx$

43. $\int \sin 3x \sin x\,dx$ **44.** $\int \cos 5x \sin 4x\,dx$

45. $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ **46.** $\int e^{ax}\cos bx\,dx$

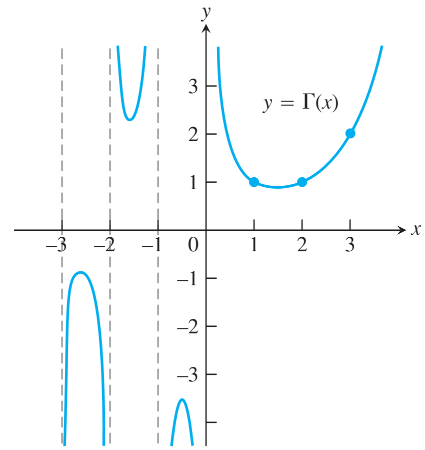
47. $\int \ln(ax)\,dx$ **48.** $\int x^2\ln(ax)\,dx$

Gamma Fonsiyonu ve Stirling Formülü

Euler'in gamma fonksiyonu $\Gamma(x)$ ("gamma x"; Γ Yunanca büyük harf g'dir) faktoriyel fonksiyonunu negatif olmayan tamsayılardan diğer reel değerlere genişletmek için bir integral kullanır. Formül

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt, \qquad x > 0.$$

ile verilir. Her pozitif x için $\Gamma(x)$, $t^{x-1}e^{-t}$'nin 0'dan ∞'a kadar t'ye göre integralidir. Şekil 8.27 Γ'nın orijin civarındaki grafiğini gösterir. Bölüm 15'teki Ek Alıştırma 31'i yaparsanız, $\Gamma(1/2)$ 'nin nasıl hesaplandığını göreceksiniz.



ŞEKİL 8.27 Euler'in gamma fonksiyonu $\Gamma(x)$, her pozitif $n+1$ tamsayısı için değeri $n!$ olan, x'in sürekli bir fonksiyonudur. Γ'yı tanımlayan integral sadece $x > 0$ için tanımlıdır, fakat Alıştırma 49'un konusu olan $\Gamma(x) = (\Gamma(x+1))/x$ formülüyle, Γ'yı x'in negatif tamsayı olmayan reel değerlerine genişletebiliriz.

49. n negatif olmayan bir tamsayı ise, $\Gamma(n+1) = n!$'dir.

a. $\Gamma(1) = 1$ olduğunu gösterin.

b. $\Gamma(x+1)$'in integraline kısmi integrasyon uygulayarak $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ olduğunu gösterin. Bu

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1\\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2\\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 6\\ &\vdots\\ \Gamma(n+1) &= n\,\Gamma(n) = n! \end{aligned} \tag{1}$$

verir.

c. Matematiksel indüksiyon kullanarak (1) denklemini negatif olmayan her n tamsayısı için doğrulayın.

50. Stirling formülü İskoç matematikçi James Stirling (1692–1770)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e}{x}\right)^x\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\,\Gamma(x) = 1$$

olduğunu ve dolayısıyla büyük x değerleri için

$$\Gamma(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\,(1 + \epsilon(x)), \qquad x\to\infty \text{ iken } \epsilon(x)\to 0 \tag{2}$$

olduğunu gösterdi. $\epsilon(x)$'i ihmal etmek

$$\Gamma(x) \approx \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}} \qquad \textbf{(Stirling formülü)} \tag{3}$$

yaklaşımına yol açar.

a. $n!$ için Stirling yaklaşımı (3) denklemini ve $n! = n\Gamma(n)$ olduğunu kullanarak

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi} \qquad \textbf{(Stirling yaklaşımı)} \tag{4}$$

olduğunu gösterin. Bölüm 11.1'deki Alıştırma 64'ü yaparsanız göreceğiniz gibi, (4) denklemi

$$\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e} \tag{5}$$

yaklaşımını verir.

T **b.** Hesap makinenizin $n!$ için verdiği sonuçları, $n = 10, 20, 30, \ldots,$ hesap makinenizin izin verdiği ölçüdeki değerlerde, Stirling yaklaşımının verdiği sonuçlarla karşılaştırın.

T **c.** (2) Denkleminin düzenlenmesi

$$\Gamma(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\,e^{1/(12x)}(1 + \epsilon(x)),$$

veya

$$\Gamma(x) \approx \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\, e^{1/(12x)}$$

verir, ki bu da bize

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}\, e^{1/(12n)} \tag{6}$$

olduğunu söyler. 10! için hesap makinenizin, Stirling yaklaşımının ve (6) denkleminin vereceği sonuçları karşılaştırın.

Bölüm 8 Teknoloji Uygulama Projeleri

Mathematika/Maple Module

Riemann, Yamuklar ve Simpson Yaklaşımları

I. Kısım: Bir eğri altındaki alana yaklaşım için Riemann toplamları kullanmanın içerdiği hatayı gözünüzde canlandırın.

II. Kısım: Bir değerler tablosu kurun ve hatanın bağıl büyüklüğünü, Δx adım büyüklüğünün bir fonksiyonu olarak hesaplayın.

III. Kısım: Türev fonksiyonunun hata üzerindeki etkisini araştırın.

IV ve **V. Kısım**: Yamuklar Kuralı yaklaşımları.

VI. Kısım: Simpson Kuralı yaklaşımları.

Mathematika/Maple Module

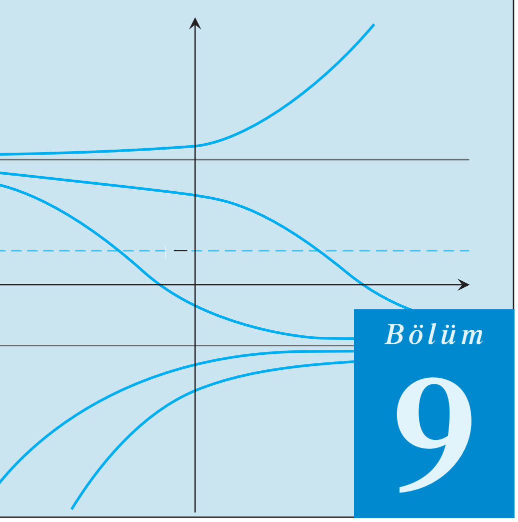
Şans Oyunları: Sayısal İntegrasyon için Monte Carlo Olasılıksal Yöntemini Araştırmak

Belirli integrallere Monte Carlo yaklaşımı yöntemini grafik olarak araştırın.

Mathematika/Maple Module

Genelleştirilmiş İntegrallerle Olasılıklar Hesaplamak

Belirli integrallere Monte Carlo yaklaşımı yöntemini grafik olarak araştırın.



Bölüm 9

İNTEGRASYONUNUN DİĞER UYGULAMALARI

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

GİRİŞ Bölüm 4.8 de, y türevi alınan bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere $dy/dx = f(x)$ şeklindeki diferansiyel denklemleri tanıttık. Sürekli bir f fonksiyonu için $y(x)$ genel çözümünü integrasyonla bulduk: $y(x) = \int f(x)\, dx$ (Belirsiz integralin f'nin bütün ters türevlerini temsil ettiğini hatırlayın. Dolayısıyla bir ters türev bulunduğunda eklenmesi gereken bir $+C$ sabitini içerir). Bilimde, mühendislikte ve ekonomide bir çok uygulama daha da genel diferansiyel denklemler ile formüle edilen modeller içerir. Örneğin, Bölüm 7.5'te eksponansiyel büyüme ve bozunma'nın, bir $k \neq 0$ sabiti için $dy/dx = ky$ şeklinde bir diferansiyel denklemle modellendiğini bulduk. Henüz $dy/dx = y - x$ gibi diferansiyel denklemleri göz önüne almadık. Lakin böyle denklemler, uygulamalarda sık sık ortaya çıkar. Bu bölümde, $dy/dx = f(x, y)$ formunda birkaç diferansiyel denklem inceleyeceğiz. Burada f hem bağımsız ve hem de bağlı değişkenin bir fonksiyonudur. Bu diferansiyel denklemleri çözmek için belirsiz integrasyon teorisini kullanacağız. Ayrıca, analitik, grafiksel ve sayısal çözüm yöntemlerini araştıracağız.

9.1 Eğim Alanları ve Ayrılabilir Diferansiyel Denklemler

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Jules Henri Poincaré
(1854–1912)

Türevleri kapalı olarak türev alma ile hesaplarken (Bölüm 3.6), dy/dx türev ifadesinin çoğunlukla sadece bağımsız x değişkenini değil hem x ve hem de y değişkenlerini içerdiğini gördük. Bu bölüme, $dy/dx = f(x, y)$ genel diferansiyel denklemini ve bir çözümü ile ne kastedildiğini göz önüne alarak başlıyoruz. Sonra, f fonksiyonunun x'in bir fonksiyonu ile y'nin bir fonksiyonunun çarpımı olarak yazılabildiği özel formdaki denklemleri araştırıyoruz.

Birinci-Derece Genel Diferansiyel Denklemler ve Çözümleri

Birinci-derece bir diferansiyel denklem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

şeklinde bir denklemdir. Burada $f(x, y)$, xy-düzleminde bir bölgede tanımlı iki değişkenli bir fonksiyonudur. Denklem *birinci-derece* dir, çünkü sadece dy/dx birinci derece türevini içerir (daha yüksek dereceden türevler değil). Şuna işaret edelim,

$$y' = f(x, y) \quad \text{ve} \quad \frac{d}{dx}y = f(x, y)$$

denklemleri (1) Denklemine denktir ve her üç form da metinde birbiri yerine kullanılacaktır.

(1) Denkleminin bir **çözümü**, x-değerlerinden oluşan bir I aralığında (belki de sonsuz) tanımlı, türevlenebilir bir $y = y(x)$ fonksiyonudur ve bu aralıkta

$$\frac{d}{dx}y(x) = f(x, y(x))$$

dir. Yani, $y(x)$ ve türevi $y'(x)$ (1) Denkleminde yerlerine yazıldığında elde edilen denklem I aralığındaki bütün x'ler için doğru olur. Birinci-derece bir diferansiyel denklemin genel çözümü, bütün olası çözümleri içeren bir çözümdür. Genel çözüm daima bir keyfi sabit içerir, fakat çözümün bir keyfi sabit içermesi bir genel çözüm olduğu anlamına gelmez. Yani, bir çözüm genel çözüm olmadığı halde bir keyfi sabit içerebilir. Bir çözümün genel çözüm *olduğunu* saptamak, diferansiyel denklemler teorisinden daha derin sonuçlar gerektirir ve en iyisi daha ileri seviye bir derste öğrenmektir.

ÖRNEK 1 Çözüm Fonksiyonlarını Doğrulamak

C herhangi bir sabit olmak üzere

$$y = \frac{C}{x} + 2$$

fonksiyon ailesinin her üyesinin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(2 - y)$$

birinci-derece diferansiyel denkleminin $(0, \infty)$ aralığında bir çözümü olduğunu gösteriniz

Çözüm $y = C/x + 2$'nin türevini almak

$$\frac{dy}{dx} = C\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + 0 = -\frac{C}{x^2}$$

verir. Şu halde, sadece her $x \in (0, \infty)$ için

$$-\frac{C}{x^2} = \frac{1}{x}\left[2 - \left(\frac{C}{x} + 2\right)\right]$$

olduğunu sağlamamız gerekir. Bu son eşitlik, sağ taraftaki ifadeyi açmakla hemen gerçeklenir:

$$\frac{1}{x}\left[2 - \left(\frac{C}{x} + 2\right)\right] = \frac{1}{x}\left(-\frac{C}{x}\right) = -\frac{C}{x^2}$$

Bu nedenle, C'nin her değeri için $y = C/x + 2$ fonksiyonu diferansiyel denklemin bir çözümüdür. ■

Birinci-derece bir $y' = f(x, y)$ diferansiyel denklemin bir genel çözümü yerine, ters türevleri bulurken olduğu gibi, daha çok bir *özel* çözümüne gereksinim duyarız. $y(x_0) = y_0$ başlangıç koşulunu sağlayan **özel çözüm**, $x = x_0$ iken değeri y_0 olan $y = y(x)$ çözümüdür. Böylece, özel çözümün grafiği xy-düzleminde (x_0, y_0) noktasından geçer. Bir **birinci-derece başlangıç değer problemi**, bir $y(x_0) = y_0$ başlangıç koşulunu sağlayan bir $y' = f(x, y)$ diferansiyel denklemidir.

ÖRNEK 2 Bir Fonksiyonun Bir Özel Çözüm Olduğunu Doğrulamak

$$y = (x + 1) - \frac{1}{3}e^x$$

fonksiyonunun,

$$\frac{dy}{dx} = y - x, \qquad y(0) = \frac{2}{3}$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü olduğunu gösterin.

Çözüm

$$\frac{dy}{dx} = y - x$$

denklemi, $f(x, y) = y - x$ ile bir birinci-derece diferansiyel denklemdir.

Solda:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x + 1 - \frac{1}{3}e^x\right) = 1 - \frac{1}{3}e^x$$

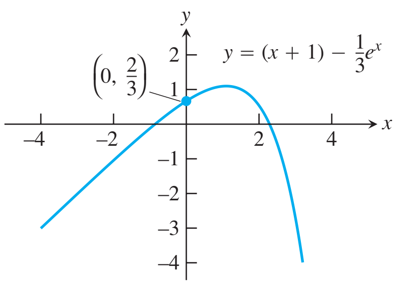
Sağda:

$$y - x = (x + 1) - \frac{1}{3}e^x - x = 1 - \frac{1}{3}e^x$$

Verilen fonksiyon başlangıç koşulunu sağlar çünkü

$$y(0) = \left[(x + 1) - \frac{1}{3}e^x\right]_{x=0} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

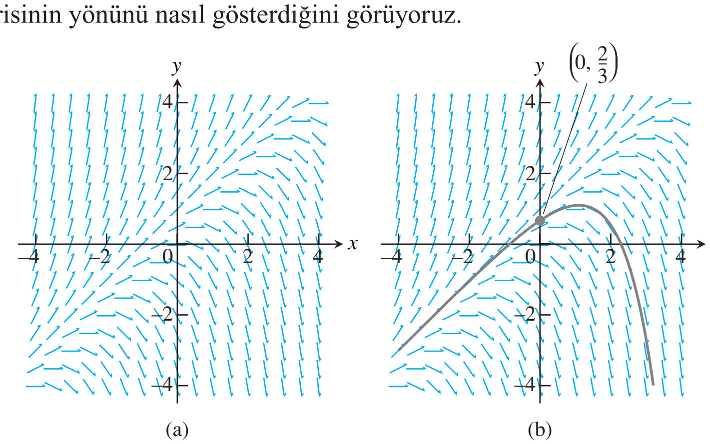
bulunur. Fonksiyonun grafiği Şekil 9.1 de gösterilmektedir. ■



ŞEKİL 9.1 $y(0) = \frac{2}{3}$ başlangıç değeri ile $dy/dx = y - x$ diferansiyel denkleminin çözümü $y = (x + 1) - \frac{1}{3}e^x$'in grafiği (Örnek 2)

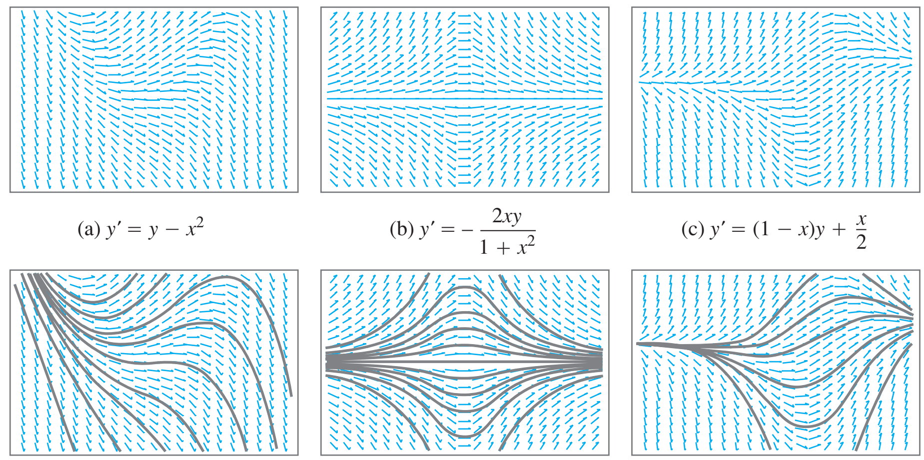
Eğim Alanları: Çözüm Eğrilerini Görmek

Bir $y' = f(x, y)$ diferansiyel denkleminin bir çözümü için bir $y(x_0) = y_0$ başlangıç koşulunu her belirlediğimizde, çözüm eğrisi (çözümün grafiği) (x_0, y_0) noktasından geçmeli ve burada eğimi $f(x_0, y_0)$ olmalıdır. Bu eğimleri, xy-düzleminde f'nin tanım kümesini oluşturan bölgeden seçilen (x, y) noktalarında eğimleri $f(x, y)$ olan kısa doğru parçaları çizerek, grafik olarak resmedebiliriz. Her doğru parçasının eğimi, (x, y) noktasından geçen çözüm eğrisinin eğimi ile aynıdır ve dolayısıyla doğru parçası burada eğriye teğettir. Sonuç resim, bir **eğim alanı** (veya **doğrultu alanı**) olarak adlandırılır ve çözüm eğrilerinin genel şeklinin bir görünümünü verir. Şekil 9.2a bir eğim alanı göstermektedir. Şekil 9.2b de bu eğim alanı içine bir özel çözüm çizilmiştir. Bu doğru parçalarının, geçtiği her noktada çözüm eğrisinin yönünü nasıl gösterdiğini görüyoruz.



ŞEKİL 9.2 (a) $\frac{dy}{dx} = y - x$ için eğim alanı. (b) $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ noktasından geçen çözüm eğrisi (Örnek 2).

Şekil 9.3 üç eğim alanı göstermektedir. Bu alanlarda çözüm eğrilerinin teğet doğru parçalarını izleyerek nasıl davrandıklarını görüyoruz.



(a) $y' = y - x^2$ (b) $y' = -\dfrac{2xy}{1+x^2}$ (c) $y' = (1-x)y + \dfrac{x}{2}$

ŞEKİL 9.3 Eğim alanları (üst satır) ve seçilmiş çözüm eğrileri (alt satır). Bilgisayar gösterimlerinde eğim parçaları, burada olduğu gibi, bazen oklarla resmedilirler. Ancak bu, eğimlerin yönleri olduğu şeklinde algılanmamalıdır, çükü yoktur.

Bir eğim alanını kağıt ve kalemle oluşturmak oldukça sıkıcı olabilir. Bizim bütün örneklerimiz bir bilgisayar tarafından üretilmiştir.

Genel diferansiyel denklemlerin çözümleri zor olmakla birlikte, bilimde ve uygulamalarda ortaya çıkan birçok önemli denklemin, özel tekniklerle çözümlerini kolaylaştıran özel formları vardır. Böyle bir sınıf ayrılabilir denklemlerdir.

Ayrılabilir Denklemler

f, x'in bir fonksiyonu ile y'nin bir fonksiyonunun çarpımı olarak ifade edilebiliyorsa, $y' = f(x, y)$ denklemi **ayrılabilir** dir. Bu durumda diferansiyel denklem

$$\frac{dy}{dx} = g(x)H(y)$$

formundadır. Bu denklemi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \qquad H(y) = \frac{1}{h(y)}$$

formunda yazarsak, bu diferansiyel form bütün y'li terimleri dy ile bir araya ve bütün x'li terimleri de dx ile bir araya getirmemizi sağlar:

$$h(y)\, dy = g(x)\, dx$$

Şimdi, bu denklemin iki tarafını da basitçe integre ederiz:

$$\int h(y)\, dy = \int g(x)\, dx \tag{2}$$

İntegrasyonları tamamladığımızda, y çözümünü x'in kapalı bir fonksiyonu şeklinde tanımlanmış olarak elde ederiz.

(2) Denkleminde her iki tarafı da basitçe integre edebileceğimiz haklılığı Değişken Dönüşümü Kuralına dayanmaktadır (Bölüm 5.5):

$$\begin{aligned}\int h(y)\,dy &= \int h(y(x))\frac{dy}{dx}\,dx \\ &= \int h(y(x))\frac{g(x)}{h(y(x))}\,dx \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{g(x)}{h(y)} \\ &= \int g(x)\,dx\end{aligned}$$

ÖRNEK 3 Bir Ayrılabilir Denklemi Çözmek

$$\frac{dy}{dx} = (1+y^2)e^x$$

diferansiyel denklemini çözün.

Çözüm $1+y^2$ hiçbir zaman sıfır olmadığından, denklemi değişkenlerine ayırarak çözebiliriz.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (1+y^2)e^x \\ dy &= (1+y^2)e^x\,dx && dy/dx\text{'e diferansiyellerin bir bölümü olarak bakın ve iki tarafı da } dx \text{ ile çarpın.} \\ \frac{dy}{1+y^2} &= e^x\,dx && (1+y^2)\text{'i bölmek} \\ \int\frac{dy}{1+y^2} &= \int e^x\,dx && \text{İki tarafı da integre edin.} \\ \tan^{-1}y &= e^x + C && C \text{ birleştirilmiş integrasyon sabitini temsil eder.}\end{aligned}$$

$\tan^{-1} y = e^x + C$ denklemi y'yi x'in kapalı bir fonksiyonu olarak verir. $-\pi/2 < e^x + C < \pi/2$ iken, iki tarafın da tanjantını alarak y'yi x'in açık bir fonksiyonu olarak çözebiliriz:

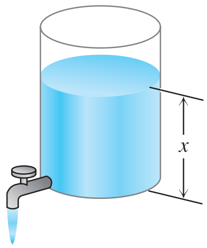
$$\begin{aligned}\tan(\tan^{-1}y) &= \tan(e^x + C) \\ y &= \tan(e^x+C)\end{aligned}$$ ■

ÖRNEK 4 Aşağıdaki denklemi çözün.

$$(x+1)\frac{dy}{dx} = x(y^2+1).$$

Çözüm Diferansiyel forma dönüştürür, değişkenlere ayırır ve integre ederiz:

$$\begin{aligned}(x+1)\,dy &= x(y^2+1)\,dx \\ \frac{dy}{y^2+1} &= \frac{x\,dx}{x+1} && x \neq -1 \\ \int\frac{dy}{1+y^2} &= \int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx \\ \tan^{-1}y &= x - \ln|x+1| + C.\end{aligned}$$ ■



ŞEKİL 9.4 Suyun dışarı akma oranı, k pozitif bir sabit olmak üzere $k\sqrt{x}$ dir. Örnek 5'te, $k = 1/2$ dir ve x feet olarak ölçülmektedir.

$$\frac{dy}{dt} = ky, \qquad y(0) = y_0$$

başlangıç değer problemi bir ayrılabilir diferansiyel denklem içerir ve $y = y_0 e^{kt}$ çözümü Eksponansiyel Değişim Yasasını verir (Bölüm 7.5). Bu başlangıç değer problemini, nüfüs artışı, radyoaktif bozunma ve ısı iletimi gibi doğal olaylara bir model olarak bulduk. Şimdi, ayrılabilir birinci-derece bir diferansiyel denklem içeren farklı bir uygulama tanıtıyoruz.

Torricelli Kanunu

Toricelli kanunu, Şekil 9.4'teki gibi bir tanktan su akıtrsanız, suyun y akış hızının bir sabit kere suyun x derinliğinin karekökü olduğunu söyler. Sabit, çıkış musluğunun büyüklüğüne bağlıdır. Örnek 5'te sabitin $1/2$ olduğunu kabul ediyoruz.

ÖRNEK 5 Bir Tank'ı Boşaltmak

Başlangıçta su ile dolu, yarıçapı 5 ft ve yüksekliği 16 ft olan dairesel dik bir silindir $0.5\sqrt{x}$ ft^3/dak oranı ile boşaltılacaktır. Herhangi bir t anında tanktaki suyun derinliği ve miktarı için bir formül bulun. Tankı boşaltmak ne kadar sürer?

Çözüm Yarıçapı r ve yüksekliği h olan dairesel dik bir silindirin hacmi $V = mr^2\, h$ dir. Dolayısıyla tankın içindeki suyun hacmi (Şekil 9.4)

$$V = \pi r^2\, h = \pi(5)^2 x = 25\pi x$$

dir. Türev almak

$$\frac{dV}{dt} = 25\pi\frac{dx}{dt} \qquad \text{V azalan ve } dx/dt < 0 \text{ olduğundan negatif dir.}$$

$$-0.5\sqrt{x} = 25\pi\frac{dx}{dt} \qquad \text{Torricelli Kanunu}$$

verir. Böylece,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt{x}}{50\pi},$$

$$x(0) = 16 \qquad t = 0 \text{ iken suyun derinliği 16 ft dir.}$$

başlangıç değer problemini elde ederiz. Diferansiyel denklemi değişkenlerine ayırarak çözeriz.

$$x^{-1/2}\,dx = -\frac{1}{50\pi}\,dt$$

$$\int x^{-1/2}\,dx = -\int \frac{1}{50\pi}\,dt \qquad \text{Her iki tarafı integre edin.}$$

$$2x^{1/2} = -\frac{1}{50\pi}t + C \qquad \text{Sabitler birleştirilmiş}$$

$x(0) = 16$ başlangıç koşulu C değerini belirler.

$$2(16)^{1/2} = -\frac{1}{50\pi}(0) + C$$

$$C = 8$$

TARİHSEL BIYOGRAFİ

Evangelista Torricelli
(1608–1647)

C = 8 ile

$$2x^{1/2} = -\frac{1}{50\pi}t + 8 \qquad \text{veya} \qquad x^{1/2} = 4 - \frac{t}{100\pi}$$

elde ederiz. Aradığımız formüller

$$x = \left(4 - \frac{t}{100\pi}\right)^2 \qquad \text{ve} \qquad V = 25\pi x = 25\pi\left(4 - \frac{t}{100\pi}\right)^2$$

dir. Herhangi bir t anında tanktaki suyun derinliği $(4 - t/(100\pi))^2$ ft ve tanktaki su miktarı $25\pi(4 - t/(100\pi))^2$ ft^3 tür. $t = 0$ için, gerekli olduğu gibi, $x = 16$ ft ve $V = 400\pi$ ft^3 tür. Tank, yaklaşık olarak 21 saat olan $t = 400\pi$ dakikada boşalacaktır ($V = 0$). ■

ALIŞTIRMALAR 9.1

Çözümleri Doğrulamak

1 ve 2 alıştırmalarında, her $y = f(x)$ fonksiyonunun verilen diferansiyel denklemlerin bir çözümü olduğunu gösterin.

1. $2y' + 3y = e^{-x}$

a. $y = e^{-x}$ **b.** $y = e^{-x} + e^{-(3/2)x}$

c. $y = e^{-x} + Ce^{-(3/2)x}$

2. $y' = y^2$

a. $y = -\dfrac{1}{x}$ **b.** $y = -\dfrac{1}{x+3}$ **c.** $y = -\dfrac{1}{x+C}$

3 ve 4 alıştırmalarında $y = f(x)$ fonksiyonunun verilen diferansiyel denklemin bir çözümü olduğunu gösterin.

3. $y = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt, \quad x^2y' + xy = e^x$

4. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}\displaystyle\int_1^x \sqrt{1+t^4}\,dt, \quad y' + \frac{2x^3}{1+x^4}y = 1$

5–8 alıştırmalarında, her fonksiyonun verilen başlangıç değer probleminin çözümü olduğunu gösterin.

Diferansiyel denklem	Başlangıç koşulu	Çözüm adayı
5. $y' + y = \dfrac{2}{1+4e^{2x}}$	$y(-\ln 2) = \dfrac{\pi}{2}$	$y = e^{-x}\tan^{-1}(2e^x)$
6. $y' = e^{-x^2} - 2xy$	$y(2) = 0$	$y = (x-2)e^{-x^2}$
7. $xy' + y = -\sin x$, $x > 0$	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$	$y = \dfrac{\cos x}{x}$
8. $x^2y' = xy - y^2$, $x > 1$	$y(e) = e$	$y = \dfrac{x}{\ln x}$

Ayrılabilir Denklemler

9–18 alıştırmalarındaki diferansiyel denklemleri çözün.

9. $2\sqrt{xy}\,\dfrac{dy}{dx} = 1, \quad x, y > 0$

10. $\dfrac{dy}{dx} = x^2\sqrt{y}, \quad y > 0$

11. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}$

12. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 e^{-y}$

13. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{y}\cos^2\sqrt{y}$

14. $\sqrt{2xy}\,\dfrac{dy}{dx} = 1$

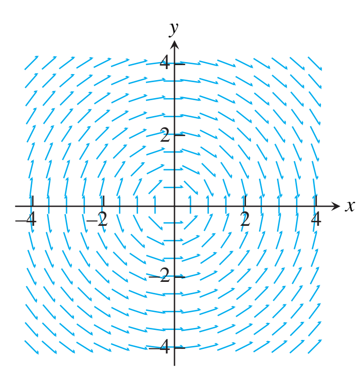
15. $\sqrt{x}\,\dfrac{dy}{dx} = e^{y+\sqrt{x}}, \quad x > 0$

16. $(\sec x)\dfrac{dy}{dx} = e^{y+\sin x}$

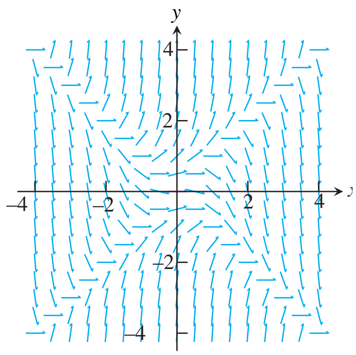
17. $\dfrac{dy}{dx} = 2x\sqrt{1-y^2}, \quad -1 < y < 1$

18. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{2x-y}}{e^{x+y}}$

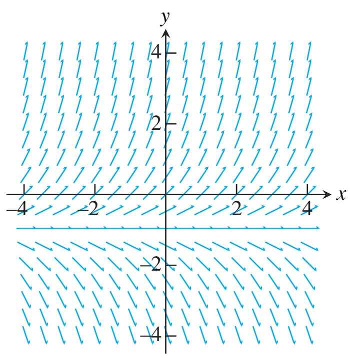
19–22 alıştırmalarında, diferansiyel denklemleri aşağıda grafikleri çizilmiş olan eğim alanları ile eşleyin.



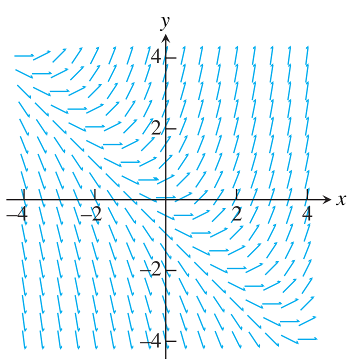
(a)



(b)



(c)



(d)

19. $y' = x + y$

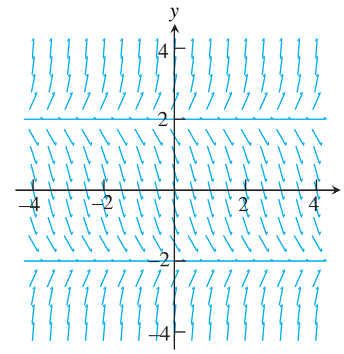
20. $y' = y + 1$

21. $y' = -\frac{x}{y}$

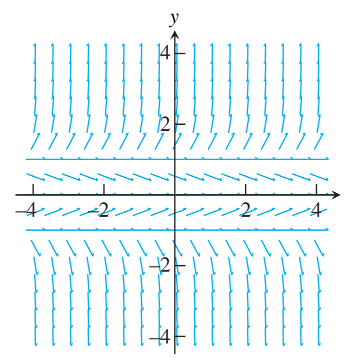
22. $y' = y^2 - x^2$

23 ve 24 alıştırmalarında eğim alanlarını kopyalayın ve içine bazı çözüm eğrilerini çizin.

23. $y' = (y + 2)(y - 2)$



24. $y' = y(y + 1)(y - 1)$



BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Eğim Alanları ve Çözüm Eğirileri

25–30 alıştırmalarında, bir eğim alanı elde edin ve buna verilen noktalardan geçen çözüm eğrilerinin grafiklerini ekleyin.

25. $y' = y$

a. $(0, 1)$ **b.** $(0, 2)$ **c.** $(0, -1)$

26. $y' = 2(y - 4)$

a. $(0, 1)$ **b.** $(0, 4)$ **c.** $(0, 5)$

27. $y' = y(x + y)$

a. $(0, 1)$ **b.** $(0, -2)$ **c.** $(0, 1/4)$ **d.** $(-1, -1)$

28. $y' = y^2$

a. $(0, 1)$ **b.** $(0, 2)$ **c.** $(0, -1)$ **d.** $(0, 0)$

29. $y' = (y - 1)(x + 2)$

a. $(0, -1)$ **b.** $(0, 1)$ **c.** $(0, 3)$ **d.** $(1, -1)$

30. $y' = \dfrac{xy}{x^2 + 4}$

a. $(0, 2)$ **b.** $(0, -6)$ **c.** $\left(-2\sqrt{3}, -4\right)$

31-32 Alıştırmalarında, bir eğim alanı elde edin ve belirtilen aralıktaki özel çözümü çizin. Diferansiyel denklemin genel çözümünü bulmak için BCS'nizin Diferansiyel denklem çözücüsünü (DE solver) kullanın.

31. **Lojistik bir denklem** $y' = y(2 - y), \quad y(0) = 1/2;$
$0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 3$

32. $y' = (\sin x)(\sin y), \quad y(0) = 2; \quad -6 \le x \le 6, \quad -6 \le y \le 6$

33 ve 34 alıştırmalarının temel fonksiyonlar cinsinden açık çözümleri yoktur. Her bir diferansiyel denklemi grafik olarak incelemak için bir BCS kullanın.

33. $y' = \cos(2x - y), \quad y(0) = 2; \quad 0 \le x \le 5, \quad 0 \le y \le 5;$
$y(2)$

34. **Bir Gompertz denklemi** $y' = y(1/2 - \ln y), \quad y(0) = 1/3;$
$0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 3; \quad y(3)$

35. $f(x)$ aşağıdakiler gibiyse, başlangıç koşulu $y(0) = 0$ olan $y' + y = f(x)$ denkleminin çözümünü bulmak için bir BCS kullanın.

a. $2x$ **b.** $\sin 2x$ **c.** $3e^{x/2}$ **d.** $2e^{-x/2}\cos 2x$.

Dört çözümü de $-2 \le x \le 6$ aralığında çizerek sonuçları karşılaştırın.

36. **a.** Bir BCS kullanarak $-3 \le x \le 3$ ve $-3 \le x \le 3$ bölgesinde

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}$$

diferansiyel denkleminin eğim alanını çizin.

b. Değişkenlere ayırın ve genel çözümü kapalı şekilde bulmak için bir BCS integral alıcısı kullanın.

c. Bir BCS kapalı fonksiyon çizicisi kullanarak, keyfi sabitin $C = -6, -4, -2, 0, 2, 4$ ve 6 değerleri için çözüm eğrilerini çizin.

d. $y(0) = -1$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümü bulun ve grafiğini çizin.

9.2 Birinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler

Eksponansiyel büyüme $dy/dx = ky$ bozunma denklemi (Bölüm 7.5) değişkenlerine ayrılabilir bir diferansiyel denklemdir. Ayrıca, *lineer formdaki* bir diferansiyel denklemin bir özel halidir. Lineer diferansiyel denklemler, elektrik devreleri ve kimyasal karışım problemlerini de içeren birçok gerçek-dünya olayını modellerler.

Birinci mertebeden bir **lineer** diferansiyel denklem, P ve Q x'in sürekli fonksiyonları olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x). \tag{1}$$

şeklinde yazılabilen bir denklemdir. (1) denklemi lineer denklemin **standart formu** dur.

Eksponansiyel büyüme / bozunma denklemi

$$\frac{dy}{dx} - ky = 0$$

standart formuna getirilebildiğinden, $P(x) = -k$ ve $Q(x) = 0$ ile bir lineer denklem olduğunu görürüz. (1) denklemi lineerdir (y'ye göre) çünkü y ve türevi dy/dx sadece birinci kuvvetten gözükürler, birbirileri ile çarpılmazlar ve bir fonksiyonun argümanı olarak gözükmezler ($\sin y$, e^y veya $\sqrt{dy/dx}$ gibi).

ÖRNEK 1 Standart Formu Bulmak

Aşağıdaki denklemi standart formda yazın:

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y, \qquad x > 0$$

Çözüm

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y$$

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{3}{x}y \qquad x \text{ ile bölün}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x \qquad P(x) = -3x \text{ ve } Q(x) = x \text{ ile standart form}$$

$P(x)$'in $+3/x$ değil $-3/x$ olduğuna dikkat edin. Standart form $y' + P(x)y = Q(x)$ dir. Dolayısıyla eksi işareti v'in formülünün bir parçasıdır. ■

Lineer Denklemleri Çözmek

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2}$$

denklemini, sol tarafı $v(x) \cdot y$ çarpımının türevi haline getiren *pozitif* bir $v(x)$ fonksiyonu ile her iki tarafı çarparak çözeriz. v'nin nasıl bulunduğunu göstereceğiz fakat önce, bulunduğunda, aradığımız çözümü nasıl verdiğini göstermek istiyoruz.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$ Orijinal denklem standart formda

$$v(x)\frac{dy}{dx} + P(x)v(x)y = v(x)Q(x)$$ Pozitif $v(x)$ ile çarpın.

$$\frac{d}{dx}(v(x) \cdot y) = v(x)Q(x)$$ $v\frac{dy}{dx} + Pvy = \frac{d}{dx}(v \cdot y)$. olmasını sağlayan $v(x)$ seçilmiştir.

$$v(x) \cdot y = \int v(x)Q(x)\,dx$$ x'e göre integre edin.

$$y = \frac{1}{v(x)}\int v(x)Q(x)\,dx \tag{3}$$

(3) denklemi (2) denkleminin çözümünü $v(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonları cinsinden ifade eder. $v(x)$'e (2) denkleminin bir **integrasyon çarpanı** denir, zira onun varlığı denklemi integre edilebilir hale getirir.

$P(x)$'in formülü çözümde neden görülmez? Aslında görülür, fakat doğrudan değil, pozitif $v(x)$ fonksiyonunun kurulmasında bulunur.

$$\frac{d}{dx}(vy) = v\frac{dy}{dx} + Pvy$$ v üzerindeki koşul

$$v\frac{dy}{dx} + y\frac{dv}{dx} = v\frac{dy}{dx} + Pvy$$ Türevler için Çarpım Kuralı

$$y\frac{dv}{dx} = Pvy$$ $v\frac{dy}{dx}$ terimleri sadeleşir.

Son denklem aşağıdaki koşullarda geçerli olacaktır:

$$\frac{dv}{dx} = Pv$$

$$\frac{dv}{v} = P\,dx$$ Değişkenlerine ayrılmış, $v > 0$

$$\int \frac{dv}{v} = \int P\,dx$$ İki tarafı da integre edin.

$$\ln v = \int P\,dx$$ $v > 0$ olduğu için, $\ln v$'de mutlak değer işaretlerine gerek yoktur..

$$e^{\ln v} = e^{\int P\,dx}$$ v'yi çözmek için iki tarafın da eksponansiyelini alın.

$$v = e^{\int P\,dx} \tag{4}$$

Böylece, $v(x)$ (4) denklemi ile verilmek üzere (1) denkleminin genel çözümünün bir formülü (3) denklemi ile verilmiştir. Bununla birlikte, formülü ezberlemek yerine, sadece $P(x)$'in doğru olarak belirlendiği standart formu elde ettikten sonra integrasyon çarpanının nasıl bulunduğunu hatırlayın.

> $y' = P(x)y = Q(x)$ lineer denklemini çözmek için, her iki tarafı $v(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ integrasyon çarpanı ile çarpın ve her iki tarafı integre edin.

Bu prosedürde sol taraftaki çarpımı integre ettiğinizde, v'nin tanımından dolayı, daima integrasyon çarpanı ile y çözümünün $v(x)y$ çarpımını bulursunuz.

ÖRNEK 2 Birinci Mertebeden Bir Lineer Diferansiyel Denklemi Çözmek

Aşağıdaki denklemi çözün:

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y, \qquad x > 0$$

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Adrien Marie Legendre (1752–1833)

Çözüm Önce denklemi standart forma getiririz (Örnek 1):

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x$$

Dolayısıyla $P(x) = -3/x$ belirlenmiştir.

İntegrasyon çarpanı

$$\begin{aligned} v(x) = e^{\int P(x)\,dx} &= e^{\int(-3/x)\,dx} \\ &= e^{-3\ln|x|} \\ &= e^{-3\ln x} \\ &= e^{\ln x^{-3}} = \frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

İntegrasyon sabiti 0 dır, dolayısıyla v olabildiğ kadar sadedir $x > 0$.

dir. Sonra standart formun iki tarafını da $v(x)$ ile çarpar ve integre ederiz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3}\cdot\left(\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y\right) &= \frac{1}{x^3}\cdot x \\ \frac{1}{x^3}\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x^4}y &= \frac{1}{x^2} \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}y\right) &= \frac{1}{x^2} && \text{Sol taraf } \tfrac{d}{dx}(v\cdot y) \text{ dir.} \\ \frac{1}{x^3}y &= \int\frac{1}{x^2}\,dx && \text{Her iki tarafı integre edin} \\ \frac{1}{x^3}y &= -\frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

Bu son denklemi y'ye göre çözmek genel çözümü verir:

$$y = x^3\left(-\frac{1}{x} + C\right) = -x^2 + Cx^3, \qquad x > 0$$

■

ÖRNEK 3 Birinci Mertebeden Bir Lineer Başlangıç Değer Problemi Çözmek

Aşağıdaki denklemi çözün:

$$xy' = x^2 + 3y, \qquad x > 0$$

$y(1) = 2$ başlangıç koşulu verilmektedir.

Çözüm İlk önce diferansiyel denklemi çözerek (Örnek 2)

$$y = -x^2 + Cx^3, \qquad x > 0$$

buluruz. Sonra başlangıç değerini kullanarak C'yi buluruz:

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + Cx^3 \\ 2 &= -(1)^2 + C(1)^3 \qquad \text{$x = 1$ iken $y = 2$} \\ C &= 2 + (1)^2 = 3. \end{aligned}$$

Başlangıç değer probleminin çözümü $y = -x^2 + 3x^3$ fonksiyonudur. ■

ÖRNEK 4

$$3xy' - y = \ln x + 1, \qquad x > 0$$

denkleminin, $y(1) = -2$ koşulunu sağlayan özel çözümünü bulun.

Çözüm $x > 0$ ile denklemin standart formunu yazarız:

$$y' - \frac{1}{3x}y = \frac{\ln x + 1}{3x}$$

Buradan integrasyon çarpanı

$$v = e^{\int -dx/3x} = e^{(-1/3)\ln x} = x^{-1/3} \qquad x > 0$$

olarak bulunur. Böylece,

$$x^{-1/3}y = \frac{1}{3}\int (\ln x + 1)x^{-4/3}\,dx \qquad \text{Sol taraf vy dir.}$$

olur. Sağ tarafın kısmi integrasyon ile integrasyonu

$$x^{-1/3}y = -x^{-1/3}(\ln x + 1) + \int x^{-4/3}\,dx + C$$

verir. Bu nedenle,

$$x^{-1/3}y = -x^{-1/3}(\ln x + 1) - 3x^{-1/3} + C$$

veya y'ye göre çözmekle,

$$y = -(\ln x + 4) + Cx^{1/3}$$

buluruz. $x = 1$ ve $y = -2$ iken bu son denklem

$$-2 = -(0 + 4) + C$$

haline gelir, dolayısıyla

$$C = 2$$

dir.

y'nin denkleminde yerine yazmak özel çözümü verir.

$$y = 2x^{1/3} - \ln x - 4$$ ■

Örnek 2'deki diferansiyel denklemi çözerken her iki tarafı da integrasyon çarpanı ile çarptıktan sonra iki tarafın integralini aldık. Halbuki, Örnek 4'te olduğu gibi, sol tarafın integralinin daima integrasyon çarpanı ile çözüm fonksiyonunun çarpımı $v(x) \cdot y$ olduğunu hatırlayarak yapılan işi kısaltabiliriz. Bunun anlamı, (3) denkleminden

$$v(x)y = \int v(x)Q(x)\,dx$$

dir. Sadece integrasyon çarpanı $v(x)$ ile (1) denkleminin sağ tarafı $Q(x)$'in çarpımını integre etmemiz ve genel çözümü elde etmek için $v(x)y$'ye eşitlememiz gerekir. Buna rağmen, çözüm prosedüründe $v(x)$'in rolünü vurgulamak için bazen Örnek 2'de olduğu gibi bütün prosedürü takip ederiz.

(1) denklemi ile verilen standart formdaki $Q(x)$ özdeş olarak sıfır ise lineer denklemin değişkenlerine ayrılabilir olduğuna dikkat ediniz:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \qquad Q(x) \equiv 0$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx \qquad \text{Değişkenlerine ayrılmış}$$

Şimdi, birinci mertebeden bir lineer diferansiyel denklemle modellenen iki uygulama gösteriyoruz.

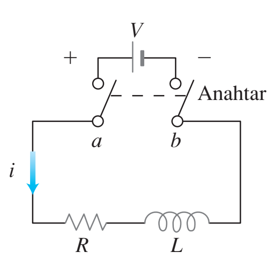
RL Devreleri

Şekil 9.5'teki diyagramda toplam direnci sabit R ohm ve bir sarım olarak gösterilen öz- indüktansı da sabit L henri olan bir elektrik devresi görülmektedir. Sabit V voltluk bir elektrik kaynağını a ve b uçlarında bileştirecek şekilde kapatılabilen bir anahtar vardır.

Böyle bir devre için, $V = RI$, Ohm yasası değiştirilmelidir. Değiştirilmiş hali

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V \tag{5}$$

ile verilir. Burada i akımın amper olarak şiddeti ve t saniye olarak zamandır. Bu denklemi çözerek, anahtar kapandıktan sonra akımın nasıl akacağını bulabiliriz.



ŞEKİL 9.5 Örnek 5'teki *RL* devresi.

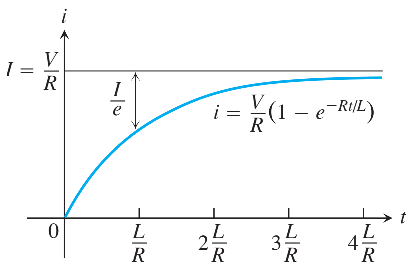
ÖRNEK 5 Elektrik Akımı

Şekil 9.5'teki *RL* devresi $t = 0$ anında kapatılıyor. Akım, zamanın fonksiyonu olarak nasıl akacaktır?

Çözüm (5) denklemi, t'nin bir fonksiyonu olarak i'nin bir lineer birinci mertebeden diferansiyel denklemidir. Standart formu

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L} \tag{6}$$

ve $t = 0$ iken $i = 0$ ise, karşı gelen çözümü



ŞEKİL 9.6 Örnek 9'daki RL devresindeki akımın büyümesi. I akımın durgun durum değeridir. $t = L/R$ değeri devrenin zaman sabitidir. Akım 3 zaman sabiti içinde durgun durum değerinin %5 yakınına gelir. (Alıştırma 31)

$$i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-(R/L)t} \tag{7}$$

olarak bulunur (Alıştırma 32). R ve L pozitif olduklarından, $-(R/L)$ negatiftir ve $t \to \infty$ iken $e^{-(R/L)t} \to 0$ olur. Böylece

$$\lim_{t\to\infty} i = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-(R/L)t}\right) = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}\cdot 0 = \frac{V}{R}$$

bulunur. Herhangi bir zamanda, akım teorik olarak V/R'den azdır, fakat zaman geçtikçe akım **durgun durum değeri** V/R'ye yaklaşır.

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V$$

denklemine göre, $I = V/R$, ya $L = 0$ olduğunda (indüktans yok) ya da $di/dt = 0$ (durgun akım, i = sabit) ise devreden akacak akımdır (Şekil 9.6).

(7) denklemi (6) denkleminin çözümünü iki terimin toplamı olarak ifade eder: bir **durgun durum çözümü** V/R ve $t \to \infty$ iken sıfıra giden bir **geçici çözüm** $-(V/R)e^{-(R/L)t}$.

Karışım Problemleri

Bir sıvı çözelti içindeki (veya bir gazdaki) bir kimyasal, sıvıyı (veya gazı) ve muhtemelen belirli miktarda erimiş kimyasalı içeren bir kaba akar. Karışım karıştırılarak üniform hale getirilir ve bilinen bir hızla kaptan dışarı akar. Bu işlemde genellikle herhangi bir zamanda kaptaki kimyasal miktarını bilmek önemlidir. İşlemi tanımlayan diferansiyel denklem

$$\begin{matrix}\text{Kaptaki}\\ \text{miktarın}\\ \text{değişim oranı}\end{matrix} = \begin{pmatrix}\text{Kimyasalın}\\ \text{geliş}\\ \text{hızı}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Kimyasalın}\\ \text{çıkış}\\ \text{hızı}\end{pmatrix} \tag{8}$$

formülüne dayanır. $y(t)$, t anında kapta bulunan kimyasal miktarı ve $V(t)$, t anında kapta bulunan toplam sıvının hacmiyse, kimyasalın t anında çıkış hızı

$$\begin{aligned}\text{Çıkış hızı} &= \frac{y(t)}{V(t)}\cdot(\text{akış hızı})\\ &= \begin{pmatrix}t \text{ anında kaptaki}\\ \text{konsantrasyon}\end{pmatrix}\cdot(\text{akış hızı})\end{aligned} \tag{9}$$

olur. Buna bağlı olarak (8) denklemi

$$\frac{dy}{dt} = (\text{kimyasalın geliş hızı}) - \frac{y(t)}{V(t)}\cdot(\text{akış hızı}) \tag{10}$$

halini alır. Örneğin, y pound, V galon ve t dakika olarak ölçülüyorsa, (10) denklemindeki birimler

$$\frac{\text{pound}}{\text{dakika}} = \frac{\text{pound}}{\text{dakika}} - \frac{\text{pound}}{\text{galon}}\cdot\frac{\text{galon}}{\text{dakika}}$$

olur.

ÖRNEK 6 Petrol Rafinerisi Depolama Tankı

Bir petrol rafinerisindeki bir depolama tankı başlangıçta içinde 100 lb'lik bir katkı malzemesi çözülmüş olan 2000 galon mazot bulundurmaktadır. Kış hazırlıkları için, galon başına 2 lb katkı maddesi içeren mazot tanka 40 galon/dak hızla eklenmektedir. İyice



ŞEKİL 9.7 Örnek 6'daki depolama tankı bir çıktı ürünü elde etmek için depolanmış sıvı ile içine akıtılan sıvıyı karıştırmaktadır.

karışmış karışım 45 galon/dak hızla dışarı pompalanmaktadır. İşlem başladıktan 20 dakika sonra tanktaki katkı maddesi miktarı ne kadardır (Şekil 9.7)?

Çözüm t anında tanktaki katkı maddesinin miktarı (pound olarak) y olsun. $t = 0$ iken $y = 100$ olduğunu biliyoruz. Herhangi bir t anında tanktaki mazotun ve çözeltideki katkının galon sayısı

$$\begin{aligned} V(t) &= 2000 \text{ gal} + \left(40 \frac{\text{gal}}{\text{dak}} - 45 \frac{\text{gal}}{\text{dak}}\right)(t \text{ dak}) \\ &= (2000 - 5t) \text{ gal}. \end{aligned}$$

dur. Bu nedenle,

$$\begin{aligned} \text{Dışarı oran} &= \frac{y(t)}{V(t)} \cdot \text{ dışarı akış hızı} && \text{(9) denklemi} \\ &= \left(\frac{y}{2000 - 5t}\right) 45 && \text{Dışarı akış hızı 45 gal/dak ve } v = 2000 - 5t \text{ dir.} \\ &= \frac{45y}{2000 - 5t} \frac{\text{lb}}{\text{dak}} \end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \text{İçeri oran} &= \left(2 \frac{\text{lb}}{\text{gal}}\right)\left(40 \frac{\text{gal}}{\text{dak}}\right) \\ &= 80 \frac{\text{lb}}{\text{dak}} && \text{(10) denklemi} \end{aligned}$$

dır. Karışım işlemini modelleyen diferansiyel denklem, dakika başına pound olarak

$$\frac{dy}{dt} = 80 - \frac{45y}{2000 - 5t}$$

dir. Bu diferansiyel denklemi çözmek için önce onu standart formda yazarız:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{45}{2000 - 5t} y = 80$$

Böylece, $P(t) = 45/(2000 - 5t)$ ve $Q(t) = 80$ bulunur.

İntegrasyon çarpanı

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{\int P\,dt} = e^{\int \frac{45}{2000-5t}\,dt} \\ &= e^{-9\ln(2000-5t)} \qquad 2000 - 5t > 0 \\ &= (2000 - 5t)^{-9} \end{aligned}$$

dur. Standart denklemin iki tarafını da $v(t)$ ile çarparak integre etmek

$$(2000 - 5t)^{-9} \cdot \left(\frac{dy}{dt} + \frac{45}{2000 - 5t}\,y\right) = 80(2000 - 5t)^{-9}$$

$$(2000 - 5t)^{-9}\,\frac{dy}{dt} + 45(2000 - 5t)^{-10}\,y = 80(2000 - 5t)^{-9}$$

$$\frac{d}{dt}\left[(2000 - 5t)^{-9}y\right] = 80(2000 - 5t)^{-9}$$

$$(2000 - 5t)^{-9}y = \int 80(2000 - 5t)^{-9}\,dt$$

$$(2000 - 5t)^{-9}y = 80 \cdot \frac{(2000 - 5t)^{-8}}{(-8)(-5)} + C$$

verir. Genel çözüm

$$y = 2(2000 - 5t) + C(2000 - 5t)^9.$$

dur. $t = 0$ iken $y = 100$ olduğundan C'nin değerini belirleyebiliriz:

$$100 = 2(2000 - 0) + C(2000 - 0)^9$$

$$C = -\frac{3900}{(2000)^9}$$

Başlangıç değer probleminin özel çözümü

$$y = 2(2000 - 5t) - \frac{3900}{(2000)^9}(2000 - 5t)^9$$

dur. İşlem başladıktan 20 dakika sonra tanktaki katkı maddesi miktarı

$$y(20) = 2[2000 - 5(20)] - \frac{3900}{(2000)^9}[2000 - 5(20)]^9 \approx 1342 \text{ lb}$$

dir. ■

ALIŞTIRMALAR 9.2

Birinci Mertebe Lineer Denklemler

1–14 alıştırmalarındaki diferansiyel denklemleri çözün.

1. $x\dfrac{dy}{dx} + y = e^x, \quad x > 0$

2. $e^x\dfrac{dy}{dx} + 2e^x y = 1$

3. $xy' + 3y = \dfrac{\sin x}{x^2}, \quad x > 0$

4. $y' + (\tan x)y = \cos^2 x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

5. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 1 - \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

6. $(1 + x)y' + y = \sqrt{x}$

7. $2y' = e^{x/2} + y$

8. $e^{2x}y' + 2e^{2x}y = 2x$

9. $xy' - y = 2x\ln x$

10. $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x}{x} - 2y, \quad x > 0$

11. $(t - 1)^3\dfrac{ds}{dt} + 4(t - 1)^2 s = t + 1, \quad t > 1$

12. $(t+1)\dfrac{ds}{dt} + 2s = 3(t+1) + \dfrac{1}{(t+1)^2}, \quad t > -1$

13. $\sin\theta \dfrac{dr}{d\theta} + (\cos\theta)r = \tan\theta, \quad 0 < \theta < \pi/2$

14. $\tan\theta \dfrac{dr}{d\theta} + r = \sin^2\theta, \quad 0 < \theta < \pi/2$

Başlangıç Değer Problemlerini Çözmek

15–20 alıştırmalarındaki başlangıç değer problemlerini çözün.

15. $\dfrac{dy}{dt} + 2y = 3, \quad y(0) = 1$

16. $t\dfrac{dy}{dt} + 2y = t^3, \quad t > 0, \quad y(2) = 1$

17. $\theta\dfrac{dy}{d\theta} + y = \sin\theta, \quad \theta > 0, \quad y(\pi/2) = 1$

18. $\theta\dfrac{dy}{d\theta} - 2y = \theta^3\sec\theta\tan\theta, \quad \theta > 0, \quad y(\pi/3) = 2$

19. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} - 2(x^2+x)y = \dfrac{e^{x^2}}{x+1}, \quad x > -1, \quad y(0) = 5$

20. $\dfrac{dy}{dx} + xy = x, \quad y(0) = -6$

21. Aşağıdaki eksponansiyel büyüme/bozunma başlangıç değer probleminde, diferansiyel denklemi $P(x) = -k$ ve $Q(x) = 0$ ile birinci mertebe bir lineer denklem gibi düşünerek y'yi t'nin bir fonksiyonu olarak çözünüz.

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad (k \text{ sabit}) \qquad y(0) = y_0$$

22. Aşağıdaki başlangıç değer probleminde u'yu t'nin bir fonksiyonu olarak çözünüz.

$$\frac{du}{dt} + \frac{k}{m}u = 0 \qquad (k \text{ ve } m \text{ pozitif sabitler}) \qquad u(0) = u_0$$

a. Birinci mertebe bir lineer denklem olarak.

b. Değişkenlerine ayrılabilir bir denklem olarak

Teori ve Örnekler

23. Aşağıdaki denklemlerden herhangi biri doğru mudur? Yanıtınızı açıklayın.

a. $x\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = x\ln|x| + C$ **b.** $x\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = x\ln|x| + Cx$

24. Aşağıdaki denklemlerden herhangi biri doğru mudur? Yanıtınızı açıklayın.

a. $\dfrac{1}{\cos x}\displaystyle\int \cos x\,dx = \tan x + C$

b. $\dfrac{1}{\cos x}\displaystyle\int \cos x\,dx = \tan x + \dfrac{C}{\cos x}$

25. Tuz karışımı Bir depoda başlangıçta içinde 50 lb tuz çözülmüş olan 100 galon tuzlu su bulunmaktadır. Depoya 5 galon/dak hızla içinde 2 lb/galon tuz bulunduran tuzlu su akmaktadır. Karışım karıştırılarak üniform tutulmakta ve depodan 4 galon/dak hızla dışarı akmaktadır.

a. Tuz t anında depoya hangi hızla (pound/dak) girer?

b. t anında depodaki tuzlu suyun hacmi nedir?

c. t anında tuz hangi hızla (pound/dak) depoyu terk eder?

d. Karışım işlemini tanımlayan başlangıç değer problemini yazın ve çözün.

e. İşlem başladıktan 25 dakika sonra depodaki tuz konsantrasyonunu bulun.

26. Karışım problemi 200 galonluk bir deponun yarısı damıtık su ile doludur. $t = 0$ anında 0.5 lb/galon konsantre içeren bir çözelti 5 galon/dak hızla depoya akmakta ve iyice karıştırılan karışım 3 galon/dak hızla geri çekilmektedir.

a. Depo ne zaman dolar?

b. Depo dolduğu anda kaç pound konsantre içerecektir?

27. Gübre karışımı Bir depoda 100 galon temiz su bulunmaktadır. 1 lb/gal çözülebilir çimen gübresi içeren bir çözelti 1 galon/dak hızla depoya akmakta ve karışım 3 galon/dak hızla depodan dışarı pompalanmaktadır. Depodaki maksimum gübre miktarını ve maksimuma erişmek için gereken zamanı bulun.

28. Karbon dioksit kirliliği Bir şirketin yönetici konferans odasında başlangıçta içinde karbon monoksit olmayan 4500 fit küp hava vardır. $t = 0$ anından itibaren, %4 karbon monoksit içeren sigara dumanı 0.3 ft^3/dak hızla odaya verilmeye başlanır. Tavandaki havalandırma odayı havalandırır ve hava odayı aynı hızla terkeder. Odadaki karbon monoksit konsantrasyonunun %0.01'e eriştiği zamanı bulun.

29. Kapalı bir *RL* devresindeki akım Bir RL devresindeki anahtar kapatıldıktan sonra, i akımının durgun durum değerinin yarısına ulaşması kaç saniye sürer? Zamanın ne kadar gerilim uygulandığına değil, R ve L'ye bağlı olduğuna dikkat edin.

30. Açık bir RL devresindeki akım Bir RL devresindeki akım durgun durum değerine ulaştığında anahtar açılırsa, azalan akım (aşağıda grafiği verilmiştir), $V = 0$ olmak üzere (5) denklemi olan

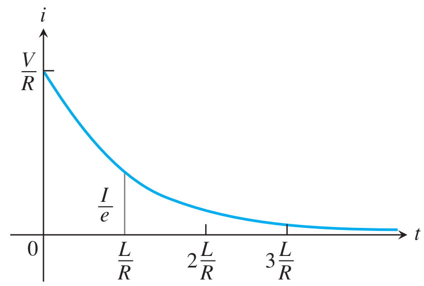
$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

denklemine uyar.

a. Denklemi çözerek i'yi t'nin bir fonksiyonu olarak bulun.

b. Anahtar açıldıktan ne kadar süre sonra akım başlangıçtaki değerinin yarısına düşecektir?

c. $t = L/R$ iken akımın değerinin I/e olduğunu gösterin. (Bu zamanın önemi sonraki alıştırmada açıklanacaktır.)



31. Zaman sabitleri Mühendisler L/R sabitine Şekil 9.6'daki devrenin *zaman sabiti* derler. Zaman sabitinin önemi, akımın anahtar kapatıldıktan sonra üç zaman sabiti içerisinde son değerinin %95'ine ulaşmasından ileri gelir (Şekil 9.6). Yani, zaman sabiti, tek bir devrenin ne zaman dengeye geleceğinin bir ölçüsüdür.

a. (7) denkleminde $t = 3L/R$'ye karşılık gelen i değerini bulun ve bunun durgun durun akımı $I = V/R$'nin %95'i olduğunu gösterin.

b. Anahtar kapandıktan 2 zaman sabiti sonra (yani $t = 2L/R$ iken) devreden durgun durum akımının yaklaşık ne kadarı akım akacaktır?

32. Örnek 5'teki (7) denkleminin türetilişi

a. $$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$$

denkleminin çözümünün

$$i = \frac{V}{R} + Ce^{-(R/L)t}$$

olduğunu gösterin.

b. Then use the initial condition $i(0) = 0$ to determine the value of C. This will complete the derivation of Equation (7).

c. $i = V/R$'nin (6) denkleminin bir sonucu olduğunu ve $i = Ce^{-(R/L)t}$'nin

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$$

denklemini sağladığını gösterin.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

James Bernoulli
(1654–1705)

Bernoulli diferansiyel denklemi

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

formundadır. $n = 0$ veya 1 ise Bernoulli denkleminin lineer olduğuna dikkat edin. n'nin başka değerleri için $u = y^{1-n}$ dönüşümü Bernoulli denklemini

$$\frac{du}{dx} + (1 - n)P(x)u = (1 - n)Q(x)$$

lineer denkleme dönüştürür. Örneğin,

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{-x}y^2$$

denkleminde $n = 2$ dir. Bu nedenle $u = y^{1-2} = y^{-1}$ ve $du/dx = -y^{-2}\,dy/dx$ dir. Buradan, $dy/dx = -y^{-2}\,du/dx = -u^{-2}\,du/dx$ bulunur. Dönüşümleri orijinal denklemde yerine yazmak

$$-u^{-2}\frac{du}{dx} - u^{-1} = e^{-x}u^{-2}$$

veya buna denk olarak

$$\frac{du}{dx} + u = -e^{-x}$$

verir. Bu son denklem bağlı değişken (bilinmeyen) u'ya göre lineer dir.

33–36 alıştırmalarındaki diferansiyel denklemleri çözün.

33. $y' - y = -y^2$

34. $y' - y = xy^2$

35. $xy' + y = y^{-2}$

36. $x^2y' + 2xy = y^3$

9.3 Euler Yöntemi

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Leonhard Euler
(1703–1783)

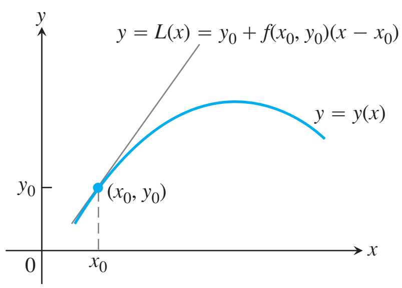
Bir $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, başlangıç değer problemi için hemen bir çözüm gerekmiyor veya tam çözümü bulamıyorsak, uygun aralıkta y'nin x değerlerine karşılık gelen yaklaşık sayısal değerlerinin bir tablosunu oluşturmak için bir bilgisayar kullanabiliriz. Böyle bir tabloya problemin **sayısal çözümü** denir ve tabloyu oluşturmak için kullandığımız yöntem **sayısal yöntem** adını alır. Sayısal yöntemler genellikle hızlı ve hassastırlar ve kesin formüller gereksiz, elde edilemez veya fazlasıyla karışık olduğu durumlarda seçilen yöntemlerdir. Bu bölümde, diğer bütün sayısal yöntemlerin tabanını oluşuran ve Euler yöntemi denilen bir sayısal yöntemi inceleyeceğiz.

Euler Yöntemi

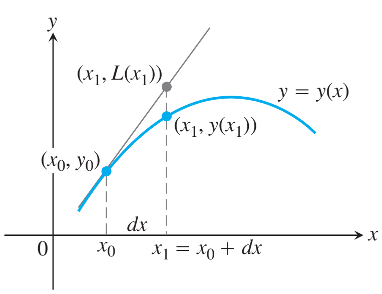
Bir $dy/dx = f(x, y)$ diferansiyel denklemi ve bir $y(x_0) = x_0$ başlangıç koşulu verilmişse, $y = y(x)$ çözümüne

$$L(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{veya} \qquad L(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

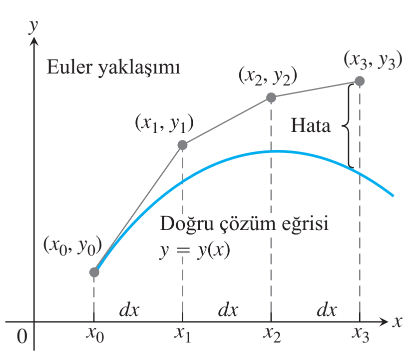
lineerizasyonuyla yaklaşımda bulunabiliriz.



ŞEKİL 9.8 $y = y(x)$'in $x = x_0$ daki lineerizasyonu $L(x)$



ŞEKİL 9.9 Birinci Euler adımı $y(x_1)$'e $y_1 = L(x_1)$ ile yaklaşımda bulunur.



ŞEKİL 9.10 $y = f(x, y), y(x_0) = y_0$ başlangıç değer probleminin çözümüne Euler yaklaşımındaki üç adım. Genellikle daha fazla adım kullanıldığında içerilen hatalar birikirler fakat burada gösterildiği kadar abartılı değil.

$L(x)$ fonksiyonu x_0 civarında kısa bir aralıkta $y(x)$ çözümüne iyi bir yaklaşım verir (Şekil 9.8). Euler yönteminin esası uzun bir aralıkta eğriye yaklaşımda bulunabilmek için bir dizi lineerizasyonu bir araya getirmektir. Yöntem aşağıdaki şekilde işlemektedir.

(x_0, y_0) noktasının çözüm eğrisinin üzerinde olduğunu biliyoruz. Bağımsız değişken için yeni bir değeri $x_1 = x_0 + dx$ olarak belirlediğimizi varsayalım. (Diferansiyellerin tanımında $dx = \Delta x$ olduğunu hatırlayın). dx artımı küçük ise

$$y_1 = L(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)\, dx$$

kesin çözüm eğrisi $y = y(x_1)$'e iyi bir yaklaşımdır. Böylece, *kesinlikle* çözüm eğrisi üzerine bulunan (x_0, y_0) noktasından çözüm eğrisi üzerindeki $(x_1, y(x_1))$ noktasının çok yakınında bulunan (x_1, y_1) noktasını elde ettik (Şekil 9.9).

(x_1, y_1) noktasını ve bu noktadan geçen çözüm eğrisinin $f(x_1, y_1)$ eğimini kullanarak, ikinci bir adım atarız. $x_2 = x_1 + dx$ alıp,

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\, dx$$

değerini hesaplamak için (x_1, y_1) den geçen çözüm eğrisinin lineerizasyonunu kullanırız. Bu, $y = y(x)$ çözüm eğrisi üzerindeki değerlere bir sonraki yaklaşımı olan (x_2, y_2)'yi verir (Şekil 9.10). Bu şekilde devam ederek, $f(x_2, y_2)$ eğimli (x_2, y_2) noktasından üçüncü bir adım atarak

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)\, dx$$

üçüncü yaklaşımını elde eder ve işlemi sürdürürüz. Tam olarak, diferansiyel denklemin eğim alanının yönünü izleyerek çözümlerden birine yaklaşımda bulunuyoruz.

Şekil 9.10'daki adımlar kurma işlemini açıklamak için büyük çizilmiştir bu nedenle yaklaşım kaba gözükmektedir. Pratikte dx, lacivert eğri kahverengiye yakın olacak şekilde yeterince küçük olacak ve eğri boyunca iyi bir yaklaşım verecektir.

ÖRNEK 1 Euler Yöntemini Kullanmak

Euler yaklaşımını kullanarak ve $x_0 = 0$ ve $dx = 0.1$ alarak

$$y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$$

diferansiyel denklemine ilk üç y_1, y_2 ve y_3 yaklaşımını bulun.

Çözüm $x_0 = 0, y_0 = 1, x_1 = x_0 + dx = 0.1, x_2 = x_0 + 2dx = 0.2$ ve $x_3 = x_0 + 3dx = 0.3$ tür.

$$\begin{aligned}
\textit{First: Birinci:} \quad y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\, dx \\
&= y_0 + (1 + y_0)\, dx \\
&= 1 + (1 + 1)(0.1) = 1.2 \\
\textit{Second: İkinci:} \quad y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\, dx \\
&= y_1 + (1 + y_1)\, dx \\
&= 1.2 + (1 + 1.2)(0.1) = 1.42 \\
\textit{Third: Üçüncü:} \quad y_3 &= y_2 + f(x_2, y_2)\, dx \\
&= y_2 + (1 + y_2)\, dx \\
&= 1.42 + (1 + 1.42)(0.1) = 1.662
\end{aligned}$$

■

Örnek 1'deki adım-adım işlem kolaylıkla sürdürülebilir. Tabloda bağımsız değişken için eşit aralıklar kullanır ve bunlardan n tane üretirsek,

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + dx \\
x_2 &= x_1 + dx \\
&\vdots \\
x_n &= x_{n-1} + dx.
\end{aligned}$$

buluruz. Sonra çözüme yaklaşımları hesaplarız:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\,dx \\ y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\,dx \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\,dx. \end{aligned}$$

Adım sayısı n istediğimiz kadar büyük olabilir, fakat n çok büyük olursa hatalar yığılabilir.

Euler yöntemini bir bilgisayarda veya hesap makinesinde uygulamak kolaydır. Bir bilgisayar programı, x_0 ve y_0 değerlerini, adım sayısı n'yi ve adım büyüklüğü dx'i girmemize olanak sağlayarak bir başlangıç değer probleminin sayısal çözümlerinin bir tablosunu üretir. Sonra, yukarıda açıklandığı gibi, ardışık bir şekilde yaklaşık çözüm değerlerini hesaplar.

Örnek 1'deki değişkenlerine ayrılabilir denklemi çözerek, başlangıç değer probleminin tam çözümünün $y = 2e^x - 1$ olduğunu buluruz. Bu bilgiyi Örnek 2'de kullanıyoruz.

ÖRNEK 2 Euler Yönteminin Doğruluğunu Araştırmak

Euler yöntemini kullanarak, $0 \le x \le 1$ aralığı üzerinde

$$y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$$

başlangıç değer problemini $x_0 = 0$'dan başlayarak ve

(a) $dx = 0.1$

(b) $dx = 0.05$

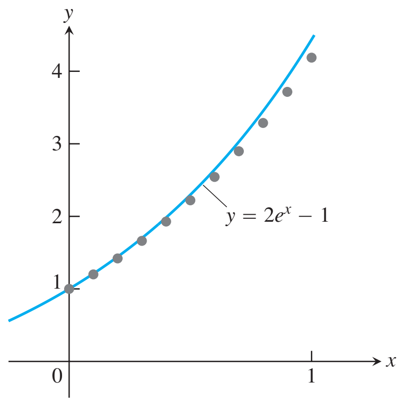
alarak çözün. Yaklaşımları, tam çözüm olan $y = 2e^x - 1$'in değerleri ile karşılaştırın.

Çözüm

(a) Tablo 9.1'deki yaklaşık değerleri üretmek için bir bilgisayar kullandık. "Hata" sütunu, tam çözümü kullanarak bulunan yuvarlanmamış değerlerden yuvarlanmamış Euler değerlerini çıkararak elde edilmiştir. Sonra bütün değerler dört ondalık basamağa yuvarlanmıştır.

TABLO 9.1 $y' = 1 + y$, $y(0) = 1$'in Euler çözümü, adım büyüklüğü $dx = 0.1$

x	y (Euler)	y (tam)	Hata
0	1	1	0
0.1	1.2	1.2103	0.0103
0.2	1.42	1.4428	0.0228
0.3	1.662	1.6997	0.0377
0.4	1.9282	1.9836	0.0554
0.5	2.2210	2.2974	0.0764
0.6	2.5431	2.6442	0.1011
0.7	2.8974	3.0275	0.1301
0.8	3.2872	3.4511	0.1639
0.9	3.7159	3.9192	0.2033
1.0	4.1875	4.4366	0.2491



ŞEKİL 9.11 $y = 2e^x - 1$'in, Tablo 9.1'de gösterilen Euler yaklaşımlarının nokta çizimi üzerine yerleştirilen grafiği (Örnek 2).

$x = 1$'e ulaştığımızda (10 adım sonunda) hata, tam çözümün %5.6'sı dır. Tam çözüm eğrisi ile Tablo 9.1'den elde edilen Euler çözüm noktalarının bir çizimi Şekil 9.11'de gösterilmektedir.

(b) Hatayı azaltmanın bir yolu adım büyüklüğünü küçültmektir. Tablo 9.2, adım büyüklüğünü 0.05'e düşürüp adım sayısını iki katına çıkarmakla elde edilen sonuçları ve tam çözümle karşılaştırmalarını göstermektedir. Tablo 9.1'de olduğu gibi bütün hesaplamalar yuvarlamadan önce yapılmıştır. Bu defa $x = 1$'e ulaştığımızda bağıl hata sadece %2.9 dur.

TABLE 9.2 $y' = 1 + y$, $y(0) = 1$'in Euler çözümü, adım büyüklüğü $dx = 0.05$

x	y (Eule)	y (tam)	Hata
0	1	1	0
0.05	1.1	1.1025	0.0025
0.10	1.205	1.2103	0.0053
0.15	1.3153	1.3237	0.0084
0.20	1.4310	1.4428	0.0118
0.25	1.5526	1.5681	0.0155
0.30	1.6802	1.6997	0.0195
0.35	1.8142	1.8381	0.0239
0.40	1.9549	1.9836	0.0287
0.45	2.1027	2.1366	0.0340
0.50	2.2578	2.2974	0.0397
0.55	2.4207	2.4665	0.0458
0.60	2.5917	2.6442	0.0525
0.65	2.7713	2.8311	0.0598
0.70	2.9599	3.0275	0.0676
0.75	3.1579	3.2340	0.0761
0.80	3.3657	3.4511	0.0853
0.85	3.5840	3.6793	0.0953
0.90	3.8132	3.9192	0.1060
0.95	4.0539	4.1714	0.1175
1.00	4.3066	4.4366	0.1300

■

Örnek 2'de, daha fazla hassaslık elde etmek için adım büyüklüğünü daha da küçültmek çekici olabilir. Ancak, her ek hesaplama sadece fazladan bilgisayar zamanı gerektirmez, ayrıca hesaplamalardaki sayıların yaklaşık temsillerinden doğan yuvarlama hatalarını da arttırır.

Sayısal hesaplamalar yaparken hata analizi ve hatayı azaltmak için araştırma yöntemleri önemlidir, fakat bunlar daha ileri bir dersin konusudur. Diferansiyel denklemleri çalışırken göreceğiniz gibi, Euler yönteminden daha hassas yöntemler de vardır. Burada bir geliştirmeyi ele alacağız.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Carl Runge
(1856–1927)

Geliştirilmiş Euler Yöntemi

İki eğimin ortalamasını alarak Euler yöntemini geliştirebiliriz. Önce, asıl Euler yöntemindeki gibi y_n'yi buluruz fakat bunu z_n ile gösteririz. Sonra, takip eden adımda $f(x_{n-1}, y_{n-1})$ yerine $f(x_{n-1}, y_{n-1})$ ile $f(x_n, z_n)$'nin ortalamasını alırız. Böylece, bir sonraki y_n yaklaşımını

$$z_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\,dx$$

$$y_n = y_{n-1} + \left[\frac{f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_n, z_n)}{2}\right] dx$$

kullanarak hesaplarız.

ÖRNEK 3 Geliştirilmiş Euler Yönteminin Doğruluğunu Araştırmak

Geliştirilmiş Euler yöntemini kullanarak, $0 \leq x \leq 1$ aralığı üzerinde

$$y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$$

başlangıç değer problemini $x_0 = 0$'dan başlayarak ve $dx = 0.1$ alarak çözün. Yaklaşımları, tam çözüm olan $y = 2e^x - 1$'in değerleri ile karşılaştırın.

Çözüm Tablo 9.3'teki yaklaşık değerleri üretmek için bir bilgisayar kullandık. "Hata" sütunu, tam çözümü kullanarak bulunan yuvarlanmamış değerlerden yuvarlanmamış Euler değerlerini çıkararak elde edilmiştir. Sonra bütün değerler dört ondalık basamağa yuvarlanmıştır.

TABLO 9.3 $y' = 1 + y$, $y(0) = 1$'in Euler çözümü, adım büyüklüğü $dx = 0.1$

x	y (yuvarlanmış Euler)	y (tam)	Hata
0	1	1	0
0.1	1.21	1.2103	0.0003
0.2	1.4421	1.4428	0.0008
0.3	1.6985	1.6997	0.0013
0.4	1.9818	1.9836	0.0018
0.5	2.2949	2.2974	0.0025
0.6	2.6409	2.6442	0.0034
0.7	3.0231	3.0275	0.0044
0.8	3.4456	3.4511	0.0055
0.9	3.9124	3.9192	0.0068
1.0	4.4282	4.4366	0.0084

$x = 1$'e ulaştığımızda (10 adım sonunda), bağıl hata yaklaşık %0.19 dur. ■

Tablo 9.1 ile Tablo 9.3'ü karşılaştırdığımızda geliştirilmiş Euler yönteminin asıl Euler yönteminden önemli ölçüde daha doğru olduğunu görürüz. En azından $y' = 1 + y$, $y(0) = 1$ başlangıç değer problemi için.

ÖRNEK 4 Petrol Rafinerisi Depolama Tankı

Bölüm 9.2, Örnek 6'da 2000-galonluk bir mazot tankına giren ve aynı zamanda dışarı pompalanan bir katkı maddesi karışımı problemini ele aldık. Tanakta t anında bulunan katkı maddesi $y(t)$ olmak üzere, analizle

$$\frac{dy}{dt} = 80 - \frac{45y}{2000 - 5t}, \qquad y(0) = 100$$

başlangıç değer problemini elde ettik. Soru $y(20)$'yi bulmak idi. $dt = 0.2$ (veya 100 adım) artımı ile Euler yöntemini kullanmak, $y(20) \approx 1344.3616$ ile biten

$$y(0.2) \approx 115.55, \qquad y(0.4) \approx 131.0298, \ldots$$

yaklaşımlarını verir. Tam çözüm olan $y(20) \approx 1342$'ye göre hata yaklaşık olarak %0.18 dir. ■

ALIŞTIRMALAR 9.3

Euler Yaklaşımlarını Hesaplamak

1–6 alıştırmalarında, verilen artış büyüklüğüyle Euler yöntemini kullanarak verilen başlangıç değer problemine yapılacak ilk üç yaklaşımı bulun. Kesin çözümü hesaplayın ve yaklaşımlarınızın hassaslığını araştırın. Sonuçlarınızı dört ondalık basamağa yuvarlayın.

1. $y' = 1 - \frac{y}{x}, \quad y(2) = -1, \quad dx = 0.5$

2. $y' = x(1 - y), \quad y(1) = 0, \quad dx = 0.2$

3. $y' = 2xy + 2y, \quad y(0) = 3, \quad dx = 0.2$

4. $y' = y^2(1 + 2x), \quad y(-1) = 1, \quad dx = 0.5$

T **5.** $y' = 2xe^{x^2}, \quad y(0) = 2, \quad dx = 0.1$

T **6.** $y' = y + e^x - 2, \quad y(0) = 2, \quad dx = 0.5$

7. $y' = y$ ve $y(0) = 1$ ise, $dx = 0.2$ ile Euler yöntemini kullanarak $y(1)$'i hesaplayın. $y(1)$'in tam değeri nedir?

8. $y' = y/x$ ve $y(1) = 2$ ise, $dx = 0.2$ ile Euler yönemini kullanarak $y(2)$'yi hesaplayın. $y(2)$'nin tam değeri nedir?

T **9.** $y' = y^2/\sqrt{x}$ ve $y(1) = -1$ ise, $dx = 0.5$ ile Euler yöntemini kullanarak $y(5)$'i hesaplayın. $y(5)$' in tam değerin nedir?

T **10.** $y' = y - e^{2x}$ ve $y(0) = 1$ ise, $dx = 1/3$ ile Euler yöntemini kullanarak $y(2)$'yi hesaplayın. $y(2)$'nin tam değeri nedir?

Geliştirilmiş Euler Yöntemi

11 ve 12 Alıştırmalarında verilen başlangıç değer problemine ilk üç yaklaşımı hesaplamak için geliştirilmiş Euler yöntemini kullanın. Yaklaşımları tam çözümün değerleri ile karşılaştırın.

11. $y' = 2y(x + 1), \quad y(0) = 3, \quad dx = 0.2$

(Tam çözüm için Alıştırma 3'e bakın)

12. $y' = x(1 - y), \quad y(1) = 0, \quad dx = 0.2$

(Tam çözüm için Alıştırma 2'e bakın)

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Euler Yöntemi

13–16 alıştırmalarında çözümün verilen x^* noktasındaki değerini bulmak için belirtilen adım büyüklüğü ile Euler yöntemini kullanın. Tam çözümün x^* noktasındaki değerini bulun.

13. $y' = 2xe^{x^2}, \quad y(0) = 2, \quad dx = 0.1, \quad x^* = 1$

14. $y' = y + e^x - 2, \quad y(0) = 2, \quad dx = 0.5, \quad x^* = 2$

15. $y' = \sqrt{x}/y, \quad y > 0, \quad y(0) = 1, \quad dx = 0.1, \quad x^* = 1$

16. $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0, \quad dx = 0.1, \quad x^* = 1$

17–18 alıştırmalarında **(a)** başlangıç değer probleminin tam çözümünü bulun. Sonra, Euler yöntemini x_0'dan başlayıp **(b)** 0.2, **(c)** 0.1 ve **(d)** 0.05 adım büyüklüğü ile kullanarak elde edilen $y(x^*)$ yaklaşımının doğruluğunu karşılaştırın.

17. $y' = 2y^2(x - 1), \quad y(2) = -1/2, \quad x_0 = 2, \quad x^* = 3$

18. $y' = y - 1, \quad y(0) = 3, \quad x_0 = 0, \quad x^* = 1$

Geliştirilmiş Euler Yöntemi

19-20 Alıştırmalarında, Geliştirilmiş Euler yöntemini x_0'dan başlayıp

a. 0.2 **b.** 0.1 **c.** 0.05

adım büyüklüğü ile kullanarak elde edilen $y(x^*)$ yaklaşımının doğruluğunu karşılaştırın.

d. Adım büyüklüğü küçülürken hataya ne oduğunu açıklayın.

19. $y' = 2y^2(x - 1), \quad y(2) = -1/2, \quad x_0 = 2, \quad x^* = 3$

(Tam çözüm için Alıştırma 17'ye bakın)

20. $y' = y - 1, \quad y(0) = 3, \quad x_0 = 0, \quad x^* = 1$

(Tam çözüm için Alıştırma 18'e bakın)

Diferansiyel Denklemleri Grafik Olarak İncelemek

21–24 alıştırmalarındaki diferansiyel denklemleri grafik olarak incelemek için bir BCS kullanın. Araştırmalarınıza yardımcı olması için aşağıdaki adımları izleyin.

a. Verilen *xy*-çerçevesinde diferansiyel denklemin bir eğim alanını çizin.

b. Diferansiyel denklemin genel çözümünü BCS'nizin diferansiyel denklem çözücüsünü kullanarak bulun.

c. Keyfi C sabiti için $C = -2, -1, 0, 1$ ve 2 değerlerini kullanarak eğim alanınızın üzerine çözümleri çizin.

d. [0, b] aralığında belirlenen başlangıç koşulunu sağlayan çözümü bulun ve grafiğini çizin.

e. *x*-aralığının dört alt aralığı ile Euler sayısal yaklaşımlarını kullanarak başlangıç değer problemine yaklaşım yapın ve (d) şıkkında bulduğunuz grafiğe Euler yaklaşımlarını da ekleyin.

f. (e) şıkkını 8, 16 ve 32 alt aralık için tekrarlayın. Bu üç Euler yaklaşımını (e) şıkkındaki grafiğinize ekleyin.

g. Dött alıştırmada da Euler yaklaşımının belirtilen $x = b$ noktasındaki (y(tam) – y(Euler)) hatasını bulun. Yüzde hatadaki gelişmeleri tartışın.

21. $y' = x + y, \quad y(0) = -7/10; \quad -4 \le x \le 4, \quad -4 \le y \le 4;$ $b = 1$

22. $y' = -x/y, \quad y(0) = 2; \quad -3 \le x \le 3, \quad -3 \le y \le 3; \; b = 2$

23. **Lojistik bir denklem** $y' = y(2 - y), \quad y(0) = 1/2;$ $0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 3; \quad b = 3$

24. $y' = (\sin x)(\sin y), \quad y(0) = 2; \quad -6 \le x \le 6, \quad -6 \le y \le 6;$ $b = 3\pi/2$

9.4 Otonom Diferansiyel Denklemlerin Grafik Çözümleri

Bölüm 4'te şunu öğrendik; birinci türevin işareti bize bir fonksiyonun grafiğinin nerede arttığını ve nerede azaldığını söyler. İkinci türevin işareti grafiğin konkavlığını söyler.

Türevlerin bir grafiğin şeklini nasıl belirlediğine dair bilgimizi diferansiyel denklemleri grafik olarak çözmek için geliştirebiliriz. Bunu yapmanın başlangıç fikri, *faz* doğrusu ve *denge değeri* kavramlarıdır. Bu kavramlara, diferansiyellenebilir bir fonksiyonun türevi Bölüm 4'te öğrendiğimizden farklı bir bakış açısına göre sıfır olduğunda ne olduğunu inceleyerek ulaşırız.

Denge Değerleri ve Faz Doğruları

Kapalı olarak türev alma yöntemi ile

$$\frac{1}{5}\ln(5y - 15) = x + 1$$

denkleminin türevini aldığımızda

$$\frac{1}{5}\left(\frac{5}{5y - 15}\right)\frac{dy}{dx} = 1$$

elde ederiz. $y' = dy/dx$'i çözmekle $y' = 5y - 15 = 5(y - 3)$ buluruz. Bu durumda y' sadece y'nin (bağlı değişken) fonksiyonudur ve $y = 3$ için sıfırdır.
Bir diferansiyel denklemde dy/dx sadece y'ye bağlı ise denkleme otonom diferansiyel denklem denir. **Otonom** bir denklemde türev sıfır olduğunda neler olduğunu inceleyelim.

TANIM Denge Değerleri
$dy/dx = g(y)$ bir otonom diferansiyel denklem ise $dy/dx = 0$ olduğu y değerlerine **denge değerleri** veya **kararlılık noktaları** denir.

Böylece, denge değerleri, bağlı değişkende değişikliğin gözlenmediği, dolayısıyla y'nin hareketsiz olduğu noktalardır. Vurgu, Bölüm 4'te öğrendiğimiz gibi x değerlerinde değil, $dy/dx = 0$ olduğu y değerlerindedir.

ÖRNEK 1 Denge Değerlerini Bulmak

$$\frac{dy}{dx} = (y + 1)(y - 2)$$

otonom diferansiyel denkleminin denge değerleri $y = -1$ ve $y = 2$ dir. ■

Örnek 1'deki gibi bir otonom diferansiyel denklemin bir grafik çözümünü inşa etmek üzere önce denklem için bir **faz doğrusu** oluştururuz. Bu doğru, y-ekseni üzerinde denge değerlerini ve dy/dx ile d^2y/dx^2'nin pozitif ve negatif olduğu aralıkları gösteren bir doğrudur. Bu doğru, çözüm eğrilerinin nerede yükseldiğini, nerede alçaldığını ve konkavlığını gösterir. Bunlar, Bölüm 4.4'te bulduğumuz ve bunlar yardımı ile çözüm eğrilerinin formüllerini bulmadan şekillerini belirleyebildiğimiz temel özelliklerdir.

ÖRNEK 2 Bir Faz Doğrusu ve Çözüm Eğrileri Çizmek

$$\frac{dy}{dx} = (y + 1)(y - 2)$$

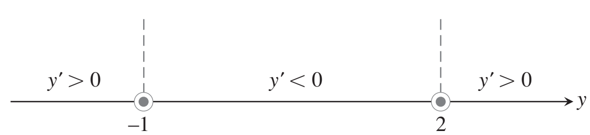
denklemi için bir faz doğrusu çizin ve bunu denklemin çözümlerini çizmek için kullanın.

Çözüm

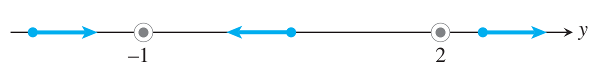
1. *y-eksenini temsil eden bir sayı doğrusu çizin ve $dy/dx = 0$ olduğu $y = -1$ ve $y = 2$ değerlerini işaretleyin.*



2. *$y' > 0$ ve $y' < 0$ olan aralıkları belirleyin ve işaretleyin.* Bu adım, Bölüm 4.3'te yaptığımıza benzemektedir, yalnız burada x-ekseni yerine y-eksenini işaretliyoruz.



y''nün işareti hakkında bildiklerimizi faz dorusunun kendisi üzerinde özetleyebiliriz. $y = -1$'in solundaki aralık üzerinde $y' > 0$ olduğundan, diferansiyel denklemin -1'den daha küçük bir y-değeri ile bir çözümü, bu değerden $y = -1$'e doğru artacaktır. Bu bilgiyi, aralık üzerine -1'i işaret eden bir ok çizerek gösteririz.



Benzer şekilde, $y = -1$ ile $y = 2$ arasında $y' < 0$ dır, dolayısıyla bu aralıktaki bir değer ile herhangi bir çözüm $y = -1$'e doğru azalacaktır.

$y > 2$ için $y' > 0$ dır, dolayısıyla 2'den büyük bir y-değerli bir çözüm buradan sınırsız olarak artacaktır.

Kısaca, xy-düzleminde $y = -1$ yatay doğrusu altındaki çözüm eğrileri $y = -1$'e doğru yükselirler. $y = -1$ ile $y = 2$ doğruları arasındaki çözüm eğrileri $y = 2$'den $y = -1$'e doğru alçalırlar. $y = 2$ üzerindeki çözüm eğrileri $y = 2$'den yukarıya doğru yükselirler ve yükselmeyi sürdürürler.

3. *y'''nü hesaplayın ve $y'' > 0$ ve $y'' < 0$ olan aralıkları işaretleyin.* y'''nü bulmak için kapalı türev almayı kullanarak y''nün x'e göre türevini alırız:

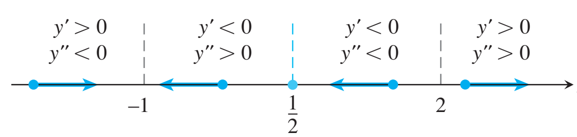
$$y' = (y + 1)(y - 2) = y^2 - y - 2$$

y''nün formülü…

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}(y^2 - y - 2) \\ &= 2yy' - y' \\ &= (2y - 1)y' \\ &= (2y - 1)(y + 1)(y - 2). \end{aligned}$$

x'e göre kapalı türev alınmış

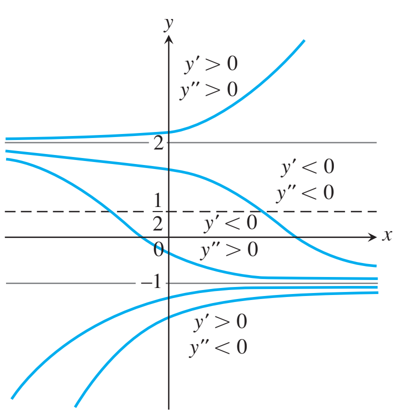
Bu formülden, y'''nün $y = -1$ de, $y = 1/2$ de ve $y = 2$ de işaret değiştirdiğini görüyoruz. Bunları faz doğrusunda işaretleriz.



4. *xy-düzleminde çözüm eğrilerinin bir koleksiyonunu çizin.* $y = -1$, $y = 1/2$ ve $y = 2$ yatay doğruları düzlemi, y' ve y'''nün işaretlerini bildiğimiz yatay bantlara ayırır. Bu bilgiler her bir bantta çözüm eğrilerinin yükselip alçalmasını ve x artarken nasıl büküldüklerini gösterir (Şekil 9.12).

$y = -1$ ve $y = 2$ "denge doğruları" da çözüm eğrisidir ($y = -1$ ve $y = 2$ sabit fonksiyonları diferansiyel denklemi sağlar). $y = 1/2$ doğrusundan geçen çözüm eğrilerinin burada bir dönüm noktası vardır. Konkavlık aşağıya doğru olmaktan (doğrunun üstünde) yukarıya doğru olmaya (doğrunun altında) değişir.

Adım 2'de öngörüldüğü gibi, aradaki ve alt banttaki çözümler, x artarken $y = -1$ denge değerine yaklaşırlar. Üst banttaki çözümler $y = 2$ değerinden yukarı doğru devamlı olarak yükselirler. ■



ŞEKİL 9.12 Örnek 2'deki grafik çözümler denge değerlerinden geçen $y = -1$ ve $y = 2$ yatay doğrularını içerir.

Kararlı ve Kararsız Dengeler

Şekil 9.12'ye, özellikle denge değerlerine yakın çözüm eğrilerinin davranışına bir daha bakın. Bir çözüm eğrisinin $y = -1$'e yakın bir değeri var olduğunda bu çözüm kararlılıkla $y = -1$'e yönelir; $y = -1$ **kararlı bir denge**dir. $y = 2$ yakınındaki davranış tam tersinedir: denge çözümünün dışındaki bütün çözümler, x artarken $y = 2$'den uzaklaşırlar. $y = 2$'ye **kararsız bir denge** deriz. Bir çözüm bu değerde ise burada kalır fakat ne kadar küçük olursa olsun, bu değerden farklı ise çözüm uzaklaşır (Bazen noktanın sadece bir tarafındaki bir çözüm noktadan uzaklaştığı için denge değeri kararsızdır).

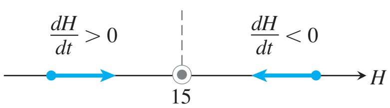
Şimdi neye baktığımızı bilerek, bu davranışı baştaki faz doğrusu üzerinde de görebiliriz. Oklar, solundakiler $y = -1$'e doğru olmak üzere $y = 2$'den uzaklaşırlar.

Şimdi, Örnek 2'deki yöntemi kullanarak, diferansiyel denklem modellerinin çözüm eğrilerinin bir ailesini çizebileceğimiz birkaç uygulama örneği veriyoruz.

Bölüm 7.5'te, soğutma için Newton kanununu modelleyen

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - H_S), \qquad k > 0$$

diferansiyel denklemini analitik olarak çözdük. Burada H, bir t anında bir nesnenin sıcaklığı ve H_S çevreleyen ortamın sabit sıcaklığıdır. Birinci örneğimiz, zaman üzerindeki sıcaklık modelinin grafik davranışını anlamak için bir faz doğrusu analizi kullanmaktadır.



ŞEKİL 9.13 Örnek 3'teki soğutmada Newton Kanunu için faz doğrusu inşaasındaki ilk adım. Sıcaklık, uzun bir süreçte, denge değerine (çevreleyen ortam) doğru gider.

ÖRNEK 3 Çorba Soğutmak

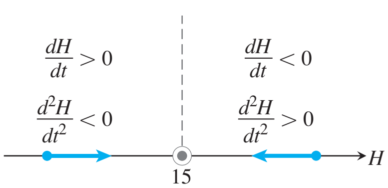
Bir kap sıcak çorba bir odadaki bir masa üzerine konursa kaptaki çorbanın sıcaklığına ne olur? Çorbanın soğuduğunu biliyoruz, fakat zamanın bir fonksiyonu olarak, tipik bir sıcaklık eğrisi nasıl gözükür?

Çözüm Çevreleyen ortamın sıcaklığının sabit ve 15°C olduğunu varsayın. Bu durumda sıcaklık farkını $H(t) - 15$ olarak ifade edebiliriz. H'yi t'nin türevlenebilir bir fonksiyonu olarak kabul edersek, Newton soğutma kanununa göre

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - 15) \tag{1}$$

olacak şekilde bir $k > 0$ orantı sabiti vardır. ($H > 15$ iken negatif bir türev vermesi için *eksi k*).

$H = 15$ iken $dH/dt = 0$ olduğundan, 15°C sıcaklığı bir denge değeridir. $H > 15$ ise (1) Denklemi, $(H - 15) > 0$ ve $dH/dt < 0$ olduğunu söyler. Nesne oda sıcaklığından daha sıcak ise soğuyacaktır. Benzer şekilde, $H < 15$ ise $(H - 15) < 0$ ve $dH/dt > 0$ dır. Oda sıcaklığından soğuk olan bir nesne ısınacaktır. Böylece, (1) Denklemi ile tanımlanan davranış, sıcaklığın nasıl davranması gerektiği sezgimizle uyuşur. Bu gözlemler, Şekil 9.13 teki başlangıç faz doğrusu diyagramında tespit edilmiştir. $H = 15$ değeri kararlı bir dengedir.



ŞEKİL 9.14 Örnek 3'teki soğutmada Newton Kanunu için tam faz doğrusu.

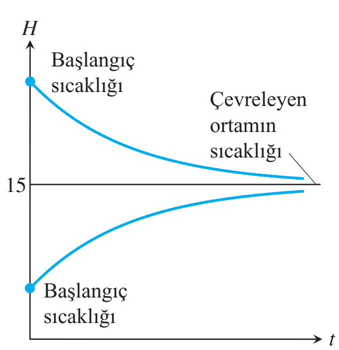
(1) Denkleminin iki tarafının t'ye göre türevini alarak çözüm eğrilerinin konkavlıklarını belirleriz:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dH}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(-k(H - 15))$$

$$\frac{d^2H}{dt^2} = -k\frac{dH}{dt}.$$

$-k$ negatif olduğundan, $dH/dt < 0$ iken d^2H/dt^2 pozitif ve $dH/dt > 0$ iken negatiftir. Şekil 9.14 bu bilgileri faz doğrusuna ekler.

Tamamlanmış faz doğrusu şunu gösterir: nesnenin sıcaklığı 15°C denge sıcaklığının üzerinde ise $H(t)$'nin grafiği azalan ve yukarıya konkav olacaktır. Sıcaklık 15°C'nin (çevreleyen ortam sıcaklığı) altında ise $H(t)$'nin grafiği artan ve aşağıya konkav olacaktır. Bu bilgileri, tipik çözüm eğrilerini çizmek için kullanırız (Şekil 9.15).



ŞEKİL 9.15 Sıcaklık-zaman. Başlangıç sıcaklığı ne olursa olsun, Nesnenin $H(t)$ sıcaklığı, çevreleyen ortamın sıcaklığı, 15°C'ye doğru gider.

Şekil 9.15'teki üst çözüm eğrisinden, bir nesne soğurken, dH/dt sıfıra yaklaştığından soğuma hızının yavaşladığını görürüz. Bu gözlem, Newton soğuma kanunu içinde saklıdır ve diferansiyel denklemde içerilir, fakat zaman ilerledikçe grafikteki düzleşme olayın görsel bir temsilini hemen vermektedir. Grafiklerden fiziksel davranışları ayırt etmek, gerçek-dünya sistemlerini anlamak için kuvvetli bir araçtır. ■

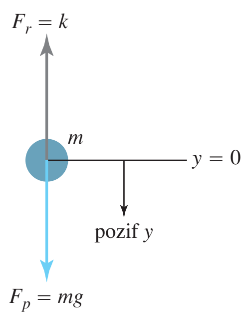
ÖRNEK 4 Bir Direnç Kuvveti Altında Bir Cismin Düşüşünü İncelemek

Galileo ve Newton hareket eden bir cismin karşılaştığı momentumdaki değişim oranının cisme etkiyen net kuvvet ile orantılı olduğunu gözlediler. Matematik terimlerle, F kuvvet, m ve v cismin kütlesi ve hızı olmak üzere

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \tag{2}$$

Yakıt yakan bir rokette olduğu gibi, cismin m kütlesi zamanla değişiyorsa (2) denkleminin sağ tarafı, Çarpım Kuralını kullanarak

$$m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$



ŞEKİL 9.16 Yerçekimi etkisi altında, hızla orantılı olduğu kabul edilen bir direnç kuvveti ile düşen bir nesne.

şeklinde yazılır. Halbuki birçok durumda m sabittir, $dm/dt = 0$'dır ve (2) Denklemi Newtonun *ikinci hareket kanunu* olarak bilinen

$$F = m\frac{dv}{dt} \qquad \text{veya} \qquad F = ma \tag{3}$$

basit formunu alır.

Serbest düşmede, yerçekiminden dolayı sabit ivme g ile gösterilir ve düşmekte olan cisme aşağıya doğru etkiyen bir kuvvet, yerçekiminden dolayı itici güç

$$F_p = mg$$

dir. Halbuki, hava içinde düşen gerçek bir cismi – örneğin çok yüksekten düşen bir madeni para veya daha da yüksekten düşen bir paraşütçü – düşünürsek bir noktadan itibaren hava direncinin düşüş hızının bir etkeni olduğunu biliriz. Serbest düşmenin daha gerçekçi bir modeli, Şekil 9.16'daki şematik diyagramda bir F_r kuvveti ile gösterildiği gibi hava direncini içerecektir.

Ses hızının oldukça altında düşük hızlar için fiziksel deneyler, F_r'nin yaklaşık olarak cismin hızı ile orantılı olduğunu göstermiştir. Bu nedenle düşmekte olan bir cisim üzerindeki net kuvvet

$$F = F_p - F_r$$

olup, bu

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

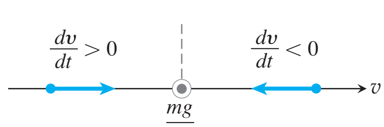
$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v \tag{4}$$

verir. Bu diferansiyel denklemi çözen hız fonksiyonlarını incelemek için bir faz doğrusu kullanabiliriz.

(4) Denkleminin sağ tarafını sıfıra eşitlemekle elde edilen denge noktası

$$v = \frac{mg}{k}$$

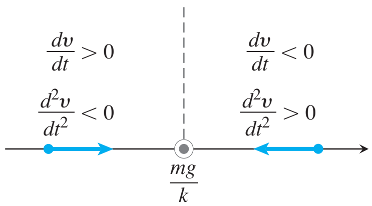
dır. Cisim, başlangıçta bundan daha hızlı hareket ediyorsa dv/dt negatiftir ve cisim yavaşlar. Cisim, mg/k'nin altında bir hızla hareket ediyorsa $dv/dt > 0$ dır ve cisim hızlanır. Bu gözlemler Şekil 9.17'deki başlangıç faz doğrusu diyagramında tespit edilmiştir.



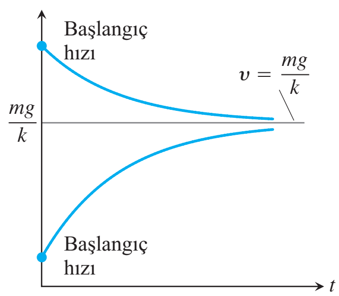
ŞEKİL 9.17 Örnek 4 için başlangıç faz doğrusu.

(4) Denkleminin iki tarafının t'ye göre türevini alarak çözüm eğrilerinin konkavlıklarını belirleriz:

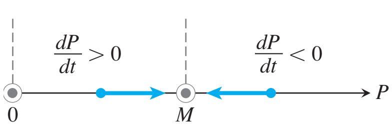
$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(g - \frac{k}{m}v\right) = -\frac{k}{m}\frac{dv}{dt}$$



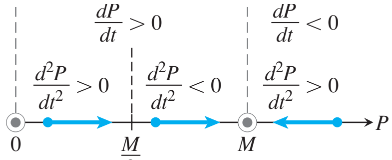
ŞEKİL 9.18 Örnek 4 için tamamlanmış faz doğrusu.



ŞEKİL 9.19 Örnek 4'teki tipik hız eğrileri. $v = mg/k$ değeri son hızdır.



ŞEKİL 9.20 6 Denklemi için başlangıç faz doğrusu.



ŞEKİL 9.21 Lojistik büyüme için tamamlanmış faz doğrusu (Denklem 6).

$v < mg/k$ iken $d^2v/dt^2 < 0$ ve $v > mg/k$ iken $d^2v/dt^2 > 0$ olduğunu görürüz. Şekil 9.18, bu bilgileri faz doğrusuna ekler. Newton soğutma kanunundaki faz doğrusuna (Şekil 9.14) benzerliğe dikkat edin. Çözüm eğrileri de aynı şekilde benzerdir (Şekil 9.19).

Şekil 9.19 iki tipik çözüm eğrisi göstermektedir. Başlangıç hızı ne olursa olsun, cismin hızının $v = mg/k$ limit hızına doğru gittiğini görürüz. Bu değere, kararlı bir denge noktası, cismin son hızı denir. Hava akrobatları, düşüşe karşı olan vücut alanlarını değiştirerek son hızlarını 95 mil/sn'den 180 mil/sn kadar değiştirebilirler. ■

ÖRNEK 5 Sınırlı Bir Çevre İçinde Nüfus Büyümesini İncelemek

Bölüm 7.5'te nüfus büyümesini üstel değişim modelini kullanarak inceledik. Yani, P bireylerin sayısını temsil ediyorsa ve ayrılanlarla gelenleri ihmal edersek,birim zamanda kişi başına doğum oranı eksi ölüm oranı $k > 0$ olmak üzere

$$\frac{dP}{dt} = kP \tag{5}$$

dir. Doğal çevrenin yaşamı sürdürmek için sınırlı sayıda kaynakları bulunduğundan, sadece maksimum bir M nüfusunun barındırılabileceğini kabul etmek anlamlıdır. Nüfus bu **limit nüfusa** veya **taşınabilir kapasiteye** yaklaşırken, kaynaklar azalır ve k büyüme oranı düşer. Bu davranışı sergileyen basit bir bağıntı, $r > 0$ bir sabit olmak üzere

$$k = r(M - P)$$

dir. P değeri M'ye doğru artarken k'nin azaldığına ve $P > M$ iken k'nin negatif olduğuna dikkat edin. (5) Denkleminde k yerine $r(M - P)$ yazmak

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P = rMP - rP^2 \tag{6}$$

diferansiyel denklemini verir. (6) Denklemi ile verilen model **lojistik büyüme** olarak bilinir.

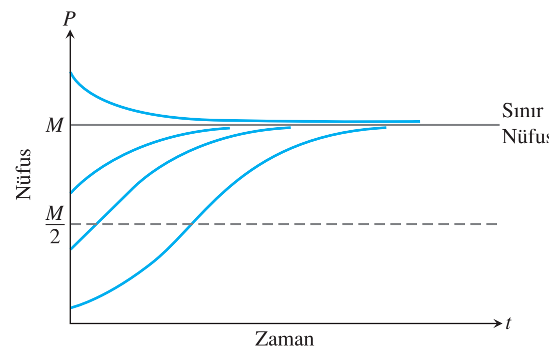
(6) Denkleminin faz doğrusunu inceleyerek nüfusun zamanla davranışını tahmin edebiliriz. Denge değerleri $P = M$ ve $P = 0$ dır. $0 < P < M$ ise $dP/dt > 0$ ve $P > M$ ise $dP/dt < 0$ olduğunu görebiliriz. Bu gözlemler Şekil 9.20'deki faz doğrusu üzerine kaydedilmiştir.

(6) Denkleminin iki tarafının t'ye göre türevini alarak nüfus eğrilerinin konkavlıklarını belirleriz:

$$\begin{aligned}\frac{d^2P}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(rMP - rP^2)\\ &= rM\frac{dP}{dt} - 2rP\frac{dP}{dt}\\ &= r(M - 2P)\frac{dP}{dt}\end{aligned} \tag{7}$$

$P = M/2$ ise $d^2P/dt^2 = 0$ dır. $P < M/2$ ise $(M - 2P)$ ve dP/dt pozitiftir dolayısıyla $d^2P/dt^2 > 0$ dır. $M/2 < P < M$ ise $(M - 2P) < 0$, $dP/dt > 0$ ve $d^2P/dt^2 < 0$ dır. $P > M$ ise hem $(M - 2P)$ hem de dP/dt negatiftir dolayısıyla $d^2P/dt^2 > 0$ dır. Bu bilgiyi faz doğrusuna ekleriz (Şekil 9.21).

$P = M/2$ ve $P = M$ doğruları tP-düzleminin birinci bölgesini, dP/dt ve d^2P/dt^2'nin işaretlerini bildiğimiz yatay bantlara ayırır. Her bir bantta çözüm eğrilerinin nasıl artıp azaldığını ve zaman geçtikçe nasıl büküldüklerini biliyoruz. $P = 0$ ve $P = M$ denge doğrularının ikisi de nüfus eğrileridir. $P = M/2$'yi kesen nüfus eğrilerinin burada, kendilerine **sigma şekli** (S harfi gibi iki yöne bükülmüş) veren birer dönüm noktası vardır. Şekil 9.22 tipik nüfus eğrilerini göstermektedir. ■



ŞEKİL 9.22 Örnek 5'teki nüfus eğrileri

ALIŞTIRMALAR 9.4

Faz Doğruları ve Çözüm Eğrileri

1–8 alıştırmalarında,

a. Denge değerlerini belirleyin. Hangileri kararlı, hangileri kararsızdır?

b. Bir faz doğrusu kurun. y' ve y'''nün işaretlerini belirtin.

c. birkaç çözüm eğrisi çizins.

1. $\dfrac{dy}{dx} = (y + 2)(y - 3)$

2. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 4$

3. $\dfrac{dy}{dx} = y^3 - y$

4. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 2y$

5. $y' = \sqrt{y}, \quad y > 0$

6. $y' = y - \sqrt{y}, \quad y > 0$

7. $y' = (y - 1)(y - 2)(y - 3)$

8. $y' = y^3 - y^2$

Nüfus Büyüme Modelleri

9–12 alıştırmalarındaki otonom diferansiyel denklemler nüfus artış modellerini temsil etmektedir. Her bir alıştırmada, farklı $P(0)$ başlangıç değerleri kullanarak (Örnek 5'teki gibi) $P(t)$'nin çözüm eğrilerini çizmek için, bir faz doğrusu analizi kullanın.

9. $\dfrac{dP}{dt} = 1 - 2P$

10. $\dfrac{dP}{dt} = P(1 - 2P)$

11. $\dfrac{dP}{dt} = 2P(P - 3)$

12. $\dfrac{dP}{dt} = 3P(1 - P)\left(P - \dfrac{1}{2}\right)$

13. Örnek 5'in dramatik devamı Bir tür sağlıklı bir topluluğun sınırlı bir ortam içinde çoğaldığını ve halihazırdaki P_0 topluluğunun M_0 taşınabilir kapasite değerine oldukça yakın olduğunu varsayın. Bir tatlı su gölünde yaşayan bir balık topluluğunu hayal edebilirsiniz. Aniden, Mount St. Helen volkanik püskürmesi gibi, bir felaket gölü kirletir ve balıkların gereksinim duyduğu yiyecek ve oksijenin önemli bir bölümünü yok eder. Sonuç, M_0'dan önemli ölçüde küçük olan yeni bir M_1 taşınabilir kapasitesi ile yeni bir ortamdır. Felaketten belirli bir süre önceden başlayarak balık topluluğunun ortamdaki değişime tepkisini gösteren bir "önce-ve-sonra" eğrisi çizin.

14. Bir topluluğu kontrol etmek Bir ülkedeki balık ve av departmanı karaca nüfusunu kontrol etmek için bir avlanma izin belgesi dağıtmayı planlamaktadır (bir belge için bir karaca). Karaca nüfusu belirli bir seviyesinin altına düşerse karaca neslinin tükeneceği bilinmektedir. Ayrıca, karaca nüfusunun M taşınabilir kapasitesinin üstüne çıkması durumunda da nüfusun hastalıklar ve yetersiz beslenme nedeni ile M taşınabilir kapasitesine doğru düşeceği bilinmektedir.

a. Zamanın bir fonksiyonu olarak karaca nüfusunun büyüme oranının aşağıdaki modelinin anlamlılığını tartışın.

$$\frac{dP}{dt} = rP(M - P)(P - m),$$

Burada, P karaca nüfusu ve r de pozitif orantı sabitidir.

b. Bu modelin $dP/dt = rP(M - P)$ lojistik modelinden farkını açıklayın. Lojistik modelden daha iyi yada daha kötü müdür?

c. Her t için $P > M$ ise $\lim_{t\to\infty} P(t) = M$ olduğunu gösterin.

d. Her t için $P < M$ ise ne olur?

e. Diferansiyel denklemin çözümünü tartışın. Modelin denge noktaları nelerdir? P'nin kararlı-durum değerinin P'nin başlangıç değerlerine bağlılığını açıklayın. Yaklaşık olarak kaç av izni dağıtılmalıdır?

Uygulamalar ve Örnekler

15. Hava dalgıcı m kütleli bir cisim durgun halden yerçekimi etkisi ile düşmekte ise hızının karesi ile orantılı bir hava direnci ile karşılaşır. Bu durumda, düşüşün t. saniyesinde cismin hızı, k cismin aerodinamik yapısına ve havanın yoğunluğuna bağlı bir sabit olmak üzere.

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \qquad k > 0$$

denklemini sağlar (Düşüşün, hava yoğunluğu değişiminden etkilenmeyecek kadar kısa olduğunu varsayıyoruz).

a. Denklem için bir faz doğrusu çizin.

b. Tipik bir hız eğrisi çizin.

c. 160-lb lik ($mg = 160$) bir hava dalgıcı için zaman saniye ve mesafe feet olmak üzere k'nin tipik bir değeri 0.005 tir. Dalgıcın son hızı nedir?

16. $\sqrt{v}$ ile orantılı direnç m kütleli bir cisim v_0 ilk hızı ile dikey olarak aşağıya doğru fırlatılmıştır. Karşı direncin, hızın karekökü ile orantılı olduğunu varsayın ve bir grafik analizi ile son hızı bulun.

17. Yelkencilik Bir yelkenli, 50 lb lik sabit bir kuvvet sağlayan rüzgarın etkisi ile düz bir rota üzerinde yol almaktadır. Bunun dışında yelkenliye etkiyen tek kuvvet suyun direncidir. Direnç kuvveti sayısal olarak yelkenli hızının beş katına eşittir ve ilk hız 1 ft/sn dir. Bu rüzgar altında yelkenlinin maksimum hızı, saniye başına feet olarak nedir?

18. Bilginin yayılması Sosyolojistler, teknolojik bir gelişme veya kültürel bir ilgi gibi, bir bilgi parçasının bir topluluk arasında yayılması demek olan ve *sosyal difüzyon* denen bir doğal olayı kabul ederler. Topluluğun bireyleri iki sınıfa ayrılabilir: Bilgiyi bilenler ve bilmeyenler. Büyüklüğü bilinen sabit bir toplulukta, difüzyon oranının, bilgiyi bilenler kere bilmeyenler çarpımı ile orantılı olduğunu kabul etmek anlamlıdır. N kişilik bir toplulukta bilgiyi bilen bireylerin sayısı X ise, sosyal difüzyon için matematik bir model

$$\frac{dX}{dt} = kX(N - X)$$

ile verilir. Burada t gün olarak zamanı temsil etmektedir ve k pozitif bir sabittir.

a. Modelin anlamlılığını tartışın.

b. X' ve X'''nün işaretlerini belirten bir faz doğrusu kurun.

c. Temsili çözüm eğrileri çizin.

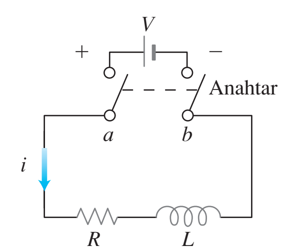
d. Bilginin en hızlı yayıldığı X değerini öngörün. Sonunda, bilgiyi kaç kişi öğrenir.

19. Bir *RL*-devresindeki akım Şekildeki diyagram, toplam direnci sabit R ohm ve bir sarım olarak gösterilen öz indüktansı da sabit L henri olan bir elektrik devresini temsil etmektedir. a ve b uçları, sabit V voltluk bir elektrik kaynağını bileştirecek şekilde kapatılabilen, bir anahtar vardır.

Böyle bir devre için, $V = Ri$, Ohm yasası değiştirilmelidir. Değiştirilmiş hali

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V$$

ile verilir. Burada i akımın amper olarak şiddeti ve t saniye olarak zamandır. Bu denklemi çözerek, anahtar kapandıktan sonra akımın nasıl akacağını bulabiliriz.



RL-devresindeki anahtarın $t = 0$ anında kapatıldığını kabul ederek, çözüm eğrilerini çizmek için bir faz doğrusu analizi kullanın. $t \to \infty$ iken akım'a ne olur? Bu değere *kararlı-durum çözümü* denir.

20. Şampuan içindeki inci Bir incinin, şampuan gibi, yoğun bir sıvı içinde, düşüşüne karşı ve hızıyla orantılı bir sürtünme kuvveti altında battığını varsayın. Ayrıca, şampuandan dolayı bir kaldırma kuvvetinin etkidiğini varsayın. *Archimedes prensibi*ne göre, kaldırma kuvveti inci tarafından yer değiştirilen sıvının ağırlığına eşittir. İncinin kütlesi için m ve alçalırken inci tarafından yer değiştirilen şampuanın kütlesi için P kullanarak, aşağıdaki adımları tamamlayın

a. Şekil 9.16'daki gibi, batmakta olan inciye etki eden kuvvetleri gösteren şematik bir diyagram çizin.

b. İncinin hızı için, zamanın bir fonksiyonu $v(t)$'yi kullanarak, incinin hızını batmakta olan bir cismin hızı olarak modelleyen bir diferansiyel denklem yazın.

c. v' ve v'''nün işaretlerini gösteren bir faz doğrusu kurun.

d. Tipik çözüm eğrileri çizin.

e. İncinin son hızı nedir?

9.5 Birinci Mertebe Diferansiyel Denklemlerin Uygulamaları

Şimdi, çalışmakta olduğumuz diferansiyel denklemlerin üç uygulamasına bakacağız. İlk uygulama, bir doğru üzerinde hareketine karşı bir kuvvet etkisi altında hareket eden bir cismi incelemektedir. İkincisi, yiyecek elverişliliği veya başka yaşamsal kaynaklar gibi, çevrenin büyüme üzerine koyduğu sınırlamaları hesaba katan bir nüfus büyüme modelidir. Sonuncu uygulama, ikinci bir eğri ailesindeki her eğriyi dik olarak (yani, dik açı ile) kesen bir eğriyi yada eğrileri konu alır.

Hızla Orantılı Direnç

Bazı durumlarda, durmaya hazırlanan bir araba gibi, hareket eden bir cimin karşılaştığı direncin cismin hızı ile orantılı olduğunu farz etmek anlamlıdır. Cisim ne kadar hızlı ilerlerse, ileri doğru gidişi, içinden geçtiği hava tarafından o kadar fazla engellenir. Bunu matematiksel terimlerle açıklamak için cismi, bir koordinat ekseninde hareket eden ve bir t anındaki konumu s ve hızı v olan bir m kütlesi olarak resmederiz. Newton'un ikinci hareket kanunundan harekete karşı direnen kuvvet

$$\text{Kuvvet} = \text{kütle} \times \text{ivme} = m\frac{dv}{dt}$$

dir. Direnç kuvvetin hızla orantılı olduğu varsayımını

$$m\frac{dv}{dt} = -kv \qquad \text{veya} \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v \qquad (k > 0)$$

yazarak ifade edebiliriz.

Bu, üstel değişimi temsil eden, değişkenlerine ayrılabilir bir diferansiyel denklemdir. $t = 0$ anında $v = v_0$ başlangıç koşulu ile denklemin çözümü (Bölüm7.5)

$$v = v_0 e^{-(k/m)t} \tag{1}$$

dir.

(1) denkleminden ne öğrenebiliriz? Herşeyden önce, m kütlesi Lake Erie'deki 20.000 tonluk tekne gibi büyük bir değerse, hızın sıfıra ulaşmasının uzun süreceğini görürüz (v'nin küçük olması için denklemin üss'ündeki kt/m'yi yeterince büyük yapacak t büyük olmalıdır). Daha fazlasını, s konumunu t zamanının bir fonksiyonu olarak bulmak için denklemi integre etmekle öğrenebiliriz.

Bir cismin durmaya hazırlandığını ve üzerine etkiyen tek kuvvetin süratiyle orantılı bir direnç olduğunu varsayalım. Durana kadar ne kadar yol alır? Bunu bulmak için, (1) Denklemiyle başlar ve

$$\frac{ds}{dt} = v_0 e^{-(k/m)t}, \qquad s(0) = 0$$

başlangıç değer problemini çözeriz. t'ye göre integre etmek

$$s = -\frac{v_0 m}{k} e^{-(k/m)t} + C$$

verir. $t = 0$ iken $s = 0$ koymak ise

$$0 = -\frac{v_0 m}{k} + C \qquad \text{ve} \qquad C = \frac{v_0 m}{k}$$

verir.

Dolayısıyla cismin t anındaki konumu

$$s(t) = -\frac{v_0 m}{k} e^{-(k/m)t} + \frac{v_0 m}{k} = \frac{v_0 m}{k}(1 - e^{-(k/m)t}) \tag{2}$$

bulunur. Cismin ne kadar uzakta duracağını bulmak için, $s(t)$'nin $t \to \infty$ iken limitini buluruz. $-(k/m) < 0$ olduğu için, $t \to \infty$ iken $e^{-(k/m)t} \to 0$ olduğunu biliyoruz, böylece

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{v_0 m}{k}(1 - e^{-(k/m)t})$$
$$= \frac{v_0 m}{k}(1 - 0) = \frac{v_0 m}{k}$$

bulunur. yani

$$\text{Alınan mesafe} = \frac{v_0 m}{k} \tag{3}$$

olur.

Elbette bu ideal bir değerdir. Sadece matematikte, zaman sonsuza uzayabilir. $v_0 m/k$ sayısı sadece bir üst sınırdır (yine de yararlı bir sınır). Gerçek hayatla en azından bir yerde uyuşur — m büyükse, cismi durdurmak için çok fazla enerji gerekir. Bu, okyanus gemilerinde neden römorkör bulundurulması gerektiğini açıklar. Alışılmış tasarımlı herhangi bir gemi bir kızağa idare edilebilecek bir hızla geçerse, duramadan iskeleye çarpar.

İngiliz sisteminde, kütle kütle-pound olarak ölçülür. Yani, gravitasyon sabitinin 32 ft/sn^2 olduğunu kabul ederek

Pound = kütle-pound × 32

dir.

ÖRNEK 1 Bir Buz Patenci

192 lb'lik bir buz patenci için, (1) denklemindeki k sabiti 1/3 kütle/ponud civarında ve $m = 6$ kütle/pounddur. Patencinin 11 ft/sn'den (7.5 mil/sa) 1 ft/sn'ye inmesi ne kadar sürer? Tamamen durmadan önce patenci ne kadar ilerler?

Çözüm Birinci soruyu (1) denkleminden t'yi çözerek yanıtlarız:

$$11e^{-t/18} = 1 \qquad k = 1/3,\ m = 6,\ v_0 = 11,\ v = 1 \text{ ile (1) Denklemi}$$
$$e^{-t/18} = 1/11$$
$$-t/18 = \ln(1/11) = -\ln 11$$
$$t = 18 \ln 11 \approx 43 \text{ sn}$$

İkinici soruyu (3) denklemiyle yanıtlarız:

$$\text{Alınan mesafe} = \frac{v_0 m}{k} = \frac{11\cdot 6}{1/3}$$
$$= 198 \text{ ft}$$

■

Nüfus Büyümesini Modellemek

Bölüm 7.5'te nüfus büyümesini Üstel Değişim Kanunu ile modelledik:

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad P(0) = P_0$$

Burada, P, t anındaki nüfus, $k > 0$ sabit büyüme oranı ve P_0, $t = 0$ anındaki nüfus büyüklüğüdür. Bölüm 7.5'te bu model için $P = P_0e^{kt}$ çözümünü bulduk. Fakat, işaret edilmesi gereken bir konu "Model ne kadar iyidir?" dir

Modelin bir değerlendirmesine başlamak için, üstel büyüme diferansiyel denkleminin söylediğine dikkat edin:

$$\frac{dP/dt}{P} = k \tag{4}$$

ifadesi bir sabittir. Bu orana **bağıl büyüme oranı** denir. Şimdi, Tablo 9.4 1980 den 1989 yılına kadar dünyanın yıl ortasındaki nüfusunu göstermektedir. $dt = 1$ ve $dP \approx \Delta P$ alarak tablo 4'ten (4) Denklemindeki bağıl büyüme oranının 0.017 sabiti olduğunu görürüz. Böylece, $t = 0$'ın 1980'i, $t = 1$'in 1981'i v.s. temsil ettiği tablo 4'teki verileri temel alarak dünya nüfusu aşağıdaki şekilde modellenebilir:

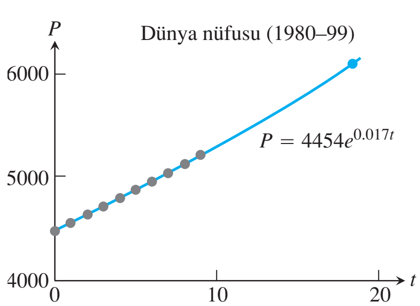
$$\text{Diferansiyel denklem:} \quad \frac{dP}{dt} = 0.017\,P$$

$$\text{Başlangıç koşulu:} \quad P(0) = 4454$$

TABLO 9.4 Dünya nüfusu (yıl ortası)

Yıl	Nüfus (milyon)	$\Delta P/P$
1980	4454	$76/4454 \approx 0.0171$
1981	4530	$80/4530 \approx 0.0177$
1982	4610	$80/4610 \approx 0.0174$
1983	4690	$80/4690 \approx 0.0171$
1984	4770	$81/4770 \approx 0.0170$
1985	4851	$82/4851 \approx 0.0169$
1986	4933	$85/4933 \approx 0.0172$
1987	5018	$87/5018 \approx 0.0173$
1988	5105	$85/5105 \approx 0.0167$
1989	5190	

Kaynak: U.S. Bureau of the Census (Sept., 1999): www.census.gov/ipc/www/worldpop.html.



ŞEKİL 9.23 $P = 4454e^{0.017t}$'nin $t = 19$ için çözümünün, Dünyanın 1999'daki nüfusundan birazcık fazla olan 6152.16 olduğuna dikkat edin.

Bu başlangıç değer probleminin çözümü $P = 4454e^{0.017t}$ nüfus fonksiyonunu verir. Çözüm, 1999 yılında (yani $t = 19$) yıl ortasında dünya nüfusunu 6152 milyon veya 6.15 milyar olarak öngörmektedir (Şekil 9.23) . Bu, U.S. Bureau of the Census (Nüfus Sayım Bürosu) (Table 9.5) tarafından verilen gerçek nüfus 6001 milyon dan biraz daha fazladır. Büyüme oranında bir değişim olup olmadığını görmek için daha güncel verileri inceleyelim.

Tablo 9.5, 1990 dan 2002 yılına kadar dünya nüfusunu göstermektedir. Tablodan, bağıl büyüme oranının pozitif olduğunu fakat nüfus artarken, çevresel, ekonomik ve başka

nedenlerden dolayı küçüldüğünü görüyoruz. Ortalama olarak, büyüme oranı 1990 dan 2002 yılına kadar yılda yaklaşık 0.0003 azalmaktadır. Yani, (4) Denklemindeki k'nin grafiği, $-r = -0.0003$ negatif eğimi ile doğruya yakındır. Bölüm 9.4, Örnek 5'te daha gerçekçi olan

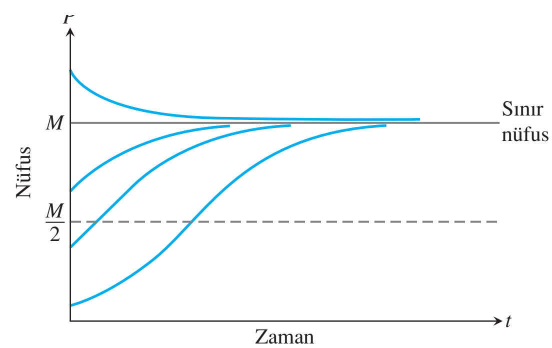
$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P \tag{5}$$

lojistik büyüme medelini önerdik. Burada M, çevrenin uzun bir süre dayanabileceği maksimum nüfus veya **taşınabilir kapasitedir.** (5) Denklemini üstel model ile karşılaştırmakla, $k = r(M - P)$ ifadesinin, bir sabit yerine nüfusun lineer olarak azalan bir fonksiyonu olduğunu görürüz. (5) Denklemindeki lojistik modelin grafiksel çözüm eğrileri Bölüm 9.4'te elde edilmişti, Şekil 9.24'te (tekrar) gösterilmektedir. Grafikte şuna dikkat edin; $P < M$ ise nüfus M'ye doğru artar. $P > M$ ise büyüme oranı negatif olacaktır ($r > 0$, $M > 0$ olduğundan) ve nüfus azalır.

TABLO 9.5 Yakın zaman Dünya nüfusu

Yıl	Nüfus (milyon)	$\Delta P/P$
1990	5275	$84/5275 \approx 0.0159$
1991	5359	$84/5359 \approx 0.0157$
1992	5443	$81/5443 \approx 0.0149$
1993	5524	$81/5524 \approx 0.0147$
1994	5605	$80/5605 \approx 0.0143$
1995	5685	$79/5685 \approx 0.0139$
1996	5764	$80/5764 \approx 0.0139$
1997	5844	$79/5844 \approx 0.0135$
1998	5923	$78/5923 \approx 0.0132$
1999	6001	$78/6001 \approx 0.0130$
2000	6079	$73/6079 \approx 0.0120$
2001	6152	$76/6152 \approx 0.0124$
2002	6228	?
2003	?	

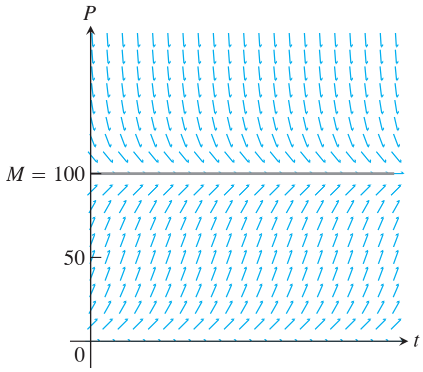
Kaynak: U.S. Bureau of the Census (Sept., 2003): www.census.gov/ipc/www/worldpop.html.



ŞEKİL 9.24 $dP/dt = r(M - P)P$ Lojistik nüfus modelinin çözüm eğrileri.

ÖRNEK 2 Bir Ayı Nüfusunu Modellemek

Bir ulusal parkın, en çok 100 boz ayıyı barındırma yetisinde olduğu biliniyor. Şu anda parkta on ayı vardır. Nüfusu, $r = 0.001$ olmak üzere, bir lojistik diferansiyel denklem ile modelliyoruz (çok küçük nüfus seviyeleri için modelin güvenilir sonuçlar vermemesi ihtimaline rağmen).



ŞEKİL 9.25 Lojistik diferansiyel denklem için bir eğim alanı $dP/dt = 0.001(100 - P)P$ (Örnek 2).

(a) Diferansiyel denklem için bir eğim alanı çizin ve tanımlayın.

(b) 20 yıl içinde nüfus büyüklüğünü öngörmek için $dt = 1$ adım büyüklüğü ile Euler yöntemini kullanın.

(c) Nüfus için bir $P(t)$ lojistik büyüme analitik çözümü bulun ve grafiğini çizin.

(d) Ayı nüfusu ne zaman 50'ye ulaşacaktır?

Çözüm

(a) *Eğim alanı.* Taşınabilir kapasite 100 dür, dolayısıyla $M = 100$'dür. Aradığımız çözüm, aşağıdaki diferansiyel denklemin bir çözümüdür;

$$\frac{dP}{dt} = 0.001(100 - P)P$$

Şekil 9.25, bu diferansiyel denklem için bir eğim alanı göstermektedir. $P = 100$'de bir yatay asimptot var gibi gözükmektedir. Çözüm eğrileri, üstten bu seviyeye doğru alçalırlar, alttan bu seviyeye yükselirler.

(b) *Euler yöntemi.* $dt = 1$ adım büyüklüğü, $t_0 = 0$, $P(0) = 10$ ve

$$\frac{dP}{dt} = f(t, P) = 0.001(100 - P)P,$$

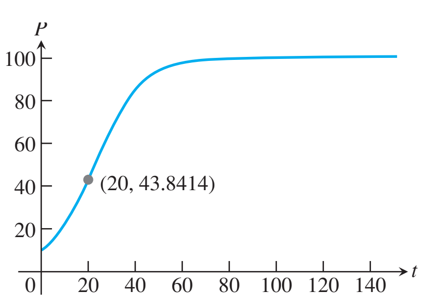
ile

$$P_n = P_{n-1} + 0.001(100 - P_{n-1})P_{n-1}$$

tekrarlama formülünü kullanarak Tablo 9.6'daki yaklaşımları elde ederiz.

TABLO 9.6 $dP/dt = 0.001(100 - P)P$, $P(0) = 10$, adım büyüklüğü $dt = 1$

t	*P* (Euler)	*t*	*P* (Euler)
0	10		
1	10.9	11	24.3629
2	11.8712	12	26.2056
3	12.9174	13	28.1395
4	14.0423	14	30.1616
5	15.2493	15	32.2680
6	16.5417	16	34.4536
7	17.9222	17	36.7119
8	19.3933	18	39.0353
9	20.9565	19	41.4151
10	22.6130	20	43.8414



ŞEKİL 9.26 $dP/dt = 0.001(100 - P)P$, $P(0) = 10$, adım büyüklüğü $dt = 1$'in çözümü için Euler yaklaşımı lojistik diferansiyel

20 yıl sonunda yaklaşık 44 boz ayı vardır. Şekil 9.26, $dt = 1$ adım büyüklüğü ile $0 \le t \le 150$ aralığı üzerinde Euler yaklaşımının bir grafiğini göstermektedir. Grafik, Şekil 9.24'te çizdiğimiz alt eğriler gibi gözükmektedir.

(c) *Analitik çözüm.* Ayı nüfusu 10 iken $t = 0$ varsayabiliriz. Bu nedenle $P(0) = 10$'dur. Aradığımız lojistik büyüme modeli aşağıdaki başlangıç değer probleminin çözümüdür;

$$\text{Diferansiyel denklem:} \quad \frac{dP}{dt} = 0.001(100 - P)P$$

$$\text{Başlangıç koşulu:} \quad P(0) = 10$$

İntegrasyona hazırlık için diferansiyel denklemi

$$\frac{1}{P(100 - P)}\frac{dP}{dt} = 0.001$$

formunda tekrar yazarız.

Sol tarafta kısmi kesirlere ayırma kullanıp her iki tarafı 100 ile çarparsak

$$\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{100 - P}\right)\frac{dP}{dt} = 0.1$$

$$\ln|P| - \ln|100 - P| = 0.1t + C \qquad t\text{'ye göre integre edin.}$$

$$\ln\left|\frac{P}{100 - P}\right| = 0.1t + C$$

$$\ln\left|\frac{100 - P}{P}\right| = -0.1t - C \qquad \ln\frac{a}{b} = -\ln\frac{b}{a}$$

$$\left|\frac{100 - P}{P}\right| = e^{-0.1t - C} \qquad \text{üs alın}$$

$$\frac{100 - P}{P} = (\pm e^{-C})e^{-0.1t}$$

$$\frac{100}{P} - 1 = Ae^{-0.1t} \qquad A = \pm e^{-c} \text{ olsun}$$

$$P = \frac{100}{1 + Ae^{-0.1t}} \qquad P\text{'yi çözün}$$

Bu, diferansiyel denklemin genel çözümüdür. $t = 0$ iken $P = 10$ dur ve

$$10 = \frac{100}{1 + Ae^0}$$

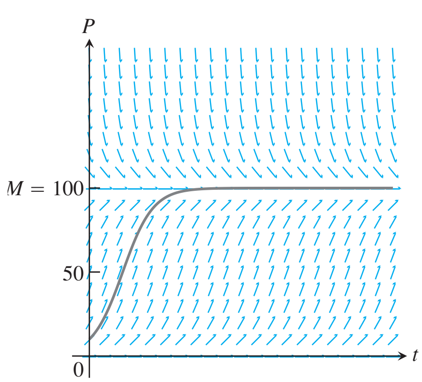
$$1 + A = 10$$

$$A = 9.$$

elde ederiz. Böylece, lojistik büyüme modeli

$$P = \frac{100}{1 + 9e^{-0.1t}}.$$

dir. Grafiği (Şekil 9.27), Şekil 9.25'teki eğim alanı içine çizilmiştir.



ŞEKİL 9.27 Şekil 9.25'teki eğim alanı içine çizilmiş

$$P = \frac{100}{1 + 9e^{-0.1t}}$$

grafiği (Örnek 2).

(d) Ayı nüfusu ne zaman 50'ye ulaşacaktır? Bu model için,

$$\begin{aligned} 50 &= \frac{100}{1 + 9e^{-0.1t}} \\ 1 + 9e^{-0.1t} &= 2 \\ e^{-0.1t} &= \frac{1}{9} \\ e^{0.1t} &= 9 \\ t &= \frac{\ln 9}{0.1} \approx 22 \text{ yıl} \end{aligned}$$

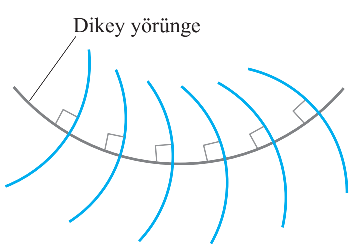
Genel lojistik diferansiyel denklem

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P$$

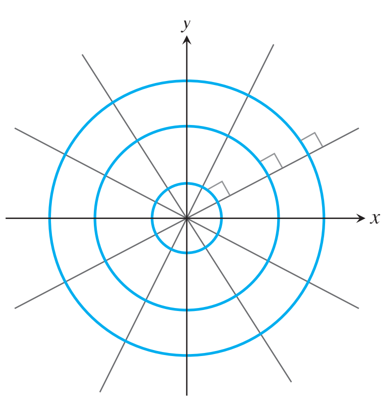
nin çözümü Örnek 2'deki gibi elde edilebilir. Alıştırma 10'da, çözümün

$$P = \frac{M}{1 + Ae^{-rMt}}$$

olduğunun gösterilmesi istenmektedir. A değeri uygun bir başlangıç koşulu ile tanımlanır.



ŞEKİL 9.28 Bir dikey yörünge bir eğri ailesini dik açı ile veya dikey olarak keser



ŞEKİL 9.29 Orijinden geçen her doğru, merkezi orijinde olan çember ailesine diktir.

Ortogonal Yörüngeler

Bir eğri ailesinin bir **ortogonal yörüngesi**, ailenin her eğrisini dik açı ile veya ortogonal olarak kesen bir eğridir (Şekil 9.28). Örneğin, orijinden geçen her doğru, merkezleri orijinde olan $x^2 + y^2 + a^2$ çemberler ailesinin bir ortogonal yörüngesidir (Şekil 9.29). Bu şekilde, karşılıklı olarak ortogonal sistemlerin potansiyel elektrikle ilgili fizik problemlerinde özel bir önemi vardır. Bu gibi sistemlerde bir ailenin eğrileri elektrik akımına karşı gelir, diğer aileninkiler ise sabit potansiyel eğrilerine karşı gelir. Bu gibi sistemler ayrıca hidrodinamik ve ısı-akışı problemlerinde de ortaya çıkarlar.

ÖRNEK 3 Ortogonal Yörüngeleri Bulmak

Keyfi bir $a \neq 0$ sabiti için $xy = a$ eğri ailesinin ortogonal yörüngelerini bulunuz.

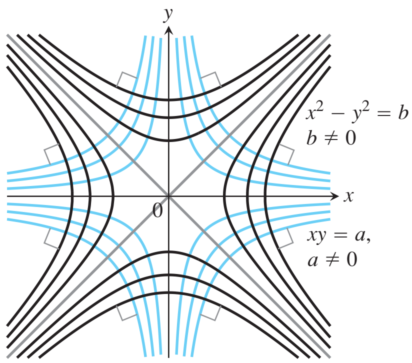
Çözüm $xy = a$ eğrileri, odak eksenleri $y = \pm x$'ler olan bir hiperboller ailesi oluştururlar. Önce, bu ailedeki her eğrinin eğimlerini veya dy/dx değerlerini buluruz. $xy = a$ eşitliğini kapalı olarak türetmek

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad \text{veya} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

verir. Böylece, $xy = a$ hiperbollerinden biri üzerinde herhangi bir (x, y) noktasındaki teğet doğrunun eğimi $y' = -y/x$ dir. Ortogonal bir yörünge üzerinde, bu aynı noktadaki teğet doğrunun eğimi, çarpmaya göre tersinin negatifi veya x/y olmalıdır. Bu nedenle, ortogonal yörüngeler

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

diferansiyel denklemini sağlamalıdırlar.



ŞEKİL 9.30 Her bir eğri, diğer aileden kestiği her eğriye diktir (Örnek 3)

Bu diferansiyel denklem değişkenlerine ayrılabilirdir ve Bölüm 9.1'deki gibi çözeriz:

$$y\,dy = x\,dx \qquad \text{Değişkenlere ayırın}$$

$$\int y\,dy = \int x\,dx \qquad \text{İki tarafı integre edin}$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y^2 - x^2 = b, \tag{6}$$

burada $b = 2C$ keyfi bir sabittir. Ortogonal yörüngeler, (6) Denklemi ile verilen ve Şekil 9.30 da çizilen hiperboller ailesidir. ■

ALIŞTIRMALAR 9.5

1. **Bisiklet durdurmak** 66-kg'lık bir bisikletçi 7-kg'lık bir bisiklet üzerinde 9 m/sn ile giderken fren yapmaya başlıyor. (1) Denklemindeki k yaklaşık olarak 3.9 kg/sn dir.
   a. Bisikletçi tam olarak durmadan önce ne kadar yol alır?
   b. Bisikletçinin süratinin 1 m/sn'ye düşmesi ne kadar sürer?

2. **Bir savaş gemisi durdurmak** Iowa sınıfı bir savaş gemisinin ağırlığının 51,000,000 kg olduğunu ve (1) Denklemindeki k değerinin yaklaşık olarak 59,000 kg/sn olduğunu varsayın. Savaş gemisinin, 9 m/s ile ilerlerken güç kaybetmeye başladığını kabul edin.
   a. Gemi durmadan önce ne kadar ilerleyecektir?
   b. Geminin süratinin 1 m/sn'ye düşmesi ne kadar sürer?

3. Tablo 9.7'deki veriler, Ohio, Columbusta St. Francis DeSales Yüksek Okulunda bir matematik öğretmeni olan Valerie Sharritts tarafından Bilgisayar Tabanlı bir Laboratuvarda hareketli bir dedektörle elde edilmiştir. Tablo, 10 yaşındaki kızı Ashley'nin bir çizgi üzerinde paten kayarken t saniyede ilerlemiş olduğu mesafeyi (metre) göstermektedir. Ashley'nin Tablo 9.7'deki data ile verilen konumu için Denklem (2) formunda bir model bulun. Ashley'nin ilk hızı $v_0 = 2.75$ m/sn, kütlesi $m = 39.92$ kg ve toplam ilerleme mesafesi 4.91 m dir.

4. **Durmak için yavaşlamak** Tablo 9.8, Kelly Schmitzer'in bir çizgi üzerinde paten kayarken saniyede ilerlemiş olduğu mesafeyi (metre) göstermektedir. Konumu için Denklem (2) formunda bir model bulun. Kelly'nin ilk hızı $v_0 = 0.80$ m/sn, kütlesi $m = 49.90$ kg ve toplam ilerleme mesafesi 1.32 m dir.

5. **Süs balığı topluluğu** 2000 galonluk bir depo en çok 150 süs balığı barındırabilmektedir. Depoya altı süs balığı bırakılıyor. Nüfusun büyüme oranının, t zamanı hafta olmak üzere

$$\frac{dP}{dt} = 0.0015(150 - P)P$$

olduğunu varsayın.

TABLO 9.7 Ashley Sharritt'in paten kayma verileri

t (san)	*s* (m)	*t* (san)	*s* (m)	*t* (san	*s* (m)
0	0	2.24	3.05	4.48	4.77
0.16	0.31	2.40	3.22	4.64	4.82
0.32	0.57	2.56	3.38	4.80	4.84
0.48	0.80	2.72	3.52	4.96	4.86
0.64	1.05	2.88	3.67	5.12	4.88
0.80	1.28	3.04	3.82	5.28	4.89
0.96	1.50	3.20	3.96	5.44	4.90
1.12	1.72	3.36	4.08	5.60	4.90
1.28	1.93	3.52	4.18	5.76	4.91
1.44	2.09	3.68	4.31	5.92	4.90
1.60	2.30	3.84	4.41	6.08	4.91
1.76	2.53	4.00	4.52	6.24	4.90
1.92	2.73	4.16	4.63	6.40	4.91
2.08	2.89	4.32	4.69	6.56	4.91

   a. Süs balığı nüfusu için t'ye bağlı bir formül bulun.
   b. Süs balığı nüfusunun 100, 125 olması ne kadar sürer?

6. **Goril Topluluğu** Belirli bir vahşi hayvan korusu en fazla 250 ova gorili barındırabilmektedir. 1970 yılında koruda 28 goril olduğu biliniyor. Nüfusun büyüme oranının, t zamanı yıl olmak üzere

$$\frac{dP}{dt} = 0.0004(250 - P)P$$

olduğunu varsayın.

TABLO 9.8 Kelly Schmitzer'in paten kayma verileri

t (sn)	*s* (m)	*t* (sn)	*s* (m)	*t* (sn)	*s* (m)
0	0	1.5	0.89	3.1	1.30
0.1	0.07	1.7	0.97	3.3	1.31
0.3	0.22	1.9	1.05	3.5	1.32
0.5	0.36	2.1	1.11	3.7	1.32
0.7	0.49	2.3	1.17	3.9	1.32
0.9	0.60	2.5	1.22	4.1	1.32
1.1	0.71	2.7	1.25	4.3	1.32
1.3	0.81	2.9	1.28	4.5	1.32

a. Goril nüfusu için t'ye bağlı bir formül bulun.

b. Goril nüfusunun, korunun taşıma kapasitesine ulaşması ne kadar sürer?

7. Balık avlama bölgesi Pasifikteki halibut balık avlama bölgesi

$$\frac{dy}{dt} = r(M - y)y$$

lojistik denklemi ile modellenmiştir. Burada $y(t)$, t(yıl) anında halibuttaki nüfusun kilogram olarak toplam ağırlığıdır. Taşınabilir kapasitenin $M = 8 \times 10^7$ kg olduğu ve yıl başına $r = 0.08875 \times 10^{-7}$ olduğu tahmin edilmektedir.

a. $y(0) = 1.6 \times 10^7$ kg ise 1 yıl sonra halibuttaki nüfusun toplam ağırlığı nedir?

b. Halibut avlanma bölgesindeki toplam ağırlık 4×10^7 kg'a ne zaman ulaşır?

8. Değiştirilmiş lojistik model Örnek 2'deki lojistik diferansiyel denklemin, c bir sabit olmak üzere

$$\frac{dP}{dt} = 0.001(100 - P)P - c$$

olarak değiştirildiğini varsayın.

a. c sabitinin anlamını açıklayın. c'nin hangi değerleri boz ayı topluluğu için gerçekçi olur?

T **b.** $c = 1$ iken diferansiyel denklem için bir doğrultu alanı çizin. Denge çözümleri nelerdir (Bölüm 9.4)?

c. Doğrultu alanınıza (a) dan birkaç çözüm eğrisi çizin. Değişik başlangıç nüfusları için boz ayı nüfusuna ne olduğunu açıklayın.

9. Tam çözüm Aşağıdaki başlangıç değer problemlerinin tam çözümlerini bulun.

a. $y' = 1 + y,\ y(0) = 1$

b. $y' = 0.5(400 - y)y,\ \ y(0) = 2$

10. Lojistik diferansiyel denklem

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P$$

diferansiyel denkleminin çözümünün

A bir sabit olmak üzere

$$P = \frac{M}{1 + Ae^{-rMt}},$$

olduğunu gösterin

11. Dramatik bir çözüm k ve P_0 pozitif sabitler olsun.

a. Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözün.

$$\frac{dP}{dt} = kP^2, \quad P(0) = P_0$$

T **b.** (a) daki çözümün grafiğinin, t'nin pozitif bir değerinde bir dikey asimptotunun bulunduğunu gösterin. t'nin bu değeri nedir?

12. Soyu tükenmiş topluluklar $r > 0$, M maksimum barındırılabilir nüfus ve m, altındaki bir değer için türlerin nesillerinin tükeneceği minimum nüfus olmak üzere

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)(P - m),$$

nüfus modelini göz önüne alın.

a. $m = 100$, $M = 1200$ ve $m < P < M$ olduğunu varsayın. Diferansiyel denklemin yeniden

$$\left[\frac{1}{1200 - P} + \frac{1}{P - 100}\right]\frac{dP}{dt} = 1100r$$

şeklinde yazılabileceğini gösterin ve bu değişkenlerine ayrılabilen denklemi çözün.

b. (a)'nın $P(0) = 300$ koşulunu sağlayan çözümünü bulun.

c. $m < P < M$ kısıtlaması ile diferansiyel denklemi çözün.

Ortogonal Yörüngeler

13–18 alıştırmalarında eğri ailelerinin ortogonal yörüngelerini bulun. Her ailenin birkaç temsilcisini çizin.

13. $y = mx$

14. $y = cx^2$

15. $kx^2 + y^2 = 1$

16. $2x^2 + y^2 = c^2$

17. $y = ce^{-x}$

18. $y = e^{kx}$

19. $2x^2 + 3y^2 = 5$ ve $y^2 = x^3$ eğrilerinin ortogonal olduklarını gösterin.

20. Verilen diferansiyel denklemin çözüm ailesini ve ortogonal yörüngelerinin ailesini bulun. Her iki aileyi çizin.

a. $x\,dx + y\,dy = 0$ **b.** $x\,dy - 2y\,dx = 0$

21. a ve b'nin pozitif sayılar olduklarını varsayın.

$$y^2 = 4a^2 - 4ax \quad \text{ve} \quad y^2 = 4b^2 + 4bx$$

parabollerini aynı diyagramda çizin. $\left(a - b, \pm 2\sqrt{ab}\right)$, noktalarında kesiştiklerini ve her "a-parabolünün" her "b- parabolüne" dik olduğunu gösterin.

Bölüm 9 Tekrar Soruları

1. Birinci derece bir diferansiyel denklem nedir? Bir fonksiyon ne zaman böyle bir denklemin çözümü olur?
2. Değişkenlerine ayrılabilir birinci derece diferansiyel denklemleri nasıl çözersiniz?
3. Eksponansiyel değişim kuralı nedir? Bir başlangıç değer probleminden nasıl türetilebilir? Kuralın bazı uygulamaları nelerdir?
4. Bir $y' = f(x, y)$ diferansiyel denklenimin eğim alanı nedir? Böyle alanlardan neler öğenebiliriz?
5. Lineer bir birinci derece diferansiyel denklemi nasıl çözersiniz?
6. $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ başlangıç değer problemini sayısal olarak çözmek için Euler yöntemini açıklayın. Örnek verin. Yöntemin hassaslığını yorumlayın. Bir başlangıç değer problemini neden sayısal olarak çözmek isteyesiniz?
7. $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ başlangıç değer problemini sayısal olarak çözmek için geliştirilmiş Euler yöntemini açıklayın. Euler yöntemi ile nasıl kıyaslanır?
8. Bir otonom diferansiyel denklem nedir? Denklemin denge değerleri nelerdir? Kritik noktalardan farkları nedir. Kararlı bir denge değeri nedir? Ya kararsız?
9. Bir otonom diferansiyel denklemin faz doğrusunu nasıl kurarsınız? Bir faz doğrusu, diferansiyel denklemin bir çözümünü nitel olarak yansıtan bir grafik üretmede size nasıl yardımcı olur?
10. Üstel model, uzun-dönem nüfus büyümelerini öngörmek için neden gerçekçi değildir? Lojistik model, nüfus büyümeleri için üstel modeldeki eksikliği nasıl düzeltir? Lojistik diferansiyel denklem nedir? Çözümünün formu nedir? Lojistik çözümün grafiğini açıklayın.

Bölüm 9 Problemler

1–20 alıştırmalarında diferansiyel denklemleri çözün.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{y}\cos^2\sqrt{y}$
2. $y' = \dfrac{3y(x+1)^2}{y-1}$
3. $yy' = \sec y^2 \sec^2 x$
4. $y\cos^2 x\, dy + \sin x\, dx = 0$
5. $y' = xe^y\sqrt{x-2}$
6. $y' = xye^{x^2}$
7. $\sec x\, dy + x\cos^2 y\, dx = 0$
8. $2x^2\, dx - 3\sqrt{y}\csc x\, dy = 0$
9. $y' = \dfrac{e^y}{xy}$
10. $y' = xe^{x-y}\csc y$
11. $x(x-1)\, dy - y\, dx = 0$
12. $y' = (y^2-1)x^{-1}$
13. $2y' - y = xe^{x/2}$
14. $\dfrac{y'}{2} + y = e^{-x}\sin x$
15. $xy' + 2y = 1 - x^{-1}$
16. $xy' - y = 2x\ln x$
17. $(1+e^x)\, dy + (ye^x + e^{-x})\, dx = 0$
18. $e^{-x}\, dy + (e^{-x}y - 4x)\, dx = 0$
19. $(x + 3y^2)\, dy + y\, dx = 0$ (*İpucu:* $d(xy) = y\, dx + x\, dy$)
20. $x\, dy + (3y - x^{-2}\cos x)\, dx = 0, \quad x > 0$

Başlangıç Değer Problemleri

21–30 alıştırmalarında başlangıç değer problemlerini çözün.

21. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-x-y-2}, \quad y(0) = -2$
22. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\ln y}{1+x^2}, \quad y(0) = e^2$
23. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + 2y = x, \quad x > -1, \quad y(0) = 1$
24. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2 + 1, \quad x > 0, \quad y(1) = 1$
25. $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = x^2, \quad y(0) = -1$
26. $x\, dy + (y - \cos x)\, dx = 0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$
27. $x\, dy - \left(y + \sqrt{y}\right) dx = 0, \quad y(1) = 1$
28. $y^{-2}\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}, \quad y(0) = 1$
29. $xy' + (x-2)y = 3x^3e^{-x}, \quad y(1) = 0$
30. $y\, dx + (3x - xy + 2)\, dy = 0, \quad y(2) = -1, \quad y < 0$

Euler Yöntemi

31 ve 32 alıştırmalarında başlangıç değer problemini verilen aralık üzerinde x_0'dan başlayarak $dx = 0.1$ ile çözmek için belirtilen yöntemi kullanın.

T 31. **Euler:** $y' = y + \cos x, \quad y(0) = 0; \quad 0 \le x \le 2; \quad x_0 = 0$

T 32. **Geliştirilmiş Euler:** $y' = (2-y)(2x+3), \quad y(-3) = 1; \quad -3 \le x \le -1; \quad x_0 = -3$

33 ve 34 Alıştırmalarında y, verilen başlangıç değer probleminin çözümü olduğuna göre $y(c)$'yi öngörmek için $dx = 0.05$ ile belirtilen yöntemi kullanın.

T 33. **Geliştirilmiş Euler:**

$$c = 3; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x-2y}{x+1}, \quad y(0) = 1$$

T 34. Euler:

$$c = 4; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2y + 1}{x}, \quad y(1) = 1$$

35 ve 36 alıştırmalarında verilen başlangıç değer problemini grafik olarak çözmek için $x_0 = 0$'dan başlayarak belirtilen yöntemi

a. $dx = 0.1$ **b.** $dx = -0.1$

ile kullanın.

T 35. Euler:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^{x+y+2}}, \quad y(0) = -2$$

T 36. Geliştirilmiş Euler:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + y}{e^y + x}, \quad y(0) = 0$$

Eğim Alanları

37–40 alıştırmalarında, denklemin eğim alanının bir bölümünü çizin. Sonra çiziminize $P(-1, 1)$ noktasından geçen çözüm eğrisini ekleyin. $x_0 = 1$ ve $dx = 0.2$ ile Euler yönteminin kullanarak $y(2)$'yi tahmin edin. Yanıtlarınızı dört ondalık basamağa yuvarlayın. Karşılaştırmak için $y(2)$'nin kesin değerini bulun.

37. $y' = x$ **38.** $y' = 1/x$

39. $y' = xy$ **40.** $y' = 1/y$

Otonom Diferansiyel Denklemler ve Faz Doğruları

41 ve 42 alıştırmalarında,

a. Denge değerlerini belirleyin. Hangileri kararlı, hangileri karasızdır?

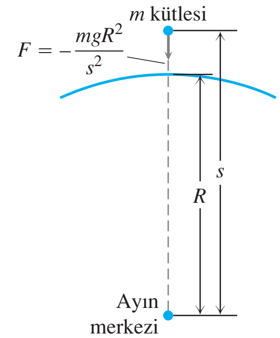
b. Bir faz doğrusu kurun. y' ve y'''nün işaretlerini belirleyin.

c. Çözüm eğrilerinden seçilmiş temsilciler çizin

41. $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$ **42.** $\frac{dy}{dx} = y - y^2$

Uygulamalar

43. Kaçış Hızı Havasız bir ayda, ayın merkezinden s kadar uzaklıkta olan m kütleli bir cisme yerçekiminin uyguladığı F çekimi $F = -mg R^2 s^{-2}$ denklemiyle verilir. Burada g ayın yüzeyindeki yerçekimi ivmesi ve R de ayın yarıçapıdır (Şekle bakın). F kuvveti negatiftir, çünkü s'yi azaltan yönde etki eder.



a. Cisim $t = 0$ anında v_0 ilk hızıyla ayın yüzeyinden yukarı doğru fırlatılıyorsa, Newton'un ikinci yasası $F = ma$'yı kullanarak cismin s konumundaki hızının

$$v^2 = \frac{2gR^2}{s} + v_0{}^2 - 2gR.$$

denklemiyle verildiğini gösterin. Yani, $v_0 = \sqrt{2gR}$ olduğu sürece hız pozitif kalır. $v_0 = \sqrt{2gR}$ hızı ayın **kaçış hızı**dır. Bu veya daha büyük bir hızla yukarı fırlatılan bir cisim ayın yerçekiminden kurtulacaktır.

b. $v_0 = \sqrt{2gR}$ ise

$$s = R\left(1 + \frac{3v_0}{2R}t\right)^{2/3}$$

olduğunu gösterin.

44. Kayarak durmak Tablo 9.9, Johnathon Krueger'in paten ile t saniyede kaydığı mesafesini (metre) göstermektedir. Konumu için Bölüm 9.5'teki Denklem (2) formunda bir model bulun. Başlangıç hızı $v_0 = 0.86$ m/sn, kütlesi m = 30.84 kg ve kaydığı toplam mesafe 0.97 m dir.

TABLO 9.9 Johnathon Krueger paten verileri

t (s)	s (m)	t (s)	s (m)	t (s)	s (m)
0	0	0.93	0.61	1.86	0.93
0.13	0.08	1.06	0.68	2.00	0.94
0.27	0.19	1.20	0.74	2.13	0.95
0.40	0.28	1.33	0.79	2.26	0.96
0.53	0.36	1.46	0.83	2.39	0.96
0.67	0.45	1.60	0.87	2.53	0.97
0.80	0.53	1.73	0.90	2.66	0.97

Bölüm 9 Tekrar Soruları

Teori ve Uygulamalar

1. Hücre zarından geçiş Bazı koşullar altında, çözülmüş bir maddenin bir hücre zarı boyunca hareketinin sonucu

$$\frac{dy}{dt} = k\frac{A}{V}(c - y).$$

denklemiyle tanımlanır. Bu denklemde, y hücre içindeki maddenin konsantrasyonu ve dy/dt de y'nin zamana göre değişim

oranıdır. k, A, V ve c harfleri sabitleri belirtirler. *k geçirgenlik katsayısı* (zarın bir özelliği), A zarın yüzey alanı, V hücrenin hacmi ve c'de hücrenin dışındaki maddenin konsantrasyonudur. Denklem, hücre içindeki konsantrasyonun değişim oranının, kendisiyle dışarıdaki konsantrasyon arasındaki farkla orantılı olduğunu söyler.

a. $y(0)$ için y_0 kullanarak $y(t)$'yi çözün.

b. Kararlı durum konsantrasyonu, $\lim_{t\to\infty} y(t)$'yi bulun.

(N.T.I.S, US Departmant of Commerce tarafından dağıtılan *Some Mathematical Models in Biology,* R.M. Thrall, J.A. Mortimer, K.R. Baum, R.F. Baum, editörler; Geliştirilmiş Baskı, Aralık 1967, PB-202 364, sayfa 101-103'ten alınmıştır.)

2. Oksijen karışımı Hava ile dolu bir litre bir cam balon içine bir tüpten oksijen akmakta ve oksijen-hava karışımı (iyice karışmış) başka bir tüpten çıkmaktadır. Havanın %21 oksijen içerdiği varsayılarak, içeri tüpünden 5 L oksijen geçtiğinde cam balondaki oksijen yüzdesi ne olur?

3. Bir sınıftaki karbon dioksit Ortalama insan, dakikada 20 defa nefes alıp her defasında %4 karbon dioksit içeren 100 inç^3 hava dışarı verirse, 30 öğrencinin girdiği 10,000 ft^3'lük bir sınıfta 1 saat sonra havadaki karbon dioksit yüzdesini bulun.
Başlangıçtaki havanın temiz olduğunu, vantilatörlerin içeriye dakikada 1000 ft^3 hava üflediğini ve temiz havanın %0.04 karbon dioksit içeridiğini kabul edin.

4. Bir roketin yüksekliği Kütlesi zamanla değişen bir sisteme bir F dış kuvveti etkiyorsa, Newton'un hareket kanunu

$$\frac{d(mv)}{dt} = F + (v + u)\frac{dm}{dt}$$

dir. Bu denklemde, sistemin t anındaki kütlesi m, sürati v ve sisteme dm/dt oranı ile giren (veya sistemi terk eden) kütlenin sürati $v + u$ dur. Başlangıç kütlesi m_0 olan bir roketin, kütlesinin bir kısmının saniyede $dm/dt = -b$ birim sabit oranı ve rokete göre sabit $u = -c$ hızı ile doğrudan geriye doğru yakılarak, durgun halden yukarıya doğru fırlatıldığını varsayın.

Rokete etkiyen tek dış kuvvet, yerçekiminden dolayı $F = -mg$ dir. bu varsayımlar altında, t saniye sonunda roketin yer seviyesinden yüksekliğinin (t, m_0/b'ye göre küçük)

$$y = c\left[t + \frac{m_0 - bt}{b}\ln\frac{m_0 - bt}{m_0}\right] - \frac{1}{2}gt^2$$

olduğunu gösterin.

5. a. $P(x)$ ve $Q(x)$'in $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli olduklarını varsayın. $v(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ olmak üzere

$$v(x)y = \int v(x)Q(x)\,dx + C$$

denklemini sağlayan herhangi bir y fonksiyonunun

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

diferansiyel denkleminin çözümü olduğunu göstermek için Analizin Temel Teoremi, Kısım I'i kullanın.

b. $C = y_0v(x_0) - \int_{x_0}^{x} v(t)Q(t)\,dt$ ise (a)'daki her y çözümünün $y(x_0) = y_0$ başlangıç koşulunu sağladığını gösterin.

6. (*Alıştırma 5'in devamı*) Alıştırma 5'in hipotezini ve $y_1(x)$ ile $y_2(x)$'in birinci mertebe lineer denklemin $y(x_0) = y_0$ başlangıç koşulunu sağlayan iki çözümü olduğunu kabul edin.

a. $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$'in

$$y' + P(x)y = 0, \quad y(x_0) = 0.$$

başlangıç değer problemini sağladığını gösterin.

b. $v(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ integrasyon çarpanı için

$$\frac{d}{dx}(v(x)[y_1(x) - y_2(x)]) = 0$$

olduğunu gösterin. $v(x)[y_1(x) - y_2(x)] \equiv$ sabit sonucunu çıkarın.

c. (a)'dan $y_1(x_0) - y_2(x_0) = 0$ dır. $a < x < b$ için $v(x) > 0$ olduğundan, bütün (a, b) aralığında $y_1(x) - y_2(x) \equiv 0$ olduğunu gerçeklemek için (b)'yi kullanın. Böylece, her $a < x < b$ için $y_1(x) - y_2(x) = 0$ dir.

Bölüm 9 Teknoloji Uygulama Projeleri

Mathematica /Maple Module

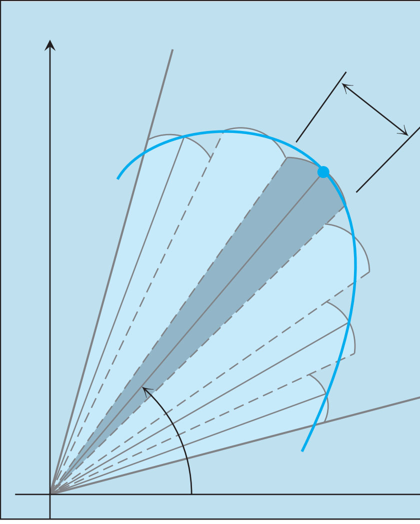
İlaç Dozajları : Etkili midirler? Güvenilir midirler?

Kandolaşımındaki kanın absorbe edilmesi için bir başlangıç değer modelini formüle edin ve çözün.

Mathematica /Maple Module

Birinci Mertebe Diferansiyel Denklemler ve Eğim Alanları

Seçilmiş birinci-mertebe diferansiyel denklemlerin çeşitli başlangıç koşulları için eğim alanları ve çözüm eğrileri çizin.



Bölüm

10

Konik Kesitler ve Kutupsal Koordinatlar

Giriş Bu bölümde parabollerin, elipslerin ve hiperbollerin geometrik tanımlarını veriyoruz ve bunların standart denklemlerini çıkarıyoruz. Bu eğrilere konik kesitler veya konikler denir ve bunlar gezegenlerin, uyduların ve kare ile ters orantılı kuvvetlerin etkisinde hareket eden başka cisimlerin yörüngelerini modellerler. Bölüm 13'te hareket eden bir cismin yolunun bir konik olduğunu bildiğimiz takdirde cismin hızı ve onu hareket ettiren kuvvet hakkında bilgi sahibi olduğumuzu göreceğiz. Gezegen hareketleri en iyi kutupsal koordinatlar yardımıyla açıklanır. Dolayısıyla, bu yeni koordinat sisteminde eğrileri, türevleri ve integralleri de inceleyeceğiz.

10.1 Konik Kesitler ve Kuadratik Denklemler

Bölüm 1'de **çemberi**, düzlemde sabit bir merkez noktadan uzaklıkları sabit bir değer, yarıçap, kadar olan noktalar kümesi olarak tanımladık. Merkez (h, k) ise ve yarıçap a ise çemberin standart denklemi $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$ dir. Konik kesitler, bir çift koninin bir düzlem tarafından kesilmesiyle oluşturulan eğrilerdir ve bu nedenle adları *konik kesit* dir. Çember, bir konik kesit örneğidir (Şekil 10.1).

Şimdi, parabolleri, elipsleri ve hiperbolleri koordinat düzleminde kuadratik denklemlerin grafikleri olarak tanımlayacağız.

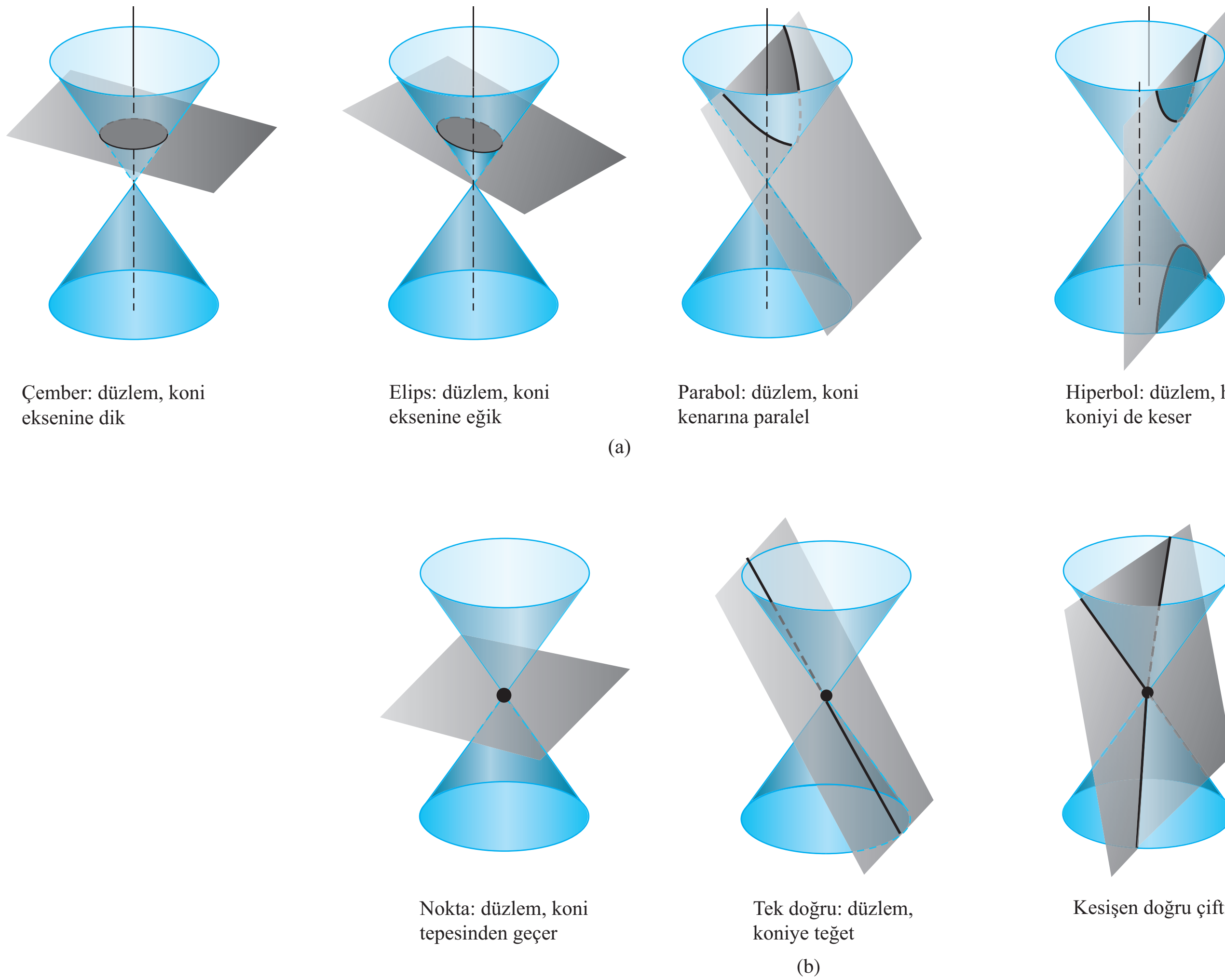
Paraboller

TANIMLAR Paraboller, Odaklar, Doğrultmanlar

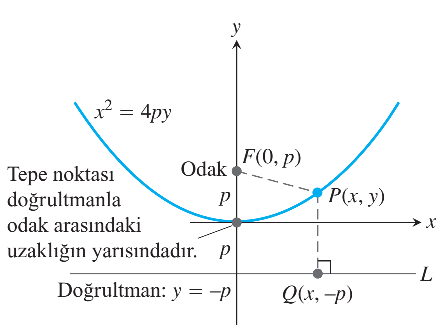
Bir düzlemde verilmiş belirli bir noktadan ve verilmiş belirli bir doğrudan eşit uzaklıkta olan noktalardan oluşan küme bir **parabol**dür. Belirli nokta parabolün **odağı**dır. Belirli nokta ise **doğrultman**dır.

Eğer odak, F, doğrultman, L, üzerinde bulunuyorsa, parabol L'ye dik olan ve F'den geçen doğrudur. Bunu dejenere durum olarak ayırt edip bundan sonra F'nin L üzerinde bulunmadığını varsayacağız.

Bir parabolün denklemi, odağı ve doğrultmanı koordinat eksenlerinden birinin ayrı iki tarafında eşit uzaklıkta iseler, en basittir. Örneğin, odağın pozitif y-ekseninde $F(0, p)$ noktasında bulunduğunu ve doğrultmanının da $y = -p$ olduğunu varsayın (Şekil 10.2).



ŞEKİL 10.1 Standart konik kesitler (a) Bir düzlemin bir çift koniyi kestiği eğriler. Hiperbol, *kollar* denen iki bölümden oluşur. Nokta ve doğrular, düzlemin koni tepesinden geçirilmesi ile elde edilirler (b) *dejenere* konik kesitler.



ŞEKİL 10.2 Parabolün standart formu $x^2 = 4py, p > 0$.

Bu şeklin gösterimiyle, bir $P(x, y)$ noktası ancak ve yalnız $PF = PQ$ ise parabolün üzerindedir. Uzaklık formülünden,

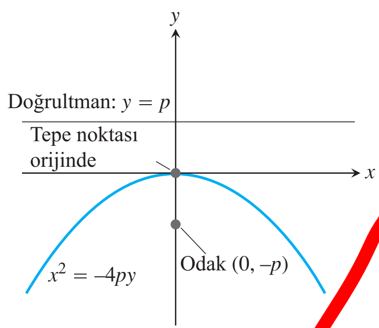
$$PF = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

$$PQ = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$

bulunur. Bu ifadeleri eşitleyip, karesini alıp, sadeleştirdiğimizde,

$$y = \frac{x^2}{4p} \quad \text{veya} \quad x^2 = 4py \qquad \text{Standart form} \qquad (1)$$

elde ederiz. Bu denklemler parabolün y-eksenine göre simetrisini belirtirler. y-eksenine parabolün **ekseni** deriz ("simetri ekseni"nin kısaltılması).



ŞEKİL 10.3 $x^2 = -4py,\ p > 0$ parabolü

Parabolün, eksenini kestiği noktaya **tepe noktası** denir. $x^2 = 4py$ parabolünün tepe noktası orijinde bulunur (Şekil 10.2). Pozitif p sayısı parabolün **odak uzunluğu**dur.

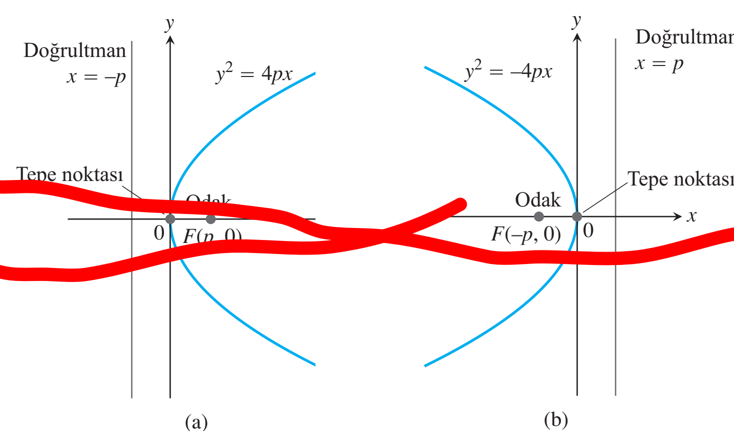
Parabol, odağı $(0, -p)$ noktasında ve doğrultmanı $y = p$ doğrusu olmak üzere aşağı doğru açılıyorsa, (1) Denklemleri

$$y = -\frac{x^2}{4p} \qquad \text{ve} \qquad x^2 = -4py$$

halini alır (Şekil 10.3). Sağa veya sola doğru açılan paraboller için de benzer denklemler elde ederiz (Şekil 10.4 ve Tablo 10.1).

TABLE 10.1 Tepe noktaları orijinde olan parabollerin standart formdaki denklemleri $(p > 0)$

Denklem	Odak	Doğrultman	Eksen	Açılış
$x^2 = 4py$	$(0, p)$	$y = -p$	y-ekseni	Yukarı
$x^2 = -4py$	$(0, -p)$	$y = p$	y-ekseni	Aşağı
$y^2 = 4px$	$(p, 0)$	$x = -p$	x-ekseni	Sağa
$y^2 = -4px$	$(-p, 0)$	$x = p$	x-ekseni	Sola



ŞEKİL 10.4 (a) $y^2 = 4px$ parabolü. (b) $y^2 = -4px$

ÖRNEK 1 $y^2 = 10x$ parabolünün odağını ve doğrultmanını bulun.

Çözüm $y^2 = 4px$ standart denkleminde p'nin değerini buluruz:

$$4p = 10, \quad \text{dolayısıyla} \quad p = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Bu p değeri için odak ve doğrultmanı buluruz:

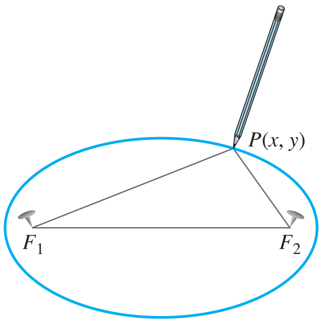
$$\text{Odak:} \quad (p, 0) = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

$$\text{Doğrultman:} \quad x = -p \qquad \text{veya} \qquad x = -\frac{5}{2}$$

■

Bölüm 1.5'te verilen yatay ve dikey kayma formülleri Tablo 10.1'deki denklemlere uygulanarak başka yerlerde bulunan değişik paraboller elde edilebilir (39, 40 ve 45–48 Alıştırmalarına bakın).

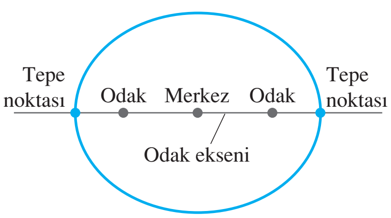
Elipsler



ŞEKİL 10.5 Bir elips çizmenin bir yolu, iki raptiye ve kaleme rehberlik eden bir ip kullanır.

> **TANIMLAR Elips, Odaklar**
>
> Düzlemde belirli iki noktadan uzaklıklarının toplamı sabit olan noktalar kümesi bir **elips**tir. İki belirli noktaya **elipsin odakları** denir.

Bir elips oluşturmanın en hızlı yolu tanımı kullanmaktır. F_1 ve F_2 gibi iki raptiyenin etrafına bir ip geçirin, ipi P noktasındaki kalemle gerin ve kalemi kapalı bir eğri çizecek şekilde dolaştırın (Şekil 10.5). Bu eğri bir elipstir, çünkü ipin uzunluğu eksi raptiyeler arasındaki mesafe olan $PF_1 + PF_2$ toplamı sabit kalır. Elipsin odakları F_1 ve F_2'de bulunur.



ŞEKİL 10.6 Bir elipsin odak ekseni üzerindeki noktalar.

> **TANIMLAR Odak Ekseni, Merkez, Tepe Noktaları**
>
> Bir elipsin odaklarından geçen doğru elipsin **odak ekseni**dir. Eksen üzerinde odakların arasındaki uzaklığın tam ortasında bulunan nokta **merkez**dir. Odak ekseninin ve elipsin kesiştikleri noktalara **tepe noktaları** denir (Şekil 10.6).

Odaklar $F_1(-c, 0)$ ve $F_2(c, 0)$ ise (Şekil 10.7) ve $PF_1 + PF_2$ toplamı $2a$ ile belirtiliyorsa, elips üzerindeki bir P noktasının koordinatları

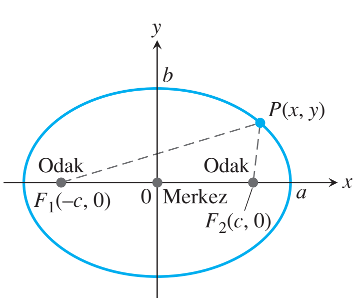
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

denklemini sağlarlar. Bu denklemi basitleştirmek için, ikinci kökü sağa taşır, karesini alır, kalan kökü yalnız bırakır ve yine karesini alırsak

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \qquad (2)$$

buluruz. $PF_1 + PF_2$ toplamı F_1F_2 uzunluğundan daha büyük olduğu için (PF_1F_2 için üçgen eşitsizliği), $2a$ sayısı $2c$'den daha büyüktür. Buna göre, $a > c$ olur ve (2) denklemindeki $a^2 - c^2$ sayısı pozitiftir.

(2) denklemine yol açan cebirsel adımlar, $0 < c < a$ olmak üzere, koordinatları bu çeşit bir denklemi sağlayan her P noktasının $PF_1 + PF_2 = 2a$ denklemini de sağladığını gösterecek şekilde tersine işletilebilir. Dolayısıyla bir nokta ancak ve yalnız koordinatları (2) denklemini sağlıyorsa elips üzerindedir.



ŞEKİL 10.7 $PF_1 + PF_2 = 2a$ ile tanımlı elips, $b^2 = a^2 - c^2$ olmak üzere $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ denkleminin grafiğidir.

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \qquad (3)$$

ise, $a^2 - c^2 = b^2$ olur ve (2) denklemi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4)$$

halini alır.

(4) Denklemi bu elipsin orijine ve iki koordinat eksenine göre simetrik olduğunu göstermektedir. $x = \pm a$ ve $y = \pm b$ doğrularıyla sınırlanan dikdörtgenin içinde bulunmaktadır. Eksenleri $(\pm a, 0)$ ve $(0, \pm b)$ noktalarında keser. Bu noktalardaki teğetler eksenlere diktir, çünkü

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

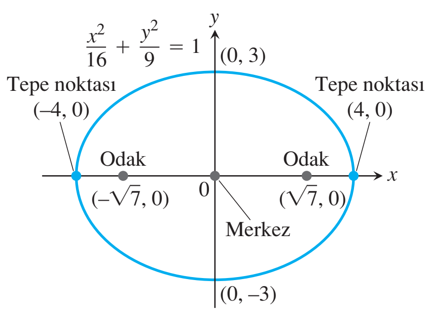
(4) denkleminden kapalı türev alma ile elde edilir.

denklemi $x = 0$ ise sıfır ve $y = 0$ ise sonsuzdur.

(4) Denklemindeki elipsin **asal ekseni** $(\pm a, 0)$ noktalarını birleştiren $2a$ uzunluğundaki doğru parçasıdır. Elipsin **yedek ekseni** ise $(0, \pm b)$ noktalarını birleştiren $2b$ uzunluğundaki doğru parçasıdır. a sayısının kendisi **yarı asal eksen** ve b sayısı da **yarı yedek eksen**dir. (3) denkleminden

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

olarak bulunan c sayısı elipsin **merkez-odak uzaklığı**dır.



ŞEKİL 10.8 Asal ekseni yatay olan bir elips (Örnek 2).

ÖRNEK 2 Yatay Asal Eksen

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \tag{5}$$

elipsine (Şekil 10.8) ait büyüklükler şunlardır:

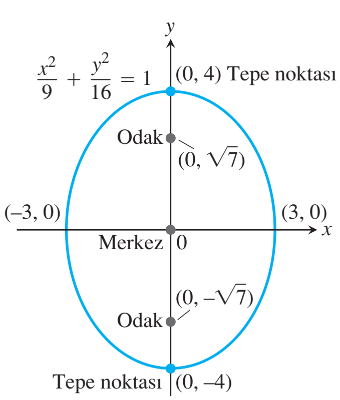
Yarı asal: $a = \sqrt{16} = 4,$ Yarı yedek eksen: $b = \sqrt{9} = 3$

Merkez-odak uzaklığı: $c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

Odaklar: $(\pm c, 0) = \left(\pm\sqrt{7}, 0\right)$

Tepe noktaları: $(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$

Merkez: $(0, 0).$ ■



ŞEKİL 10.9 Asal ekseni dikey olan bir elips (Örnek 3).

ÖRNEK 3 Dikey Asal Eksen

(5) Denkleminde x ile y'nin yer değiştirmesi ile elde edilen

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \tag{6}$$

elipsinin asal ekseni yatay olmak yerine dikeydir (Şekil 10.9). Yine, $a^2 = 16$ ve $b^2 = 9$ ile elipse ait büyüklükler şunlardır:

Yarı asal: $a = \sqrt{16} = 4,$ Yarı yedek eksen: $b = \sqrt{9} = 3$

Merkez-odak uzaklığı: $c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

Odaklar: $(0, \pm c) = \left(0, \pm\sqrt{7}\right)$

Tepe noktaları: $(0, \pm a) = (0, \pm 4)$

Merkez: $(0, 0).$ ■

(5) ve (6) Denklemlerini incelerken karışıklığa gerek yoktur. Sadece koordinat eksenlerinin kesim noktalarını buluruz; bundan sonra asal eksenin ne yönde olduğunu biliyoruz demektir, çünkü iki eksenin uzun olanıdır. Merkez her zaman orijinde bulunur ve odaklar asal eksen üzerindedirler.

Merkezleri Orijinde Olan Elipslerin Standart Denklemleri

Odaklar x-ekseninde: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$

Merkez-odak uzaklığı: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Odaklar: $(\pm c, 0)$

Tepe noktaları: $(\pm a, 0)$

Odaklar y-ekseninde: $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1 \quad (a > b)$

Merkez-odak uzaklığı: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Odaklar: $(0, \pm c)$

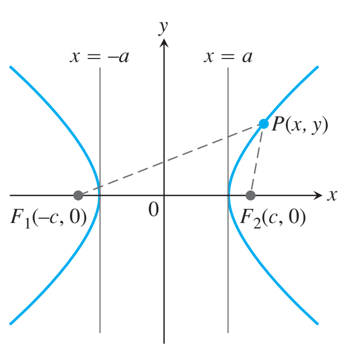
Tepe noktaları: $(0, \pm a)$

Her iki durumda da, a yarı asal eksen ve b yarı yedek eksendir.

Hiperboller

TANIMLAR **Hiperbol, Odaklar**

Bir **hiperbol** düzlemdeki belirli iki noktadan uzaklıkları farkı sabit olan noktalar kümesidir. İki belirli nokta hiperbolün **odakları**dır.



ŞEKİL 10.10 Hiperbollerin iki kolu vardır. Burada gösterilen hiperbolün sağ taraftaki kolu üzerinde bulunan noktalar için $PF_1 - PF_2 = 2a$'dır. Sol taraftaki kolu üzerinde bulunan noktalar için $PF_2 - PF_1 = 2a$ olur. buradan, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ yazarız.

Odaklar $F_1(-c, 0)$ ile $F_2(c, 0)$ ise (Şekil 10.10) ve sabit fark $2a$ ise, bir (x, y) noktası ancak ve yalnız

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a \tag{7}$$

ise hiperbolün üzerinde bulunur. Bu denklemi basitleştirmek için, ikinci kökü sağa taşır, karesini alır, kalan kökü yalnız bırakır ve yine karesini alırsak

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \tag{8}$$

buluruz. Buraya kadar, bu bir elipsin denkleminin aynısıdır. Fakat bu defa $a^2 - c^2$ negatiftir, çünkü PF_1F_2 üçgeninin iki kenarının farkı olan $2a$ üçüncü kenar olan $2c$'den küçüktür.

(8) Denklemine götüren adımlar tersine çevrilerek, $0 < a < c$ olmak üzere koordinatları bu şekildeki bir denklemi sağlayan bir P noktasının (7) denklemini de sağladığı gösterilebilir. Dolayısıyla bir nokta ancak ve yalnız koordinatları (8) denklemini sağlıyorsa hiperbolün üzerinde bulunur.

b'yi $a^2 - c^2$'nin pozitif kare kökü olarak alırsak,

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \tag{9}$$

ise $a^2 - c^2 = -b^2$ olur ve (8) denklemi daha kapalı olan

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10}$$

halini alır.

(10) Denklemi ile bir elipsin denklemi (Denklem 4) arasındaki farklar eksi işareti ve yeni

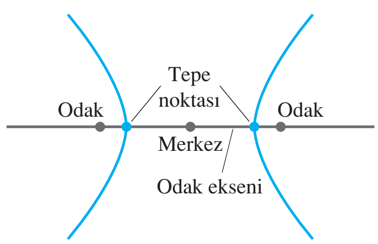
$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{(9) denkleminden}$$

bağıntısıdır.

Tıpkı bir elips gibi, bir hiperbol de orijine ve koordinat eksenlerine göre simetriktir. x-eksenini $(\pm a, 0)$ noktalarında keser. Bu noktalardaki teğetler dikeydir, çünkü

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y} \qquad \text{(10) denkleminden kapalı türev alınarak bulunmuştur}$$

denklemi $y = 0$ ise sonsuzdur. Hiperbolün y-kesim noktaları yoktur; aslında, eğrinin hiçbir bölümü $x = -a$ ve $x = a$ doğruları arasında bulunmaz.



ŞEKİL 10.11 Bir hiperbolün odak ekseni üzerindeki noktalar.

TANIMLAR Odak Ekseni, Merkez, Tepe Noktaları

Bir hiperbolün odaklarından geçen doğru odak eksenidir. Eksen üzerinde odakların arasındaki uzaklığın tam ortasında bulunan nokta hiperbolün merkezidir. Odak ekseninin ve hiperbolün kesiştikleri noktalara tepe noktaları denir. (Şekil 10.11)

Hiperbollerin Asimptotları ve Grafik Çizmek

(10) denkleminden y'yi çözersek

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$$
$$= \frac{b^2}{a^2}x^2\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)$$

veya karekök alarak

$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

elde ederiz. $x \to \pm\infty$ iken, $\sqrt{1 - a^2/x^2}$ çarpanı 1'e yaklaşır ve $\pm(b/a)x$ çarpanı baskındır. Böylece,

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

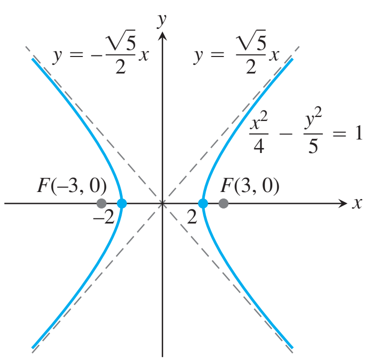
doğruları (10) denklemi ile tanımlanan hiperbolünün iki **asimptotudur**. Asimptotlar bize hiperbolleri çabuk çizmek için gereksindiğimiz rehberliği yaparlar. Asimptot denklemlerini bulmanın en hızlı yolu (10) denklemindeki 1 yerine 0 yazmak ve yeni denklemden y'yi çözmektir:

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}_{\text{hiperbol}} \rightarrow \underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0}_{\text{1 yerine 0}} \rightarrow \underbrace{y = \pm\frac{b}{a}x.}_{\text{asimptotlar}}$$

Merkezleri Orijinde Olan Hiperbollerin Standart Denklemleri

Odaklar x-ekseninde: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	*Odaklar y-ekseninde:* $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$
Merkez-odak uzaklığı: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$	Merkez-odak uzaklığı: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
Odaklar: $(\pm c, 0)$	Odaklar: $(0, \pm c)$
Tepe noktaları: $(\pm a, 0)$	Tepe noktaları: $(0, \pm a)$
Asimptotlar: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ veya $y = \pm \dfrac{b}{a} x$	Asimptotlar: : $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 0$ veya $y = \pm \dfrac{a}{b} x$

Asimptot denklemlerindeki farka dikkat edin (birincisinde b/a ikincisinde a/b).



ŞEKİL 10.12 Örnek 4'teki hiperbol ve asimptotları

ÖRNEK 4 Odaklar *x*-ekseninde

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \tag{11}$$

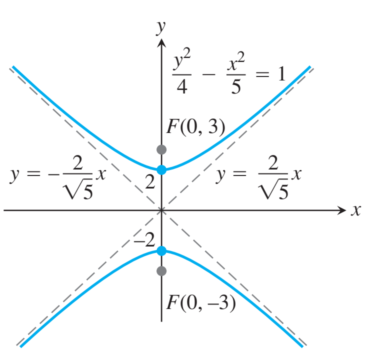
denklemi $a^2 = 4$ ve $b^2 = 5$ ile (10) denklemidir (Şekil 10.12). Bu hiperbole ait büyüklükler şöyledir:

Merkez-odak uzaklığı: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 5} = 3$

Odaklar: $(\pm c, 0) = (\pm 3, 0)$, Tepe noktaları: $(\pm a, 0) = (\pm 2, 0)$

Merkez: $(0, 0)$

Asimptotlar: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 0$ veya $y = \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2} x$ ■



ŞEKİL 10.13 Örnek 5'teki hiperbol ve asimptotları

ÖRNEK 5 Odaklar *y*-ekseninde

(11) denkleminde *x* ile *y*'nin yerleri değiştirilerek elde edilen

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$$

hiperbolünün tepe noktaları *x*-ekseni yerine *y*-ekseni üzerindedir (Şekil 10.13). Yine, $a^2 = 4$ ve $b^2 = 5$ ile bu hiperbole ait büyüklükler şöyledir:

Merkez-odak uzaklığı: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 5} = 3$

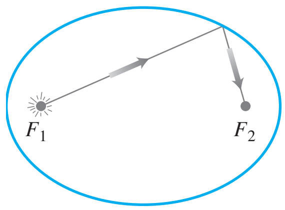
Odaklar: $(0, \pm c) = (0, \pm 3)$, Tepe noktaları: $(0, \pm a) = (0, \pm 2)$

Merkez: $(0, 0)$

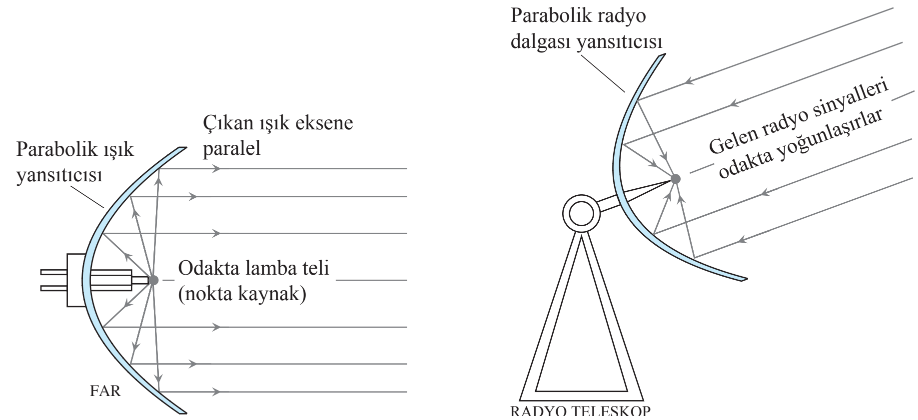
Asimptotlar: $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{5} = 0$ veya $y = \pm \dfrac{2}{\sqrt{5}} x$ ■

Yansıtma Özellikleri

Parabollerin başta gelen uygulamaları ışık ve radyo dalgalarının yansıtıcıları olarak kullanılmalarıdır. Bir parabolün odağından çıkan ışınlar parabolden parabolün eksenine paralel olarak yansıtılırlar (Şekil 10.14 ve Alıştırma 90). Üstelik, herhangi bir ışın için, odaktan doğrultmana paralel bir doğruya (parabol eksenine dik) ulaşana kadar geçen zaman her ışın için aynıdır. Bu özellikler flaş, far ve spot yansıtıcıları ile mikrodalga yayın antenleri tarafından kullanılırlar.



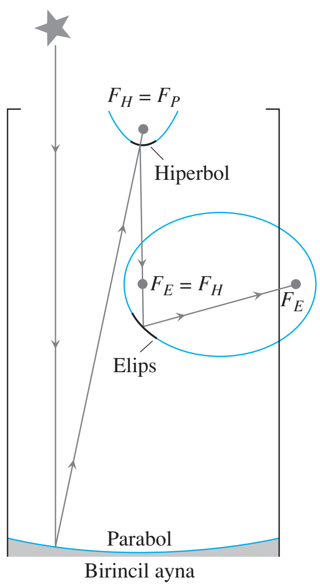
ŞEKİL 10.15 Eliptik bir ayna (burada profilden görülmektedir) ışığı bir odaktan diğerine yansıtır.



ŞEKİL 10.14 Parabolik yansıtıcılar, odaklarındaki bir kaynaktan gelen ışınları, parabol eksenine paralel bir ışık demetine dönüştürebilir; veya, eksene paralel gelen ışınları toplayıp odakta yoğunlaştırırlar.

Bir elips asal ekseni etrafında döndürülerek bir yüzey üretilir (yüzeye *elipsoid* denir) ve içi gümüşle kaplanılarak bir ayna yapılırsa, bir odaktan çıkan ışık diğer odağa yansıtılır (Şekil 10.15). Elipsoidler sesi de aynı şekilde yansıtırlar ve bu özellik *fısıldayan salonlar*, yani bir odakta duran bir kişinin öteki odaktaki bir fısıltıyı duyabildiği odalar yapılmasında kullanılır (U.S. Capitol binasındaki Statuary Hall bir fısıldayan salondur).

Hiperbolik bir aynanın bir odağına yönlendirilen ışık diğer odağa doğru yansıtılır. Modern teleskopların tasarımında, hiperbollerin bu özelliği parabollerin ve elipslerin yansıtma özellikleriyle birleştirilmektedir. Şekil 10.16'da, yıldız ışığı birincil bir parabolik aynadan aynanın odağı F_P'ye doğru yansıtılmaktadır. Sonra odağı $F_H = F_P$ olan ufak bir hiperbolik ayna tarafından hiperbolün ikinci odağı $F_E = F_H$'ye doğru yansıtılır. Bu odak bir elipsle paylaşıldığı için, ışık bir gözlemcinin görebileceği şekilde eliptik ayna tarafından elipsin diğer odağına yansıtılır.



ŞEKİL 10.16 Yansıtıcı bir teleskobun şeması.

ALIŞTIRMALAR 10.1

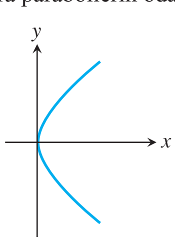
Grafikleri Tanımlamak

1– 4 alıştırmalarındaki parabolleri şu denklemlerle eşleştirin:

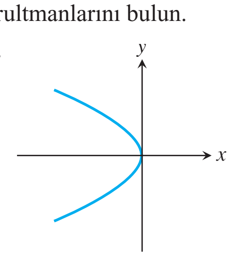
$$x^2 = 2y, \quad x^2 = -6y, \quad y^2 = 8x, \quad y^2 = -4x.$$

Sonra parabollerin odaklarını ve doğrultmanlarını bulun.

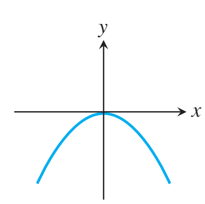
1.



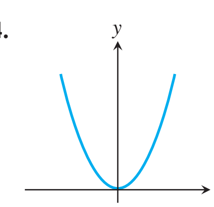
2.



3.



4.



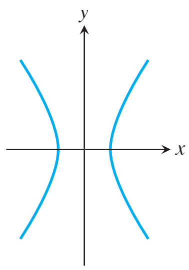
5–8 alıştırmalarındaki her konik kesiti aşağıdaki denklemlerden biriyle eşleştirin:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \qquad \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

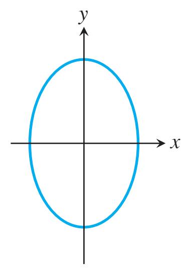
$$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1, \qquad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Sonra konik kesitin odaklarını ve Tepe noktalarını bulun. Konik kesit bir hiperbolse, asimptotlarını da bulun.

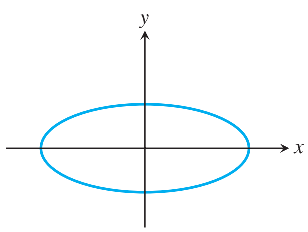
5.



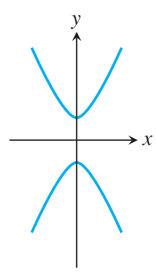
6.



7.



8.



Paraboller

9–16 alıştırmalarında parabol denklemleri verilmektedir. Her parabolün odağını ve doğrultmanını bulun. Sonra parabolü çizin. Çiziminizde de odak ve doğrultmanı da belirtin.

9. $y^2 = 12x$ **10.** $x^2 = 6y$ **11.** $x^2 = -8y$

12. $y^2 = -2x$ **13.** $y = 4x^2$ **14.** $y = -8x^2$

15. $x = -3y^2$ **16.** $x = 2y^2$

Elipsler

17–24 alıştırmalarında elips denklemleri verilmektedir. Her denklemi standart hale getirin. Sonra elipsi çizin. Çiziminizde odakları belirtin.

17. $16x^2 + 25y^2 = 400$ **18.** $7x^2 + 16y^2 = 112$

19. $2x^2 + y^2 = 2$ **20.** $2x^2 + y^2 = 4$

21. $3x^2 + 2y^2 = 6$ **22.** $9x^2 + 10y^2 = 90$

23. $6x^2 + 9y^2 = 54$ **24.** $169x^2 + 25y^2 = 4225$

25 ve 26 alıştırmaları merkezleri *xy*-düzleminin orijininde olan elipslerin odak ve tepe noktaları hakkında bilgi vermektedir. Her durumda, verilen bilgilerden elipsin standart denklemini bulun.

25. Odaklar: $\left(\pm\sqrt{2}, 0\right)$
Tepe noktaları: $(\pm 2, 0)$

26. Odaklar: $(0, \pm 4)$
Tepe noktaları: $(0, \pm 5)$

Hiperboller

27–34 alıştırmalarından her biri bir hiperbol denklemi vermektedir. Her denklemi standart hale getirin ve hiperbolün asimptotlarını bulun. Sonra hiperbolü çizin. Çiziminizde odakları ve asimptotları belirtin.

27. $x^2 - y^2 = 1$ **28.** $9x^2 - 16y^2 = 144$

29. $y^2 - x^2 = 8$ **30.** $y^2 - x^2 = 4$

31. $8x^2 - 2y^2 = 16$ **32.** $y^2 - 3x^2 = 3$

33. $8y^2 - 2x^2 = 16$ **34.** $64x^2 - 36y^2 = 2304$

35–38 alıştırmalarında merkezi *xy*-düzleminin orijininde bulunan hiperbollerin odakları tepe noktaları ve asimptotları hakkında bilgi verilmektedir. Her durumda, verilen bilgilerden hiperbolün standart denklemini çıkarın.

35. Odaklar: $\left(0, \pm\sqrt{2}\right)$
Asimptotlar: $y = \pm x$

36. Odaklar: $(\pm 2, 0)$
Asimtotlar: $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$

37. Tepe noktaları: $(\pm 3, 0)$
Asimptotlar: $y = \pm\dfrac{4}{3}x$

38. Tepe noktaları: $(0, \pm 2)$
Asimptotlar: $y = \pm\dfrac{1}{2}x$

Konik Kesitleri Kaydırmak

39. $y^2 = 8x$ parabolü 2 birim aşağı ve 1 birim sağa kaydırılarak $(y + 2)^2 = 8(x - 1)$ parabolü üretiliyor.

a. Yeni parabolün tepe noktasını, odağını ve doğrultmanını bulun.

b. Yeni tepe noktasını, odağı ve doğrultmanı işaretleyin ve yeni parabolü çizin.

40. $x^2 = -4y$ parabolü 1 birim sola ve 3 birim yukarı kaydırılarak $(x + 1)^2 = -4(y - 3)$ parabolü üretiliyor.

a. Yeni parabolün tepe noktasını, odağını ve doğrultmanını bulun.

b. Yeni tepe noktasını, odağı ve doğrultmanı işaretleyin ve yeni parabolü çizin.

41. $(x^2/16) + (y^2/9) = 1$ elipsi 4 birim sağa ve 3 birim yukarı kaydırılarak

$$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

elipsi üretiliyor.

a. Yeni elipsin odaklarını, tepe noktalarını ve merkezini bulun.

b. Yeni odakları, tepe noktalarını ve merkezi işaretleyin ve yeni elipsi çizin.

42. $(x^2/9) + (y^2/25) = 1$ elipsi 3 birim sola ve 2 birim aşağı kaydırılarak

$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

elipsi üretiliyor.

a. Yeni elipsin odaklarını, tepe noktalarını ve merkezini bulun.

b. Yeni odakları, tepe noktalarını ve merkezi işaretleyin ve yeni elipsi çizin.

43. $(x^2/16) + (y^2/9) = 1$ hiperbolü 2 birim sağa kaydırılarak

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

hiperbolü üretiliyor.

a. Yeni hiperbolün odaklarını, tepe noktalarını ve asimpotlarını bulun.

b. Yeni odakları, tepe noktalarını ve asimptotları işaretleyip, yeni hiperbolü çizin.

44. $(y^2/4) + (x^2/5) = 1$ hiperbolü 2 birim aşağı kaydırılarak

$$\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1.$$

hiperbolü üretiliyor.

a. Yeni hiperbolün odaklarını, tepe noktalarını ve asimpotlarını bulun.

b. Yeni odakları, tepe noktalarını ve asimptotları işaretleyip, yeni hiperbolü çizin.

45–48 alıştırmaları parabol denklemleri verir ve her parabolün kaç birim yukarı veya aşağı ve sağa veya sola kaydırılacağını söylemektedir. Yeni parabolün denklemini, yeni tepe noktasını, odağı ve doğrultmanı bulun.

45. $y^2 = 4x$, sola 2, aşağı 3 **46.** $y^2 = -12x$, sağa 4, yukarı 3

47. $x^2 = 8y$, sağa 1, aşağı 7 **48.** $x^2 = 6y$, sola 3, aşağı 2

49-52 Alıştırmaları elips denklemleri verir ve her elipsin kaç birim yukarı veya aşağı ve sağa veya sola kaydırılacağını söyler. Yeni elipsin denklemini, yeni tepe noktalarını, odakları ve merkezi bulun.

49. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1$, sola 2, aşağı 1

50. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, sağa 3, yukarı 4

51. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$, sağa 2, yukarı 3

52. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$, sola 4, aşağı 5

53–56 alıştırmaları hiperbol denklemleri verir ve her hiperbolün kaç birim yukarı veya aşağı ve sağa veya sola kaydırılacağını söyler. Yeni hiperbolün denklemini, yeni tepe noktalarını, odakları, merkezi ve asimptotları bulun.

53. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$, sağa 2, yukarı 2

54. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, sola 2, aşağı 1

55. $y^2 - x^2 = 1$, sola 1, aşağı 1

56. $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$, sağa 1, yukarı 3

57-68 alıştırmalarındaki konik kesitlerin, hangileri uygunsa, merkezini, odaklarını, tepe noktalarını, asimptotlarını ve yarıçaplarını bulun.

57. $x^2 + 4x + y^2 = 12$

58. $2x^2 + 2y^2 - 28x + 12y + 114 = 0$

59. $x^2 + 2x + 4y - 3 = 0$ **60.** $y^2 - 4y - 8x - 12 = 0$

61. $x^2 + 5y^2 + 4x = 1$ **62.** $9x^2 + 6y^2 + 36y = 0$

63. $x^2 + 2y^2 - 2x - 4y = -1$

64. $4x^2 + y^2 + 8x - 2y = -1$

65. $x^2 - y^2 - 2x + 4y = 4$ **66.** $x^2 - y^2 + 4x - 6y = 6$

67. $2x^2 - y^2 + 6y = 3$ **68.** $y^2 - 4x^2 + 16x = 24$

Eşitsizlikler

xy-düzleminde, koordinatları 69–74 alıştırmalarındaki eşitsizlikleri veya eşitsizlik çiftlerini sağlayan bölgeleri çizin.

69. $9x^2 + 16y^2 \le 144$

70. $x^2 + y^2 \ge 1$ ve $4x^2 + y^2 \le 4$

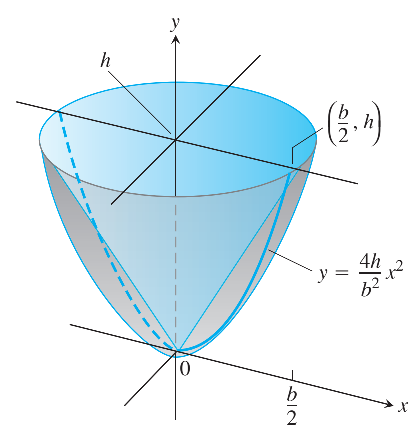
71. $x^2 + 4y^2 \ge 4$ ve $4x^2 + 9y^2 \le 36$

72. $(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + 9y^2 - 9) \le 0$

73. $4y^2 - x^2 \ge 4$ **74.** $|x^2 - y^2| \le 1$

Teori ve Örnekler

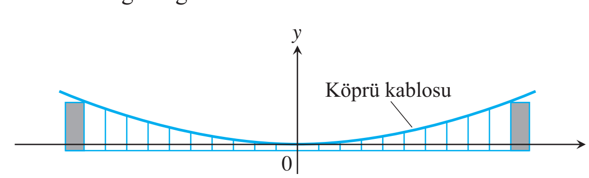
75. Parabolik bir cismin hacmi için Archimet formülü $y = (4h/b^2)x^2$ parabolü ve $y = h$ doğrusuyla sınırlanan bölge aşağıda gösterilen cismi oluşturacak şekilde y-ekseni etrafında döndürülüyor. Cismin hacminin buna karşılık gelen koni hacminin $3/2$'si olduğunu gösterin.



76. Asma köprü kabloları parabol şeklinde olur Burada görülen asma köprü kabloları her yatay fit başına w poundluk düzgün bir yük taşır. H, kablonun orijindeki yatay gerilimi ise, kablo eğrisinin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{H}x$$

denklemini sağladığı gösterilebilir. $x = 0$ iken $y = 0$ başlangıç koşuluna sahip bu denklemi çözerek kablonun bir parabol şeklinde durduğunu gösterin.



77. (1, 0), (0, 1) ve (2, 2) noktalarından geçen çemberin denklemini bulun.

78. (2, 3), (3, 2), ve (–4, 3) noktalarından geçen çemberin denklemini bulun.

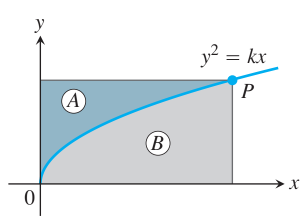
79. Merkezi (–2, 1)'de olan ve (1, 3) noktasından geçen çemberin denklemini bulun. (1.1, 2.8) noktası çemberin içinde mi, dışında mı, yoksa üzerinde midir?

80. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ çemberinin koordinat eksenlerini kestiği noktalardaki teğetlerinin denklemlerini bulun (*İpucu*: Kapalı türev alın).

81. $y^2 = kx,\ k > 0$, parabolünün üzerindeki bir P noktasından koordinat eksenlerine paralel doğrular çizilirse, parabol bu doğrular ve koordinat eksenleriyle sınırlanan dikdörtgeni iki küçük A ve B bölgesine böler.

a. Bu iki küçük bölge y-ekseni etrafında döndürülürse, hacimlerinin oranı 4:1 olan cisimler üreteceklerini gösterin.

b. Bölgelerin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen hacimlerin oranı nedir?



82. $x = -p$ doğrusu üzerindeki herhangi bir noktadan $y^2 = 4px$ eğrisine çizilen teğetlerin dik olduğunu gösterin.

83. Kenarları koordinat eksenlerine paralel olan ve $x^2 + 4y^2 = 4$ elipsinin içine yerleştirilebilecek en büyük alanlı dikdörtgenin boyutlarını bulun. Dikdörtgenin alanı nedir?

84. $9x^2 + 4y^2 = 36$ elipsiyle sınırlı bölgenin **(a)** x-ekseni ve **(b)** y-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen cismin hacmini bulun.

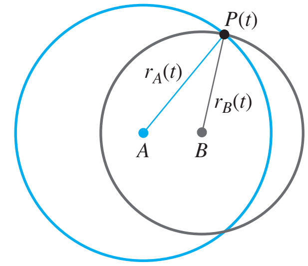
85. Birinci bölgede x-ekseni, $x = 4$ doğrusu ve $9x^2 - 4y^2 = 36$ hiperbolüyle sınırlı "üçgensel" bölge x-ekseni etrafında döndürülerek bir cisim üretiliyor. Cismin hacmini bulun.

86. Soldan y-ekseni, sağdan $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolü, alttan ve üstten $y = \pm 3$ doğrularıyla sınırlı bölge y-ekseni etrafında döndürülerek bir cisim üretiliyor. Cismin hacmini bulun.

87. Alttan y-ekseni ve üstten $(x^2/9) + (y^2/16) = 1$ elipsiyle sınırlanan bölgenin kütle merkezini bulun.

88. $y^2 - x^2 = 1$ hiperbolünün üst kolu olan $y = \sqrt{x^2+1},\ 0 \le x \le \sqrt{2}$, eğrisi x-ekseni etrafında döndürülerek bir yüzey üretiliyor. Yüzeyin alanını bulun.

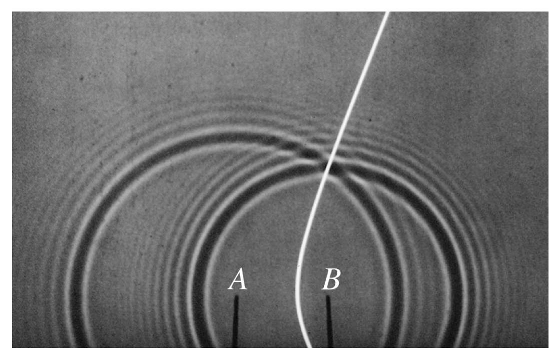
89. Aşağıdaki resimde görülen dairesel dalga bir dalga tankının yüzeyine önce A, sonra da B noktasında dokunularak yapılmıştır. Dalgalar genişlerken, kesişim noktaları bir hiperbol çizer gibidir. Gerçekten de bunu yapar mı? Bulmak için, Dalgaları merkezleri A ve B'de olan çemberler olarak modelleriz.



t anında, P noktası A'dan $r_A(t)$ birim ve B'den $r_B(t)$ birim uzaktadır. Çemberlerin yarıçapları sabit bir oranda arttığı için, dalgaların ilerlediği hız

$$\frac{dr_A}{dt} = \frac{dr_B}{dt}$$

olur. Bu denklemden $r_A - r_B$'nin değerinin sabit olduğunu ve dolayısıyla P'nin odakları A ve B olan bir hiperbol üzerinde bulunması gerektiği sonucunu çıkarın.



90. Parabollerin yansıtma özelliği Aşağıdaki şekil, $y^2 = 4px$ parabolü üzerindeki tipik bir $P(x_0, y_0)$ noktasını göstermektedir. L doğrusu parabole P'de teğettir. Parabolün odağı $F(p, 0)$'dadır. P'den sağa doğru giden L' doğrusu x-eksenine paraleldir. β'nın α'ya eşit olduğunu göstererek, F'den P'ye giden ışığın L' boyunca yansıtılacağını göstereceğiz. Bu eşitliği aşağıdaki adımları gerçekleştirerek doğrulayın.

a. $\tan\beta = 2p/y_0$ olduğunu gösterin.

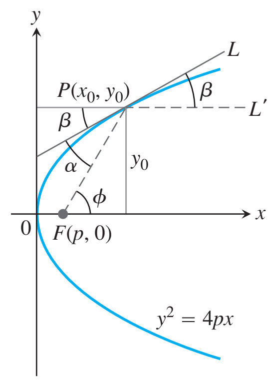
b. $\tan\phi = y_0/(x_0 - p)$

c. $\tan\alpha = 2p/y_0$ olduğunu göstermek için

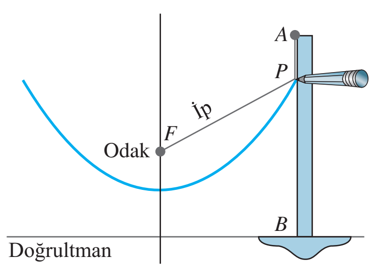
$$\tan\alpha = \frac{\tan\phi - \tan\beta}{1 + \tan\phi\tan\beta}$$

bağıntısını kullanın.

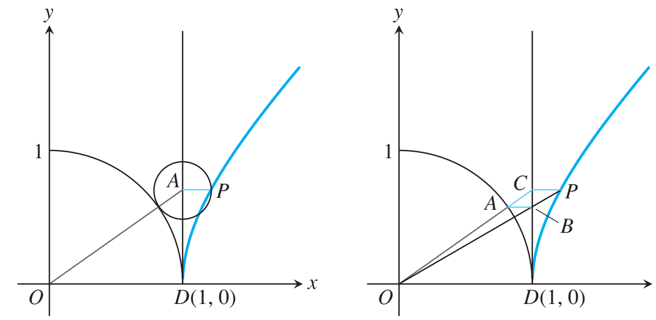
α ve β dar açılar olduklarından, $\tan\beta = \tan\alpha$ olması $\beta = \alpha$ olmasını gerektirir.



91. Astronom Kepler bir parabolü çizmek için bir ipi nasıl kullandı Bir parabol çizmek için Kepler yöntemi (daha modern araçlarla) bir T cetveli boyunda bir ip ve kenarı parabolün doğrultmanı olarak kullanılabilecek bir masa gerektirir. İpin bir ucunu odağın bulunmasını istediğiniz yere, diğer ucunu da T cetvelinin üst tarafına iğneleyin. Sonra, bir kalemle ipi cetvele yapışık olarak tutarak, T cetvelini masanın kenarında kaydırın. T cetveli hareket ettikçe, kalem bir parabol izleyecektir. Neden?



92. Bir hiperbolü kurmak Aşağıdaki diyagramlar (isimsiz olarak) Ernerst J. Eckert, "Constructions Without Words", *Mathematics Magazine*, Vol. 66, No. 2, April 1993, sayfa 113'te yayınlanmıştır. *P* noktasının koordinatlarını bularak nasıl yapıldıklarını açıklayın.



(a) (b)

93. Bir parabolün odaktaki genişliği $y = p$ doğrusunun $x^2 = 4py$ $(p > 0)$ parabolünü birbirinden $4p$ uzaklıktaki iki noktada kestiğini göstererek, $4p$ sayısının parabolün odaktaki genişliği olduğunu gösterin.

94. $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$'in asimptotları

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = 0.$$

olduğunu göstererek, $y = (b/a)x$ doğrusu ile $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ hiperbolünün sağ kolunun üst yarısı arasında kalan dikey mesafenin 0'a yaklaştığını gösterin. Benzer sonuçlar hiperbolün kalan kısımları ve $y = \pm(b/a)x$ doğruları için de geçerlidir.

10.2 Konik Kesitleri Dışmerkezlikle Sınıflandırmak

Şimdi her konik kesiti, konik kesitin *dışmerkezliği* olarak adlandırılan bir sayı ile ilişkilendirmeyi öğreneceğiz. Dışmerkezlik konik kesitin cinsini (çember, elips, parabol veya hiperbol) belirler ayrıca elips ve hiperboller için, konik kesitin genel oranlarını belirler.

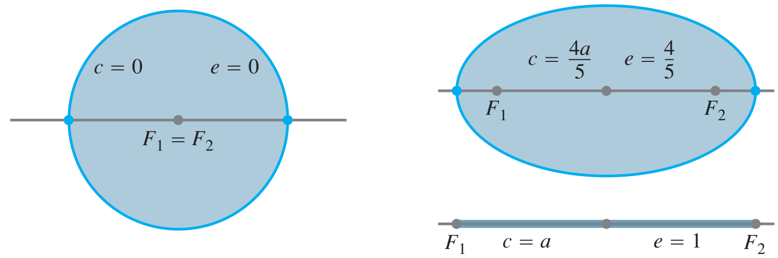
Dışmerkezlik

Merkez-odak uzaklığı olan c

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (a > b)$$

elips denkleminde gözükmediği halde, c'yi $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ denkleminden belirleyebiliriz. a'yı sabit tutar ve c'yi $0 \le c \le a$ aralığında değiştirirsek, ortaya çıkan elipslerin şekli değişecektir (Şekil 10.17). $c = 0$ (yani $a = b$) ise, çember olurlar ve c artarken yassılırlar. $c = a$ ise, odak ve tepe noktaları çakışacak ve elips bir doğru parçasına dönüşecektir.

c'nin a'ya oranını elipsin alabileceği değişik şekilleri tanımlamakta kullanırız. Bu orana elipsin dışmerkezliği deriz.



ŞEKİL 10.17 c, 0'dan a'ya artarken elips bir çemberden bir doğru parçasına dönüşür.

TANIM Elipsin Dışmerkezliği

$(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ $(a > b)$ elipsinin **dışmerkezliği**

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

dir.

TABLO 10.2 Gezegen yörüngelerinin dışmerkezlikleri

Merkür	0.21	Satürn	0.06
Venüs	0.01	Uranüs	0.05
Dünya	0.02	Neptün	0.01
Mars	0.09	Plüto	0.25
Jüpiter	0.05		

Güneş sistemindeki gezegenler güneşin çevresinde, bir odakları güneş olan eliptik yörüngelerde dönerler. Yörüngelerin çoğu, Tablo 10.2'deki dışmer-kezliklerden de görülebileceği gibi neredeyse daireseldir. Plüto'nun yörüngesi $e = 0.25$ ile $e = 0.21$ olan Merkür'ünki gibi oldukça dışmerkezlidir. Her 409 Dünya gününde bir güneş çevresinde dönen yaklaşık 1 mil genişliğindeki İkarus asteroidinin yörüngesel dışmerkezliği 0.83'tür (Şekil 10.18).

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Edmund Halley
(1656–1742)

ÖRNEK 1 Halley Kuyruklu Yıldızı

Halley kuyruklu yıldızının yörüngesi 36.18 astronomik birim uzunluğunda, 9.12 astronomik birim genişliğinde bir elipstir (Bir *astronomik birim* [AU] 149.597.870 km, Dünya'nın yörüngesinin yarı asal eksenidir). Dışmerkezliği şu şekildedir:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{(36.18/2)^2 - (9.12/2)^2}}{(1/2)(36.18)} = \frac{\sqrt{(18.09)^2 - (4.56)^2}}{18.09} \approx 0.97. \quad ■$$

Bir parabolün bir odağı bir doğrultmanı varken, her **elipsin** iki odağı ve iki **doğrultmanı** vardır. Bunlar merkezden $\pm\, a/e$ uzaklıkta asal eksene dik doğrulardır. F odak ve D doğrultman üzerinde P'ye en yakın nokta olmak üzere, Parabolün üzerindeki herhangi bir P noktası için,

$$PF = 1 \cdot PD \tag{1}$$

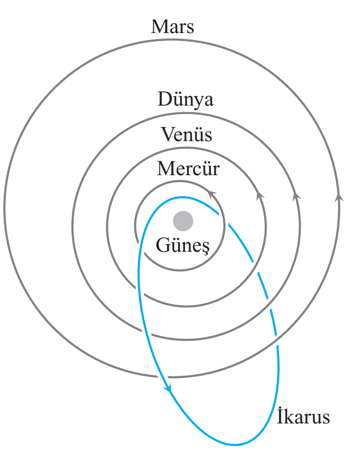
özelliği vardır. Bir elips için, (1) Denklemi yerine geçebilecek denklemlerin

$$PF_1 = e \cdot PD_1, \quad PF_2 = e \cdot PD_2 \tag{2}$$

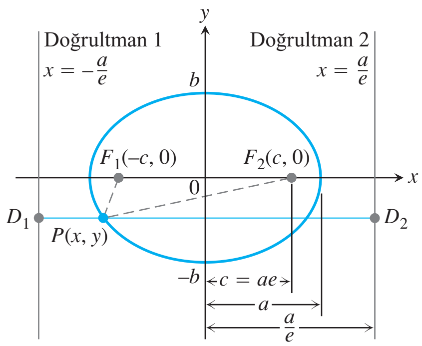
oldukları gösterilebilir. Burada, e dışmerkezlik, P elips üzerinde herhangi bir nokta, F_1 ve F_2 odaklar ve D_1 ile D_2 de doğrultmanlar üzerinde P'ye en yakın noktalardır (Şekil 10.19).

(2)'deki her denklemde, doğrultman ve odak birbirini karşılamalıdır; yani P'den F_1'e olan uzaklığı kullanırsak, aynı zamanda P'den elipsin aynı tarafındaki doğrultmana olan uzaklığı da kullanmalıyız. $x = -a/e$ doğrultmanı $F_1 = (-c, 0)$'a, $x = a/e$ doğrultmanı da $F_2 = (c, 0)$'a karılık gelir.

Bir hiperbolün dışmerkezliği de $e = c/a$ 'dır, fakat bu sefer c, $\sqrt{a^2 + b^2}$ yerine $\sqrt{a^2 - b^2}$ 'ye eşittir. Bir elipsin dışmerkezliğinin aksine, bir hiperbolün dışmerkezliği 1'den büyüktür.



ŞEKİL 10.18 İkarus asteroidinin yörüngesi çok fazla dışmerkezlidir. Dünyanın yörüngesi o kadar daireseldir ki, odakları güneşin içinde kalır.



ŞEKİL 10.19 $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ elipsinin odakları ve doğrultmanları. Doğrultman 1, F_1 odağına, doğrultman 2, F_2 odağına karşılık gelir.

TANIM Hiperbolün Dışmerkezliği

$(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ hiperbolünün dışmerkezliği

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

dir.

Hem elips hem de hiperbolde, dışmerkezlik odaklar arasındaki uzaklığın tepe noktaları arasındaki uzaklığa oranıdır (çünkü $c/a = 2c/2a$'dır).

$$\text{Dışmerkezlik} = \frac{\text{odaklar arası uzaklık}}{\text{tepe noktaları arası uzaklık}}$$

Bir elipste, odaklar arasındaki mesafe tepe noktaları arasındaki mesafeden daha kısadır ve oran 1'den küçüktür. Bir hiperbolde, odaklar arasındaki mesafe tepe noktaları arasındaki mesafeden daha fazladır ve oran 1'den büyüktür.

ÖRNEK 2 Bir Elipsin Tepe Noktalarını Bulmak

Dışmerkezliği 0.8 olan ve odakları $(0, \pm 7)$'de bulunan bir elipsin tepe noktalarını bulun.

Çözüm $e = c/a$ olduğu için, tepe noktaları $(0, \pm a)$'dadır. Burada

$$a = \frac{c}{e} = \frac{7}{0.8} = 8.75$$

veya $(0, \pm 8.75)$'tir. ■

ÖRNEK 3 Bir Hiperbolün Dışmerkezliği

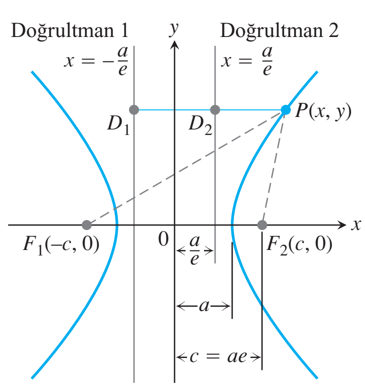
$9x^2 - 16y^2 = 144$ hiperbolünün dışmerkezliğini bulun.

Çözüm Hiperbol denkleminin iki tarafını da 144 ile bölerek standart hale getiririz:

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1 \qquad \text{ve} \qquad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$a^2 = 16$ ve $b^2 = 9$ ile, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ buluruz, böylece

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$ ■



ŞEKİL 10.20 $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ hiperbolünün odakları ve doğrultmanları. P hiperbolün neresinde olursa olsun, $PF_1 = e \cdot PD_1$ ve $PF_2 = e \cdot PD_2$ 'dir.

Elipste olduğu gibi, $x = \pm a/e$ doğrularının da **hiperbol** için **doğrultman** gibi davrandıklarını ve

$$PF_1 = e \cdot PD_1 \quad \text{ve} \quad PF_2 = e \cdot PD_2 \tag{3}$$

olduğunu görürüz. Burada P hiperbol üzerindeki herhangi bir nokta, F_1 ve F_2 odaklar ve D_1 ile D_2 doğrultmanlar üzerinde P'ye en yakın noktalardır.

Tabloyu tamamlamak için, bir parabolün dışmerkezliğini 1 olarak tanımlarız. (1)–(3) denklemleri aynı $PF = e \cdot PD$ şeklindedir.

TANIM **Parabolün Dışmerkezliği**

Bir parabolün **dışmerkezliği** $e = 1$'dir.

"Odak-doğrultman" denklemi $PF = e \cdot PD$ denklemi parabol, elips ve hiperbolü şu şekilde birleştirir. Bir P noktasının belirli bir F (odak) noktasından uzaklığının belirli bir doğrudan (doğrultman) uzaklığının sabit bir katı olduğunu varsayın. Yani, e oran sabiti olmak üzere,

$$PF = e \cdot PD \tag{4}$$

olduğunu varsayın. Bu durumda P'nin izlediği yol

(a) $e = 1$ ise, bir *parabol*,

(b) $e < 1$ ise, dışmerkezliği e olan bir *elips* ve

(c) $e > 1$ ise, dışmerkezliği e olan bir *hiperbol*dür

(4) Denklemi içinde koordinatlar yoktur ve koordinatlar formuna dönüştürmeye kalktığımızda, e'nin büyüklüğüne bağlı olarak farklı şekillerde dönüşür. En azından Kartezyen koordinatlarda böyledir. Ancak, Bölüm 10.8'de göreceğimiz şekilde, kutupsal koordinatlarda, $PF = e \cdot PD$ denklemi, e'nin değerinden bağımsız olarak tek bir denkleme dönüşür, bu denklem o kadar basittir ki, 300 yıldır astronomların ve uzay bilimcilerinin seçimi olmuştur.

Merkezi orijinde ve odakları x-ekseninde olan bir hiperbolün odağı ve ona karşılık gelen doğrultmanı verilmişse, Şekil 10.20'deki boyutları kullanarak e'yi bulabiliriz. e'yi biliyorsak, aşağıdaki örnekteki gibi, $PF = e \cdot PD$ denkleminden hiperbolün Kartezyen koordinatlarda bir denklemini kurabiliriz. Şekil 10.19'daki boyutları kullanarak merkezleri orijinde ve odakları x-ekseninde olan elipslerin denklemini de benzer şekilde bulabiliriz.

ÖRNEK 4 Bir Hiperbolün Kartezyen Denklemi

Merkezi orijinde ve odaklarından biri (3, 0)'da bulunan ve karşılık gelen doğrultmanı $x = 1$ doğrusu olan bir hiperbolün Kartezyen denklemini bulun.

Çözüm Önce hiperbolün dışmerkezliğini bulmak için Şekil 10.20'de gösterilen boyutları kullanırız. Odak

$$(c, 0) = (3, 0)\text{'dadır, dolayısıyla} \quad c = 3 \text{ olur.}$$

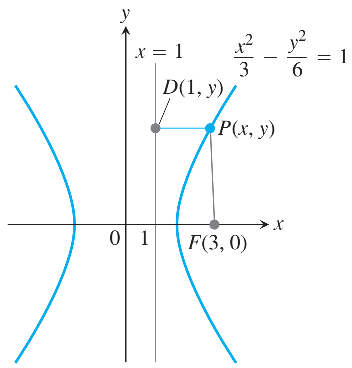
Doğrultman

$$x = \frac{a}{e} = 1 \text{ doğrusudur, dolayısıyla } a = e$$

olur. Bu, $e = c/a$ denklemiyle birleştiğinde, dışmerkezliği tanımlar ve

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{e} \quad \text{verir, dolayısıyla } e^2 = 3 \text{ ve } e = \sqrt{3}$$

bulunur.



ŞEKİL 10.21 Örnek 4'teki hiperbol ve doğrultman.

e'yi bildiğimize göre, artık istediğimiz denklemi $PF = e \cdot PD$ denkleminden kurabiliriz. Şekil 10.21'in gösterimiyle,

$$
\begin{aligned}
PF &= e \cdot PD && \text{Denklem (4)}\\
\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} &= \sqrt{3}\,|x-1| && e = \sqrt{3}\\
x^2 - 6x + 9 + y^2 &= 3(x^2 - 2x + 1)\\
2x^2 - y^2 &= 6\\
\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} &= 1.
\end{aligned}
$$

ALIŞTIRMALAR 10.2

Elipsler

In 1–8 alıştırmalarında, elipsin dışmerkezliğini bulun. Sonra elipsin odak ve doğrultmanlarını bulup, grafiğini çizin.

1. $16x^2 + 25y^2 = 400$ **2.** $7x^2 + 16y^2 = 112$

3. $2x^2 + y^2 = 2$ **4.** $2x^2 + y^2 = 4$

5. $3x^2 + 2y^2 = 6$ **6.** $9x^2 + 10y^2 = 90$

7. $6x^2 + 9y^2 = 54$ **8.** $169x^2 + 25y^2 = 4225$

9–12 alıştırmaları, merkezleri xy-düzleminin orijininde olan elipslerin odak veya tepe noktaları ile dışmerkezliklerini verir. Her durumda, elipsin standart denklemini bulun.

9. Odaklar: $(0, \pm 3)$
Dışmerkezlik: 0.5

10. Odaklar: $(\pm 8, 0)$
Dışmerkezlik: 0.2

11. Tepe noktaları: $(0, \pm 70)$
Dışmerkezlik: 0.1

12. Tepe noktaları: $(\pm 10, 0)$
Dışmerkezlik: 0.24

13–16 alıştırmaları merkezleri xy-düzleminde olan elipslerin odaklarını ve karşılık gelen doğrultmanlarını vermektedir. Her durumda, Şekil 10.19'un koordinatlarını kullanarak elipsin dışmerkezliğini bulun. Elipsin standart denklemini bulun.

13. Odak: $(\sqrt{5}, 0)$
Doğrultman: $x = \frac{9}{\sqrt{5}}$

14. Odak: $(4, 0)$
Doğrultman: $x = \frac{16}{3}$

15. Odak: $(-4, 0)$
Doğrultman: $x = -16$

16. Odak: $(-\sqrt{2}, 0)$
Doğrultman: $x = -2\sqrt{2}$

17. $4/5$ dışmerkezlikli bir elips çizin. Adımlarınızı açıklayın.

18. Plüto'nun yörüngesini ölçekli olarak çizin (dışmerkezlik 0.25). Adımlarınızı açıklayın.

19. Bir elipsin asal ve yedek eksenlerinin tepe noktaları (1, 1), (3, 4), (1, 7) ve (–1, 4)'tür. Elipsi çizin, denklemini standart şekle getirin ve odaklarını, dışmerkezliğini, doğrultmanlarını bulun.

20. Doğrultmanı $x = 9$ doğrusu ve karşılık gelen odağı (4, 0) noktası olan $2/3$ dışmerkezlikli elipsi denklemini bulun.

21. a, b ve c sabitlerinin hangi değerleri

$$4x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

elipsinin x-eksenine teğet olmasını ve (–1, 2) noktasından geçmesini sağlar? Elipsin dışmerkezliği nedir?

22. Elipslerin yansıtma özelliği Bir elips asal ekseni etrafında döndürülerek bir elipsoid üretiliyor. Elipsoidin iç yüzeyi gümüşle kaplanarak bir ayna yapılıyor. Bir odaktan gelen ışınının diğer odaktan yansıtılacağını gösterin. Ses dalgaları da böyle bir yol izlerler ve bu özellik "fısıldayan salonlar"ın yapılmasında kullanılır (*İpucu*: Elipsi xy-düzleminde standart konumda yerleştirin ve elips üzerindeki bir P noktasından iki odağa giden doğruların, elipsin P'deki teğetiyle benzer açılar yaptığını gösterin).

Hiperboller

23–30 alıştırmalarında, hiperbolün dışmerkezliğini bulun. Hiperbolün odak ve doğrultmanlarını bulup, grafiğini çizin.

23. $x^2 - y^2 = 1$ **24.** $9x^2 - 16y^2 = 144$

25. $y^2 - x^2 = 8$ **26.** $y^2 - x^2 = 4$

27. $8x^2 - 2y^2 = 16$ **28.** $y^2 - 3x^2 = 3$

29. $8y^2 - 2x^2 = 16$ **30.** $64x^2 - 36y^2 = 2304$

31–34 alıştırmaları, merkezleri xy-düzleminin orijininde olan hiperbollerin dışmerkezlikleri ile odak veya tepe noktalarını verir. Her durumda, hiperbolün standart denklemini bulun.

31. Dışmerkezlik: 3
Tepe noktaları: $(0, \pm 1)$

32. Dışmerkezlik: 2
Tepe noktaları: $(\pm 2, 0)$

33. Dışmerkezlik: 3
Odaklar: $(\pm 3, 0)$

34. Dışmerkezlik: 1.25
Odaklar: $(0, \pm 5)$

35–38 alıştırmaları merkezleri xy-düzleminin orijininde olan hiperbollerin odaklarını ve karşılık gelen doğrultmanlarını vermektedir. Her durumda, hiperbolün dışmerkezliğini bulun. Hiperbolün standart denklemini bulun.

35. Odak: $(4, 0)$
Doğrultman: $x = 2$

36. Odak: $(\sqrt{10}, 0)$
Doğrultman: $x = \sqrt{2}$

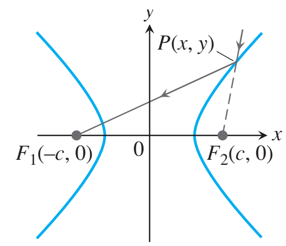
37. Odak: $(-2, 0)$
Doğrultman: $x = -\frac{1}{2}$

38. Odak: $(-6, 0)$
Doğrultman: $x = -2$

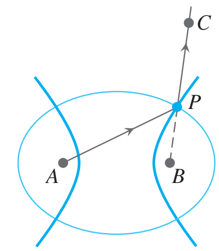
39. Dışmerkezliği $3/2$ olan bir hiperbolün bir odağı $(1, -3)$'tedir. Karşılık gelen doğrultman $y = 2$ doğrusudur. Hiperbolün denklemini bulun.

T **40. Dışmerkezliğin bir hiperbolün şekline etkisi** Dışmerkez-liği artarken bir hiperbolün grafiğine ne olur? Bulmak için, $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ denklemini a ve b yerine, a ve e cinsinden yeniden yazın. Hiperbolün farklı e değerlerinde grafiğini çizin ve gördüklerinizi tanımlayın.

41. Hiperbolerin yansıtma özelliği Aşağıdaki resimde olduğu gibi, hiperbolik bir aynanın bir odağına yönlendirilen ışının diğer odağa doğru yansıtıldığını gösterin (*İpucu*: Hiperbolün P'deki teğetinin PF_1 ve PF_2 doğru parçalarının yaptığı açının açıortayı olduğunu gösterin).



42. Eşodaklı bir elips ve hiperbol Aynı A ve B odaklarına sahip bir elips ve bir hiperbolün, aşağıdaki şekilde olduğu gibi, kesişim noktalarında dik açılar yaptıklaını gösterin. (*İpucu*: Hiperbolü P noktasında kesen ve A odağından gelen bir ışık ışını hiperbolden sanki doğrudan B'den geliyormuş gibi yansıtılacaktır (Alıştırma 41). Aynı ışın elipsten B'den geçecek şekilde yansıtılır (Alıştırma 22).)



10.3 Kuadratik Denklemler ve Dönmeler

Bu bölümde, A, B ve C'nin hepsi sıfır olmamak üzere, herhangi bir

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

denkleminin Kartezyen grafiğini inceleyeceğiz ve neredeyse her zaman bir konik kesit olduğunu göstereceğiz. İstisnalar grafiğin bulunmadığı veya grafiğin iki paralel doğrudan oluştuğu durumlardır. (1) denkleminin grafiklerinin hepsine, eğri olsun veya olmasın, **kuadratik eğri** denmesi rutin hale gelmiştir

Çapraz Terimler

Bxy teriminin Bölüm 10.1'deki denklemlerde görünmediğini fark etmiş olabilirsiniz. Bu böyle olmuştur, çünkü konik kesitlerin eksenleri koordinat eksenlerine paralel (hatta onlarla çakışık) durumdaydı.

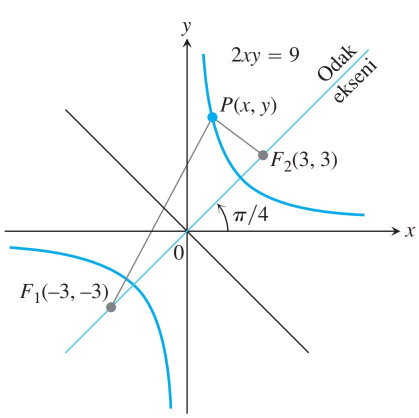
Paralellik olmadığında neler olduğunu görmek için, $a = 3$ ile odakları $F_1(-3, -3)$ ve $F_2(3, 3)$'te olan bir hiperbolün denklemini yazalım (Şekil 10.22). $|PF_1 - PF_2| = 2a$ denklemi $|PF_1 - PF_2| = 2(3) = 6$ olur ve

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+3)^2} - \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} = \pm 6$$

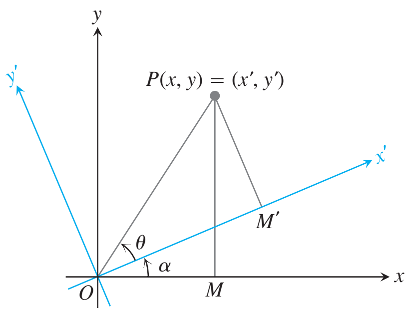
bulunur. Köklerden birinin yerini değiştirir, karesini alır, kalan karekökü çözer ve yine karesini alırsak, denklem, (1) denkleminin sadece çapraz teriminin bulunduğu

$$2xy = 9 \quad (2)$$

haline indirgenir. (2) denklemindeki hiperbolün asimptotları x ve y-eksenleridir ve odak ekseni pozitif x-ekseniyle $\pi/4$ radyanlık bir açı yapar. Bu örnekte olduğu gibi,



ŞEKİL 10.22 $2xy = 9$ hiperbolünün odak ekseni pozitif x-ekseniyle $\pi/4$ radyanlık bir açı yapar.



ŞEKİL 10.23 Orijin etrafında α açısıyla saat yönünün tersine bir dönme.

(1) denkleminde bulunan çapraz terim ancak koniğin eksenleri eğildiğinde ortaya çıkar.

Bir konik denkleminden xy terimini yok etmek için, koniğin eksenlerindeki "eğilmeyi" ortadan kaldıracak şekilde, koordinat eksenlerini döndürürüz. Döndürme için kullandığımız denklemler aşağıdaki gibi türetilmektedir. Orijin etrafında bir α açısıyla saat yönünün tersine bir dönmeyi gösteren Şekil 10.23'ün gösterimiyle,

$$\begin{aligned} x &= OM = OP\cos(\theta+\alpha) = OP\cos\theta\cos\alpha - OP\sin\theta\sin\alpha \\ y &= MP = OP\sin(\theta+\alpha) = OP\cos\theta\sin\alpha + OP\sin\theta\cos\alpha. \end{aligned} \tag{3}$$

olur.

$$OP\cos\theta = OM' = x'$$

ve

$$OP\sin\theta = M'P = y'$$

olduğu için, (3) denklemi aşağıdaki hale dönüşür.

Koordinat Eksenlerini Döndürme Denklemleri

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned} \tag{4}$$

ÖRNEK 1 Bir Hipermol İçin Bir Formül Bulmak

x- ve y-eksenleri orijin etrafında $\pi/4$ radyanlık bir açıyla döndürülüyor. Yeni koordinatlarda $2xy = 9$ hiperbolünün denklemini bulun.

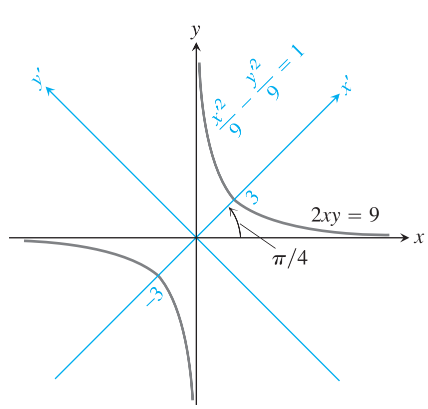
Çözüm $\cos\pi/4 = \sin\pi/4 = 1/\sqrt{2}$ olduğundan, (4) denkleminden

$$x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$$

ifadelerini $2xy = 9$ denkleminde yerine koyar ve

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) &= 9 \\ x'^2 - y'^2 &= 9 \\ \frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

elde ederiz. Şekil 10.24'e bakın. ■



ŞEKİL 10.24 Örnek 1'deki hiperbol (x' ve y' yeni koordinatlardır).

(4) Denklemlerini (1) kuadratik denklemine uygularsak, yeni bir kuadratik denklem elde ederiz:

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \tag{5}$$

Yeni ve eski katsayılar arasındaki ilişki aşağıdaki denklemlerle verilir:

$$
\begin{aligned}
A' &= A\cos^2\alpha + B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha \\
B' &= B\cos 2\alpha + (C - A)\sin 2\alpha \\
C' &= A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha \\
D' &= D\cos\alpha + E\sin\alpha \\
E' &= -D\sin\alpha + E\cos\alpha \\
F' &= F.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

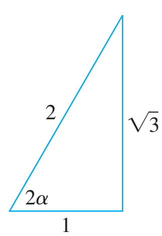
Bu denklemler, başka şeylerin yanısıra, işe içinde çapraz terimin bulunduğu ($B \neq 0$) bir eğri denklemiyle başlarsak, içinde çapraz terimin bulunmadığı ($B' = 0$) bir denklem üreten bir α dönme açısı bulabileceğimizi söyler. α'yı bulmak için, (6)'daki ikinci denklemde $B' = 0$ alır ve ortaya çıkan

$$B\cos 2\alpha + (C - A)\sin 2\alpha = 0$$

denkleminden α'yı çözeriz. Pratikte bu α'yı aşağıdaki iki denklemden birinden belirlemek anlamına gelir.

Dönme Açısı

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B} \qquad \text{veya} \qquad \tan 2\alpha = \frac{B}{A - C} \tag{7}$$



ŞEKİL 10.25 $2\alpha = \cot^{-1}(1/\sqrt{3})$ 'ü $\pi/3$ olarak tanımlar (Örnek 2).

ÖRNEK 2 Bir Dönme Açısı Bulmak

Koordinat eksenleri bir α açısıyla döndürülerek

$$2x^2 + \sqrt{3}\,xy + y^2 - 10 = 0$$

eğrisi için çapraz terimi olmayan bir denklem oluşturulacaktır. α'yı ve yeni denklemi bulun.

Çözüm $2x^2 + \sqrt{3}\,xy + y^2 - 10 = 0$ denkleminde $A = 2$, $B = \sqrt{3}$ ve $C = 1$'dir. Bu değerleri (7) denkleminde yerine koyarak α'yı buluruz:

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B} = \frac{2 - 1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

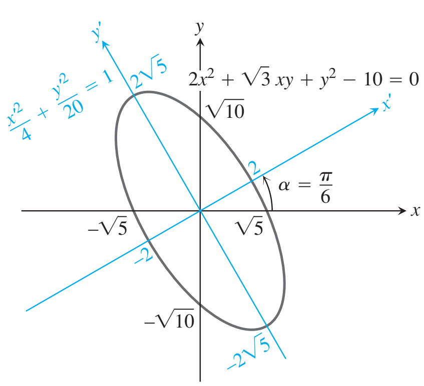
Şekil 10.25'teki dik üçgenden, açının uygun bir seçiminin $2\alpha = \pi/3$ olduğunu görürüz, bu yüzden $\alpha = \pi/6$ alırız. (6) denklemlerinde, $\alpha = \pi/6$, $A = 2$, $B = \sqrt{3}$, $C = 1$, $D = E = 0$ ve $F = 0$ yazmak

$$A' = \frac{5}{2}, \qquad B' = 0, \qquad C' = \frac{1}{2}, \qquad D' = E' = 0, \qquad F' = -10$$

verir. Bu durumda (5) denklemi

$$\frac{5}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 - 10 = 0 \qquad \text{veya} \qquad \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{20} = 1$$

verir. Eğri odakları yeni y'-ekseninde olan bir elipstir. (Şekil 10.26). ■



ŞEKİL 10.26 Örnek 2'deki konik kesit.

Kuadratik Denklemlerin Olası Grafikleri

Artık genel kuadratik denklemlerin grafiklerine döneceğiz.

Her zaman eksenleri döndürerek çapraz terimlerden kurtulabileceğimiz için, bunun yapılmış olduğunu ve denklemimizin şeklinin

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{8}$$

olduğunu varsaymakla genellikten bir şey kaybetmeyiz.

(8) denkleminin temsil ettiği farklı durumlar aşağıda sıralanmıştır.

(a) $A = C \neq 0$ ise bir *çemberi*, (özel durumlar: grafik bir noktadır veya grafik yoktur;

(b) (8) denklemi bir değişkende kuadratik, diğerinde lineerse bir *parabolü*;

(c) A ve C'nin ikisi de pozitif veya ikisi de negatifse bir *elipsi* (özel durumlar: daireler, tek bir nokta veya grafiğin bulunmaması);

(d) A ve C'nin işaretleri zıtsa bir *hiperbolü* (özel durum: bir çift kesişen doğru);

(e) A ile C sıfır ve D ve E'nin en azından birisi sıfırdan farklıysa, *bir doğruyu;*

(f) (8) denkleminin sol tarafı iki lineer çarpanın çarpımı şeklinde ayrışabiliyorsa, *bir veya iki doğruyu*

Örnekler için Tablo 10.3'e bakın.

TABLO 10.3 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ Kuadrarik Eğri Örnekleri

	A	B	C	D	E	F	Denklem	Görüşler
Çember	1		1			−4	$x^2 + y^2 = 4$	$A = C; F < 0$
Parabol			1	−9			$y^2 = 9x$	y'ye göre kuadratik, x'e göre lineer
Elips	4		9			−36	$4x^2 + 9y^2 = 36$	A, C 'nin işaretleri aynı, $A \neq C; F < 0$
Hiperbol	1		−1			−1	$x^2 - y^2 = 1$	A, C'nin işaretleri farklı
Tek doğru (hala bir konik kesit)	1						$x^2 = 0$	y-ekseni
Kesişen doğrular konik kesit)		1		1	−1	−1	$xy + x - y - 1 = 0$	$(x - 1)(y + 1) = 0$, şeklinde ayrışır, $x = 1, y = -1$
Paralel doğrular değil)	1			−3		2	$x^2 - 3x + 2 = 0$	$(x - 1)(x - 2) = 0$, şeklinde ayrışır, $x = 1, x = 2$
Nokta	1		1				$x^2 + y^2 = 0$	Orijin
Grafik yok	1					1	$x^2 = -1$	Grafik yok

Diskriminant Testi

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{9}$$

Denkleminin ne çeşit bir konik kesidi temsil ettiğini bulmak için, denkleminden xy-terimini atmamız gerekmez. İstediğimiz tek bilgi buysa, aşağıdaki testi uygulayabiliriz.

Görmüş olduğumuz gibi, $B \neq 0$ ise, koordinat eksenlerini

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B} \tag{10}$$

denklemini sağlayan bir α açısı ile döndürmek (9) denklemini çapraz terimi olmayan

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \tag{11}$$

denklemine denk şekle sokacaktır.

Artık, (11) denkleminin grafiği (gerçek veya dejenere)

(a) A' veya $C' = 0$, yani $A'C' = 0$ ise *parabol*;

(b) A' veya C''nün işaretleri aynı, yani $A'C' > 0$ ise *elips*;

(c) A' veya C''nün işaretleri farklı, yani $A'C' < 0$ ise *hiperbol*

Ayrıca (6) denklemlerinden, herhangi bir eksen dönmesi için

$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C' \tag{12}$$

olduğu doğrulanabilir. Bu, $B^2 - 4AC$'nin dönmeden etkilenmediğini gösterir. Ama, (10) denklemiyle verilen a açısıyla döndürürsek, B' sıfır olur, ve

$$B^2 - 4AC = -4A'C'$$

elde ederiz. Eğri $A'C' = 0$ ise bir parabol, $A'C' > 0$ ise bir elips ve $A'C' < 0$ ise bir hiperbol olduğu için, $B^2 - 4AC = 0$ iken eğri bir parabol, $B^2 - 4AC < 0$ iken bir elips ve $B^2 - 4AC > 0$ iken bir hiperbol olmalıdır. $B^2 - 4AC$ sayısına (9) denkleminin diskriminantı denir.

Diskriminant Testi

Arada bir dejenere durumlarında ortaya çıkabileceğini kabul ederek, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ denkleminin grafiği,

(a) $B^2 - 4AC = 0$ ise bir **parabol**,
(b) $B^2 - 4AC < 0$ ise bir **elips**,
(c) $B^2 - 4AC > 0$. $B^2 - 4AC > 0$ ise bir **hiperbol**

olur.

ÖRNEK 3 Diskriminant Testini Uygulamak

(a) $3x^2 - 6xy + 3y^2 + 2x - 7 = 0$ bir parabolü temsil eder, çünkü

$$B^2 - 4AC = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36 - 36 = 0\text{'dır}$$

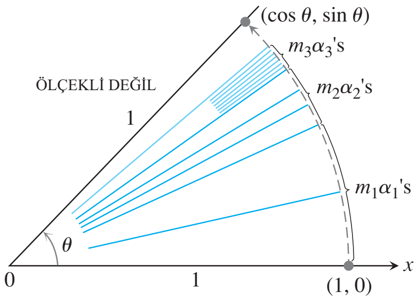
(b) $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ bir elipsi temsil eder, çünkü

$$B^2 - 4AC = (1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0\text{'dır}$$

(c) $xy - y^2 - 5y + 1 = 0$ bir hiperbolü temsil eder, çünkü

$$B^2 - 4AC = (1)^2 - 4(0)(-1) = 1 > 0\text{'dır}$$

■



ŞEKİL 10.27 0 ile 2π arasındaki bir θ açısının sinüs ve kosinüsünü hesaplamak için, hesap makinesi (1, 0) noktasını birim çemberde uygun bir konuma yerleştirir ve ortaya çıkan koordinatları gösterir.

TEKNOLOJİ KULLANMAK **Hesap Makineleri Sinüs ve Kosinüsleri Hesaplamak için Döndürmeleri Nasıl Kullanırlar?**

Bazı hesap makineleri keyfi açıların sinüs ve kosinüslerini hesaplamak için döndürmeler kullanırlar. İşlem şu şekilde gider: Hesap makinesinde depolanmış olarak

1. on civarında açı, mesela

$$\alpha_1 = \sin^{-1}(10^{-1}), \qquad \alpha_2 = \sin^{-1}(10^{-2}), \qquad \ldots, \qquad \alpha_{10} = \sin^{-1}(10^{-10}),$$

ve

2. yirmi sayı, yani $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{10}$ açılarının kosinüs ve sinüsleri

bulunur. Keyfi bir θ açısının sinüs ve kosinüsünü hesaplamak için, hesap makinesine θ'yı (radyan olarak) gireriz. Hesap makinesi, θ'ya 2π'nin katlarını ekleyerk veya çıkararak, θ yerine 0 ile 2π arasında sinüsü ve kosinüsü θ'nınkiyle aynı olan açıyı koyar (açıya θ demeye devam edeceğiz). Sonra hesap makinesi θ'yı α_1'in katlarının (tekrarlanmadan olabildiğince çok) bir toplamı artı α_2'nin katlarının (yine olabildiğince çok) bir toplamı artı … artı α_{10}'un katlarının bir toplamı olarak "yazar". Bu

$$\theta \approx m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_{10}\alpha_{10}.$$

verir. Hesap makinesi daha sonra (1, 0) noktasını α_1'in m_1 kopyası (arka arkaya m_1 kere α_1 açısı) artı α_2'nin m_2 kopyası, vb. kadar döndürür ve α_{10}'un m_{10} kopyası kere döndürerek bitirir (Şekil 10.27). (1, 0)'ın birim çember üzerindeki son konumu hesap makinesinin ($\cos\theta$, $\sin\theta$) için verdiği değerlerdir.

ALIŞTIRMALAR 10.3

Diskriminant Kullanmak

1–16 alıştırmalarındaki denklemlerin parabol mü, elips mi, yoksa hiperbol mü, temsil ettiklerini belirlemek için $B^2 - 4AC$ diskriminantını kullanın.

1. $x^2 - 3xy + y^2 - x = 0$
2. $3x^2 - 18xy + 27y^2 - 5x + 7y = -4$
3. $3x^2 - 7xy + \sqrt{17}\,y^2 = 1$
4. $2x^2 - \sqrt{15}\,xy + 2y^2 + x + y = 0$
5. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - y + 2 = 0$
6. $2x^2 - y^2 + 4xy - 2x + 3y = 6$
7. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 3x = 6$
8. $x^2 + y^2 + 3x - 2y = 10$ **9.** $xy + y^2 - 3x = 5$
10. $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x + 5y = 12$
11. $3x^2 - 5xy + 2y^2 - 7x - 14y = -1$
12. $2x^2 - 4.9xy + 3y^2 - 4x = 7$
13. $x^2 - 3xy + 3y^2 + 6y = 7$
14. $25x^2 + 21xy + 4y^2 - 350x = 0$
15. $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y + 2 = 0$
16. $3x^2 + 12xy + 12y^2 + 435x - 9y + 72 = 0$

Koordinat Eksenlerini Döndürmek

17–26 alıştırmalarında verilen denklemi, içinde çapraz (xy) terimi olmayan bir denkleme dönüştürmek için koordinat eksenlerini döndürün. Sonra denklemin grafiğini tanımlayın. (Yeni denklemler kullandığınız döndürmenin büyüklüğü ve yönüne göre değişecektir.)

17. $xy = 2$ **18.** $x^2 + xy + y^2 = 1$
19. $3x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + y^2 - 8x + 8\sqrt{3}\,y = 0$
20. $x^2 - \sqrt{3}\,xy + 2y^2 = 1$ **21.** $x^2 - 2xy + y^2 = 2$
22. $3x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + y^2 = 1$
23. $\sqrt{2}\,x^2 + 2\sqrt{2}\,xy + \sqrt{2}\,y^2 - 8x + 8y = 0$
24. $xy - y - x + 1 = 0$
25. $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 19$
26. $3x^2 + 4\sqrt{3}\,xy - y^2 = 7$
27. $14x^2 + 16xy + 2y^2 - 10x + 26{,}370y - 17 = 0$

denkleminden çapraz terimi kaldırmak için koordinat eksenlerinin döndürülmesi gereken açının sinüs ve kosinüsünü bulun. Döndürmeyi gerçekleştirmeyin.

28. $4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$
denkleminden çapraz terimi kaldırmak için koordinat eksenlerinin döndürülmesi gereken açının sinüs ve kosinüsünü bulun. Döndürmeyi gerçekleştirmeyin

T 17–26 alıştırmalarındaki konik kesitler, cot 2α veya tan 2α'yı biliyorsak, 2α'yı tanımlayabileceğimiz ve bildiğimiz üçgenlerden sin α ve cos α'yı hesaplayabileceğimiz anlamında "hoş" dönme açıları olacak şekilde seçilmişlerdir.

29–34 alıştırmalarında, verilen denklemi içinde çapraz terim bulunmayan kuadratik bir denkleme dönüştürmek için koordinat eksenlerinin döndürülmesi gereken açıyı bir hesap makinesi ile bulun. Sonra sin α ve cos α'yı 2 basamak hassaslıkla hesaplayın ve (6) denklemini kullanarak yeni denklemin katsayılarını bir basamak hassalıkla bulun. Her durumda, konik kesitin bir elips mi, hiperbol mü, yoksa bir parabol mü olduğunu belirleyin.

29. $x^2 - xy + 3y^2 + x - y - 3 = 0$

30. $2x^2 + xy - 3y^2 + 3x - 7 = 0$

31. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5 = 0$

32. $2x^2 - 12xy + 18y^2 - 49 = 0$

33. $3x^2 + 5xy + 2y^2 - 8y - 1 = 0$

34. $2x^2 + 7xy + 9y^2 + 20x - 86 = 0$

Teori ve Örnekler

35. Orijin etrafında 90°'lik bir döndürmenin aşağıdaki konik kesitlere etkisi nedir? Her durumda yeni denklemi verin.

a. $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1 \quad (a > b)$ elipsi

b. $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ hiperbolü

c. $x^2 + y^2 = a^2$ çemberi

d. $y = mx$ doğrusu **e.** $y = mx + b$ doğrusu

36. Orijin etrafında 180°'lik bir dönmenin aşağı konik kesitlere etkisi nedir? Her durumda yeni denklemi verin.

a. $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1 \quad (a > b)$ elipsi

b. $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ hiperbolü

c. $x^2 + y^2 = a^2$ çemberi

d. $y = mx$ doğrusu **e.** $y = mx + b$ doğrusu

37. ***xy* = *a* hiperbolü** $xy = 1$ hiperbolü, bilim ve matematikte sık görülen $xy = a$ şeklindeki bir çok hiperbolden biridir.

a. Koordinat eksenlerini 45°'lik bir açıyla döndürerek $xy = 1$ denklemini içinde xy-terimi bulunmayan bir denkleme dönüştürün. Yeni denklem nedir?

b. Aynı şeyi $xy = a$ denklemi için de yapın,

38. $xy = 2$ hiperbolünün dışmerkezliğini bulun.

39. $AC < 0$ ise, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ denkleminin grafiği hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

40. **Dejenere konik** Dejenere olmayan herhangi bir $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ konik kesitinde aşağıdaki özelliklerin hepsi bulunur mu?

a. Orijine göre simetriktir.

b. (1, 0) noktasından geçer.

c. (–2, 1) noktasında $y = 1$ doğrusuna teğettir.

Yanıtlarınızı açıklayın.

41. (4) dönme denklemlerinde her α açısı seçimi için, $x^2 + y^2 = a^2$ denkleminin $x'^2 + y'^2 = a^2$ olacağını gösterin.

42. $A = C$ olduğunda, eksenlerin $\pi/4$'lük bir açıyla dönmesinin (1) denkleminden xy-terimini yok edeceğini gösterin.

43. **a.** $x^2 + 4xy + 4y^2 + 6x + 12y + 9 = 0$ denkleminin bir elipsi mi, bir parabolü mü, yoksa bir hiperbolü mü temsil ettiğini belirleyin.

b. (a)'daki denklemin grafiğinin $2y = -x - 3$ doğrusu olduğunu gösterin.

44. **a.** $9x^2 + 6xy + y^2 - 12x - 4y + 4 = 0$ denkleminin bir elipsi mi, bir parabolü mü, yoksa bir hiperbolü mü temsil ettiğini belirleyin.

b. (a)'daki denklemin grafiğinin $y = -3x + 2$ doğrusu olduğunu gösterin.

45. **a.** $xy + 2x - y = 0$ eğrisi ne tip bir konik kesittir?

b. $xy + 2x - y = 0$ denkleminden y'yi çözün ve eğriyi x'in rasyonel bir fonksiyonunun grafiği gibi çizin.

c. $y = -2x$ doğrusuna paralel ve eğriye normal doğruların denklemlerini bulun. Çiziminize bu doğruları ekleyin.

46. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ denklemi için aşağıda verilen ifadeleri ispatlayın veya karşıt örnekler bulun.

a. $AC > 0$ ise, grafik bir elipstir.

b. $AC > 0$ ise, grafik bir hiperboldür.

c. $AC < 0$ ise, grafik bir hiperboldür.

47. **Elipsler için hoş bir alan formülü** $B^2 - 4AC$ negatifse,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$$

denklemi bir elipsi temsil eder. Elipsin yarı eksenleri a ve b ise, alanı πab'dir (standart formül). Alanın ayrıca $2\pi/\sqrt{4AC - B^2}$ ile verildiğini de gösterin. (*İpucu*: xy-teriminden kurtulmak için koordinat eksenlerini döndürün ve yeni denkleme (12) denklemini uygulayın.

48. **Diğer invaryantlar** Orijin etrafındaki bir dönmeden sonra $B'^2 - 4A'C'$'nin $B^2 - 4AC$'ye eşit olması durumunu, kuadratik bir denklemin diskriminantının, denklemin bir *invariyantı* olduğunu söyleyerek tanımlarız. (6) denklemlerini kullanarak

$$A' + C' = A + C \text{ ve } D'^2 + E'^2 = D^2 + E^2$$

olduğu anlamında, (a) $A + C$ ve (b) $D^2 + E^2$ sayılarının da invaryant olduklarını gösterin. Eksenleri döndürürken, sayısal hataları kontrol etmek için bu denklemleri kullanabiliriz.

49. **$B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$'nin bir ispatı.** (6) denklemlerini kullanarak orijin etrafındaki herhangi bir dönme için $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$ olduğunu gösterin.

10.4 Konikler ve Parametrik Denklemler; Sikloid

Kartezyen düzlemde paramertrik denklemleri ile tanımlanmış eğriler ve türevlerinin hesaplanması Bölüm 3.5'te tanıtılmıştı. Orada, doğruların, çemberlerin ve elipslerin parametrelenmesi çalışılmıştı. Bu bölümde parabollerin, hiperbollerin, sikloidlerin, brakistokronların ve tatokronların parametrelenmesini öğreneceğiz.

Paraboller ve Hiperboller

Bölüm 3.5'te, bir parçacığın $y = x^2$ parabolünün sağ kolu boyunca hareketini tanımlamak için

$$x = \sqrt{t}, \qquad y = t, \qquad t > 0$$

parametrizasyonunu kullanmıştık. Aşağıdaki örnekte bütün parabolün parametrizasyonunu elde ediyoruz.

ÖRNEK 1 Bir Tam Parabol

xy-düzleminde hareket eden bir parçacığın $P(x, y)$ konumu

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad -\infty < t < \infty$$

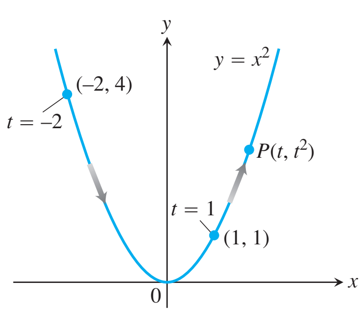
denklemleri ve parametre aralığı ile verilmektedir. Parçacığın yolunu tanımlayın ve hareketini açıklayın.

Çözüm $x = t$ ve $y = t^2$ denklemlerinden t'yi yok edip

$$y = (t)^2 = x^2$$

elde ederek yolu belirleriz. Parçacığın konumunun koordinatları $y = x^2$ denklemini sağlar, dolayısıyla parçacık bu eğri boyunca hareket eder.

Bölüm 3.5'teki Örnek 10'un aksine, burada parçacık bütün parabolü kat etmektedir. t $-\infty$'dan ∞'a doğru ilerlerken, parçacık sol taraftan aşağı iner, orijinden geçer ve sağ taraftan yukarı çıkar (Şekil 10.28). ■



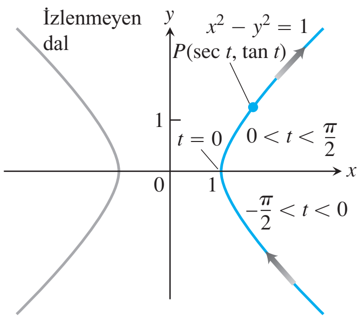
ŞEKİL 10.28 $x = t, y = t^2, -\infty < t < \infty$ ile tanımlanan yol $y = x^2$ parabolünün tamamıdır (Örnek 1).

ÖRNEK 2 $x^2 - y^2 = 1$ Hiperbolünün Sağ Kolunun Bir Parametrizasyonu

t anındaki $P(x, y)$ konumu

$$x = \sec t, \qquad y = \tan t, \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

ile verilen parçacığın hareketini tanımlayın.



ŞEKİL 10.29 $x = \sec t, \quad y = \tan t$ denklemleri ve $-\pi/2 < t < \pi/2$ aralığı $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolünün sağ kolunu tanımlar (Örnek 2).

Çözüm

$$\sec t = x, \qquad \tan t = y$$

denklemlerinden t'yi yok ederek P'nin koordinatları için bir Kartezyen denklem buluruz. Bunu $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$ bağıntısıyla gerçekleştiririz ve

$$x^2 - y^2 = 1$$

buluruz. Parçacığın (x, y) koordinatları $x^2 - y^2 = 1$ denklemini sağladıkları için, hareket bu hiperbolün üzerinde bir yerlerde geçekleşir. t, $-\pi/2$ ile $\pi/2$ arasında değişirken, $x = \sec t$ pozitif kalır ve $y = \tan t$, $-\infty$ ile ∞ arasında değişir, dolayısıyla P hiperbolün sağ kolunu kat eder. $t \to 0^-$ iken kolun alt yarısından gelir, $t = 0$'da $(1, 0)$'a ulaşır ve t, $\pi/2$'ye doğru artarken birinci bölgenin içine ilerler (Şekil 10,29). ■

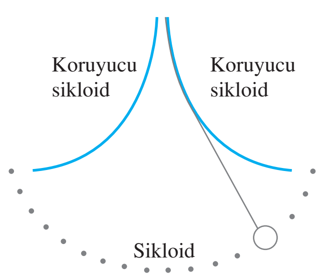
Sikloidler

Sarkaçlı bir saatte, sarkacın ucundaki gez dairesel bir yay izleyerek sallanıyorsa, sallanmanın frekansı sallanmanın genliğine bağlı olur. Bu, saat için bir problem teşkil eder. Sallanma ne kadar genişse, gez'in merkeze dönmesi o kadar uzun sürer.

Gez'in bir *sikloid* izleyerek sallanması sağlanırsa, böyle olmaz. 1673'te, Christiaan Huygens, gez'i bir sikloid üzerinde (Örnek 3'te tanımlanan eğri) sallanacak bir sarkaçlı saat tasarladı. Gez'i, merkezden uzaklaştıkça yukarı çekilmesine neden olan koruyucularla sınırlı ince bir tele astı (Şekil 10,30).

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Christiaan Huygens (1629–1695)



ŞEKİL 10.30 Huygens'in sarkaçlı saatinde sarkacın ucu bir sikloid üzerinde salınır, bu nedenle frekans genlikten bağımsızdır.

ÖRNEK 3 Bir Sikloidi Parametrelemek

Yarıçapı a olan bir tekerlek yatay bir doğru üzerinde ilerlemektedir. Tekerleğin çevresi üzerindeki bir P noktasının izlediği yolun parametrik denklemlerini bulun. Bu yola **sikloid** denir.

Çözüm Doğruyu x-ekseni olarak alır, tekerlekte bir P noktası işaretler, tekerleğin hareketini P orijindeyken başlatır ve tekerleği sağa doğru yuvarlarız. Parametre olarak, tekerleğin dönmüş olduğu t açısını (radyan olarak) alırız. Şekil 10.31, kısa bir süre sonra, tabanı orijinden at birim uzaklıkta olan tekerleği göstermektedir. Tekerleğin merkezi (at, a)'dadır ve P'nin koordinatları

$$x = at + a\cos\theta, \quad y = a + \sin\theta$$

olarak bulunur. θ'yı t cinsinden ifade etmek için $t + \theta = 3\pi/2$ olduğunu gözlemler ve

$$\theta = \frac{3\pi}{2} - t$$

buluruz. Bu

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\sin t, \qquad \sin\theta = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t$$

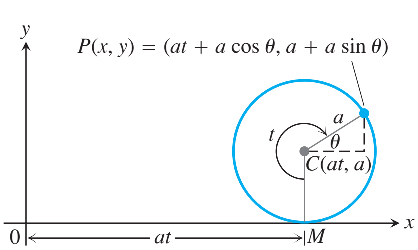
verir. Aradığımız denklemler

$$x = at - a\sin t, \quad y = a - a\cos t$$

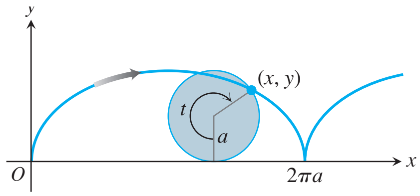
denklemleridir. Bunlar genellikle a dışarı alınarak yazılırlar:

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t) \tag{1}$$

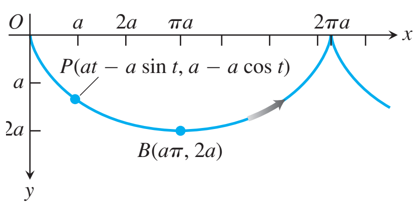
Şekil 10,32 sikloidin ilk yayını ve sonrakinin bir kısmını göstermektedir. ■



ŞEKİL 10.31 Yuvarlanan tekerleğin üzerindeki $P(x, y)$ noktasının t açısındaki konumu (Örnek 3).



ŞEKİL 10.32 $t \geq 0$ için $x = a(t - \sin t)$, $y = a(t - \cos t)$ sikloidi.



ŞEKİL 10.33 Ters dönmüş bir sikloid üzerinde yerçekiminin etkisindeki hareketi incelemek için, Şekil 10.32'yi ters çeviririz. Böylece y-ekseni yerçekimi kuvvetinin yönünü gösterir ve y-eksenini aşağı doğru pozitif yapar. Sikloidin denklemleri ve parametre aralığı hala

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(t - \sin t), \quad t \geq 0$$

ile verilir. Ok artan t yönünü göstermektedir.

Brakistronlar ve Totokronlar

Şekil 10,32'yi tersine çevirirsek, (1) denklemi hala geçerli olur ve ortaya çıkan eğrinin (Şekil 10,33) ilginç iki fiziksel özelliği vardır. Birincisi orijin O ve ilk yayın dibindeki B noktası ile ilgilidir. Bu noktaları birleştiren bütün düzgün eğrilerin arasında, yerçekimi kuvvetinin etkisine maruz sürtünmesiz bir boncuğun O'dan B'ye en hızlı gideceği eğri sikloiddir. Bu, sikloidi bir **brakistokron** veya bu noktalar için en kısa zamanlı eğrisi yapar. İkinci özellik, boncuğu eğrinin herhangi bir yerinden B'ye doğru gitmek üzere bıraktığınızda, boncuğun B'ye varması için aynı miktarda zaman geçeceğidir. Bu sikloidi bir **totokron** veya O ve B için bir eş zaman eğrisi yapar.

O ve B'yi birleştiren başka brakistokronlar var mıdır, yoksa sikloid tek midir? Bunu aşağıdaki şekilde matematiksel bir soru olarak formüle edebiliriz. Başlangıçta, boncuğun kinetik enerjisi, hızı sıfır olduğu için, sıfırdır. Boncuğu (0, 0)'dan düzlemdeki başka bir (x, y) noktasına ilerletmek için yerçekiminin yaptığı iş mgy'dir ve bu kinetik enerjideki değişime eşit olmalıdır:

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(0)^2$$

Böylece, boncuğun (x, y)'ye ulaştığındaki hızı

$$v = \sqrt{2gy}$$

olmalıdır. Yani,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

ds boncuğun izlediği yolun yay uzunluğu diferansiyelidir.

veya

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}$$

olmalıdır. Boncuğun 0'dan $B(a\pi, 2a)$'ya kadar belirli bir $y = f(x)$ yolu boyunca kayması için gereken zaman T_f

$$T_f = \int_{x=0}^{x=a\pi} \sqrt{\frac{1 + (dy/dx)^2}{2gy}}\,dx \tag{2}$$

kadardır. Hangi $y = f(x)$ eğrileri, eğer varsa, bu integralin değerini minimize eder?

İlk bakışta, O ve B'yi birleştiren doğrunun en kısa zamanı vereceğini düşünebiliriz, ama belki de vermez. Hızının daha fazla olması için başlangıçta boncuğun dikey olarak düşmesini sağlamakta yarar olabilir. Daha yüksek bir hızla, boncuk daha uzun bir yol gidebilir ve yine de B'ye daha erken varabilir. Gerçekten de, doğru fikir budur. Varyasyon hesabı olarak bildiğimiz bir matematik kolundan gelen çözüm O'dan B'ye giden orijinal sikloidin O ve B için tek brakistokron olduğudur.

Brakistokron probleminin çözümü şu andaki bilgimizin çok ilerisinde olduğu halde, hala neden sikloidin bir totokron olduğunu gösterebiliriz. Sikloid için, (2) denklemi

$$\begin{aligned} T_{\text{cycloid}} &= \int_{x=0}^{x=a\pi} \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gy}} \\ &= \int_{t=0}^{t=\pi} \sqrt{\frac{a^2(2 - 2\cos t)}{2ga(1 - \cos t)}}\,dt \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{a}{g}}\,dt = \pi\sqrt{\frac{a}{g}} \end{aligned}$$

(1) denklemlerinden, $dx = a(1 - \cos t)\,dt$, $dy = a \sin t\,dt$ ve $y = a(1 - \cos t)$

halini alır.

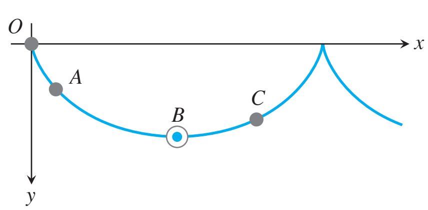
Yani, sürtünmesiz boncuğun, O'da durgun durumdan harekete bırakıldıktan sonra, sikloidden B'ye kayması için gereken zaman $\pi\sqrt{a/g}$ 'dir.

Boncuğun hareketini O'dan başlatmak yerine, sikloid üzerinde daha aşağıda bir noktadan, $t_0 > 0$ parametre değerine karşılık gelen (x_0, y_0)'dan başlattığımızı varsayalım. Boncuğun sikloid üzerindeki daha sonraki bir (x, y) noktasındaki hızı

$$v = \sqrt{2g(y - y_0)} = \sqrt{2ga(\cos t_0 - \cos t)} \qquad y = a(1 - \cos t)$$

olur. Buna göre, boncuğun (x_0, y_0)'dan B'ye kayması için gereken zaman

$$\begin{aligned}
T &= \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{a^2(2 - 2\cos t)}{2ga(\cos t_0 - \cos t)}}\,dt = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{t_0}^{\pi}\sqrt{\frac{1 - \cos t}{\cos t_0 - \cos t}}\,dt \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{t_0}^{\pi}\sqrt{\frac{2\sin^2(t/2)}{(2\cos^2(t_0/2) - 1) - (2\cos^2(t/2) - 1)}}\,dt \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{t_0}^{\pi}\frac{\sin(t/2)\,dt}{\sqrt{\cos^2(t_0/2) - \cos^2(t/2)}} \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{t=t_0}^{t=\pi}\frac{-2\,du}{\sqrt{a^2 - u^2}} \qquad \begin{aligned} u &= \cos(t/2) \\ -2\,du &= \sin(t/2)\,dt \\ c &= \cos(t_0/2)\end{aligned} \\
&= 2\sqrt{\frac{a}{g}}\left[-\sin^{-1}\frac{u}{c}\right]_{t=t_0}^{t=\pi} \\
&= 2\sqrt{\frac{a}{g}}\left[-\sin^{-1}\frac{\cos(t/2)}{\cos(t_0/2)}\right]_{t_0}^{\pi} \\
&= 2\sqrt{\frac{a}{g}}(-\sin^{-1}0 + \sin^{-1}1) = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}.
\end{aligned}$$



ŞEKİL 10.34 Sikloid üzerindeki O, A ve C noktalarından aynı zamanda harekete başlayan boncuklar B'ye aynı zamanda varırlar.

Bu tamamen boncuğun O'dan B'ye kayması için gereken zamandır. Boncuğun B'ye varması, nerden başlarsa başlasın, aynı miktarda zaman gerektirmektedir. Aynı anda Şekil 10,34'teki O, A ve C noktalarından harekete başlayan boncuklar B'ye aynı zamanda varacaklardır. Huygens'in sarkaçlı saatinin, sallanmanın genliğinden bağımsız olmasının nedeni budur.

ALIŞTIRMALAR 10.4

Koniklerin Parametrik Denklemleri

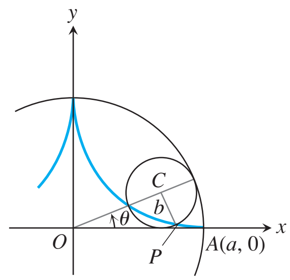
1–12 alıştırmaları, xy-düzleminde hareket eden bir parçacığın parametrik denklemlerini ve parametre aralıklarını vermektedir. Parçacığın izlediği yolu bir Kartezyen denklem bularak belirleyin. Kartezyen denklemin grafiğini çizin. (Grafikler kullanılan denkleme göre değişecektir.) Grafiğin, parçacığın kat ettiği parçasını ve hareket yönünü belirtin.

1. $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \le t \le \pi$
2. $x = \sin(2\pi(1 - t)), \quad y = \cos(2\pi(1 - t)); \quad 0 \le t \le 1$
3. $x = 4\cos t, \quad y = 5\sin t; \quad 0 \le t \le \pi$
4. $x = 4\sin t, \quad y = 5\cos t; \quad 0 \le t \le 2\pi$
5. $x = t, \quad y = \sqrt{t}; \quad t \ge 0$
6. $x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t; \quad -\pi/2 < t < \pi/2$
7. $x = -\sec t, \quad y = \tan t; \quad -\pi/2 < t < \pi/2$
8. $x = \csc t, \quad y = \cot t; \quad 0 < t < \pi$
9. $x = t, \quad y = \sqrt{4 - t^2}; \quad 0 \le t \le 2$
10. $x = t^2, \quad y = \sqrt{t^4 + 1}; \quad t \ge 0$
11. $x = -\cosh t, \quad y = \sinh t; \quad -\infty < t < \infty$
12. $x = 2\sinh t, \quad y = 2\cosh t; \quad -\infty < t < \infty$
13. **Hiposikloidler** Bir çember sabit bir çemberin iç tarafında yuvarlanırsa, yuvarlanan çemberin çevresi üzerindeki herhangi bir P noktası bir *hiposikloid* tanımlar. Sabit çember $x^2 + y^2 = a^2$, yuvarlanan çemberin yarıçapı b ve izleme noktası P'nin başlangıç noktası $A(a, 0)$ olsun. Pozitif x-ekseninden çemberlerin merkezlerini birleştiren doğruya olan θ açısını parametre olarak kullanarak

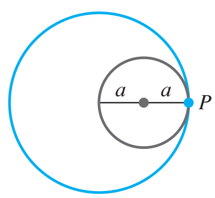
hiposikloidin parametrik denklemini bulun. Özel olarak, aşağıdaki şekilde olduğu gibi, $b = a/4$ ise, hiposikloidin

$$x = a\cos^3\theta, \quad y = a\sin^3\theta$$

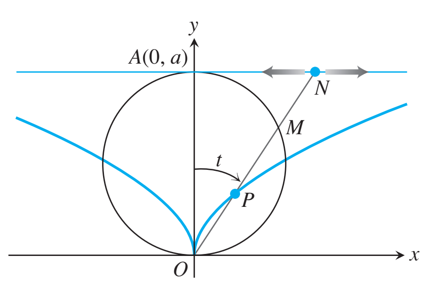
asteroidi olduğunu gösterin.



14. Hiposikloidler hakkında daha fazla şey Aşağıdaki şekil, $2a$ yarıçaplı bir çemberin iç tarafına teğet olan a yarıçaplı bir çemberi göstermektedir. Şekilde teğet noktası olarak gösterilen P noktası küçük çembere bağlıdır. Küçük çember büyük çemberin iç tarafında yuvarlanırken, P'nin izlediği yol nedir?



15. Aşağıdaki şekilde, N noktası $y = a$ doğrusu boyunca ilerlerken, P, $OP = MN$ olacak şekilde ilerlemektedir. P'nin koordinatlarının parametrik denklemlerini ON doğrusunun pozitif x-ekseniyle yaptığı t açısının fonksiyonları olarak bulun.



16. Trokoidler a yarıçaplı bir tekerlek yatay bir doğru boyunca kaymadan yuvarlanmaktadır. Tekerleğin telleri üzerinde, merkezden b birim uzakta bir P noktasının izlediği eğrinin parametrik denklemlerini bulun. Parametre olarak tekerleğin dönmüş olduğu açı olan θ'yı alın. Eğri, $b = a$ olduğunda bir sikloid şeklini alan bir **trokoiddir**.

Parametrik Denklemlerle Uzaklık

17. $x = t, y = t^2, -\infty < t < \infty$, parabolü üzerinde bulunan ve $(2, 1/2)$ noktasına en yakın olan noktayı bulun (*İpucu*: t'nin bir fonksiyonu olan uzaklığın karesini minimize edin).

18. $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$ elipsi üzerinde bulunan ve $(3/4, 0)$ noktasına en yakın olan noktayı bulun (*İpucu:* t'nin bir fonksiyonu olan uzaklığın karesini minimize edin).

T Grafik Araştırmaları

Bir parametrik denklem grafik çiziciniz varsa, aşağıdaki denklemlerin grafiklerini verilen aralıklarda çizin.

19. Elips $x = 4\cos t$, $y = 2\sin t$

a. $0 \le t \le 2\pi$ **b.** $0 \le t \le \pi$

c. $-\pi/2 \le t \le \pi/2$.

20. Hiperbol kolu $x = \sec t$, (1/cos (t) olarak girin), $y = \tan t$ (sin (t)/cos(t) olarak girin)

a. $-1.5 \le t \le 1.5$ **b.** $-0.5 \le t \le 0.5$

c. $-0.1 \le t \le 0.1$.

21. Parabol $x = 2t + 3, \quad y = t^2 - 1, \quad -2 \le t \le 2$

22. Sikloid $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$

a. $0 \le t \le 2\pi$ **b.** $0 \le t \le 4\pi$

c. $\pi \le t \le 3\pi$.

23. Hoş bir eğri (bir deltoid)

$$x = 2\cos t + \cos 2t, \quad y = 2\sin t - \sin 2t; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

x ve y'nin denklemlerinde 2 yerine -2 alırsanız ne olur? Yeni denklemlerin grafiğini çizin ve görün.

24. Daha da hoş bir eğri

$$x = 3\cos t + \cos 3t, \quad y = 3\sin t - \sin 3t; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

x ve y denklemlerinde 3 yerine –3 yazarsanız ne olur? Yeni denklemlerin grafiğini çizin ve görün.

25. Üç güzel eğri

a. *Episikloid*

$$x = 9\cos t - \cos 9t, \quad y = 9\sin t - \sin 9t; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

b. *Hiposikloid*

$$x = 8\cos t + 2\cos 4t, \quad y = 8\sin t - 2\sin 4t; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

c. *Hipotrokoid*

$$x = \cos t + 5\cos 3t, \quad y = 6\cos t - 5\sin 3t; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

26. Güzel eğrilerden birkaç tane daha

a. $x = 6\cos t + 5\cos 3t, \quad y = 6\sin t - 5\sin 3t;$
$0 \le t \le 2\pi$

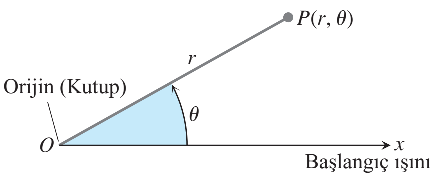
b. $x = 6\cos 2t + 5\cos 6t, \quad y = 6\sin 2t - 5\sin 6t;$
$0 \le t \le \pi$

c. $x = 6\cos t + 5\cos 3t, \quad y = 6\sin 2t - 5\sin 3t;$
$0 \le t \le 2\pi$

d. $x = 6\cos 2t + 5\cos 6t, \quad y = 6\sin 4t - 5\sin 6t;$
$0 \le t \le \pi$

10.5 Kutupsal Koordinatlar

Bu bölümde, kutupsal koordinatları ve bunların Kartezyen koordinatlarla ilişkisini inceleyeceğiz. Düzlemdeki bir noktanın tek bir Kartezyen koordinat çifti varken, sonsuz sayıda kutupsal koordinat çifti bulunur. Bunun, gelecek bölümde göreceğimiz gibi grafik çizmek için ilginç sonuçları vardır.



ŞEKİL 10.35 Düzlem için kutupsal koordinatları tanımlamak üzere, kutup denilen bir orijin ve bir başlangıç ışınıyla işe başlarız.

Kutupsal Koordinatların Tanımı

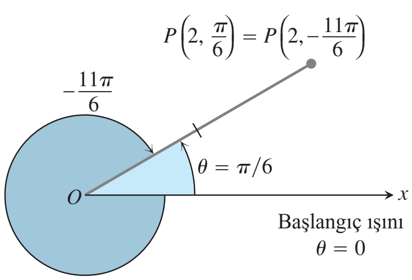
Kutupsal koordinatları tanımlamak için, önce bir **orijin *O*** (**kutup** denir) ve *O*'dan çıkan bir **başlangıç ışını** belirleriz (Şekil 10.35). Sonra her *P* noktasının yeri, kendisine bir **kutupsal koordinat çifti** (r, θ) atanarak belirlenebilir. Burada *r*, *O*'dan *P*'ye olan yönlü uzaklığı, θ da başlangıç ışını ile *OP* ışınının arasındaki yönlü açıyı belirtir.

Kutupsal Koordinatlar

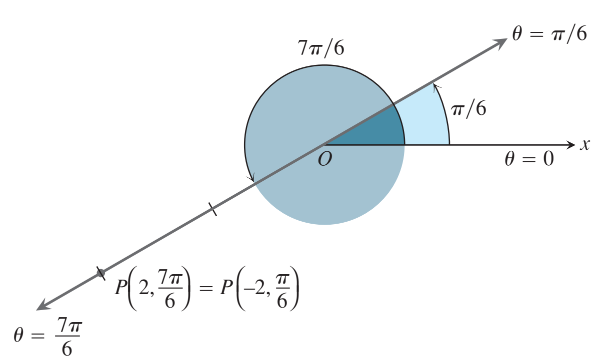
$$P(r, \theta)$$

O ile *P* arasındaki yönlü mesafe — Başlangıç ışınından *OP*'ye olan yönlü açı

Trigonometride olduğu gibi, θ saat yönünün tersine ölçüldüğünde pozitif, saat yönünde ölçüldüğünde negatiftir. Verilen bir noktayla ilişkili açı tek değildir. Örneğin, $\theta = \pi/6$ ışını üzerinde, orijinden iki birim uzaklıktaki noktanın kutupsal koordinatları $r = 2$, $\theta = \pi/6$'dır. Aynı zamanda $r = 2$, $\theta = -11\pi/6$ koordinatlarına da sahiptir (Şekil 10.36). Bazen *r*'nin negatif olmasını istediğimiz durumlar vardır. $P(r, \theta)$ tanımında yönlü uzaklık kullanmamızın nedeni budur. $P(2, 7\pi/6)$ noktasına başlangıç ışınından, saat yönünün tersine $7\pi/6$ radyan dönülerek ve 2 birim ilerlenerek ulaşılabilir (Şekil 10.37). Aynı zamanda, bu noktaya başlangıç ışınından, saat yönünün tersine $\pi/6$ radyan dönülüp 2 birim geri gidilerek de ulaşılabilir. Dolayısıyla noktanın kutupsal koordinatları arasında $r = -2$, $\theta = \pi/6$ da bulunur.



ŞEKİL 10.36 Kutupsal koordinatlar tek değildir.

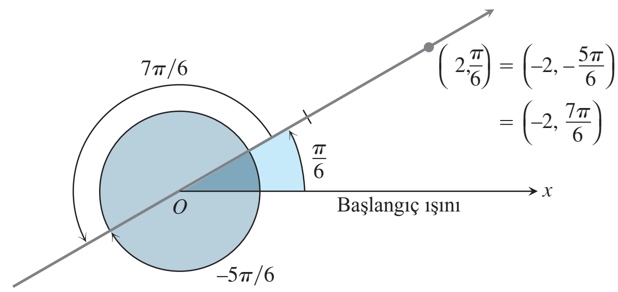


ŞEKİL 10.37 Kutupsal koordinatların negatif *r*-değerleri olabilir.

ÖRNEK 1 Kutupsal Koordinatlar Bulmak

$P(2, \pi/6)$ noktasının bütün kutupsal koordinatlarını bulun.

Çözüm Koordinat sisteminin başlangıç ışınını çizeriz. Sonra, orijinden çıkan ve başlangıç ışınıyla $\pi/6$ radyanlık bir açı yapan ışını çizer ve $(2, \pi/6)$ noktasını işaretleriz (Şekil 10.38). Daha sonra, P'nin $r = 2$ ve $r = -2$'yi içeren diğer koordinat çiftlerinin açılarını buluruz.



ŞEKİL 10.38 $P(2, \pi/6)$ noktasının sonsuz sayıda kutupsal koordinat çifti vardır (Örnek 1).

$r = 2$ için, açıların tam bir listesi

$$\frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{6} \pm 2\pi, \quad \frac{\pi}{6} \pm 4\pi, \quad \frac{\pi}{6} \pm 6\pi, \quad \ldots$$

ile verilir. $r = -2$ içinse açılar

$$-\frac{5\pi}{6}, \quad -\frac{5\pi}{6} \pm 2\pi, \quad -\frac{5\pi}{6} \pm 4\pi, \quad -\frac{5\pi}{6} \pm 6\pi, \quad \ldots$$

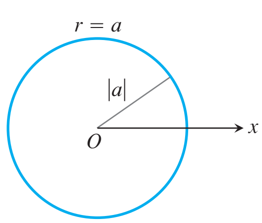
olarak bulunur. P'nin bunlara karşılık gelen koordinat çiftleri

$$\left(2, \frac{\pi}{6} + 2n\pi\right), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ve

$$\left(-2, -\frac{5\pi}{6} + 2n\pi\right), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

olur. $n = 0$ iken, formüller $(2, \pi/6)$ ve $(-2, -5\pi/6)$ haline gelir. $n = 1$ iken, $(2, 13\pi/6)$ ve $(-2, 7\pi/6)$ haline gelirler, vs. ■

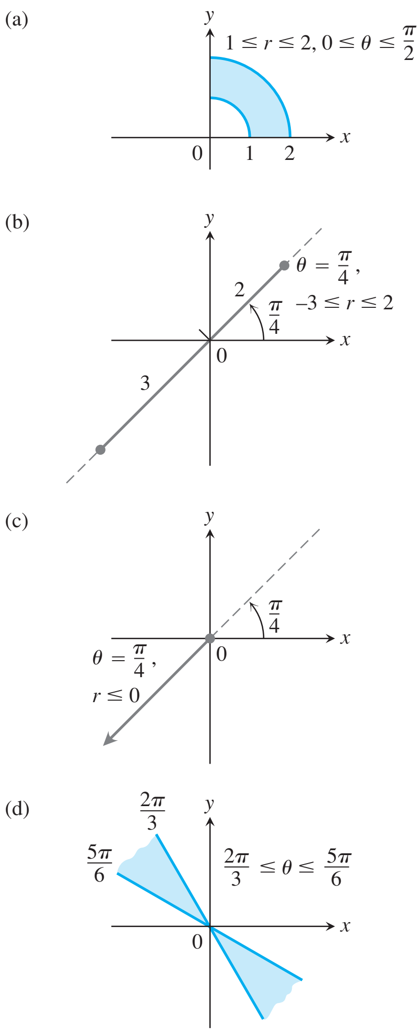


ŞEKİL 10.39 Bir çemberin kutupsal denklemi $r = a$'dır.

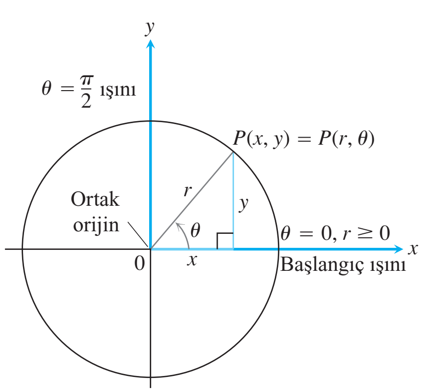
Kutupsal Denklemler ve Grafikler

r'yi sabit bir $r = a \neq 0$ değerinde tutarsak, $P(r, \theta)$ noktası O orijininden $|a|$ birim uzakta bulunacaktır. θ, 2π uzunluğundaki bir aralıkta değişirken, P, merkezi O'da olan $|a|$ yarıçaplı bir çember çizer.

θ'yı sabit bir $\theta = \theta_0$ değerinde tutar ve r'yi $-\infty$ ile ∞ arasında değiştirirsek, $P(r, \theta)$ noktası O'dan geçen ve başlangıç ışınıyla θ_0 açısı yapan bir doğru çizer.



ŞEKİL 10.40 r ve θ'nın tipik eşitsizliklerinin grafikleri (Örnek 3).



ŞEKİL 10.41 Kutupsal ve Kartezyen koordinatları birleştirmenin genel yolu.

Denklem	**Grafik**
$r = a$	Merkezi O'da olan $\lvert a \rvert$ yarıçaplı çember
$\theta = \theta_0$	Başlangıç ışınıyla θ_0 açısı yaparak O'dan geçen doğru

ÖRNEK 2 Grafikler İçin Kutupsal Denklemler Bulmak

(a) $r = 1$ ve $r = -1$, merkezi O'da olan 1 yarıçaplı çemberin denklemidir.

(b) $\theta = \pi/6$, $\theta = 7\pi/6$ ve $\theta = -5\pi/6$, Şekil 10.38'deki doğrunun denklemleridir. ■

$r = a$ ve $\theta = \theta_0$ şeklindeki denklemler birleştirilerek bölgeler, doğru parçaları ve ışınlar tanımlanabilir.

ÖRNEK 3 Grafikleri Belirlemek

Kutupsal koordinatları aşağıdaki koşulları sağlayan nokta kümelerinin grafiklerini çizin.

(a) $1 \le r \le 2$ ve $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

(b) $-3 \le r \le 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{4}$

(c) $r \le 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{4}$

(d) $\frac{2\pi}{3} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$ (r'de kısıtlama yok)

Çözüm Grafikler Şekil 10.40'ta gösterilmektedir. ■

Kartezyen ve Kutupsal Koordinatları Bir Birine Bağlamak

Bir düzlemde hem kutupsal hem de Kartezyen koordinatları kullanırsak, iki orijini bir araya koyar ve başlangıç ışınını pozitif x-ekseni olarak alırız. $\theta = \pi/2$, $r > 0$ ışını pozitif y-ekseni olur (Şekil 10.41). Bu şekilde iki koordinat sistemi aşağıdaki denklemlerle birbirine bağlanabilir.

Kutupsal ve Kartezyen Koordinatları İlişkilendiren Denklemler

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

Bu denklemlerin ilk ikisi, r ve θ kutupsal koordinatları verildiğinde x ve y Kartezyen koordinatlarını tek türlü tanımlar. Diğer taraftan, x ve y verildiğinde, üçüncü denklem r için iki olasılık verir (bir pozitif ve bir negatif değer). Her bir seçim için ilk iki denklemi sağlayan ve dolayısıyla her biri (x, y) Kartezyen noktasının bir kutupsal temsili olan tek bir $\theta \in [0, 2\pi)$ vardır. Noktanın diğer kutupsal koordinat temsilleri, bu ikisinden Örnek 1'deki gibi tanımlanabilir.

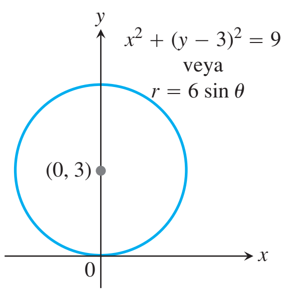
ÖRNEK 4 Denk Eşitlikler

Kutupsal denklem	Kartezyen karşılığı
$r\cos\theta = 2$	$x = 2$
$r^2\cos\theta\sin\theta = 4$	$xy = 4$
$r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1$	$x^2 - y^2 = 1$
$r = 1 + 2r\cos\theta$	$y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$
$r = 1 - \cos\theta$	$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 - y^2 = 0$

Bazı eğrilerle, kutupsal koordinatlar daha işimize yarar, bazılarında yaramaz. ■

ÖRNEK 5 Kartezyeni Kutupsala dönüştürmek

$x^2 + (y-3)^2 = 9$ (Şekil 10.42) çemberinin bir kutupsal denklemini bulun.



ŞEKİL 10.42 Örnek 5'teki çember

Çözüm

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 9 \quad (y-3)^2 \text{ yi açın.}$$
$$x^2 + y^2 - 6y = 0 \quad \text{9'lar sadeleşir.}$$
$$r^2 - 6r\sin\theta = 0 \quad x^2 + y^2 = r^2$$
$$r = 0 \text{ veya } r - 6\sin\theta = 0$$
$$r = 6\sin\theta \quad \text{İki olasılığı da içerir.}$$

Konik kesitlerin kutupsal denklemleri hakkında Bölüm 10.8'de daha fazla şey söyleyeceğiz. ■

ÖRNEK 6 Kutupsalı Kartezyene Dönüştürmek

Aşağıdaki kutupsal denklemler yerine onlara denk Kartezyen denklemleri yazın ve grafiklerini tanımlayın.

(a) $r\cos\theta = -4$

(b) $r^2 = 4r\cos\theta$

(c) $r = \dfrac{4}{2\cos\theta - \sin\theta}$

Çözüm $r\cos\theta = x,\ r\sin\theta = y,\ r^2 = x^2 + y^2$ dönüşümlerini kullanırız.

(a) $r\cos\theta = -4$

Kartezyen denklem: $r\cos\theta = -4$

$x = -4$

Grafik: x-ekseninde $x = -4$'ten geçen dikey doğru

(b) $r^2 = 4r\cos\theta$

Kartezyen denklem:

$$r^2 = 4r\cos\theta$$
$$x^2 + y^2 = 4x$$
$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4 \quad \text{Tam kareye tamamlama}$$
$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$

Grafik: Çember, yarıçapı 2, merkezi $(h, k) = (2,0)$

(c) $r = \dfrac{4}{2\cos\theta - \sin\theta}$

Kartezyen denklem:

$$\begin{aligned} r(2\cos\theta - \sin\theta) &= 4 \\ 2r\cos\theta - r\sin\theta &= 4 \\ 2x - y &= 4 \\ y &= 2x - 4 \end{aligned}$$

Grafik: Doğru, eğim $m = 2$, y-kesim noktası $b = -4$ ■

ALIŞTIRMALAR 10.5

Kutupsal Koordinat Çiftleri

1. Hangi kutupsal koordinat çiftleri aynı noktayı belirler?

a. $(3, 0)$ **b.** $(-3, 0)$ **c.** $(2, 2\pi/3)$
d. $(2, 7\pi/3)$ **e.** $(-3, \pi)$ **f.** $(2, \pi/3)$
g. $(-3, 2\pi)$ **h.** $(-2, -\pi/3)$

2. Hangi kutupsal koordinat çiftleri aynı noktayı belirler?

a. $(-2, \pi/3)$ **b.** $(2, -\pi/3)$ **c.** (r, θ)
d. $(r, \theta + \pi)$ **e.** $(-r, \theta)$ **f.** $(2, -2\pi/3)$
g. $(-r, \theta + \pi)$ **h.** $(-2, 2\pi/3)$

3. Aşağıdaki (kutupsal koordinatlarla verilen) noktaları işaretleyin. Sonra her noktanın bütün kutupsal koordinatlarını bulun.

a. $(2, \pi/2)$ **b.** $(2, 0)$
c. $(-2, \pi/2)$ **d.** $(-2, 0)$

4. Aşağıdaki (kutupsal koordinatlarla verilen) noktaları işaretleyin. Sonra her noktanın bütün kutupsal koordinatlarını bulun.

a. $(3, \pi/4)$ **b.** $(-3, \pi/4)$
c. $(3, -\pi/4)$ **d.** $(-3, -\pi/4)$

Kutupsaldan Kartezyen Koordinatlara

5. Alıştırma 1'deki noktaların Kartezyen koordinatlarını bulun.

6. Aşağıdaki (kutupsal koordintlarda verilmiş) noktaların kartezyen koordinatlarını bulun.

a. $(\sqrt{2}, \pi/4)$ **b.** $(1, 0)$
c. $(0, \pi/2)$ **d.** $(-\sqrt{2}, \pi/4)$
e. $(-3, 5\pi/6)$ **f.** $(5, \tan^{-1}(4/3))$
g. $(-1, 7\pi)$ **h.** $(2\sqrt{3}, 2\pi/3)$

Kutupsal Eşitlikleri ve Eşitsizlikleri Çizmek

Kutupsal koordinatları 7–22 alıştırmalarındaki eşitlik ve eşitsizlikleri sağlayan nokta kümelerinin grafiklerini çizin.

7. $r = 2$ **8.** $0 \le r \le 2$
9. $r \ge 1$ **10.** $1 \le r \le 2$
11. $0 \le \theta \le \pi/6, \quad r \ge 0$ **12.** $\theta = 2\pi/3, \quad r \le -2$
13. $\theta = \pi/3, \quad -1 \le r \le 3$ **14.** $\theta = 11\pi/4, \quad r \ge -1$
15. $\theta = \pi/2, \quad r \ge 0$ **16.** $\theta = \pi/2, \quad r \le 0$
17. $0 \le \theta \le \pi, \quad r = 1$ **18.** $0 \le \theta \le \pi, \quad r = -1$
19. $\pi/4 \le \theta \le 3\pi/4, \quad 0 \le r \le 1$
20. $-\pi/4 \le \theta \le \pi/4, \quad -1 \le r \le 1$
21. $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2, \quad 1 \le r \le 2$
22. $0 \le \theta \le \pi/2, \quad 1 \le |r| \le 2$

Kutupsaldan Kartezyen Denklemlere

23–48 alıştırmalarındaki kutupsal denklemler yerine denk Kartezyen denklemleri yazın. Sonra grafiği tanımlayın.

23. $r\cos\theta = 2$ **24.** $r\sin\theta = -1$
25. $r\sin\theta = 0$ **26.** $r\cos\theta = 0$
27. $r = 4\csc\theta$ **28.** $r = -3\sec\theta$
29. $r\cos\theta + r\sin\theta = 1$ **30.** $r\sin\theta = r\cos\theta$
31. $r^2 = 1$ **32.** $r^2 = 4r\sin\theta$
33. $r = \dfrac{5}{\sin\theta - 2\cos\theta}$ **34.** $r^2\sin 2\theta = 2$
35. $r = \cot\theta\csc\theta$ **36.** $r = 4\tan\theta\sec\theta$
37. $r = \csc\theta\, e^{r\cos\theta}$ **38.** $r\sin\theta = \ln r + \ln\cos\theta$
39. $r^2 + 2r^2\cos\theta\sin\theta = 1$ **40.** $\cos^2\theta = \sin^2\theta$
41. $r^2 = -4r\cos\theta$ **42.** $r^2 = -6r\sin\theta$
43. $r = 8\sin\theta$ **44.** $r = 3\cos\theta$
45. $r = 2\cos\theta + 2\sin\theta$ **46.** $r = 2\cos\theta - \sin\theta$
47. $r\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = 2$ **48.** $r\sin\left(\dfrac{2\pi}{3} - \theta\right) = 5$

Kartezyenden Kutupsal Denklemlere

49–62 alıştırmalarındaki denklemler yerine denk kutupsal denklemleri yazın.

49. $x = 7$ **50.** $y = 1$ **51.** $x = y$
52. $x - y = 3$ **53.** $x^2 + y^2 = 4$ **54.** $x^2 - y^2 = 1$
55. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ **56.** $xy = 2$

57. $y^2 = 4x$

58. $x^2 + xy + y^2 = 1$

59. $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

60. $(x - 5)^2 + y^2 = 25$

61. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$

62. $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 16$

Teori ve Örnekler

63. Orijinin bütün kutupsal koordinatlarını bulun.

64. Dikey ve yatay doğrular

a. xy-düzlemindeki her dikey doğrunun $r = a \sec \theta$ şeklinde bir kutupsal denklemi olduğunu gösterin.

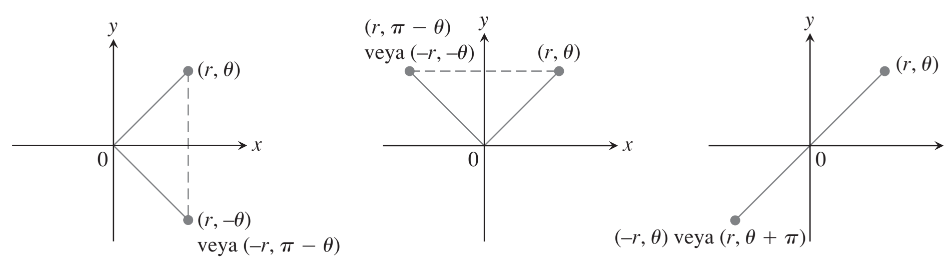
b. xy-düzlemindeki yatay doğrular için de benzer kutupsal denklemi bulun.

10.6 Kutupsal Koordinatlarda Grafik Çizmek

Bu bölüm kutupsal koordinatlarda grafik çizme tekniklerini tanımlamaktadır.

Simetri

Şekil 10.43 simetri için standart kutupsal koordinat testlerini göstermektedir.



(a) x-eksenine göre (b) y-eksenine göre (c) orijine göre

ŞEKİL 10.43 Simetri için üç test.

> **Kutupsal Grafikler İçin Simetri Testleri**
>
> **1.** *x-eksenine göre simetri:* (r, θ) noktası grafik üzerindeyse, $(r, -\theta)$ veya $(-r, \pi - \theta)$ noktası da grafik üzerindedir (Şekil 10.43a).
>
> **2.** *y-eksenine göre simetri:* (r, θ) noktası grafik üzerindeyse, $(r, \pi - \theta)$ veya $(-r, -\theta)$ noktası da grafik üzerindedir (Şekil 10.43b).
>
> **3.** *Orijine göre simetri:* (r, θ) noktası grafik üzerindeyse, $(-r, \theta)$ veya $(r, \theta + \pi)$ noktası da grafik üzerindedir (Şekil 10.43c).

Eğim

Kutupsal bir $r = f(\theta)$ eğrisinin eğimi $r' = dr/d\theta$ ile değil, dy/dx ile verilir. Nedenini anlamak için, f'nin grafiğini

$$x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta, \qquad y = r \sin \theta = f(\theta) \sin \theta$$

parametrik denklemlerinin grafiği olarak düşünün.

f, θ'nın türevlenebilir bir fonksiyonu ise x ve y de öyledir ve $dx/d\theta \neq 0$ iken, dy/dx'i aşağıdaki parametrik denklemden hesaplayabiliriz:

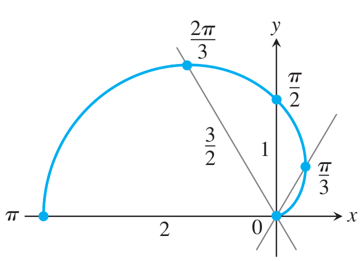
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} \qquad t = \theta \text{ ile Bölüm 3.5, (1) denklemi}$$

$$= \frac{\dfrac{d}{d\theta}(f(\theta)\cdot \sin\theta)}{\dfrac{d}{d\theta}(f(\theta)\cdot \cos\theta)}$$

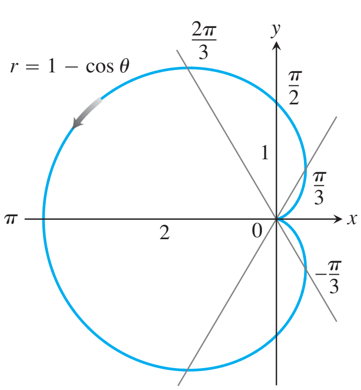
$$= \frac{\dfrac{df}{d\theta}\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{\dfrac{df}{d\theta}\cos\theta - f(\theta)\sin\theta} \qquad \text{Türevler için Çarpım Kuralı}$$

θ	$r = 1 - \cos\theta$
0	0
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3}{2}$
π	2

(a)



(b)



(c)

ŞEKİL 10.44 $r = 1 - \cos\theta$ kardioidinin çizimindeki adımlar (Örnek 1). Ok, artan θ yönünü göstermektedir.

$r = f(\theta)$ Eğrisinin Eğimi

(r, θ) noktasında $dx/d\theta \neq 0$ olması şartıyla,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(r,\theta)} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta}$$

$r = f(\theta)$ eğrisi $\theta = \theta_0$'da orijinden geçiyorsa, $f(\theta_0) = 0$ olur ve eğim denklemi

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,\theta_0)} = \frac{f'(\theta_0)\sin\theta_0}{f'(\theta_0)\cos\theta_0} = \tan\theta_0.$$

verir. $r = f(\theta)$'nın grafiği $\theta = \theta_0$'da orijinden geçiyorsa, eğrinin oradaki eğimi $\tan\theta_0$'dır. Sadece "orijindeki eğim" değil de, "$(0, \theta_0)$'daki eğim" dememizin nedeni bir kutupsal eğrinin orijinden farklı θ-değerlerinde birçok kere geçebileceğinden dolayıdır. Ancak, ilk örneğimizdeki durum bu değildir.

ÖRNEK 1 Bir Kardioid

$r = 1 - \cos\theta$ eğrisinin grafiğini çizin.

Çözüm Eğri x-eksenine göre simetriktir, çünkü

$$\begin{aligned} (r,\theta) \text{ grafik üzerinde ise} &\Rightarrow r = 1 - \cos\theta \\ &\Rightarrow r = 1 - \cos(-\theta) \qquad \cos\theta = \cos(-\theta) \\ &\Rightarrow (r, -\theta) \text{ grafik üzerindedir.} \end{aligned}$$

θ, 0'dan π'ye doğru artarken, $\cos\theta$, 1'den –1'e azalır ve $r = 1 - \cos\theta$, 0 olan bir minimum değerden 2 olan bir maksimum değere doğru artar. θ, π'den 2π' ye doğru ilerlerken, $\cos\theta$ da –1'den 1'e artar ve r 2'den yine 0'a iner. $\theta = 2\pi$ olduğunda eğri tekrarlanmaya başlar, çünkü kosinüsün periyodu 2p'dir.

Eğri orijinden tan (0) = 0 eğimiyle ayrılır ve tan (2π) = 0 eğimiyle orijine geri döner.

$\theta = 0$'dan $\theta = \pi$'ye kadar olan değerlerin bir tablosunu yapar, noktaları işaretler, orijindeki teğet yatay olmak üzere noktaları düzgün bir eğriyle birleştirir ve eğriyi x-ekseninden yansıtarak grafiği tamamlarız (Şekil 10.44). Eğriye kalbe benzediği için *kardioid* denir. Kardioid şekiller bobin ve makaralardaki düzgün ip tabakalarını yönlendiren millerde ve belirli radyo antenlerinin sinyal kuvvet kalıplarında ortaya çıkar. ■

ÖRNEK 2 $r^2 = 4\cos\theta$ Eğrisinin Grafiğini Çizin.

Çözüm $r^2 = 4\cos\theta$, $\cos\theta \geq 0$ olmasını gerektirir, bu yüzden grafiğin tamamını θ'yı $-\pi/2$'den $\pi/2$'ye kadar değiştirerek buluruz. Eğri x-eksenine göre simetriktir, çünkü

$$(r, \theta) \text{ grafik üzerinde ise} \Rightarrow r^2 = 4\cos\theta$$
$$\Rightarrow r^2 = 4\cos(-\theta) \qquad \cos\theta = \cos(-\theta)$$
$$\Rightarrow (r, -\theta) \text{ grafik üzerindedir.}$$

Eğri orijine göre de simetriktir, çünkü

$$(r, \theta) \text{ grafik üzerinde ise} \Rightarrow r^2 = 4\cos\theta$$
$$\Rightarrow (-r)^2 = 4\cos\theta$$
$$\Rightarrow (-r, \theta) \text{ grafik üzerindedir.}$$

Birlikte, bu iki simetri y-ekseni etrafında simetri olduğunu belirtir.

Eğri $\theta = -\pi/2$ ve $\theta = \pi/2$ iken orijinden geçer. İki seferde de dikey bir teğeti vardır, çünkü $\tan\theta$ sonsuzdur.

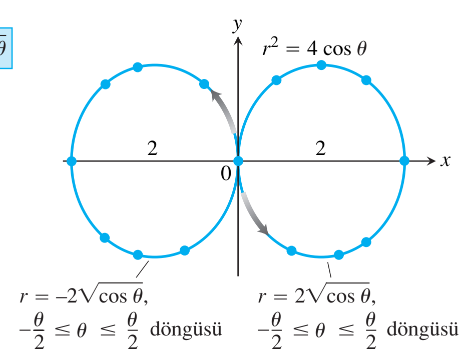
$-\pi/2$ ve $\pi/2$ arasındaki aralıkta bulunan her θ değeri için, $r^2 = 4\cos\theta$ formülü iki r değeri verir:

$$r = \pm 2\sqrt{\cos\theta}$$

Değerlerin kısa bir tablosunu yapar, karşılık gelen noktaları işaretler ve simetri ile teğetler hakkındaki bildiklerimizi rehber olarak kullanarak noktaları düzgün bir eğriyle birleştiririz (Şekil 10.45). ■

θ	$\cos\theta$	$r = \pm 2\sqrt{\cos\theta}$
0	1	± 2
$\pm\frac{\theta}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\approx \pm 1.9$
$\pm\frac{\theta}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\approx \pm 1.7$
$\pm\frac{\theta}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\approx \pm 1.4$
$\pm\frac{\theta}{2}$	0	0

(a)



(b)

ŞEKİL 10.45 $r^2 = 4\cos\theta$'nın grafiği. Oklar artan θ yönünü göstermektedir. Tablodaki r değerleri yuvarlanmıştır (Örnek 2).

Bir Çizim Tekniği

Kutupsal bir $r = f(\theta)$ denkleminin grafiğini çizmenin bir yolu (r, θ) değerlerinin bir tablosunu yapmak, karşılık gelen noktaları işaretlemek ve bunları artan θ sırasıyla birleştirmektir. Grafikteki bütün döngüleri ve çukurları ortaya çıkaracak kadar nokta varsa bu iyi işleyebilir. Burada genelde daha hızlı ve daha güvenilir olan başka bir grafik çizme yöntemini aşağıdaki iki adımda verilmektedir.

1. $r = f(\theta)$'yı *Kartezyen* $r\theta$-düzleminde çizin.
2. Kartezyen grafiği bir "tablo" ve rehber olarak kullanıp *kutupsal* grafiğini çizin.

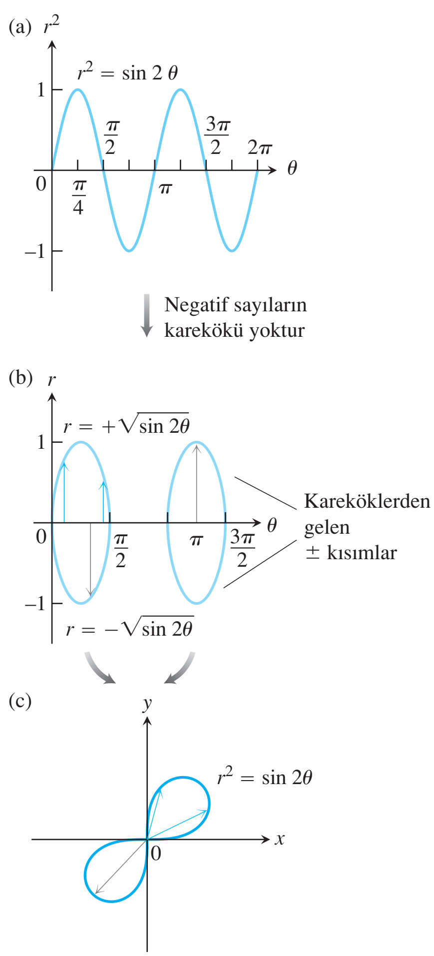
Bu yöntem basit nokta işaretlemeden daha iyidir, çünkü Kartezyen grafik, aceleyle çizilmiş olsa bile, bir bakışta r'nin artan veya azalan olup olmadığının yanısıra, nerede pozitif, nerede negatif olduğunu veya nerede bulunmadığını ortaya çıkarır. İşte bir örnek.

ÖRNEK 3 Bir Lemniskat

$$r^2 = \sin 2\theta$$

eğrisinin grafiğini çizin.

Çözüm Burada, r^2'yi (r'yi değil) θ'nın bir fonksiyonu gibi Kartezyen $r^2\theta$ düzleminde çizerek başlarız (Şekil 10.46a'ya bakın). Buradan $r = \pm\sqrt{\sin 2\theta}$ 'nın $r\theta$-düzlemindeki grafiğine geçer (Şekil 10.46b) ve kutupsal grafiği çizeriz (Şekil 10.46c). Şekil 10.46(b)'deki grafik, Şekil 10.46(c)'deki son grafiği iki kere "kaplar". Üst iki yarı veya alt iki yarı ile birlikte iki döngüden sadece biri işimizi görebilirdi. Ancak çifte kaplamanın bir zararı yoktur ve bu şekilde fonksiyonun davranışı hakkında daha fazla şey öğreniriz. ■



ŞEKİL 10.46 (b)'de $r = f(\theta)$'yı Kartezyen $r\theta$-düzleminde çizmek için, önce (a)'daki $r^2\theta$-düzleminde $r^2 = \sin 2\theta$'yı çizeriz. Sonra, $\sin 2\theta$'yı negatif yapan θ değerlerini yok sayarız. (b) çizimindeki yarıçaplar (c)'deki lemniskatın kutupsal grafiğini iki defa çizer (Örnek 3).

Kutupsal Grafiklerin Kesiştikleri Noktaları Bulmak

Kutupsal koordinatlarda bir noktayı farklı şekillerde temsil edebilmemiz, bir noktanın ne zaman bir kutupsal denklemin grafiği üzerinde bulunduğuna karar verirken veya kutupsal grafiklerin kesiştikleri noktaları belirlerken fazladan dikkat göstermemizi gerektirir. Sorun şuradadır; bir kesişim noktası kesişen iki eğriden birinin denklemini, diğer eğriyi sağlayan kutupsal koordinatlardan farklı koordinatlarla sağlayabilir. Yani iki eğrinin denklemlerini birlikte çözmek bütün kesişim noktalarını tanımlamayabilir. Bütün kesişim noktalarını belirlemenin en emin yolu denklemlerin grafiklerini çizmektir.

ÖRNEK 4 Yanıltıcı Kutupsal Koordinatlar

$(2, \pi/2)$ noktasının $r = 2\cos 2\theta$ eğrisi üzerine olduğunu gösterin.

Çözüm İlk bakışta $(2, \pi/2)$ noktası eğri üzerinde değilmiş gibi görünebilir, çünkü verilen koordinatları denkleme yerleştirmek

$$2 = 2\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\pi = -2,$$

verir ki, bu da gerçek bir eşitlik değildir. Büyüklük doğrudur, fakat işaret yanlıştır. Bu verilen nokta için, r'nin negatif olduğu bir koordinat çifti bulmayı önerir, mesela $(-2, -(\pi/2))$. Bunu $r = 2\cos 2\theta$ denklemine koyarsak,

$$-2 = 2\cos 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2(-1) = -2$$

buluruz ve denklem sağlanır. $(2, \pi/2)$ noktası eğrinin üzerindedir. ■

ÖRNEK 5 Gizli Kesişim Noktaları

Aşağıdaki eğrilerin kesişim noktalarını bulun.

$$r^2 = 4\cos\theta \quad \text{ve} \quad r = 1 - \cos\theta$$

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Johannes Kepler
(1571–1630)

Çözüm Kartezyen koordinatlarda, iki eğrinin kesiştiği noktaları her zaman denklemlerini birlikte çözerek bulabiliriz. Kutupsal koordinatlarda ise, hikaye farklıdır. Birlikte çözmek bazı kesişim noktalarını verirken, bazılarını vermeyebilir. Bu örnekte, birlikte çözmek dört kesişim noktasının ikisini verir. Diğerleri grafik çizerek bulunur (Ayrıca Alıştırma 49'a bakın).

$r = 1 - \cos\theta$ denkleminde $\cos\theta = r^2/4$ yazarsak,

$$\begin{aligned} r &= 1 - \cos\theta = 1 - \frac{r^2}{4} \\ 4r &= 4 - r^2 \\ r^2 + 4r - 4 &= 0 \\ r &= -2 \pm 2\sqrt{2}. && \text{Kuadratik formül} \end{aligned}$$

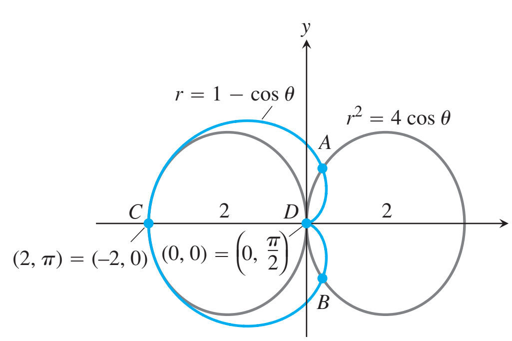
buluruz.

$r = -2 - 2\sqrt{2}$ değerinin mutlak değeri iki eğriye de ait olamayacak kadar büyüktür. $r = -2 + 2\sqrt{2}$ 'ye karşılık gelen θ değerleri

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1}(1 - r) && r = 1 - \cos\theta\text{'dan} \\ &= \cos^{-1}\left(1 - \left(2\sqrt{2} - 2\right)\right) && r = 2\sqrt{2} - 2 \text{ alın.} \\ &= \cos^{-1}\left(3 - 2\sqrt{2}\right) \\ &= \pm 80°. && \text{Yuvarlatılmış} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece iki kesişim noktası belirleriz: $(r, \theta) = (2\sqrt{2} - 2, \pm 80°)$.

$r^2 = 4\cos\theta$ ve $r = 1 - \cos\theta$ denklemlerinin grafiklerini, burada Şekil 10.44 ve 10.45'teki grafikleri birleştirerek yaptığımız gibi, birlikte çizersek (Şekil 10.47), eğrilerin ayrıca $(2, \pi)$ ve orijinde de kesiştiklerini görürüz. Bu noktaların r değerleri neden bir arada çözmekle ortaya çıkmadı? Yanıt $(0, 0)$ ve $(2, \pi)$ noktalarının "aynı zamanda" eğri üzerinde olmadıklarıdır. Bu noktalara aynı θ değerinde ulaşılmaz. $r = 1 - \cos\theta$ eğrisi üzerinde, $(2, \pi)$ noktasına $\theta = \pi$ iken varılır. $r^2 = 4\cos\theta$ eğrisinde ise, bu noktaya $\theta = 0$ iken varılır, yani denklemi sağlamayan $(2, \pi)$ koordinatlarıyla değil, denklemi sağlayan $(-2, 0)$ koordinatlarıyla belirlenir. Aynı şekilde, kardioid orijine $\theta = 0$'da varır, fakat $r^2 = 4\cos\theta$ orijine $\theta = \pi/2$'de ulaşır. ■



ŞEKİL 10.47 $r = 1 - \cos\theta$ ve $r^2 = 4\cos\theta$ eğrilerinin dört kesişim noktası (Örnek 5). Bir arada çözmekle sadece A ve B bulunur. Diğer ikisi grafik çizerek ortaya çıkarılır.

TEKNOLOJİYİ KULLANMAK **Kutupsal Eğrileri Parametrik Olarak Çizmek**

Karışık kutupsal eğrilerin grafiklerini çizmek için grafik çizen bir hesap makinesi veya bilgisayar kullanma ihtiyacı hissedebiliriz. Makine grafikleri doğrudan çizmiyorsa

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$$

denklemlerini kullanarak, $r = f(\theta)$'yı parametrik forma dönüştürebiliriz. Sonra makineyi, Kartezyen xy-düzleminde bir parametrize eğri çizmek için kullanırız. Grafik çizici için parametreyi θ olarak kullanmak yerine t olarak kullanmak gerekebilir.

ALIŞTIRMALAR 10.6

Simetriler ve Kutupsal Grafikler

1–12 alıştırmalarındaki eğrilerin simetrilerini belirleyin. Sonra eğrileri çizin.

1. $r = 1 + \cos\theta$ **2.** $r = 2 - 2\cos\theta$

3. $r = 1 - \sin\theta$ **4.** $r = 1 + \sin\theta$

5. $r = 2 + \sin\theta$ **6.** $r = 1 + 2\sin\theta$

7. $r = \sin(\theta/2)$ **8.** $r = \cos(\theta/2)$

9. $r^2 = \cos\theta$ **10.** $r^2 = \sin\theta$

11. $r^2 = -\sin\theta$ **12.** $r^2 = -\cos\theta$

13-16 Alıştırmalarındaki lemniskatları (fiyonk) çizin. Eğrilerin simetrileri nelerdir?

13. $r^2 = 4\cos 2\theta$ **14.** $r^2 = 4\sin 2\theta$

15. $r^2 = -\sin 2\theta$ **16.** $r^2 = -\cos 2\theta$

Kutupsal Eğrilerin Eğimleri

17–20 alıştırmalarındaki eğrilerin verilen noktalardaki eğimlerini bulun. Eğrileri bu noktalardaki teğetleriyle birlikte çizin.

17. Kardioid $r = -1 + \cos\theta$; $\theta = \pm\pi/2$

18. Kardioid $r = -1 + \sin\theta$; $\theta = 0, \pi$

19. Dört yapraklı gül $r = \sin 2\theta$; $\theta = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4$

20. Dört yapraklı gül $r = \cos 2\theta$; $\theta = 0, \pm\pi/2, \pi$

Limaçonlar (Salyangoz)

21-24 alıştırmalarındaki limaçonları çizin. Limaçon (“lee-ma-shan”) eski Fransızca da “salyangoz”dur. Alıştırma 21’deki limaçonları çizdiğinizde ismin nedenini anlayacaksınız. Limaçon denklemleri $r = a \pm b\cos\theta$ veya $r = a \pm b\sin\theta$ formundadır. Dört temel şekil vardır.

21. Bir iç döngülü limaçonlar

a. $r = \frac{1}{2} + \cos\theta$ **b.** $r = \frac{1}{2} + \sin\theta$

22. Kardioidler

a. $r = 1 - \cos\theta$ **b.** $r = -1 + \sin\theta$

23. Gamzeli limaçonlar

a. $r = \frac{3}{2} + \cos\theta$ **b.** $r = \frac{3}{2} - \sin\theta$

24. Oval limaçonlar

a. $r = 2 + \cos\theta$ **b.** $r = -2 + \sin\theta$

Kutupsal Eşitsizlikleri Çizmek

25. $-1 \le r \le 2$ ve $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ eşitsizlikleriyle tanımlanan bölgeyi çizin.

26. $0 \le r \le 2\sec\theta$ ve $-\pi/4 \le \theta \le \pi/4$ eşitsizlikleriyle tanımlanan bölgeyi çizin.

27–28 alıştırmalarında eşitsizliğin tanımladığı bölgeyi çizin.

27. $0 \le r \le 2 - 2\cos\theta$ **28.** $0 \le r^2 \le \cos\theta$

Kesişimler

29. $(2, 3\pi/4)$ noktasının $r = 2\sin 2\theta$ eğrisi üzerinde olduğunu gösterin.

30. $(1/2, 3\pi/2)$ noktasının $r = -\sin(\theta/3)$ eğrisi üzerinde olduğunu gösterin.

31–38 alıştırmalarındaki eğri çiftlerinin kesişim noktalarını bulun.

31. $r = 1 + \cos\theta$, $r = 1 - \cos\theta$

32. $r = 1 + \sin\theta$, $r = 1 - \sin\theta$

33. $r = 2\sin\theta$, $r = 2\sin 2\theta$

34. $r = \cos\theta$, $r = 1 - \cos\theta$

35. $r = \sqrt{2}$, $r^2 = 4\sin\theta$

36. $r^2 = \sqrt{2}\sin\theta$, $r^2 = \sqrt{2}\cos\theta$

37. $r = 1$, $r^2 = 2\sin 2\theta$

38. $r^2 = \sqrt{2}\cos 2\theta$, $r^2 = \sqrt{2}\sin 2\theta$

T 39–42 alıştırmalarındaki eğri çiftlerinin kesişim noktalarını bulun.

39. $r^2 = \sin 2\theta$, $r^2 = \cos 2\theta$

40. $r = 1 + \cos\frac{\theta}{2}$, $r = 1 - \sin\frac{\theta}{2}$

41. $r = 1$, $r = 2\sin 2\theta$ **42.** $r = 1$, $r^2 = 2\sin 2\theta$

T Grafik Araştırmaları

43. Aşağıdakilerin hangisinin grafiği $r = 1 - \cos\theta$'nın grafiği ile aynıdır?

a. $r = -1 - \cos\theta$ **b.** $r = 1 + \cos\theta$

Yanıtlarınızı cebirle doğrulayın.

44. Aşağıdakilerin hangisinin grafiği $r = \cos 2\theta$'nın grafiği ile aynıdır?

a. $r = -\sin(2\theta + \pi/2)$ **b.** $r = -\cos(\theta/2)$

Yanıtlarınızı cebirle doğrulayın.

45. Gül içinde gül $r = 1 - 2\sin 3\theta$ eğrisinin grafiğini çizin.

46. Freeth'in nefroidi Freeth'in nefroidini çizin:

$$r = 1 + 2\sin\frac{\theta}{2}$$

47. Güller $m = 1/3$, 2, 3 ve 7 için $r = \cos m\theta$ güllerini çizin.

48. Spiraller Kutupsal koordinatlar spiralleri tanımlamanın en iyi yoludur. Aşağıdaki spirallerin grafiklerini çizin.

a. $r = \theta$ **b.** $r = -\theta$

c. *Logaritmik bir spiral:* $r = e^{\theta/10}$

d. *Hiperbolik bir spiral:* $r = 8/\theta$

e. *Eşkenar bir hiperbol:* $r = \pm 10/\sqrt{\theta}$

(İki kol için farklı renkler kullanın.)

Teori ve Örnekler

49. (*Örnek 5'in devamı*) Konu içindeki

$$r^2 = 4\cos\theta \qquad (1)$$
$$r = 1 - \cos\theta \qquad (2)$$

denklemlerinin birlikte çözümü, grafiklerinin kesiştiği (0, 0) ve $(2, \pi)$ noktalarını ortaya çıkarmamıştı.

a. Ancak, (1) denklemindeki (r, θ) yerine buna denk olan $(-r, \theta + \pi)$ yazıp,

$$r^2 = 4\cos\theta$$
$$(-r)^2 = 4\cos(\theta + \pi) \qquad (3)$$
$$r^2 = -4\cos\theta$$

elde ederek $(2, \pi)$ noktasını bulabilirdik. (2) ve (3) denklemlerini birlikte çözerek, $(2, \pi)$'nin ortak bir çözüm olduğunu gösterin. (Bu hala grafiklerin (0, 0)'da kesiştiklerini göstermez.)

b. Orijin hala özel bir durumdur (Çoğunlukla öyledir). Bunu halletmenin yollarından biri şudur: (1) ve (2) denklemlerinde $r = 0$ alın ve her denklemi buna karşılık gelen θ değerinde çözün. $(0, \theta)$ herhangi bir θ değeri için, orijin olduğundan dolayı, bu her iki eğrinin de, farklı θ-değerlerinde bile olsa, orijinden geçtiklerini gösterir.

50. Eğer bir eğride bölümün başında verilen simetrilerden ikisi varsa, üçüncü simetriye sahip olduğu veya olmadığı hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

***51.** Dört yapraklı $r = \cos 2\theta$ gülünün x-ekseni üzerinde bulunan taçyaprağının maksimum genişliğini bulun.

***52.** $r = 2(1 + \cos\theta)$ kardioidinin x-ekseninin üzerindeki maksimum yüksekliğini bulun

10.7 Kutupsal Koordinatlarda Alanlar ve Uzunluklar

Bu bölüm kutupsal koordinatlarda düzlemsel bölgelerin alanlarının, eğri uzunluklarının ve dönel yüzeylerin alanlarının nasıl hesaplandığını göstermektedir.

Düzlemde Alan

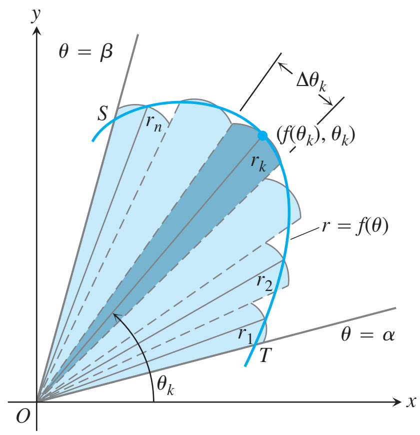
Şekil 10.48'deki OTS bölgesi $\theta = \alpha$ ve $\theta = \beta$ ışınları ve $r = f(\theta)$ eğrisiyle sınırlıdır. Bölgeye, n tane üst üste binmeyen, tabanları *TOS* açısının bir *P* bölünüşünün üzerinde olan pervane şekilli dairesel kesitle yaklaşımda bulunuruz. Tipik bir kesitin yarıçapı $r_k = f(\theta_k)$ ve radyan olarak ölçülen merkez açısı $\Delta\theta_k$'dir. Alanı, $\Delta\theta_k/2\pi$ kere r_k yarıçaplı bir çemberin alanı dır. Veya

$$A_k = \frac{1}{2} r_k^2\, \Delta\theta_k = \frac{1}{2}\left(f(\theta_k)\right)^2 \Delta\theta_k$$

dir. OTS bölgesinin alanı yaklaşık olarak

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(f(\theta_k)\right)^2 \Delta\theta_k$$

dir.



ŞEKİL 10.48 *OTS* bölgesinin alanının bir formülünü bulmak için, bölgeye pervane şekilli dairesel kesitlerle yaklaşımda bulunuruz.

f sürekliyse, $\|P\| \to 0$ iken yaklaşımların iyileşmesini bekleriz ve bölgenin alanı için aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(f(\theta_k)\right)^2 \Delta\theta_k$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\left(f(\theta)\right)^2 d\theta.$$

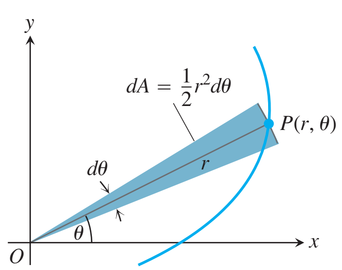
Orijin ile $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, Eğrisi Arasında Kalan Pervane Şekilli Bölgenin Alanı

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta.$$

Bu

$$dA = \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2}(f(\theta))^2 \, d\theta$$

alan diferansiyelinin integralidir (Şekil 10.49).



ŞEKİL 10.49 $r = f(\theta)$eğrisi için dA alan diferansiyeli

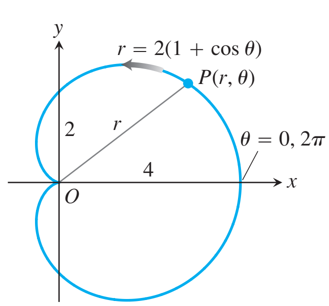
ÖRNEK 1 Alan Bulmak

$r = 2(1 + \cos\theta)$ kardioidi ile çevrili bölgenin alanını bulun.

Çözüm Kardioidin grafiğini çizer (Şekil 10.50) ve θ açısı 0'dan 2π'ye giderken, OP yarıçapının bölgeyi tam bir kere taradığını belirleriz. Dolayısıyla alanı

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot 4(1 + \cos\theta)^2 \, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} 2(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) \, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(2 + 4\cos\theta + 2\,\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta) \, d\theta$$
$$= \left[3\theta + 4\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 6\pi - 0 = 6\pi$$ ■

olarak buluruz.



ŞEKİL 10.50 Örnek 1'deki kardioid.

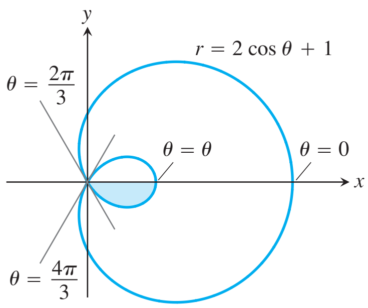
ÖRNEK 2 Alan Bulmak

Aşağıdaki limaçonun içteki küçük döngüsünün içindeki alanı bulun.

$$r = 2\cos\theta + 1$$

Çözüm Eğriyi çizdikten sonra (Şekil 10.51), küçük döngüsünün, $\theta = 2\pi/3$'ten $\theta = 4\pi/3$'e artarken (r, θ) tarafından izlendiğini görürüz. Eğri x-eksenine göre simetrik olduğu için (θ yerine $-\theta$ yazarsak denklem değişmez), iç döngünün gölgeli kısmının alanını $\theta = 2\pi/3$'ten $\theta = 4\pi/3$'e kadar integre ederek bulabiliriz. Aradığımız alan ortaya çıkan integralin iki katıdır:

$$A = 2\int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \int_{2\pi/3}^{\pi} r^2 \, d\theta$$



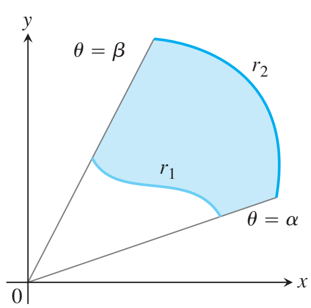
ŞEKİL 10.51 Örnek 2'deki limaçon. Eski Fransızca'da *salyangoz* (LEE-ma-sahn).

$$\begin{aligned} r^2 &= (2\cos\theta + 1)^2 = 4\cos^2\theta + 4\cos\theta + 1 \\ &= 4 \cdot \frac{1+\cos 2\theta}{2} + 4\cos\theta + 1 \\ &= 2 + 2\cos 2\theta + 4\cos\theta + 1 \\ &= 3 + 2\cos 2\theta + 4\cos\theta. \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} A &= \int_{2\pi/3}^{\pi} (3 + 2\cos 2\theta + 4\cos\theta)\, d\theta \\ &= \Big[3\theta + \sin 2\theta + 4\sin\theta \Big]_{2\pi/3}^{\pi} \\ &= (3\pi) - \left(2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$ ■

buluruz.



ŞEKİL 10.52 Renkli bölgenin alanı, r_1 ile orijin arasındaki alanın r_2 ile orijin arasında kalan alandan çıkarılması ile bulunur.

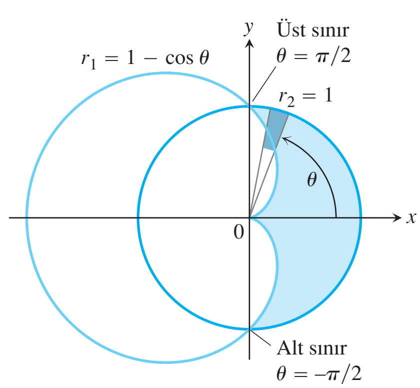
$\theta = \alpha$'dan $\theta = \beta$'ya kadar iki $r_1 = r_1(\theta)$ ve $r_2 = r_2(\theta)$ kutupsal eğrileri arasında bulunan Şekil 10.52' deki gibi bir alanı bulmak için, $(1/2)r_1^2\, d\theta$'nın integralini $(1/2)r_2^2\, d\theta$'nın integralinden çıkarırız. Bu aşağıdaki formülü verir.

$0 \le r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), \quad \alpha \le \theta \le \beta$ Bölgesinin Alanı

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r_2^2\, d\theta - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r_1^2\, d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right) d\theta \qquad (1)$$

ÖRNEK 3 Kutupsal Eğriler Arasındaki Alanı Bulmak

$r = 1$ çemberinin içinde ve $r = 1 - \cos\theta$ kardioidinin dışında kalan bölgenin alanını bulun.



ŞEKİL 10.53 Örnek 3'teki bölge ve integrasyon sınırları.

Çözüm Bölgeyi çizerek sınırlarını bulur ve integrasyon sınırlarını belirleriz (Şekil 10.53). Dış eğri $r_2 = 1$, iç eğri $r_1 = 1 - \cos\theta$'dır ve θ açısı $-\pi/2$'den $\pi/2$'ye kadar değişir. Alan, (1) denkleminden,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right) d\theta \\ &= 2\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right) d\theta \qquad \text{Simetri} \\ &= \int_{0}^{\pi/2} \left(1 - (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\right) d\theta \\ &= \int_{0}^{\pi/2} (2\cos\theta - \cos^2\theta)\, d\theta = \int_{0}^{\pi/2} \left(2\cos\theta - \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\ &= \left[2\sin\theta - \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = 2 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$ ■

olarak bulunur.

Kutupsal Bir Eğrinin Uzunluğu

Bir $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, eğrisinin uzunluğunun kutupsal koordinat formülünü, eğriyi

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta, \qquad \alpha \leq \theta \leq \beta \tag{2}$$

şeklinde parametrize ederek bulabiliriz. Bu durumda, parametrik uzunluk formülü, Bölüm 6.3'ten (1) Denklemi, uzunluğu

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

olarak verir. Bu denklem, x ve y yerine (2) Denklemleri konulduğunda,

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

haline gelir (Alıştırma 33).

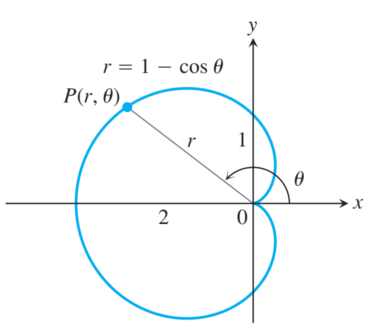
Kutupsal Bir Eğrinin Uzunluğu

Eğer $r = f(\theta)$'nın $\alpha \leq \theta \leq \beta$ için sürekli bir birinci türevi varsa ve $P(r, \theta)$ noktası, θ açısı α'dan β'ya giderken, $r = f(\theta)$ eğrisini sadece bir kere dolaşıyorsa, eğrinin uzunluğu şu şekilde bulunur:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta. \tag{3}$$

ÖRNEK 4 Bir Kardioidin Uzunluğunu Bulmak

$r = 1 - \cos\theta$ kardioidinin uzunluğunu bulun



ŞEKİL 10.54 Bir kardioidin uzunluğunu hesaplamak (Örnek 4).

Çözüm İntegrasyon sınırlarını belirlemek için kardioidi çizeriz (Şekil 10.54). θ açısı 0'dan 2π'ya giderken $P(r, \theta)$ noktası eğriyi saat yönünün tersine doğru bir kere dolaşır, dolayısıyla α ve β olarak bu değerleri alırız.

$$r = 1 - \cos\theta, \qquad \frac{dr}{d\theta} = \sin\theta$$

ile,

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = (1 - \cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2$$
$$= 1 - 2\cos\theta + \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1} = 2 - 2\cos\theta$$

ve

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\theta}\, d\theta$$
$$= \int_{0}^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta \qquad 1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \text{ için } \sin\frac{\theta}{2} \ge 0$$

$$= \left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 4 + 4 = 8$$

buluruz. ■

Bir Dönel Yüzeyin Alanı

Bir dönel yüzeyin alanının kutupsal koordinat formüllerini türetmek için, $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$ eğrisini (2) denklemleriyle parametrize eder ve Bölüm 6.5'teki yüzey alanı denklemlerini uygularız.

Bir Dönel Yüzeyin Alanı

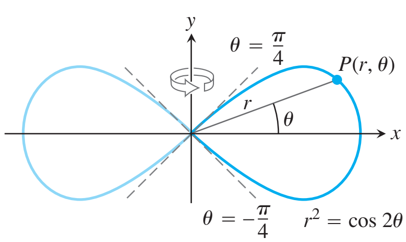
$r = f(\theta)$'nın $\alpha \le \theta \le \beta$ için sürekli bir birinci türevi varsa ve $P(r, \theta)$ noktası θ α'dan β'ya giderken $r = f(\theta)$ eğrisini tam bir defa dolaşıyorsa, eğriyi x ve y-eksenleri etrafında döndürmekle üretilecek yüzeylerin alanları aşağıdaki denklemlerle verilir:

1. x-ekseni etrafında dönme ($y \ge 0$):

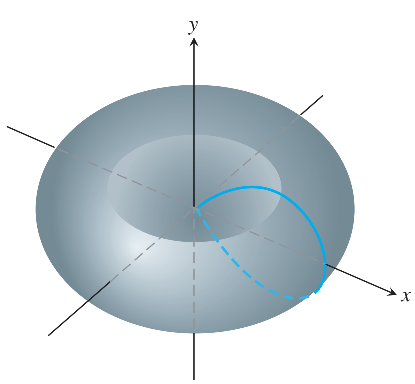
$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi r \sin\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \tag{4}$$

2. y-ekseni etrafında dönme ($x \ge 0$):

$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi r \cos\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \tag{5}$$



(a)



(b)

ŞEKİL 10.55 Bir lemniskatın sağ yarısı (a) y-ekseni etrafında döndürülerek alanı Örnek 5'te hesaplanan yüzey (b) üretilir.

ÖRNEK 5 Yüzey Alanı Bulmak

$r^2 = \cos 2\theta$ lemniskatının sağdaki döngüsünün y-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin alanını bulun.

Çözüm İntegrasyon sınırlarını belirlemek için, döngüyü çizeriz (Şekil 10.55a). θ açısı $-\pi/4$'ten $\pi/4$'e giderken $P(r, \theta)$ noktası eğriyi saat yönünün tersine bir kere dolaşır, dolayısıyla α ve β yerine alacağımız sayılar bunlardır.

(5) denklemindeki alan integrandını adım adım hesaplarız. Önce,

$$2\pi r\cos\theta\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = 2\pi\cos\theta\sqrt{r^4 + \left(r\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \tag{6}$$

yazarız. Sonra, $r^2 = \cos 2\theta$ olduğundan,

$$2r\frac{dr}{d\theta} = -2\sin 2\theta$$

$$r\frac{dr}{d\theta} = -\sin 2\theta$$

$$\left(r\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \sin^2 2\theta$$

elde ederiz.

Son olarak, $r^4 = (r^2)^2 = \cos^2 2\theta$ olduğu için, (6) Denkleminin sağ tarafındaki karekök aşağıdaki şekilde sadeleşir:

$$\sqrt{r^4 + \left(r\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta} = 1.$$

Sonunda,

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta 2\pi r \cos\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \qquad \text{(5) Denklemi} \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\pi \cos\theta \cdot (1)\, d\theta \\ &= 2\pi\Big[\sin\theta\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\ &= 2\pi\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 2\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

elde ederiz. ■

ALIŞTIRMALAR 10.7

Kutupsal Eğrilerin İçindeki Alanlar

1–6 alıştırmalarındaki bölgelerin alanlarını bulun.

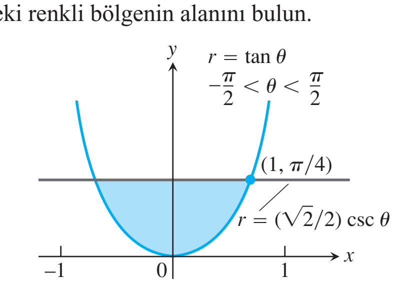
1. $r = 4 + 2\cos\theta$ oval limaçonu içindeki alan.
2. $r = a(1 + \cos\theta),\ a > 0$ kardioidinin içindeki alan.
3. Dört yapraklı $r = \cos 2\theta$ gülünün içindeki alan.
4. $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta,\ a > 0$ lemniskatının içindeki alan.
5. $r^2 = 4\sin 2\theta$ lemniskatının bir çevriminin içindeki alan.
6. Altı yapraklı $r^2 = 2\sin 3\theta$ gülünün içindeki alan.

Kutupsal Bölgelerce Paylaşılan Alanlar

7–16 alıştırmalarındaki bölgelerin alanlarını bulun.

7. $r = 2\cos\theta$ ve $r = 2\sin\theta$ çemberleriyle paylaşılan alan.
8. $r = 1$ ve $r = 2\sin\theta$ çemberleriyle paylaşılan alan.
9. $r = 2$ çemberi ve $r = 2(1 - \cos\theta)$ kardioidiyle paylaşılan alan.
10. $r = 2(1 + \cos\theta)$ ve $r = 2(1 - \cos\theta)$ kardioidleriyle paylaşılan alan.
11. $r^2 = 6\cos 2\theta$ lemniskatının içindeki ve $r = \sqrt{3}$ çemberinin dışındaki alan.
12. $r = 3a\cos\theta$ çemberinin içinde ve $r = a(1 + \cos\theta),\ a > 0$ kardioidinin dışındaki alan.
13. $r = -2\cos\theta$ çemberinin içinde ve $r = 1$ çemberinin dışındaki alan.
14. **a.** $r = 2\cos\theta + 1$ limaçonunun dış döngüsü içindeki alan (Şekil 10.51'e bakın).

    b. $r = 2\cos\theta + 1$ limaçonunun dış döngüsünün içinde ve iç döngüsünün dışındaki alan.
15. $r = 6$ çemberinin içinde, $r = 3\csc\theta$ doğrusunun üst tarafındaki alan.
16. $r^2 = 6\cos 2\theta$ fiyonkunun içinde, $r = (3/2)\sec\theta$ doğrusunun sağındaki alan.
17. **a.** Şekildeki renkli bölgenin alanını bulun.



    b. $r = \tan\theta,\ -\pi/2 < \theta < \pi/2$ eğrisinin grafiği $x = 1$ ve $x = -1$ doğrularına asimptotik gibi görünmektedir? Gerçekten öyle midir? Yanıtınızı açıklayın.
18. $r = \cos\theta + 1$ kardioid eğrisinin içinde ve $r = \cos\theta$ çemberinin dışındaki bölgenin alanı

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(\cos\theta + 1)^2 - \cos^2\theta]\, d\theta = \pi$$

değildir. Neden? Alan nedir? Yanıtınızı açıklayın.

Kutupsal Eğrilerin Uzunlukları

19–27 alıştırmalarındaki eğrilerin uzunluklarını bulun.

19. $r = \theta^2, \quad 0 \le \theta \le \sqrt{5}$ spirali.

20. $r = e^{\theta}/\sqrt{2}, \quad 0 \le \theta \le \pi$ spirali.

21. $r = 1 + \cos\theta$ kardioidi.

22. $r = a\sin^2(\theta/2), \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad a > 0$ eğrisi

23. $r = 6/(1 + \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le \pi/2$ parabol parçası.

24. $r = 2/(1 - \cos\theta), \quad \pi/2 \le \theta \le \pi$ parabol parçası.

25. $r = \cos^3(\theta/3), \quad 0 \le \theta \le \pi/4$ eğrisi.

26. $r = \sqrt{1 + \sin 2\theta}, \quad 0 \le \theta \le \pi\sqrt{2}$ eğrisi.

27. $r = \sqrt{1 + \cos 2\theta}, \quad 0 \le \theta \le \pi\sqrt{2}$ eğrisi.

28. Çemberlerin çevresi Her zamanki gibi, yeni bir formülle karşılaşıldığında, bunu, eski tecrübelerle aynı sonucu verdiğinden emin olmak için, tanıdığımız nesnelere uygulamak iyi bir fikirdir. (3) Denklemindeki uzunluk formülü ile aşağıdaki çemberlerin çevresini hesaplayın ($a > 0$).

a. $r = a$ **b.** $r = a\cos\theta$ **c.** $r = a\sin\theta$

Yüzey Alanı

29–32 alıştırmalarındaki eğrileri belirtilen eksen etrafında döndürerek elde edilen yüzeylerin alanlarını bulun.

29. $r = \sqrt{\cos 2\theta}, \quad 0 \le \theta \le \pi/4, \quad y$-ekseni

30. $r = \sqrt{2}e^{\theta/2}, \quad 0 \le \theta \le \pi/2, \quad x$-ekseni

31. $r^2 = \cos 2\theta, \quad x$-ekseni

32. $r = 2a\cos\theta, \quad a > 0, \quad y$-ekseni

Teori ve Örnekler

33. $r = f(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$ eğrisinin uzunluğu Gerekli türevlerin sürekli olduğunu varsayarak,

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\sin\theta$$

değişken dönüşümlerinin (konudaki (2) Denklemleri)

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

integralini

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

integraline dönüştürdüklerini gösterin.

34. Ortalama değer f sürekliyse, r kutupsal koordinatının $r = f(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$ eğrisi üzerinde θ'ya göre ortalama değeri

$$r_{\text{ort}} = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\, d\theta$$

formülüyle verilir.

Bu formülle r'nin aşağıdaki eğriler üzerinde θ'ya göre ortalama değerini bulun ($a > 0$).

a. $r = a(1 - \cos\theta)$ kardioidi.

b. $r = a$ çemberi

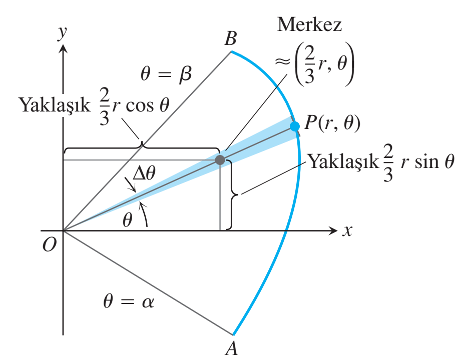
c. $r = a\cos\theta, \quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ çemberi

35. $r = f(\theta)$ ile $r = 2f(\theta)$ $r = f(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$ ile $r = 2f(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$ eğrilerinin birbirine göre uzunlukları hakkında ne söylenebilir? Yanıtınızı açıklayın.

36. $r = f(\theta)$ ile $r = 2f(\theta)$ $r = f(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$ ile $r = 2f(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$ eğrileri x-ekseni etrafında döndürülerek yüzeyler üretiliyor. Bu yüzeylerini birbirlerine göre alanları hakkında bir şey söylenebilir m? Yanıtınzı açıklayın.

Pervane Şekilli Bölgelerin Kütle Merkezleri

Bir üçgenin kütle merkezi her kenar ortada köşeden tabana doğru giderken üçte iki uzaklıkta olduğu için, şekildeki ince üçgensel bölgenin x-ekseni etrafındaki moment kolu yaklaşık $(2/3)\ r \sin\theta$'dır. Aynı şekilde üçgen bölgenin y-ekseni etrafındaki moment kolu da $(2/3)\ r\cos\theta$'dır. Bu yaklaşımlar $\Delta\theta \to 0$ iken daha iyileşir ve AOB bölgesinin merkezinin koordinatları için, sınırlar tüm integrallerde $\theta = \alpha$'dan $\theta = \beta$'ya olmak üzere, aşağıdaki denklemleri verir:



$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int \frac{2}{3}r\cos\theta \cdot \frac{1}{2}r^2\, d\theta}{\displaystyle\int \frac{1}{2}r^2\, d\theta} = \frac{\displaystyle\frac{2}{3}\int r^3\cos\theta\, d\theta}{\displaystyle\int r^2\, d\theta},$$

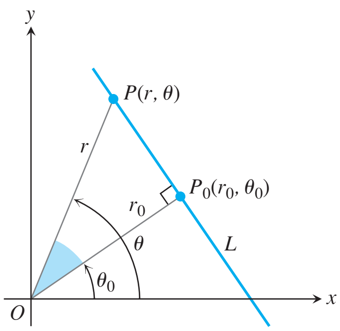
$$\bar{y} = \frac{\displaystyle\int \frac{2}{3}r\sin\theta \cdot \frac{1}{2}r^2\, d\theta}{\displaystyle\int \frac{1}{2}r^2\, d\theta} = \frac{\displaystyle\frac{2}{3}\int r^3\sin\theta\, d\theta}{\displaystyle\int r^2\, d\theta}$$

37. $r = a(1 + \cos\theta)$ kardioidiyle çevrelenen bölgenin kütle merkezini bulun.

38. $0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le \pi$ yarım çember şeklindeki bölgenin kütle merkezini bulun.

10.8 Kutupsal Koordinatlarda Konik Kesitler

Kutupsal koordinatlar astronomi ve uzay mühendisliğinde önemlidir, çünkü uyduların, ayların, gezegenlerin ve kuyruklu yıldızların izledikleri elipsler, paraboller ve hiperboller, hepsi oldukça basit tek bir koordinat denklemiyle tanımlanabilirler. Bu denklemi burada geliştireceğiz.



ŞEKİL 10.56 OP_0P dik üçgeninden $r_0 = r \cos(\theta - \theta_0)$ bağıntısını okuyarak L doğrusunun bir kutupsal denklemini elde edebiliriz.

Doğrular

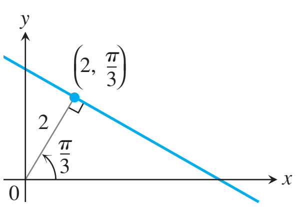
Orijinden L doğrusuna giden dikmenin L'yi $r_0 \geq 0$ olmak üzere $P_0(r_0, \theta_0)$'da kestiğini varsayın (Şekil 10.56). Bu durumda, L üzerindeki başka bir $P(r, \theta)$ noktası için, P, P_0 ve O noktaları bir dik üçgenin köşe noktalarını oluştururlar ve buradan

$$r_0 = r\cos(\theta - \theta_0)$$

bağıntısını bulabiliriz.

Doğrular İçin Standart Kutupsal Denklem
Orijinden L doğrusuna gelen dikmenin ayağı $P_0(r_0, \theta_0)$ noktası ise ve $r_0 \geq 0$ ise, L doğrusu için bir denklem şöyle verilir:

$$r\cos(\theta - \theta_0) = r_0 \qquad (1)$$



ŞEKİL 10.57 Bu doğrunun standart kutupsal denklemi $x + \sqrt{3}y = 4$ Kartezyen denklemine dönüşür (Örnek 1).

ÖRNEK 1 Bir Doğrunun Kutupsal Denklemini Kartezyene Çevirmek

$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ bağıntısını kullanarak Şekil 10.57'deki doğrunun Kartezyen denklemini bulun.

Çözüm

$$r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2$$

$$r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

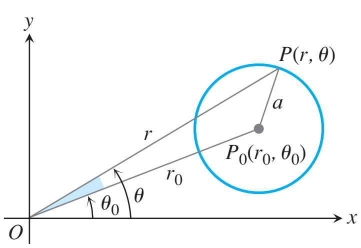
$$\frac{1}{2}r\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta = 2$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 2$$

$$x + \sqrt{3}y = 4$$

■

Çemberler



ŞEKİL 10.58 Bu çemberin kutupsal denklemini, Kosinüs Kuralını OP_0P üçgenine uygulayarak bulabiliriz.

Merkezi $P_0(r_0, \theta_0)$'da olan a yarıçaplı çemberin bir kutupsal denklemini bulmak için, $P(r, \theta)$'yı çemberin üzerinde bir nokta olarak alır ve OP_0P üçgenine Kosinüs Kuralını uygularız (Şekil 10.58). Bu

$$a^2 = r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\theta - \theta_0)$$

verir.

Çember orijinden geçiyorsa, $r_0 = a$ olur ve bu denklem

$$a^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \theta_0)$$
$$r^2 = 2ar\cos(\theta - \theta_0)$$
$$r = 2a\cos(\theta - \theta_0)$$

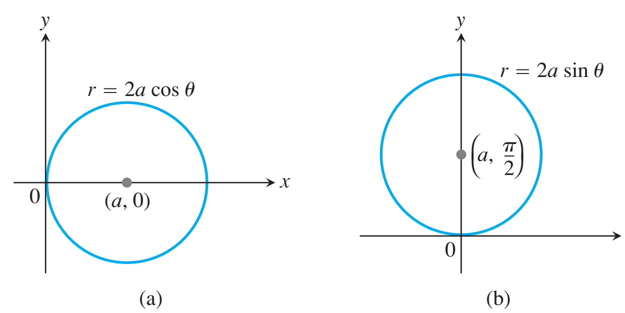
haline indirgenir. Çemberin merkezi pozitif x-ekseni üzerindeyse, $\theta_0 = 0$ olur ve daha basit olan

$$r = 2a\cos\theta$$

denklemini elde ederiz (Bkz. Şekil 10.59a). Merkez pozitif y-ekseninin üzerindeyse $\theta = \pi/2$, $\cos(\theta - \pi/2) = \sin\theta$ olur ve $r = 2a\cos(\theta - \theta_0)$ denklemi

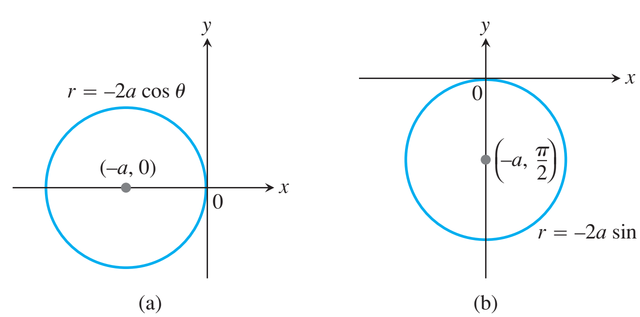
$$r = 2a\sin\theta$$

şeklini alır (Bkz. Şekil 10.59b).



ŞEKİL 10.59 Orijinden geçen, a yarıçaplı ve merkezi (a) pozitif x-ekseninde (b) pozitif y-ekseninde olan bir çemberin kutupsal denklemi.

Merkezleri negatif x- ve y-eksenlerinde olan ve orijinden geçen çemberlerin denklemleri yukarıdaki denklemlerde r yerine $-r$ yazarak elde edilebilir (Şekil 10.60).

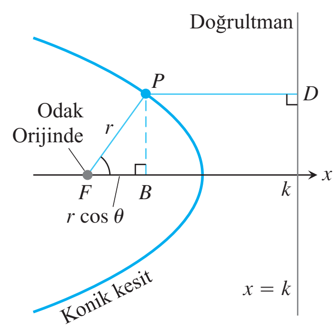


ŞEKİL 10.60 Orijinden geçen, a yarıçaplı ve merkezi (a) negatif x-ekseninde (b) negatif y-ekseninde olan bir çemberin kutupsal denklemi.

ÖRNEK 2 Orijinden Geçen Çemberler

Yarıçap	Merkez (kutupsal koordinatlar)	Kutupsal Denklem
3	$(3, 0)$	$r = 6\cos\theta$
2	$(2, \pi/2)$	$r = 4\sin\theta$
1/2	$(-1/2, 0)$	$r = -\cos\theta$
1	$(-1, \pi/2)$	$r = -2\sin\theta$

■



ŞEKİL 10.61 Bir konik kesit, odağı orijinde ve doğrultmanı orijinin sağında başlangıç ışınına dik bir şekle konursa koniğin odak-doğrultman denkleminden kutupsal denklemini elde edebiliriz.

Elipsler, Paraboller ve Hiperboller

Elipsler, paraboller ve hiperbollerin kutupsal denklemlerini bulmak için, odaklardan birini orijine, karşılık gelen doğrultmanı $x = k$ doğrusu boyunca orijinin sağına yerleştiririz (Şekil 10.61). Bu

$$PF = r$$

ve

$$PD = k - FB = k - r\cos\theta$$

verir. Bu durumda koniğin odak-doğrultman denklemi $PF = e \cdot PD$

$$r = e(k - r\cos\theta)$$

haline gelir. Buradan r çözülerek

Dışmerkezliği *e* olan Bir Koniğin Kutupsal Denklemi

$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta} \qquad (2)$$

elde edilir. Bu denklem $0 < e < 1$ ise, bir elipsi, $e = 1$ ise bir parabolü ve $e > 1$ ise bir hiperbolü temsil eder. Yani, elipsler, paraboller ve hiperbollerin hepsinin, dışmerkezliğe ve doğrultmanın konumuna bağlı olan tek bir basit denklemi vardır.

ÖRNEK 3 Bazı Koniklerin Kutupsal Denklemleri

$$e = \frac{1}{2}: \quad r = \frac{k}{2 + \cos\theta} \quad \text{elipsi}$$

$$e = 1: \quad r = \frac{k}{1 + \cos\theta} \quad \text{parabolü}$$

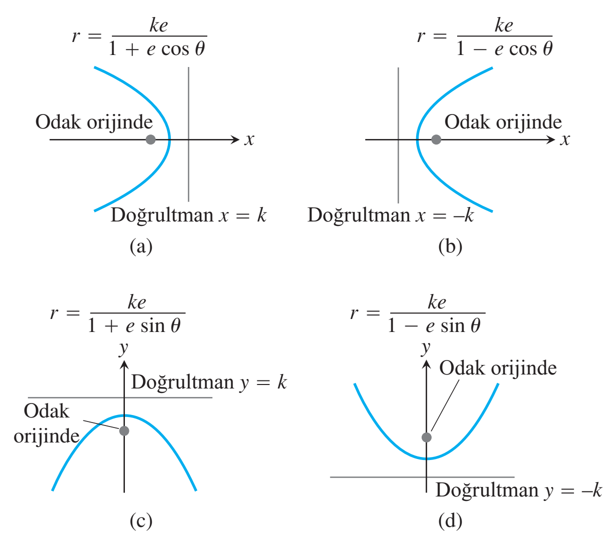
$$e = 2: \quad r = \frac{2k}{1 + 2\cos\theta} \quad \text{hiperbolü}$$

■

Zaman zaman, doğrultmanın konumuna göre (2) denkleminde farklılıklar görebilirsiniz. Doğrultman orijinin solundaki $x = -k$ doğrusuysa (orijin hala odaktır), (2) denklemini

$$r = \frac{ke}{1 - e\cos\theta}.$$

ile değiştiririz. Paydada (+) yerine (–) vardır. Doğrultman $y = k$ veya $y = -k$ doğrularından biriyse, denklemlerde, Şekil 10.62 de olduğu gibi, kosinüsler yerine sinüsler buluruz.



ŞEKİL 10.62 Dışmerkezlikleri $e > 0$ fakat doğrulmanları farklı konumlarda olan konik kesit denklemleri. Buradaki grafik bir parabol göstermektedir. Dolayısıyla $e = 1$ dir.

ÖRNEK 4 Bir Hiperbolün Kutupsal Denklemi

Dışmerkezliği $3/2$ ve doğrultmanı $x = 2$ olan hiperbolün bir denklemini bulun.

Çözüm $k = 2$ ve $e = 3/2$ ile (2) denklemini kullanarak

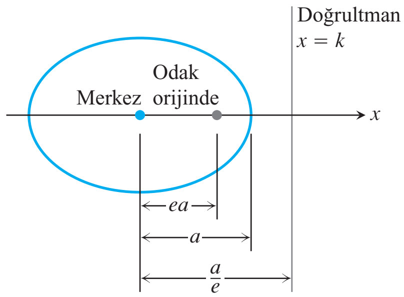
$$r = \frac{2(3/2)}{1 + (3/2)\cos\theta} \quad \text{veya} \quad r = \frac{6}{2 + 3\cos\theta}.$$

buluruz. ■

ÖRNEK 5 Bir Doğrultman Bulmak

Aşağıdaki parabolün doğrultmanını bulun.

$$r = \frac{25}{10 + 10\cos\theta}$$



ŞEKİL 10.63 Yarı asal ekseni a olan bir elipste, odak-doğrultman uzaklığı $k = (a/e) - ae$'dır. Dolayısıyla, $ke = a(1 - e^2)$ olur.

Çözüm Pay ve paydayı 10 ile bölerek denklemi standart şekle sokarız:

$$r = \frac{5/2}{1 + \cos\theta}.$$

Bu, $k = 5/2$ ve $e = 1$ ile

$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta}$$

denklemidir. Doğrultmanın denklemi $x = 5/2$'dir. ■

Şekil 10.63'te çizili olan elips diyagramından, k'nin e dışmerkezliğine ve a yarı asal eksenine

$$k = \frac{a}{e} - ea.$$

denklemiyle bağlı olduğunu görürüz. Buradan, $ke = a(1 - e^2)$ buluruz. (2) denkleminde ke yerine $a(1 - e^2)$ yazmak bir elipsin standart kutupsal denklemini verir.

Dışmerkezliği e ve Yarı Asal Ekseni a Olan Elips İçin Kutupsal Denklem

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta} \qquad (3)$$

$e = 0$ olduğunda (3) denkleminin bir çemberi temsil eden $r = a$ haline dönüştüğüne dikkat edin.

(3) Denklemi gezegen yörüngelerini hesaplamanın başlangıç noktasıdır.

ÖRNEK 6 Plüto Gezegeninin Yörüngesi

Yarı asal ekseni 39.44 AU (astronomik birim) ve dışmerkezliği 0.25 olan bir elipsin kutupsal denklemini bulun. Bu yaklaşık olarak Plüto'nun güneş çevresindeki yörüngesinin boyutlarındadır.

Çözüm $a = 39.44$ ve $e = 0.25$ ile (3) denklemini kullanarak

$$r = \frac{39.44(1 - (0.25)^2)}{1 + 0.25\cos\theta} = \frac{147.9}{4 + \cos\theta}.$$

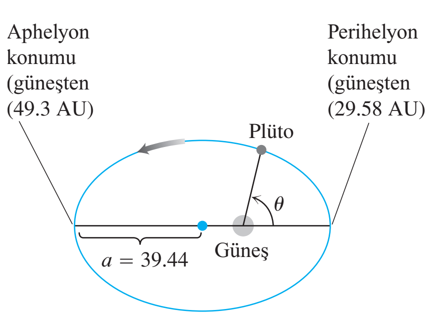
buluruz. En yakın yaklaşma noktasında (perihelyon) Plüto güneşten

$$r = \frac{147.9}{4 + 1} = 29.58 \text{ AU}$$

uzaktadır. En uzak noktada (aphelyon) ise, Plüto güneşten

$$r = \frac{147.9}{4 - 1} = 49.3 \text{ AU}$$

uzaktadır (Şekil 10.64). ■



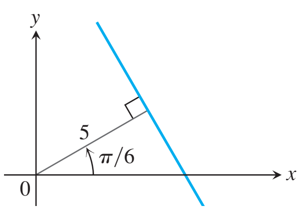
ŞEKİL 10.64 Plüto'nun yörüngesi (Örnek 6).

ALIŞTIRMALAR 10.8

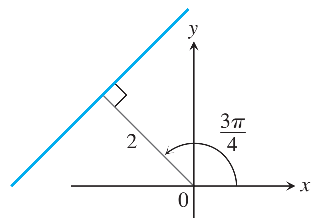
Doğrular

1–4 alıştırmalarındaki doğruların kutupsal ve Kartezyen denklemlerini bulun.

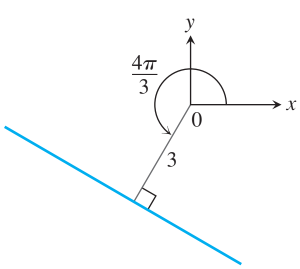
1.



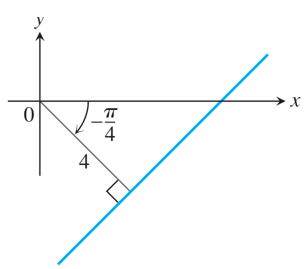
2.



3.



4.



5–8 alıştırmalarındaki doğruları çizin ve Kartezyen denklemlerini bulun.

5. $r\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ **6.** $r\cos\left(\theta + \dfrac{3\pi}{4}\right) = 1$

7. $r\cos\left(\theta - \dfrac{2\pi}{3}\right) = 3$ **8.** $r\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = 2$

9–12 alıştırmalarındaki doğrular için $r\cos(\theta - \theta_0) = r_0$ şeklinde bir kutupsal denklem bulun.

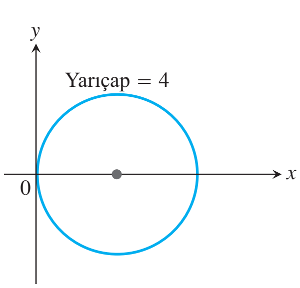
9. $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 6$ **10.** $\sqrt{3}x - y = 1$

11. $y = -5$ **12.** $x = -4$

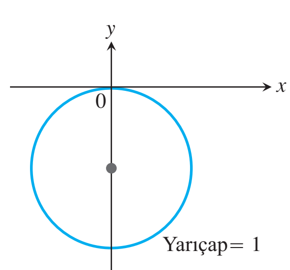
Çemberler

13–16 alıştırmalarındaki çemberlerin kutupsal denklemlerini bulun.

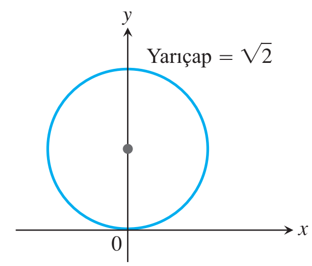
13.



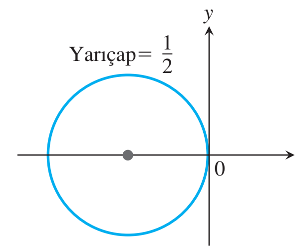
14.



15.



16.



17–20 alıştırmalarındaki çemberleri çizin. Merkezlerinin kutupsal koordinatlarını verin ve yarıçaplarını belirleyin.

17. $r = 4\cos\theta$ **18.** $r = 6\sin\theta$

19. $r = -2\cos\theta$ **20.** $r = -8\sin\theta$

21–28 alıştırmalarındaki çemberlerin kutupsal denklemlerini bulun. Her çemberi koordinat düzleminde çizin ve çizime hem Kartezyen hem de kutupsal denklemini yazın.

21. $(x - 6)^2 + y^2 = 36$ **22.** $(x + 2)^2 + y^2 = 4$

23. $x^2 + (y - 5)^2 = 25$ **24.** $x^2 + (y + 7)^2 = 49$

25. $x^2 + 2x + y^2 = 0$ **26.** $x^2 - 16x + y^2 = 0$

27. $x^2 + y^2 + y = 0$ **28.** $x^2 + y^2 - \dfrac{4}{3}y = 0$

Dışmerkezlikleri ve Doğrultmanlarından Konik Kesitler

29–36 alıştırmalarında, bir odakları orijinde olan konik kesitlerin bu odağa karşılık gelen doğrultmanlarıyla birlikte dışmerkezliklerini bulun. Her konik kesitin kutupsal denklemini bulun.

29. $e = 1, \quad x = 2$ **30.** $e = 1, \quad y = 2$

31. $e = 5, \quad y = -6$ **32.** $e = 2, \quad x = 4$

33. $e = 1/2, \quad x = 1$ **34.** $e = 1/4, \quad x = -2$

35. $e = 1/5, \quad y = -10$ **36.** $e = 1/3, \quad y = 6$

Parabol ve Elipsler

37–44 alıştırmalarındaki parabol ve elipsleri çizin. Çiziminize orijindeki odağa karşılık gelen doğrultmanı da ekleyin. Tepe noktaları uygun kutupsal koordinatlarla isimlendirin. Elipslerin merkezlerini de belirtin.

37. $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$ **38.** $r = \dfrac{6}{2 + \cos\theta}$

39. $r = \dfrac{25}{10 - 5\cos\theta}$ **40.** $r = \dfrac{4}{2 - 2\cos\theta}$

41. $r = \dfrac{400}{16 + 8\sin\theta}$ **42.** $r = \dfrac{12}{3 + 3\sin\theta}$

43. $r = \dfrac{8}{2 - 2\sin\theta}$ **44.** $r = \dfrac{4}{2 - \sin\theta}$

Eşitsizliklerin Grafiklerini Çizmek

45 ve 46 alıştırmalarındaki eşitsizliklerle tanımlanan bölgeleri çizin.

45. $0 \leq r \leq 2\cos\theta$ **46.** $-3\cos\theta \leq r \leq 0$

T Grafik Araştırmaları

47–56 alıştırmalarındaki doğruları ve konik kesitleri çizin.

47. $r = 3\sec(\theta - \pi/3)$ **48.** $r = 4\sec(\theta + \pi/6)$

49. $r = 4\sin\theta$ **50.** $r = -2\cos\theta$

51. $r = 8/(4 + \cos\theta)$ **52.** $r = 8/(4 + \sin\theta)$

53. $r = 1/(1 - \sin\theta)$ **54.** $r = 1/(1 + \cos\theta)$

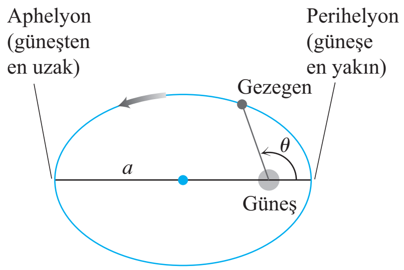
55. $r = 1/(1 + 2\sin\theta)$ **56.** $r = 1/(1 + 2\cos\theta)$

Teori ve Örnekler

57. Perihelyon ve aphelyon Bir gezegen güneşinin çevresinde yarı asal ekseninin uzunluğu a olan bir elips izler (Şekle bakın).

a. Gezegen güneşe en yakın olduğunda $r = a(1 - e)$, en uzak olduğunda ise $r = a(1 + e)$ olduğunu gösterin..

b. Alıştırma 58'deki tabloda bulunan verileri kullanarak güneş sistemimizdeki her gezegenin güneşe ne kadar yaklaştığını ve güneşten ne kadar uzaklaştığını bulun.



58. Gezegen yörüngeleri Örnek 6'da, Plüto'nun yörüngesi için bir kutupsal denklem bulduk. Aşağıdaki tabloda bulunan verileri kullanarak diğer gezegenlerin kutupsal denklemlerini bulun.

Gezegen	Yarı asal eksen (astronomik birim)	Dışmerkezlik
Merkür	0.3871	0.2056
Venüs	0.7233	0.0068
Dünya	1.000	0.0167
Mars	1.524	0.0934
Jüpiter	5.203	0.0484
Satürn	9.539	0.0543
Üranüs	19.18	0.0460
Neptün	30.06	0.0082
Plüto	39.44	0.2481

59. a. $r = 4\sin\theta$ ve $r = \sqrt{3}\sec\theta$ eğrilerinin Kartezyen denklemlerini bulun.

b. Eğrileri birlikte çizin ve kesişim noktalarını hem Kartezyen hem de kutupsal koordinatlarda belirtin.

60. Alıştırma 59'u $r = 8\cos\theta$ ve $r = 2\sec\theta$ için tekrarlayın.

61. Odağı (0, 0) ve doğrultmanı $r\cos\theta = 4$ olan parabolün kutupsal denklemini bulun.

62. Odağı (0, 0) ve doğrultmanı $r\cos(\theta - \pi/2) = 2$ olan parabolün kutupsal denklemini bulun.

63. a. Uzay mühendislerinin dışmerkezlik formülü Eliptik bir yörüngenin dışmerkezliği için uzay mühendisleri

$$e = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}},$$

formülünü kullanırlar. Burada r uzay aracından izlediği elipsin çekici odağına olan mesafedir. Bu formül neden işe yarar?

b. İple elips çizmek Bir çizim masasına iğnelenebilecek şekilde iki ucu düğümlü bir ipiniz var. İpin uzunluğu bir düğümün merkezinden diğerinin merkezine olmak üzere 10 inçtir. Şekil 10.5'teki (Bölüm 10.1) yöntemi kullanarak dışmerkezliği 0.2 olan bir elips çizmek için iğneler birbirinden ne kadar uzakta olmalıdır? Ortaya çıkan elips Merkür'ün yörüngesine benzer.

64. Halley kuyruklu yıldızı (Bölüm 10.2, Örnek 1'e bakın.)

a. Halley kuyruklu yıldızının yörüngesinin denklemini, ölçeklemesi astronomik birimlerle yapılan, güneşin orijinde ve diğer odağın negatif x-ekseninde bulunduğu bir koordinat sisteminde bulun.

b. Kuyruklu yıldız güneşe en fazla kaç astronomik birim ve kaç kilometre yaklaşır?

c. Kuyruklu yıldız güneşten en fazla kaç astronomik birim ve kaç kilometre uzaklaşır?

65–68 alıştırmalarında, verilen eğrinin kutupsal denklemini bulun. Her durumda, tipik eğriyi çizin.

65. $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ **66.** $y^2 = 4ax + 4a^2$

67. $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ (α, p sabit)

68. $(x^2 + y^2)^2 + 2ax(x^2 + y^2) - a^2y^2 = 0$

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

69. Farklı k ve e değerlerinde, $-\pi \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere, bir BCS kullanarak

$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta}$$

kutupsal denkleminin grafiğini çizin. Aşağıdaki soruları yanıtlayın.

a. $k = -2$ alın. $e = 3/4$, 1 ve $5/4$ için çizimlere ne olduğunu tanımlayın. $k = 2$ için tekrarlayın.

b. $k = -1$ alın. $e = 7/6, 5/4, 4/3, 3/2, 2, 3, 5$ ve 10 için çizimlere ne olduğunu tanımlayın. $e = 1/2, 1/3, 1/4, 1/10$ ve $1/20$ için tekrarlayın.

c. Şimdi $e > 0$'ı sabit tutun ve k'yi $-1, -2, -3, -4$ ve -5 alırken neler olduğunu tanımlayın. Parabollerin, elipslerin ve hiperbollerin grafiklerine baktığınızdan emin olun.

70. Farklı $a > 0$ ve $0 < e < 1$ değerlerinde, $-\pi \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere, bir BCS kullanarak

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

kutupsal elipsinin grafiğini çizin. Aşağıdaki soruları yanıtlayın.

a. $e = 9/10$ alın. $a = 1, 3/2, 2, 3, 5$ ve 10 için çizimlere ne olduğunu tanımlayın. $e = 1/4$ için tekrarlayın.

b. $a = 2$ alın. $e = 9/10, 8/10, 7/10, \ldots, 1/10, 1/20$ ve $1/50$ için çizimlere ne olduğunu tanımlayın.

Bölüm 10 Tekrar Soruları

1. Bir parabol nedir? Tepe noktaları orijinde bulunan ve odakları koordinat eksenlerinde olan parabollerin Kartezyen denklemleri nedir? Böyle bir parabolün denkleminden, odağını ve doğrultmanını nasıl bulursunuz?

2. Bir elips nedir? Merkezleri orijinde ve odakları koordinat eksenlerinden birinde olan elipslerin Kartezyen denklemleri nedir? Böyle bir elipsin denkleminden, odaklarını, tepe noktalarını ve doğrultmanlarını nasıl bulursunuz?

3. Bir hiperbol nedir? Merkezleri orijinde ve odakları koordinat eksenlerinden birinde olan hiperbollerin Kartezyen denklemleri nedir? Böyle bir hiperbolün denkleminden, odaklarını, tepe noktalarını ve doğrultmanlarını nasıl bulursunuz?

4. Bir konik kesitin dışmerkezliği nedir? Konik kesitleri dışmerkezlikleriyle nasıl sınıflandırırsınız? Bir elipsin şekliyle dışmerkezliğinin ilişkisi nedir?

5. $PF = e \cdot PD$ denklemini açıklayın.

6. xy-düzleminde kuadratik bir eğri nedir? Dejenere ve dejenere olmayan kuadratik eğrilere örnek verin.

7. Düzlemdeki bir konik kesitin yeni denkleminde xy-terimi bulunmayacak şekilde bir Kartezyen koordinat sistemini nasıl bulursunuz? Örnek verin.

8. Değişkenleri x ve y olan bir kuadratik denklemin grafiğinin nasıl olacağını nereden anlarsınız? Örnek verin.

9. Konik kesitler için bazı tipik parametrizasyonlar nelerdir?

10. Bir sikloid nedir? Sikloidlerin tipik parametrik denklemleri nelerdir? Sikloidlerin önemi hangi fiziksel özelliklerinden gelir?

11. Kutupsal koordinatlar nedir? Hangi denklemler kutupsal koordinatları Kartezyen koordinatlara çevirir? Neden bir koordinat sisteminden diğerine geçmek isteyesiniz?

12. Kutupsal koordinatların tek olmamasının grafik çizmedeki sonucu nedir? Örnek verin.

13. Kutupsal koordinatlarda denklemleri nasıl çizersiniz? Anlattıklarınıza simetriyi, eğimi, orijindeki davranışı ve Kartezyen grafiklerin kullanılışını da ekleyin. Örnek verin.

14. Kutupsal koordinat düzleminde, bir $0 \leq r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\alpha)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ bölgesinin alanını nasıl bulursunuz? Örnek verin.

15. Kutupsal koordinat düzleminde bir $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ eğrisinin uzunluğunu hangi koşullar altında bulursunuz? Tipik bir hesaplamaya örnek verin.

16. Bir $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ eğrisinin x- ve y-eksenleri etrafında döndürülmesiyle üretilen bir yüzeyin alanını hangi koşullar altında bulursunuz? Tipik bir hesaplamaya örnek verin.

17. Doğruların ve konik kesitlerin kutupsal koordinatlardaki standart denklemleri nelerdir? Örnekler verin.

Bölüm 10 Problemler

Konik Kesitlerin Grafiklerini Çizmek

1–4 problemlerindeki parabolleri çizin. Her çizime odak ve doğrultmanı da ekleyin.

1. $x^2 = -4y$ **2.** $x^2 = 2y$

3. $y^2 = 3x$ **4.** $y^2 = -(8/3)x$

5–8 problemlerindeki elipslerin ve hiperbollerin dışmerkezliklerini bulun. Her konik kesiti çizin. Çiziminize odakları, tepe noktalarını ve asimptotları (uygun olanları) ekleyin.

5. $16x^2 + 7y^2 = 112$ **6.** $x^2 + 2y^2 = 4$

7. $3x^2 - y^2 = 3$ **8.** $5y^2 - 4x^2 = 20$

Konik Kesitleri Kaydırmak

9–14 problemleri konik kesit denklemleri verir ve her eğrinin kaç birim aşağı veya yukarı, sağa veya sola kaydırılacağını söyler. Yeni konik kesitin denklemini ve uygun olduğu şekilde, yeni odaklarını, tepe noktalarını, merkezlerini ve asimptotlarını bulun. Eğeri bir parabolse, doğrultmanını da bulun.

9. $x^2 = -12y$, sağa 2, yukarı 3

10. $y^2 = 10x$, sola $1/2$, aşağı 1

11. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, sola 3, aşağı 5

12. $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$, sağa 5, yukarı 12

13. $\dfrac{y^2}{8} - \dfrac{x^2}{2} = 1$, sağa 2, yukarı $2\sqrt{2}$

14. $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$, sağa 10, aşağı 3

Konik Kesitleri Belirlemek

15–22 problemlerindeki konik kesitleri belirleyin ve (uygun olan) odaklarını, tepe noktalarını, merkezlerini ve asimptotlarını bulun. Eğri bir parabolse, doğrultmanını da bulun.

15. $x^2 - 4x - 4y^2 = 0$

16. $4x^2 - y^2 + 4y = 8$

17. $y^2 - 2y + 16x = -49$

18. $x^2 - 2x + 8y = -17$

19. $9x^2 + 16y^2 + 54x - 64y = -1$

20. $25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y = 44$

21. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

22. $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 1$

Diskriminant Kullanmak

23–28 problemlerindeki denklemler hangi konik kesitleri veya dejenere durumları temsil ederler? Yanıtlarınızı açıklayın.

23. $x^2 + xy + y^2 + x + y + 1 = 0$

24. $x^2 + 4xy + 4y^2 + x + y + 1 = 0$

25. $x^2 + 3xy + 2y^2 + x + y + 1 = 0$

26. $x^2 + 2xy - 2y^2 + x + y + 1 = 0$

27. $x^2 - 2xy + y^2 = 0$

28. $x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$

Konik Kesitleri Döndürmek

29–32 problemlerindeki konik kesitleri belirleyin. Sonra koordinat eksenlerini döndürerek, konik kesitin içinde çapraz terim bulunmayan yeni bir denklemini bulun (Yeni denklemler kullanılan dönmelerin büyüklük ve yönlerine göre değişecektir).

29. $2x^2 + xy + 2y^2 - 15 = 0$

30. $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 19$

31. $x^2 + 2\sqrt{3}\,xy - y^2 + 4 = 0$

32. $x^2 - 3xy + y^2 = 5$

Düzlemde Parametrik denklemleri Belirlemek

33–36 problemleri xy-düzleminde hareket eden bir parçacığın parametrik denklemlerini ve parametre aralığını vermektedir. Bir Kartezyen denklem bularak parçacığın izlediği yolu belirleyin. Kartezyen denklemin grafiğini çizin. Hareketin yönünü ve parçacığın gezdiği kısmı belirtin.

33. $x = (1/2)\tan t,\quad y = (1/2)\sec t;\quad -\pi/2 < t < \pi/2$

34. $x = -2\cos t,\quad y = 2\sin t;\quad 0 \le t \le \pi$

35. $x = -\cos t,\quad y = \cos^2 t;\quad 0 \le t \le \pi$

36. $x = 4\cos t,\quad y = 9\sin t;\quad 0 \le t \le 2\pi$

Kutupsal Düzlemde Grafikler

37 ve 38 problemlerinde kutupsal koordinat eşitsizlikleri ile tanımlanan bölgeleri çizin.

37. $0 \le r \le 6\cos\theta$

38. $-4\sin\theta \le r \le 0$

39–46 problemlerindeki her grafiği (a)–(l) denklemlerinden uygun olanıyla eşleştirin. Grafiklerden fazla denklem vardır, dolayısıyla bazı denklemler eşleşmeyecektir.

a. $r = \cos 2\theta$

b. $r\cos\theta = 1$

c. $r = \dfrac{6}{1 - 2\cos\theta}$

d. $r = \sin 2\theta$

e. $r = \theta$

f. $r^2 = \cos 2\theta$

g. $r = 1 + \cos\theta$

h. $r = 1 - \sin\theta$

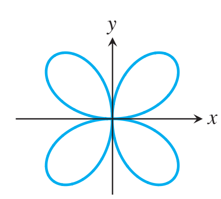
i. $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$

j. $r^2 = \sin 2\theta$

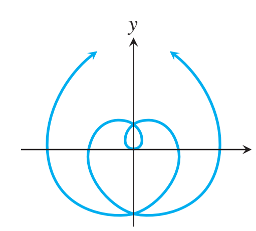
k. $r = -\sin\theta$

l. $r = 2\cos\theta + 1$

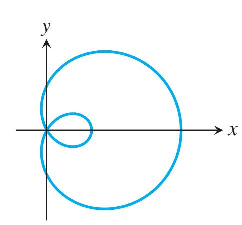
39. Dört yapraklı gül



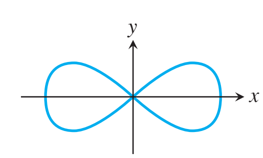
40. Spiral



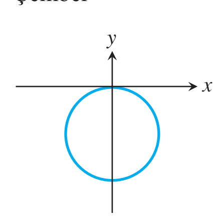
41. Limaçon



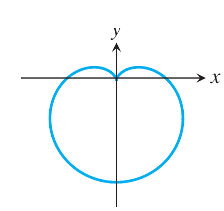
42. Lemniskat



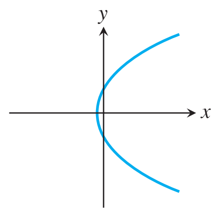
43. Çember



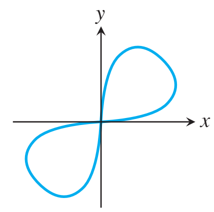
44. Kardioid



45. Parabol



46. Lemniskat



Kutupsal Düzlemde Grafiklerin Kesişimi

47–54 problemlerinde kutupsal koordinat denklemleriyle verilen eğrilerin kesişim noktalarını bulun.

47. $r = \sin\theta, \quad r = 1 + \sin\theta$

48. $r = \cos\theta, \quad r = 1 - \cos\theta$

49. $r = 1 + \cos\theta, \quad r = 1 - \cos\theta$

50. $r = 1 + \sin\theta, \quad r = 1 - \sin\theta$

51. $r = 1 + \sin\theta, \quad r = -1 + \sin\theta$

52. $r = 1 + \cos\theta, \quad r = -1 + \cos\theta$

53. $r = \sec\theta, \quad r = 2\sin\theta$

54. $r = -2\csc\theta, \quad r = -4\cos\theta$

Kutupsaldan Kartezyen Denklemlere

55–60 problemlerindeki doğruları çizin. Ayrıca, her doğru için bir Kartezyen denklem bulun.

55. $r\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$

56. $r\cos\left(\theta - \dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

57. $r = 2\sec\theta$

58. $r = -\sqrt{2}\sec\theta$

59. $r = -(3/2)\csc\theta$

60. $r = \left(3\sqrt{3}\right)\csc\theta$

61–64 problemlerindeki çemberlerin Kartezyen denklemlerini bulun. Her çemberi koordinat düzleminde çizin ve grafiğe hem Kartezyen hem de Kutupsal denklemlerini yazın.

61. $r = -4\sin\theta$

62. $r = 3\sqrt{3}\sin\theta$

63. $r = 2\sqrt{2}\cos\theta$

64. $r = -6\cos\theta$

Kartezyenden Kutupsal Denklemlere

65–68 problemlerindeki çemberlerin kutupsal denklemlerini bulun. Her çemberi koordinat düzleminde çizin ve grafiğe hem Kartezyen hem de Kutupsal denklemlerini yazın.

65. $x^2 + y^2 + 5y = 0$

66. $x^2 + y^2 - 2y = 0$

67. $x^2 + y^2 - 3x = 0$

68. $x^2 + y^2 + 4x = 0$

Kutupsal Koordinatlarda Konik Kesitler

69–72 problemlerinde kutupsal koordinat denklemleri verilen konik kesitleri çizin. Tepe noktalarının ve elipslerde merkezlerin kutupsal koordinatlarını verin.

69. $r = \dfrac{2}{1 + \cos\theta}$

70. $r = \dfrac{8}{2 + \cos\theta}$

71. $r = \dfrac{6}{1 - 2\cos\theta}$

72. $r = \dfrac{12}{3 + \sin\theta}$

73–76 Problemleri bir odakları kutupsal koordinat düzleminin orijininde olan konik kesitlerin bu odak için doğrultmanlarıyla birlikte dışmerkezliklerini vermektedir. Her konik kesitin kutupsal denklemini bulun.

73. $e = 2, \quad r\cos\theta = 2$

74. $e = 1, \quad r\cos\theta = -4$

75. $e = 1/2, \quad r\sin\theta = 2$

76. $e = 1/3, \quad r\sin\theta = -6$

Kutupsal Düzlemde Alan, Uzunluk ve Yüzey Alanı

77–80 problemlerinde, kutupsal koordinat düzleminde tanımlanan bölgelerin alanlarını bulun.

77. $r = 2 - \cos\theta$ limaçonu ile çevrili bölge.

78. Üç yapraklı $r = \sin 3\theta$ gülünün bir yaprağıyla çevrili bölge.

79. "Sekiz şekli" $r = 1 + \cos 2\theta$'nın içinde ve $r = 1$ çemberinin dışındaki bölge.

80. $r = 2(1 + \sin\theta)$ kardioidinin içinde ve $r = 2\sin\theta$ çemberinin dışındaki bölge.

81–84 problemlerinde kutupsal koordinat denklemleriyle verilen eğrilerin uzunluklarını bulun.

81. $r = -1 + \cos\theta$

82. $r = 2\sin\theta + 2\cos\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi/2$

83. $r = 8\sin^3(\theta/3), \quad 0 \le \theta \le \pi/4$

84. $r = \sqrt{1 + \cos 2\theta}, \quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$

85 ve 86 alıştırmalarındaki kutupsal koordinat eğrilerinin belirtilen eksenler etrafında döndürülmeleriyle üretilen yüzeylerin alanlarını bulun.

85. $r = \sqrt{\cos 2\theta}, \quad 0 \le \theta \le \pi/4,$ x-ekseni

86. $r^2 = \sin 2\theta,$ y-ekseni

Teori ve Örnekler

87. $9x^2 + 4y^2 = 36$ elipsinin (a) x-ekseni, (b) y-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen cismin hacmini bulun.

88. Birinci bölgede x-ekseni, $x = 4$ doğrusu ve $9x^2 - 4y^2 = 36$ hiperbolüyle çevrili "üçgensel" bölge x-ekseni etrafında döndürülerek bir cisim üretiliyor. Cismin hacmini bulun.

89. Bir teneke şerit bir elipsin çevresine sarılıyor. Bu şeride bir taban lehimlenerek bir dalga tankı yapılıyor. Tanka bir veya iki inç su doldurup tam elipsin odaklarından birine bir bilye atılıyor. Dalgalar suda dışarı doğru yayılır, tankın kenarındaki şeritten yansır ve birkaç saniye sonra ikinci odaktan bir damla su fışkırır. Neden?

90. **LORAN** Kuzey Kaliforniya sahilinde birbirinden birkaç yüz mil uzakta bulunan A ve B kulelerinden aynı anda bir radyo sinyali gönderiliyor. Denizdeki bir gemi A'dan gelen sinyali B'den gelen sinyalden 1400 mikrosaniye önce alıyor. Sinyalin 980 ft/mikrosaniye hızla ilerlediği varsayılırsa, iki kuleye göre geminin yeri hakkında ne söylenebilir?

91. Düz bir düzlemde, aynı anda bir tüfek sesi ve merminin hedefe vurma sesini duyuyorsunuz. Tüfeğe ve hedefe göre konumunuz hakkında ne söylenebilir?

92. Arşimet spiralleri a sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere, $r = a\theta$ şeklindeki bir denklemin grafiğine **Arşimet spirali** denir. Böyle bir spiralin birbirini izleyen dönüşleri arasındaki genişliğin bir özelliği var mıdır?

93. a. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, denklemlerinin

$$r = \frac{k}{1 + e\cos\theta}$$

kutupsal denklemini

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 + 2kex - k^2 = 0$$

Kartezyen denklemine çevirdiğini gösterin.

b. Bölüm 10.3'teki kriterleri uygulayarak

$e = 0$	$\Rightarrow$	çember
$0 < e < 1$	$\Rightarrow$	elips
$e = 1$	$\Rightarrow$	parabol
$e > 1$	$\Rightarrow$	hiperbol

olduğunu gösterin.

94. Uydu yörüngesi Bir uydu dünyanın Kuzey ve Güney Kutuplarından geçen bir yörünge üzerindedir. Güney Kutbu'nun üzerindeyken, yörüngesinin en yüksek noktasında, dünya yüzeyinden 1000 mil yukarıdadır. Kuzey Kutbu'nun üzerindeyken ise, yörüngesinin en düşük noktasında, dünya yüzeyinden 300 mil yukarıdadır.

a. Yörüngenin bir odağı dünyanın merkezi olan bir elips olduğunu varsayarak, dışmerkezliğini bulun (Dünyanın çapını 8000 mil alın).

b. Dünyanın kuzey-güney eksenini x-ekseni olarak kullanıp, yörüngenin kutupsal denklemini bulun.

Bölüm 10 Ek ve İleri Alıştırmalar

Konik Kesitleri Bulmak

1. Odağı (4, 0) ve doğrultmanı $x = 3$ olan parabolün denklemini bulun. Parabolü, tepe noktası, odağı ve doğrultmanı ile birlikte çizin.

2. Aşağıdaki parabolün tepe noktasını, odağını ve doğrultmanını bulun.

$$x^2 = 6x - 12y + 9 = 0$$

3. $P(x, y)$ noktasından $x^2 = 4y$ parabolüne olan uzaklık P'den odağa olan uzaklığın iki katıysa, P'nin izlediği yolu bulun. Eğriyi tanımlayın.

4. $a + b$ uzunluğunda bir doğru parçası x-ekseninden y-eksenine gitmektedir. Doğru parçasının üzerindeki P noktası bir uçtan a birim, diğerinden de b birim uzaktadır. Doğru parçasının uçları eksenler boyunca kayarken P'nin bir elips çizdiğini gösterin.

5. 0.5 dışmerkezlikli bir elipsin tepe noktaları $(0, \pm 2)$'dedir. Odaklar nerededir?

6. Doğrultmanı $x = 2$ doğrusu ve buna karşılık gelen odağı (4, 0) noktası olan $2/3$ dışmerkezlikli elipsin denklemini bulun.

7. Bir hiperbolün odaklarından biri (0, –7) noktasındadır ve buna karşılık gelen doğrultman $y = -1$ doğrusudur. Dışmerkezlik **(a)** 2, **(b)** 5 ise, hiperbolün denklemini bulun.

8. Odakları (0, 2) ile (0, –2) olan ve (12, 7) noktasından geçen hiperbolün denklemini bulun.

9. a.

$$b^2xx_1 + b^2yy_1 - a^2b^2 = 0$$

doğrusunun $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ elipsine, elipsin üstündeki (x_1, y_1) noktasında teğet olduğunu gösterin.

b.

$$b^2xx_1 + b^2yy_1 - a^2b^2 = 0$$

doğrusunun hiperbolüne, hiperbol $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ üstündeki (x_1, y_1) noktasında teğet olduğunu gösterin.

10.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

konik kesitinin bir (x_1, y_1) noktasındaki teğetinin,

$$Axx_1 + B\left(\frac{x_1y + xy_1}{2}\right) + Cyy_1 + D\left(\frac{x + x_1}{2}\right) + E\left(\frac{y + y_1}{2}\right) + F = 0$$

şeklinde yazılabilen bir denklemi olduğunu gösterin.

Denklemler ve Eşitsizlikler

xy-düzlemindeki hangi noktalar 11–18 alıştırmalarındaki denklem ve eşitsizlikleri sağlarlar? Her alıştırma için bir şekil çizin.

11. $(x^2 - y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + 4y^2 - 4) = 0$

12. $(x + y)(x^2 + y^2 - 1) = 0$

13. $(x^2/9) + (y^2/16) \le 1$

14. $(x^2/9) - (y^2/16) \le 1$

15. $(9x^2 + 4y^2 - 36)(4x^2 + 9y^2 - 16) \le 0$

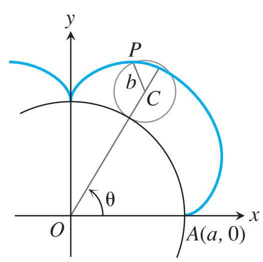
16. $(9x^2 + 4y^2 - 36)(4x^2 + 9y^2 - 16) > 0$

17. $x^4 - (y^2 - 9)^2 = 0$

18. $x^2 + xy + y^2 < 3$

Parametrik Denklemler ve Sikloidler

19. Episikloidler Bir çember ikinci bir sabit çemberin dışında yuvarlanırsa, yuvarlanan çemberin üzerindeki bir P noktası aşağıda gösterildiği gibi bir *episikloid* tanımlar. Sabit çemberin merkezi orijin O'da bulunsun ve yarıçapı a olsun.



Yuvarlanan çemberin yarıçapı b ve dolanan nokta P'nin başlangıç noktası $A(a, 0)$ olsun. Pozitif x-ekseniyle çemberlerin merkezlerinden geçen doğru arasındaki θ açısını parametre olarak kullanıp, episikloidin parametrik denklemini bulun.

20. a. x-ekseni ve

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t); \quad 0 \le t \le 2\pi$$

sikloid yayının sınırladığı bölgenin kütle merkezini bulun.

b. Aşağıdaki eğrinin koordinat eksenleri etrafındaki birinci momentlerini bulun:

$$x = (2/3)t^{3/2}, \quad y = 2\sqrt{t}; \quad 0 \le t \le \sqrt{3}$$

Kutupsal Koordinatlar

21. a. Aşağıdaki eğrinin kutupsal koordinatlardaki denklemini bulun:

$$x = e^{2t}\cos t, \quad y = e^{2t}\sin t; \quad -\infty < t < \infty.$$

b. Eğrinin $t = 0$'dan $t = 2\pi$'ye kadar uzunluğunu bulun.

22. $r = 2\sin^3(\theta/3)$, $0 \le \theta \le 3\pi$, eğrisinin kutupsal koordinat düzlemindeki uzunluğunu bulun.

23. $r = 1 + \cos\theta$ kardioidinin birinci bölgedeki kısmının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin alanını bulun. (*İpucu*: $1 + \cos\theta = 2\cos^2(\theta/2)$ ve $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$ bağıntılarını kullanın.)

24. $r = 2a\cos^2(\theta/2)$ ve $r = 2a\sin^2(\theta/2)$, $a > 0$ eğrileriyle çevrelenen bölgeleri kutupsal koordinat düzleminde çizin ve düzlemin paylaştıkları kısmının alanını bulun.

25-28 alıştırmaları bir odakları kutupsal koordinat düzleminin orijininde olan konik kesitlerin dışmerkezliklerini, bu odağa karşılık gelen doğrultmanla birlikte vermektedir. Her konik kesit için bir kutupsal denklem bulun.

25. $e = 2, \quad r\cos\theta = 2$

26. $e = 1, \quad r\cos\theta = -4$

27. $e = 1/2, \quad r\sin\theta = 2$

28. $e = 1/3, \quad r\sin\theta = -6$

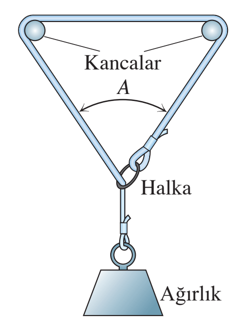
Teori ve Örnekler

29. Bir ucunda bir halka bulunan bir ip yatay bir çizgideki iki kanca etrafına sarılıyor. Halkadan geçirilen serbest uca ipin gergin durması için bir ağırlık asılıyor. İp kancaların üzerinden ve halkanın içinden serbestçe kayıyorsa, ağırlık gidebildiği kadar aşağı gidecektir. İpin uzunluğunun kancalar arasındaki uzaklığın en az dört katı olduğunu ve ipin şeklinin, ipin dikey parçasının doğrusuna göre simetrik olduğunu varsayın.

a. Aşağıdaki şekilde, döngünün altında oluşan A açısını bulun.

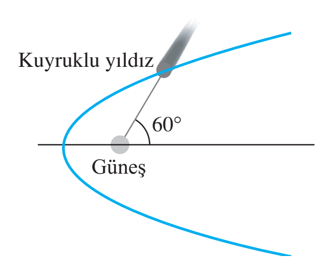
b. Halkanın ipin üzerindeki her sabit konumu için, halkanın uzayda bulunabileceği olası yerlerin, odakları kancalarda olan bir elips üzerinde bulunduğunu gösterin.

c. Başlangıçtaki simetri varsayımını, (b)'deki sonucu ipin ve ağırlığın en düşük potansiyel enerji durumunda dengeye gelecekleri varsayımıyla birleştirerek doğrulayın.



30. İki radar istasyonu bir doğu-batı çizgisi üzerinde birbirlerinden 20 km uzaktadırlar. Alçaktan uçan ve batıdan doğuya giden bir uçağın hızının v_0 km/sa olduğu bilinmektedir. $t = 0$'da, $(-10, 0)$'daki istasyondan bir sinyal gönderiliyor, uçaktan yansıyor ve $30/c$ saniye sonra $(10, 0)$ tarafından alınıyor (c sinyalin hızıdır). $t = 10/v_0$'da, $(-10, 0)$'daki istasyondan başka bir sinyal gönderiliyor, uçaktan yansıyor ve yeniden diğer istasyon tarafından $30/c$ saniye sonra alınıyor. v_0'ın c'den çok küçük olduğu varsayımı altında, uçağın ikinci sinyali yansıttığı zamanki konumun bulun.

31. Bir kuyruklu yıldız, güneş odakta olmak üzere, parabolik bir yörüngede ilerlemektedir. Kuyruklu yıldız güneşten 4×10^7 mil uzaktayken, kuyruklu yıldızdan güneşe giden doğru, aşağıda gösterildiği gibi, yörüngenin ekseniyle 60°'lik bit açı yapmaktadır. Kuyruklu yıldız güneşe ne kadar yaklaşacaktır?



32. $x = 2t, y = t^2, -\infty < t < \infty$, parabolünün $(0, 3)$ noktasına en yakın noktalarını bulun.

33. $x^2 + xy + y^2 = 1$ elipsinin dışmerkezliğini $1/100$ hassaslıkla bulun.

34. $xy = 1$ hiperbolünün dışmerkezliğini bulun.

35. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ eğrisi bir konik denklemin parçası mıdır? Öyleyse, ne tür bir konik kesit? Değilse, neden değildir?

36. $2xy - \sqrt{2}\,y + 2 = 0$ eğrisinin bir hiperbol olduğunu gösterin. Hiperbolün merkezini, tepe noktalarını, odaklarını, eksenlerini ve asimptotlarını bulun.

37. Aşağıdaki konik kesitlerin kutupsal denklemlerini bulun.

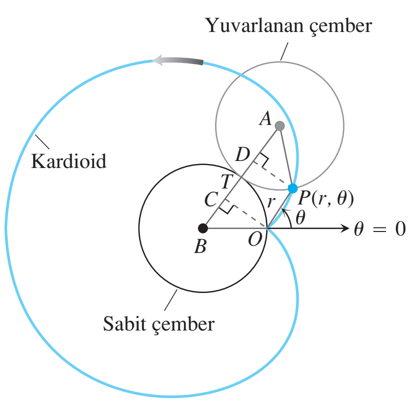
a. Odağı orijinde ve tepe noktası $(a, \pi/4)$'te olan parabol;

b. Odakları orijin ile $(2, 0)$'da ve bir tepe noktası $(4, 0)$' da olan elips.

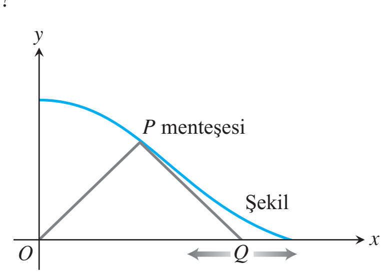
c. Bir odağı orijinde, merkezi $(2, \pi/2)$ ve bir tepe noktası $(1, \pi/2)$'de olan hiperbol.

38. Orijinden geçen herhangi bir doğru $r = 3/(2 + \cos\theta)$ elipsini P_1 ve P_2 noktalarında keser. P_1 ile orijin arasındaki uzaklık d_1, P_2 ile orijin arasındaki uzaklık d_2 olsun. $(1/d_1) + (1/d_2)$'yi hesaplayın.

39. Çemberlerle bir kardioid üretmek Kardioidler özel episikloidlerdir (Alıştırma 18). a yarıçaplı bir çemberi, şekildeki gibi, kutupsal düzlemde başka bir a yarıçaplı çember üzerinde döndürürseniz, başlangıçtaki değme noktası P bir kardioid çizecektir (*İpucu*: OBC ve PAD açılarının ikisinin de ölçüsünün θ olduğunu göstererek işe başlayın.



40. Katlanır bir dolap kapısı Katlanır bir dolap kapısı, P noktasından menteşelenmiş iki tane 1 ayak genişliğinde panelden oluşur. Bir panelin dış alt köşesi O'da bir milde durmaktadır (aşağıdaki şekle bakın). Diğer panelin Q ile belirtilen dış alt köşesi şekilde x-ekseninin bir parçası olarak gösterilen düzgün bir yol boyunca kayar. Q ileri geri hareket ederken, kapının altının halıya süründüğünü varsayın. Kapı, halının yüzeyinde nasıl bir şekil tarar?

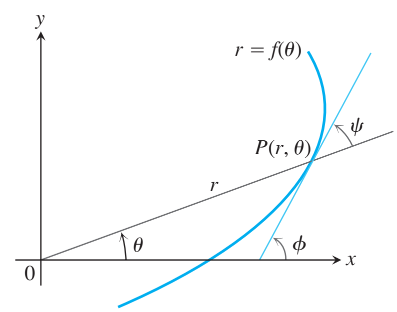


Yarıçap Vektörüyle Bir Kutupsal Koordinat Eğrisinin Teğeti Arasındaki Açı

Kartezyen koordinatlarda, bir eğrinin bir noktadaki yönünü bulmak için, saat yönünün tersine, pozitif x-ekseninden teğete olan ϕ açısını hesaplarız. Kutupsal koordinatlarda, *yarıçap vektöründen* teğete olan ψ açısını hesaplamak daha uygundur (aşağıdaki şekle bakın). Böylece ϕ açısı, şekildeki üçgene dış açı teoremini uygulayarak elde edilen

$$\phi = \theta + \psi \tag{1}$$

bağıntısından hesaplanabilir.



Eğrinin denkleminin, $f(\theta)$ fonksiyonu θ'nın türevlenebilir bir fonksiyonu olmak üzere $r = f(\theta)$ şeklinde verildiğini varsayın. Bu durumda

$$x = r\cos\theta \quad \text{ve} \quad y = r\sin\theta \tag{2}$$

fonksiyonları

$$\frac{dx}{d\theta} = -r\sin\theta + \cos\theta\,\frac{dr}{d\theta},$$
$$\frac{dy}{d\theta} = r\cos\theta + \sin\theta\,\frac{dr}{d\theta} \tag{3}$$

olmak üzere θ'nın türevlenebilir fonksiyonlarıdır. (1) denklemine göre, $\psi = \phi - \theta$ olduğundan,

$$\tan\psi = \tan(\phi - \theta) = \frac{\tan\phi - \tan\theta}{1 + \tan\phi\tan\theta}$$

olur. Dahası,

$$\tan\phi = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

olur, çünkü $\tan\phi$ eğrinin P'deki eğimidir. Ayrıca

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

olarak tanımlanır, dolayısıyla

$$\tan\psi = \frac{\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta} - \dfrac{y}{x}}{1 + \dfrac{y}{x}\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta}} = \frac{x\dfrac{dy}{d\theta} - y\dfrac{dx}{d\theta}}{x\dfrac{dx}{d\theta} + y\dfrac{dy}{d\theta}} \tag{4}$$

elde edilir.

(4) denklemindeki son ifadenin payı (2) ve (3) denklemlerinden

$$x\frac{dy}{d\theta} - y\frac{dx}{d\theta} = r^2.$$

olarak bulunur. Aynı şekilde, payda

$$x\frac{dx}{d\theta} + y\frac{dy}{d\theta} = r\frac{dr}{d\theta}.$$

şeklinde elde edilir. Bunları (4) denkleminde yerine koyarsak,

$$\tan\psi = \frac{r}{dr/d\theta}. \qquad (5)$$

elde ederiz. Bu, ψ'yi θ'nın bir fonksiyonu olarak bulmakta kullandığımız denklemdir.

41. Bir şekle referans vererek, bir kesişim noktasında iki eğrinin teğerleri arasındaki β açısının

$$\tan\beta = \frac{\tan\psi_2 - \tan\psi_1}{1 + \tan\psi_2\tan\psi_1}. \qquad (6)$$

olduğunu gösterin. İki eğri ne zaman dik açıyla kesişir?

42. $r = \sin^4(\theta/4)$ eğrisi için $\tan\psi$'nin değerini bulun.

43. $r = 2a\sin 3\theta$ eğrisinin yarıçap vektörüyle teğeti arasındaki açıyı $\theta = \pi/6$ iken bulun.

T **44.** **a.** Hiperbolik $r\theta = 1$ spiralini çizin. Spiral orijin etrafında sarılmaya başladığında, ψ'ye ne olmaktadır?

b. (a)'da bulduklarınızı analitik olarak doğrulayın.

45. $r = \sqrt{3}\cos\theta$ ve $r = \sin\theta$ noktasında kesişirler. Bu noktada teğetlerin dikey olduklarını gösterin.

46. $r = a(1 + \cos\theta)$ kardioidini ve $r = 3a\cos\theta$ çemberini bir diyagramda çizin ve birinci bölgede bulunan kesişim noktalarındaki teğetlerinin arasındaki açıyı bulun.

47.

$$r = \frac{1}{1 - \cos\theta} \quad \text{ve} \quad r = \frac{3}{1 + \cos\theta}$$

parabollerinin kesişim noktalarını ve bu noktalardaki teğetlerin arasındaki açıyı bulun.

48. $r = a(1 + \cos\theta)$ kardioidi üzerinde teğetin **(a)** yatay, **(b)** dikey olduğu noktaları bulun.

49. $r = a/(1 + \cos\theta)$ ve $r = b/(1 - \cos\theta)$ parabollerinin her kesişim noktasında birbirlerine dik olduklarnı gösterin ($ab \neq 0$).

50. $r = a(1 - \cos\theta)$ kardioidinin $\theta = \pi/2$ ışınıyla hangi açıyla kesiştiğini bulun.

51. Kesişim noktalarından birinde, $r = 3\sec\theta$ doğrusu ile $r = 4(1 + \cos\theta)$ kardioidinin arasındaki açıyı bulun.

52. $r = a\tan(\theta/2)$ doğrusunun $\theta = \pi/2$'deki teğetinin eğimini bulun.

53. $r = 1/(1 - \cos\theta)$ ve $r = 1/(1 - \sin\theta)$ parabollerinin birinci bölgede kesiştikleri açıyı bulun.

54. $r^2 = 2\csc 2\theta$ denklemi kutupsal koordinatlarda bir eğriyi temsil eder.

a. Eğriyi çizin.

b. Eğrinin, denk bir Kartezyen denklemini bulun.

c. Eğrinin $\theta = \pi/4$ ışınıyla kesiştiği açıyı bulun.

55. Yarıçap vektörüyle $r = f(\theta)$ eğrisinin teğeti arasındaki ψ açısının sabit bir α değeri olduğunu varsayın.

a. Eğri ve $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ ışınlarıyla sınırlanan alanın, (r_1, θ_1) ve (r_2, θ_2) eğrinin bu ışınlar arasındaki yayının uç noktaları olmak üzere, $r_2^2 - r_1^2$'ye orantılı olduğunu gösterin. Orantı sabitini bulun.

b. (a) şıkkındaki yayın uzunluğunun $r_2 - r_1$'e orantılı olduğunu gösterin ve orantı sabitini bulun.

56. P noktası $r^2\sin^2\theta = 2a^2$ hiperbolü üzerinde bir nokta olsun. OP, P'deki teğet ve başlangıç doğrusunun oluşturduğu üçgenin ikizkenar olduğunu gösterin.

Bölüm 10 Teknoloji Uygulama Projeleri

Mathematica /Maple Module
Hareket Eden Bir Nesneyi Radarda İzlemek

Kısım I: Kutupsal koordinatlardan Kartezyen koordinatlara dönüştürün.

Mathematica /Maple Module
Bir Şekil çizici ile Parametrik ve Kutupsal Denklemler

Kısım I: Parametrik denklemlerle tanımlanan hareketi analiz etmek için konumu, hızı ve ivmeyi canlandırın.

Kısım II: Kutupsal bir çizim yapan bir şekil çizici için hareketin denklemlerini bulun ve analiz edin.

EKLER

E.1 Matematik İndüksiyon

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

gibi bir çok formülün her n pozitif tamsayısı için doğru olduğu *matematiksel indüksyon prensibi* denilen bir aksiyom uygulanarak gösterilebilir. Bu aksiyomu kullanan bir ispata *matematiksel indüksiyonla ispat* veya *indüksiyonla ispat* denir.

Bir formülü indüksiyona ispatlamanın adımları aşağıdadır.

1. Formülün $n = 1$ için doğruluğunu kontrol edin.

2. Formül herhangi bir pozitif $n = k$ tamsayısı için doğru ise, bundan sonraki tamsayı, $n = k + 1$, için de doğru olduğun gösterin.

İndüksiyon aksiyomu şunu söyler: bu adımlar tamamlandığında, formül bütün pozitif n tamsayıları için doğrudur. Adım 1'den, formül $n = 1$ için doğrudur. Adım 2' den $n = 2$ ve dolayısıyla Adım 2'den $n = 3$ ve yine Adım 2'den $n = 4$ için, vb. doğrudur. İlk domino taşı düşerse, ve k. domino taşı düşerken her zaman $(k + 1)$. taşa vuruyorsa, bütün domino taşları düşer.

Başka bir bakış açısıyla, her pozitif tamsayı için bir tane olmak üzere, elimizde $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, ifadelerinin bulunduğunu varsayalım. İfadelerin herhangi birinin doğru olduğun varsaymanın sıradaki diğer ifadenin doğru olduğu anlamına geldiğini gösterebildiğimizi varsayalım. Ayrıca S_1'in de doğru olduğunu gösterdiğimizi düşünelim. Bu durumda S_1'den sonraki bütün ifadelerin doğru olduğu sonucunu çıkarabiliriz.

ÖRNEK 1 Her pozitif n sayısı için

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

eşitliğinin doğruluğunu matematiksel indüksiyonla gösterin.

Çözüm İspatı yukarıdaki iki adımı kullanarak yapacağız.

1. Formü $n = 1$ için doğrudur, çünkü

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

bulunur.

2. Formül $n = k$ için doğru ise, $n = k + 1$ için de doğru mudur? Yanıt evettir ve nedeni şudur: Eğer

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

ise, bu durumda,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikler zincirindeki son ifade $n = (k+1)$ için $n(n+1)/2$ ifadesidir.

Matematiksel indüksiyon prensibi artık orijinal formülü her n pozitif tamsayısı için garantiler. ■

Bölüm 5.2, Örnek 4'te ilk n tamsayının toplamını veren formül için başka bir ispat verdik. Ancak, matematiksel indüksiyonla ispat daha geneldir. Matematiksel indüksiyon, ilk n tamsayının karelerinin, küplerinin toplamını bulmak için kullanılabilir (Alıştırmalar 9 ve 10).

İşte başka bir örnek

ÖRNEK 2 Her pozitif n tamsayısı için,

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

olduğunu gösterin.

Çözüm İspatı matematiksel indüksiyonun iki adımını kullanarak gerçekleştiririz.

1. Formül $n = 1$ için doğrudur, çünkü

$$\frac{1}{2^1} = 1 - \frac{1}{2^1}$$

doğrudur.

2.

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$$

ise, bu durumda,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} &= 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1 \cdot 2}{2^k \cdot 2} + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= 1 - \frac{2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, orijinal formül $n = k$ için geçerliyse, $n = (k+1)$ için de geçerli olur.

Bu adımlar doğrulandığı için, matematiksel indüksiyon prensibi formülü her pozitif n tamsayısı için garantiler. ■

Diğer Başlangıç Tamsayıları

$n = 1$ ile başlamak yerine, bazı indüksiyon tartışmaları başka bir tamsayıyla başlar. Böyle bir tartışmanın adımları aşağıdaki gibidir.

1. Formülün $n = n_1$ (ilk uygun tamsayı) için doğru olduğunu kontrol edin.
2. Formül herhangi bir $n = k \geq n_1$ tamsayısı için doğru ise, $n = (k + 1)$ için de doğru olduğunu gösterin.

Bu adımlar tamamlandığında, matematiksel indüksiyon prensibi formülü her $n \geq n_1$ tamsayısı için garantiler.

ÖRNEK 3 n yeterince büyükse, $n! > 3^n$ olduğunu gösterin.

Çözüm Ne kadar büyük, yeterince büyüktür? Deneriz:

n	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040
3^n	3	9	27	81	243	729	2187

Sanki $n \geq 7$ için $n! > 3^n$ gibidir. Emin olmak için matematiksel indüksiyon uygularız. Adım 1'de $n_1 = 7$ alırız ve Adım 2'yi tamamlarız.

Herhangi bir $k \geq 7$ için $k! > 3^k$ olduğunu varsayın. Bu durumda

$$(k+1)! = (k+1)(k!) > (k+1)3^k > 7 \cdot 3^k > 3^{k+1}$$

olur. Böylece, $k \geq 7$ için

$$k! > 3^k \text{ olması } (k+1)! > 3^{k+1} \text{ olmasını}$$

gerektirir. Matematiksel indüksiyon artık her $n \geq 7$ için $n! > 3^n$ olduğunu garantiler. ■

ALIŞTIRMALAR E.1

1. $|a + b| \leq |a| + |b|$ üçgen eşitsizliğinin her pozitif a ve b sayısı için geçerli olduğunu varsayarak, n tane sayı için
$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$
olduğunu gösterin.

2. $r \neq 1$ ise, her pozitif n tamsayısı için
$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$
olduğunu gösterin.

3. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ Çarpım Kuralı ve $\frac{d}{dx}(x) = 1$ olduğunu kullanarak, her pozitif n sayısı için
$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$
olduğunu gösterin.

4. Bir $f(x)$ fonksiyonunun herhangi iki pozitif x_1 ve x_2 sayısı için, $f(x_1x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ özelliğine sahip olduğunu varsayın. Her pozitif n tamsayısı için
$$f(x_1x_2\cdots x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$$
olduğunu gösterin.

5. Her pozitif n tamsayısı için
$$\frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}$$
olduğunu gösterin.

6. Yeterince büyük n'ler için, $n! > n^3$ olduğunu gösterin.

7. Yeterince büyük n'ler için, $2^n > n^2$ olduğunu gösterin.

8. $n \geq -3$ ise, $2^n \geq 1/8$ olduğunu gösterin.

9. **Kareler toplamı** İlk n pozitif tamsayının kareleri toplamının
$$\frac{n\left(n + \frac{1}{2}\right)(n + 1)}{3}$$
olduğunu gösterin.

10. **Küpler toplamı** İlk n pozitif tamsayının küpleri toplamının $(n(n + 1)/2)^2$ olduğunu gösterin.

11. **Sonlu toplam kuralları** Aşağıdaki sonlu toplam kuralları-nın her pozitif n tamsayısı için geçerli olduğunu gösterin.

a. $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

b. $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

c. $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$ (Her hangi bir c sayısı)

d. $\sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot c$ (a_k'nin değeri sabit ve c ise)

12. Her pozitif n tamsayısı ve her x reel sayısı için, $|x^n| = |x|^n$ olduğunu gösterin.

E.2 Limit Teoremlerinin İspatı

Bu ek Bölüm 2.2'deki Teorem 1, Kısım 2–5 ve Teorem 4'ü ispatlamaktadır.

TEOREM 1 Limit Kuralları

L, M, c ve k reel sayılar ve

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to c} g(x) = M$$

ise aşağıdaki kurallar geçerlidir.

1. *Toplam Kuralı:* $\lim_{x\to c}\big(f(x) + g(x)\big) = L + M$
2. *Fark Kuralı:* $\lim_{x\to c}\big(f(x) - g(x)\big) = L - M$
3. *Çarpım Kuralı:* $\lim_{x\to c}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = L\cdot M$
4. *Sabitle Çarpım Kuralı* $\lim_{x\to c}\big(kf(x)\big) = kL$ (herhangi bit k sayısı)
5. *Bölüm Kuralı:* $\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, $M \neq 0$ ise
6. *Kuvvet Kuralı:* r ve s ortak çarpanı bulunmayan tamsayılar ve $s \neq 0$ ise, $L^{r/s}$ bir reel sayı olmak üzere

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)\big)^{r/s} = L^{r/s}$$

dir. (s çift ise $L > 0$ kabul ediyoruz.)

Toplam kuralını Bölüm 2.3'te ispatladık ve Kuvvet Kuralı daha ileri metinlerde ispatlanır. Fark Kuralını, Toplam Kuralında $g(x)$ yerine $-g(x)$ ve M yerine $-M$ yazarak elde ederiz. Sabitle Çarpım Kuralı Çarpım Kuralının $g(x) = k$ olduğu özel durumudur. Böylece geriye Çarpım Kuralı ile Bölüm Kuralı kalır.

Limit Çarpım Kuralının İspatı Herhangi bir $\epsilon > 0$'a karşılık bir $\delta > 0$ sayısının var olduğunu göstereceğiz, öyle ki; x sayısı f ve g'nin tanım aralıklarının kesişimi D de olmak üzere

$$0 < |x - c| < \delta$$

koşulunu sağlayan her x için

$$|f(x)g(x) - LM| < \epsilon$$

sağlansın. Bu durumda ϵ'nun pozitif bir sayı olduğunu varsayın ve $f(x)$ ile $g(x)$'i

$$f(x) = L + (f(x) - L), \qquad g(x) = M + (g(x) - M)$$

şeklinde yazın.

Bu ifadeleri çarpın ve LM çıkarın:

$$\begin{aligned} f(x)\cdot g(x) - LM &= (L + (f(x) - L))(M + (g(x) - M)) - LM \\ &= LM + L(g(x) - M) + M(f(x) - L) \\ &\quad + (f(x) - L)(g(x) - M) - LM \\ &= L(g(x) - M) + M(f(x) - L) + (f(x) - L)(g(x) - M). \quad (1) \end{aligned}$$

$x \to c$ iken f ve g'nin limitleri L ve M olduğundan, x sayısı D de olmak üzere

$$\begin{aligned} 0 < |x - c| < \delta_1 &\quad\Rightarrow\quad |f(x) - L| < \sqrt{\epsilon/3} \\ 0 < |x - c| < \delta_2 &\quad\Rightarrow\quad |g(x) - M| < \sqrt{\epsilon/3} \\ 0 < |x - c| < \delta_3 &\quad\Rightarrow\quad |f(x) - L| < \epsilon/(3(1 + |M|)) \\ 0 < |x - c| < \delta_4 &\quad\Rightarrow\quad |g(x) - M| < \epsilon/(3(1 + |L|)) \end{aligned} \qquad (2)$$

olacak şekilde δ_1, δ_2, δ_3 ve δ_4 pozitif sayıları vardır. δ'yı δ_1'den δ_4'e kadar giden sayıların en küçüğü olarak alırsak, (2) koşullarında sağ taraftaki eşitsizliklerin hepsi $0 < |x - c| < \delta$ için aynı anda geçerli olacaklardır. Dolayısıyla, x sayısı D de olmak üzere, $0 < |x - c| < \delta$ olması

$$\begin{aligned} &|f(x)\cdot g(x) - LM| \qquad \text{(1) Denklemine üçgen eşitsizliği uygulanır.} \\ &\le |L||g(x) - M| + |M||f(x) - L| + |f(x) - L||g(x) - M| \\ &\le (1 + |L|)|g(x) - M| + (1 + |M|)|f(x) - L| + |f(x) - L||g(x) - M| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}\sqrt{\frac{\epsilon}{3}} = \epsilon \qquad \text{(2)'deki değerler} \end{aligned}$$

olduğu anlamına gelir. Bu, Limit Çarpım Kuralının ispatını tamamlar. ■

Limit Bölüm Kuralının İspatı $\lim_{x\to c} (1/g(x)) = 1/M$ olduğunu göstereceğiz. Bu durumda Limit Çarpım kuralından

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right) = \lim_{x\to c} f(x)\cdot\lim_{x\to c}\frac{1}{g(x)} = L\cdot\frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$

olduğu sonucunu çıkarırız.

$\epsilon > 0$ verilmiş olsun. $\lim_{x\to c} (1/g(x)) = 1/M$ olduğunu göstermek için,

$$0 < |x - c| < \delta$$

koşulunu sağlayan her x için

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunduğunu göstermemiz gerekir.
$|M| > 0$ olduğundan,

$$0 < |x - c| < \delta_1$$

koşulunu sağlayan her x için

$$|g(x) - M| < \frac{M}{2} \qquad (3)$$

olacak şekilde pozitif bir δ_1 sayısı vardır. Herhangi A ve B sayıları için, $|A| - |B| \le |A - B|$ ve $|B| - |A| \le |A - B|$ olduğu gösterilebilir ve buradan $||A| - |B|| \le |A - B|$ olduğu anlaşılır. $A = g(x)$ ve $B = M$ alırsak, bu

$$||g(x)| - |M|| \le |g(x) - M|$$

haline gelir.
Bu (3) denkleminin sağ tarafındaki eşitsizlikle birleştirilerek

$$||g(x)| - |M|| < \frac{|M|}{2}$$

$$-\frac{|M|}{2} < |g(x)| - |M| < \frac{|M|}{2}$$

$$\frac{|M|}{2} < |g(x)| < \frac{3|M|}{2}$$

$$|M| < 2|g(x)| < 3|M|$$

$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|} < \frac{3}{|g(x)|} \qquad (4)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $0 < |x - c| < \delta_1$ olması

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M - g(x)}{Mg(x)}\right| \le \frac{1}{|M|}\cdot\frac{1}{|g(x)|}\cdot|M - g(x)|$$

$$< \frac{1}{|M|}\cdot\frac{2}{|M|}\cdot|M - g(x)| \qquad \text{(4) eşitsizliği} \qquad (5)$$

olmasını gerektirir. $(1/2)|M|^2\epsilon > 0$ olduğundan,

$$0 < |x - c| < \delta_2$$

koşulunu sağlayan her x için

$$|M - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}|M|^2 \qquad (6)$$

olacak şekilde bir $\delta_2 > 0$ sayısı vardır. δ'yı δ_1 ve δ_2'nin küçük olanı olarak seçersek, (5) ve (6) denklemlerindeki sonuçların ikisi de $0 < |x - c| < \delta$ koşulunu sağlayan her x için gerçeklenir. Bu sonuçları bir araya getirmek

$$0 < |x - c| < \delta$$

koşulunu sağlayan her x için

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterir. Bu da Limit Bölüm Kuralının ispatını tamamlar. ■

TEOREM 4 Sandöviç Teoremi
c'yi içeren bir açık aralıktaki (muhtemelen $x = c$ dışındaki) her x için $g(x) \le f(x) \le h(x)$ olduğunu varsayın. Ayrıca, $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$ olduğunu da varsayın. Bu durumda, $\lim_{x\to c} f(x) = L$ olur.

Sağdan limitler için ispat $\lim_{x\to c^+} g(x) = \lim_{x\to c^+} h(x) = L$ olduğunu varsayın. Bu durumda her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık, $c < x < c + \delta$ aralığı I içinde olacak şekilde ve bu eşitsizliği sağlayan her x için

$$L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \qquad \text{ve} \qquad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu eşitsizlikler $g(x) \le f(x) \le h(x)$ ile birleştiğinde,

$$L - \epsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \epsilon,$$
$$L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon,$$
$$-\epsilon < f(x) - L < \epsilon.$$

elde edilir. Dolayısıyla, $c < x < c + \delta$ eşitsizliği $|f(x) - L| < \epsilon$ olmasını gerektirir. ■

Soldan limitler için ispat $\lim_{x\to c^-} g(x) = \lim_{x\to c^-} h(x) = L$ olduğunu varsayın. Bu durumda her $\epsilon > 0$ değerine karşılık, $c - \delta < x < c$ aralığı I içinde olacak şekilde ve bu eşitsizliği sağlayan her x için

$$L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \qquad \text{ve} \qquad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$$

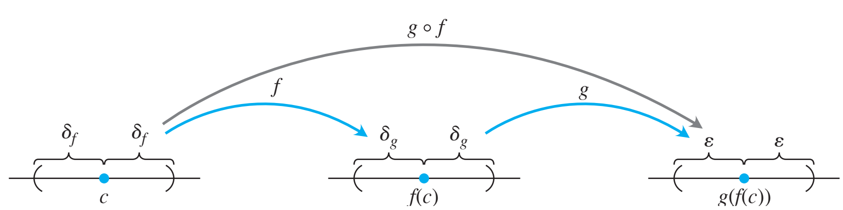
olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Daha önce olduğu gibi, $c - d < x < c$ eşitsizliği $|f(x) - L| < \epsilon$ olmasını gerektirir. ■

İki taraflı limitler için ispat $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$ ise, $x \to c^+$ ve $x \to c^-$ iken, hem $g(x)$ hem de $h(x)$ L'ye yaklaşırlar; dolayısıyla $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ ve $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ olur. Yani, $\lim_{x\to c} f(x)$ vardır ve L'ye eşittir. ■

ALIŞTIRMALAR E.2

1. $x \to c$ iken, $f_1(x)$, $f_2(x)$ ve $f_3(x)$ fonksiyonlarının limitlerinin sırasıyla L_1, L_2 ve L_3 olduğunu varsayın. Toplamlarının limitinin $L_1 + L_2 + L_3$ olduğunu gösterin. Matematiksel indüksiyon (Ek 1) kullanarak bu sonucu sonlu sayıda fonksiyonun toplamına genelleştirin.
2. Matematiksel indüksiyon ve Teorem 1'deki Çarpım Kuralını kullanarak, $x \to c$ iken, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ fonksiyonlarının limitlerinin sırasıyla $L_1, L_2, \ldots, L_n$ ise,
$$\lim_{x\to c} f_1(x) f_2(x) \cdot \cdots \cdot f_n(x) = L_1 \cdot L_2 \cdot \cdots \cdot L_n$$
olduğunu gösterin.
3. $\lim_{x\to c} x = c$ olduğunu ve Alıştırma 2'nin sonucunu kullanarak, herhangi bir $n > 1$ tamsayısı için $\lim_{x\to c} x^n = c^n$ olduğunu gösterin.
4. **Polinomların limiti** Herhangi bir k sayısı için $\lim_{x\to c}(k) = k$ olduğunu ve Alıştırma 1 ve 3'ün sonuçlarını kullanarak, herhangi bir
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
polinomu için, $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ olduğunu gösterin.
5. **Rasyonel fonksiyonların limitleri** Teorem 1'i ve Alıştırma 4'ün sonucunu kullanarak, $f(x)$ ve $g(x)$ polinomlar ise ve $g(c) \neq 0$ ise,
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}$$
olduğunu gösterin.
6. **Sürekli fonksiyonların bileşkeleri** Şekil E.1, iki sürekli fonksiyonun bileşkesinin sürekli olduğunun ispatı için bir diyagram göstermektedir. Diyagramdan ispatı oluşturun. İspatlanacak ifade şudur: f, $x = c$'de sürekliyse ve g $f(c)$'de sürekliyse, $g \circ f$ de c'de süreklidir.

   c'nin f'nin tanım aralığının bir iç noktası ve $f(c)$'nin de g'nin tanım raalığının bir iç noktası olduğunu varsayın. Bu, hesaplanacak limitleri iki taraflı yapar. (Tek taraflı limitleri içeren durumlar için de yapılacaklar aynıdır.)



ŞEKİL E.1 İki sürekli fonksiyonun bileşkesinin sürekli olduğunun ispatı için diyagram

E.3 Sık Karşılaşılan Limitler

Bu ek Bölüm 11.1, Teorem 5'teki (4)-(6) limitlerini gerçeklemektedir.

Limit 4: If $|x| < 1$, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ Her $\epsilon > 0$'a, N'den büyük her n sayısı için $|x^n| < \epsilon$ olacak kadar büyük bir N tamsayısı karşılık geldiğini göstermemiz gerekir.

$|x| < 1$ iken $\epsilon^{1/n} \to 1$ olduğundan, $\epsilon^{1/N} \to |x|$ olmasını sağlayacak, başka bir deyişle,

$$|x^N| = |x|^N < \epsilon \tag{1}$$

olmasını sağlayacak bir N tamsayısı vardır. Aradığımız tamsayı budur, çünkü, $|x| < 1$ ise,

$$\text{her } n > N \text{ için } |x^n| < |x^N| \tag{2}$$

olur. (1) ve (2) denklemlerini birleştirmek, her $n > N$ için $|x^n| < \epsilon$ verir ve bu da ispatı tamamlar. ■

Limit 5: Herhangi bir x için, x, $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$'dir.

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

olsun. Bu durumda,

$$\ln a_n = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = n\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \to x$$

bulunur. Bunu n'ye göre türev aldığımız l'Hôpial kuralının aşağıdaki uygulaması ile elde edebiliriz:

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1 + x/n)}{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{1 + x/n}\right)\cdot\left(-\dfrac{x}{n^2}\right)}{-1/n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{1 + x/n} = x$$

$f(x) = e^x$ ile Bölüm 11.1'deki Teorem 4'ü uygulayarak,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = a_n = e^{\ln a_n} \to e^x$$

olduğu sonucuna varabilirsiniz. ■

Limit 6: Herhangi bir x için, x, $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$'dir.

$$-\frac{|x|^n}{n!} \le \frac{x^n}{n!} \le \frac{|x|^n}{n!}$$

olduğundan, bütün göstermemiz gereken $|x|^n/n! \to 0$ olduğudur. Sonra, Diziler için Sandviç Teoremini (Bölüm 11.1, Teorem 2) uygulayarak $x^n/n! \to 0$ olduğu sonucuna varırız.

$|x|^n/n! \to 0$ olduğunu göstermedeki ilk adım, $(|x|/M) < 1$ olacak şekilde bir $M > |x|$ tamsayısı seçmektir. Yukarıda ispatladığımız Limit 4'ten, $(|x|/M)^n \to 0$ olduğunu görürüz. Artık ilgimizi $n > M$ değerlerine çevirebiliriz. Bu n değerleri için,

$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^n}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot M\cdot \underbrace{(M + 1)(M + 2)\cdot \cdots \cdot n}_{(n-M)\text{ çarpan}}}$$

$$\le \frac{|x|^n}{M!M^{n-M}} = \frac{|x|^n M^M}{M!M^n} = \frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n$$

yazabiliriz.

Böylece,

$$0 \leq \frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n$$

olur. Artık, $M^M/M!$ sabiti n arttıkça değişmez. Yani Sandöviç Teoremi bize, $(|x|/M)^n \to 0$ olduğundan, $|x|^n/n! \to 0$ olduğunu söyler. ■

E.4 Reel Sayıların Teorisi

Analizin özenli gelişmesinin temelinde reel sayıların özellikleri vardır. Fonksiyonlar, türevler ve integraller hakkındaki bir çok sonuç, sadece rasyonel sayılar üzerinde tanımlı fonksiyonlar için söylenseydi, yanlış olurdu. Bu ek'te reel sayılar teorisinin bazı temel kavramlarını kısaca inceliyoruz. Bu kavramlar, analizin daha derin, daha teorik bir incelenmesinde neler öğrenilebileceğini işaret etmektedir.

Reel sayıları, oldukları şey yapan üç tip özelik vardır. Bunlar, **cebirsel, sıra** ve **tamlık** özellikleridir. Cebirsel özellikler toplama ve çarpma, çıkarma ve bölmeyi içerir. Bunlar, reel sayılara olduğu kadar rasyonel ve kompleks sayılara da uygulanırlar.

Sayıların yapısı, toplama ve çarpma işlemleri ile bir küme üzerine inşa edilir. Toplama ve çarpmanın aşağıdaki özellikleri gereklidir.

A1 $a + (b + c) = (a + b) + c$ her a, b, c için.

A2 $a + b = b + a$ her a, b, c için.

A3 Bir "0" sayısı vardır ve her a için $a + 0 = a$ dır.

A4 Her a sayısı için $a + b = 0$ olacak şekilde bir b sayısı vardır.

M1 $a(bc) = (ab)c$ her a, b, c için.

M2 $ab = ba$ her a, b için.

M3 Bir "1" sayısı vardır ve her a için $a \cdot 1 = a$'dır.

M4 Her sıfırdan farklı a sayısı için $ab = 1$ olacak şekilde bir b sayısı vardır.

D $a(b + c) = ab + bc$ her a, b, c için.

A1 ve M1 *birleşme kuralları*, A2 ve M2 *değişme kuralları*, A3 ve M3 *birim kuralları*, A4 ve M4 *ters eleman kuralları* ve D de *dağılma kuralı* dır. Bu cebirsel özelliklerin bulunduğu kümeler **cisim** örnekleridir ve soyut cebir denen teorik matematik alanında derinlemesine incelenirler.

Sıra özellikleri, herhangi iki sayının büyüklüğünü karşılaştırmamızı sağlar. Sıra özellikleri şunlardır:

O1 Herhangi a ve b için ya $a \leq b$ veya $b \leq a$ dır (veya ikisi de)

O2 $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$ dir.

O3 $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$ dir.

O4 $a \leq b$ ise $a + c \leq b + c$'dir.

O5 $a \leq b$ ve $0 \leq c$ ise $ac \leq bc$'dir.

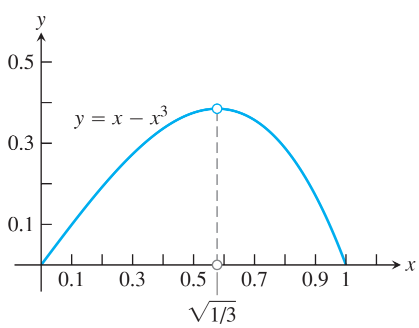
O3 *Geçişme kuralı* dır, O4 ve O5 sıralamayı toplama ve çarpma ile bağdaştırır.

Reel sayıları, tam sayıları ve rasyonel sayıları sıralayabiliriz, fakat kompleks sayıları sıralayamayız (Ek E.5'e bakın). $i = \sqrt{-1}$ gibi bir sayının sıfırdan büyük yada küçük olduğuna karar verecek makul bir yol yoktur. Herhangi iki elemanının büyüklüklerinin karşılaştırılabildiği, yukarıdaki gibi, bir cisim'e bir **sıralı cisim** denir. Hem rasyonel sayılar ve hem de reel sayılar sıralı cisimlerdir ve başka pek çok vardır.

Reel sayıları, bir doğru üzerine noktalar olarak dizmekle, geometrik olarak düşünebiliriz. **Tamlık özelliği**, "delikler" veya "boşluklar" olmadan, doğru üzerindeki bütün noktalara reel sayılar karşı geldiğini söyler. Bunun aksine, rasyonel sayılar $\sqrt{2}$ ve π gibi noktaları atlar. Tam sayılar ise $1/2$ gibi kesirleri bile içermez. Tamlık özelliği bulunan reel sayılar hiçbir noktayı atlamaz.

Bu üstü kapalı kayıp delikler fikri ile tam olarak ne demek istiyoruz? Bunu cevaplamak için tamlığın daha kesin bir açıklamasını vermeliyiz. Bir sayı kümesindeki bütün sayılar bir M sayısından küçük veya eşit ise M sayısına bu sayı kümesinin bir **üst sınırı** denir. Üst sınırların en küçüğüne **en küçük üst sınır** denir. Örneğin, $M = 2$, negatif sayılar için bir üst sınırdır. $M = 1$ de öyledir ve 2'nin en küçük üst sınır olmadığını gösterir. Negatif sayılar kümesi için en küçük üst sınır $M = 0$ dır. Boş olmayan ve üstten sınırlı her alt kümesinin bir en küçük üst sınırı var olan bir cismi, bir sıralı **tam** cisim olarak tanımlarız.

Sadece rasyonel sayılarla çalışırsak, $\sqrt{2}$'den küçük sayılar kümesi üstten sınırlıdır. Fakat, herhangi bir rasyonel M üst sınırı, biraz daha büyük olan fakat hala $\sqrt{2}$'den küçük olan bir rasyonel sayı ile değiştirilebileceğinden, rasyonel bir en küçük üst sınır yoktur. Dolayısıyla rasyonel sayılar tam değildir. Reel sayılar içinde üstten sınırlı her kümenin bir en küçük üst sınırı daima vardır. Reel sayılar bir sıralı tam cisim dir.



ŞEKİL E.2 $y = x - x^3$'ün $[0, 1]$ üzerindeki maksimum değeri $x = \sqrt{1/3}$ irrasyonel sayısında gözükür.

Tamlık özelliği, analizdeki bir çok sonucun tam kalbindedir. Bir örnek, Bölüm 4.1'deki gibi, bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde bir fonksiyonun maksimum değerinin aranmasında ortaya çıkar. $y = x - x^3$ fonksiyonunun $[0, 1]$'de $1 - 3x^2 = 0$ veya $x = \sqrt{1/3}$ eşitliğini sağlayan x noktasında bir maksimum değeri vardır. Düşüncemizi, sadece rasyonel sayılar üzerinde tanımlı fonksiyonlarla sınırlasaydık, $\sqrt{1/3}$ irrasyonel olduğundan (Şekil E.2) fonksiyonun bir maksimum değerinin bulunmadığı sonucuna varırdık. Bir $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli olan fonksiyonların bir maksimum değerlerinin var olmasını gerektiren Ekstremum Değer Teoremi (Bölüm 4.1), sadece rasyonel sayılar üzerinde tanımlı fonksiyonlar için doğru değildir.

Ara Değer Teoremi, bir $[a, b]$ aralığı üzerinde $f(a) < 0$ ve $f(b) < 0$ ile sürekli olan bir fonksiyonun aralığın bir yerinde sıfır olmasını gerektirir. Fonksiyonun değerleri, aralığın içindeki bir x noktası için $f(x) = 0$ olmadan, negatiften pozitife atlayamazlar. Ara Değer Teoremi de reel sayıların tamlığına dayanır ve sadece rasyonel sayılar üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar için doğru değildir. $f(x) = 3x^3 - 1$ fonksiyonu için $f(0) = -1$ ve $f(1) = 2$'dir. f'i sadece rasyonel sayılar üzerinde düşünürsek hiçbir zaman sıfır değerini almaz. $f(x) = 0$'ı sağlayan tek x değeri, irrasyonel olan $x = \sqrt{1/3}$ sayısıdır.

Reel sayılar bir sıralı tam cisimdir diyerek reel sayıların istenen özelliklerini yakaladık. Fakat, henüz bitirmedik. Pisagor (Pythagoras) okulundan Yunan matematikçiler, reel sayılar doğrusu üzerine başka bir özellik koymayı denediler: bütün sayılar tamsayıların bir kesridir özelliği. $\sqrt{2}$ gibi irrasyonel sayıları keşfettiklerinde çabalarının boşa olduğunu anladılar. Reel sayıları belirtmek için bizim çabalarımızın da, görülmemiş sebeplerden dolayı, hatalı olmadıklarını nasıl anlayacağız? Sanatçı Escher, kendileri ile tekrar alttan birleşene kadar yükselen merdivenlerden oluşan optik illüzyonlar çizdi. Böyle bir merdiveni inşa etmeye çalışan bir mühendis, mimarın çizmiş olduğu planları gerçekleyecek bir yapının olamayacağını görür. Bu, reel sayıların dizaynının, zor fark edilir bazı çelişkiler içerdiği ve böyle sayı sistemlerinin kurulamayacağı anlamında mıdır?

Reel sayıların özel bir tanımlamasını vererek ve bu modelin sağladığı cebirsel, sıralama ve tamlık özelliklerini gerçekleyerek bu meseleyi çözüyoruz.

Buna reel sayıların **kuruluşu** denir ve aynı merdivenlerin ağaçtan, taştan veya demirden yapılabilmesi gibi reel sayıların kuruluşu için de farklı yaklaşımlar vardır. Bir kuruluş, reel sayıları

$$a.d_1d_2d_3d_4\ldots$$

gibi sonsuz ondalıklar olarak ele alır. Bu yaklaşımda bir reel sayı bir a tamsayısını takip eden $d_1, d_2, d_3, \ldots$ gibi her biri 0 ile 9 arasında olan ondalıklardan oluşan bir dizidir. Bu dizi durabilir, periyodik bir şekilde tekrar edebilir veya hiçbir kalıba uymadan sürüp gidebilir. Bu formda, 2.00, 0.3333333… ve 3.1415926535898… ifadeleri bilinen üç reel sayıyı temsil ederler. Bu ondalıkları takip eden "…" noktalarının gerçek anlamı, Bölüm 11'deki gibi dizi ve serilerin geliştirilmesini gerektirir. Her reel sayı, kendisine sonlu ondalık yaklaşımlar ile tanımlanan bir rasyonel sayılar dizisinin limiti olarak kurulur. Bu durumda sonsuz bir ondalık

$$a + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \cdots$$

serisi gibidir.

Reel sayıların bu ondalık kuruluşu, tam olarak açık değildir. Kuruluş, tamlık ve sıralama özelliklerini sağlayan sayılar verdiğini kontrol etmeye yetecek kadar kolaydır fakat cebirsel özellikleri gerçeklemek oldukça karışıktır. İki sayıyı toplamak veya çarpmak bile sonsuz sayıda işlem gerektirir. Bölmeye bir anlam kazandırabilmek için, sonsuz ondalıklara rasyonel yaklaşımların limitlerini içeren dikkatli bir tartışma gerekir.

Reel sayıların ilk titiz bir kuruluşunu 1872 de veren Alman matematikçi Richard Dedekind (1831-1916) farklı bir yaklaşım ele almıştır. Herhangi bir x reel sayısı verildiğinde rasyonel sayıları iki kümeye ayırabiliriz: x'ten küçük veya eşit olanlar ve büyük olanlar. Dedekind bu fikir yürütmeyi akıllıca tersine çevirdi ve bir reel sayıyı, rasyonel sayıları bu şekilde iki kümeye ayırmak olarak tanımladı. Bu oldukça garip bir yaklaşım olarak gözüküyor fakat yeni yapıların, eskilerinden bu dolaylı yöntemlerle kuruluşları teorik matematikte yaygındır.

Bunlar ve diğer yaklaşımlar (Ek 5'e bakın), istenen cebirsel, sıralama ve tamlık özelliklerini sağlayan bir sayılar sistemi kurmak için kullanılabilirler. Ortaya çıkan son bir mesele, bütün bu kuruluşların aynı şeyi verip vermedikleridir. Farklı kuruluşlar, istenen bütün özellikleri sağlayan farklı sayı sistemlerine yol açabilirler mi? Evet ise, bunlardan hangisi reel sayılardır. Neyse ki cevap hayır dır. Reel sayılar, cebirsel, sıralama ve tamlık özelliklerini sağlayan tek sayı sistemidir.

Reel sayıların doğası hakkındaki ve limitler hakkındaki karışıklık, analizin ilk gelişiminde önemli anlaşmazlıklara neden olmuştur. Newton, Leibniz ve onları takipçileri gibi analizin öncüleri, Δx ve Δy'nin her ikisi de sıfıra yaklaşırken

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

fark oranına ne olduğuna baktıklarında, bu oranın sonucu olan türev hakkında iki sonsuz küçüğün oranı olarak konuşuyorlardı. dx ve dy olarak yazılan bu "sonsuz küçük" ler her sabit sayıdan küçük olan fakat sıfır olmayan, yeni bir çeşit sayı olarak düşünülüyorlardı. Benzer şekilde, bir belirli integral de, x kapalı bir aralık üzerinde değişirken

$$f(x) \cdot dx$$

gibi sonsuz küçüklerin bir sonsuz toplamı olarak düşünülüyordu. Bugünkü gibi iyi anlaşılana kadar, yakınsayan $\Delta y/\Delta x$ fark oranları, türevin anlamını özetlediği düşünülen bir limitten çok bir sonsuz küçükler oranı idi. Bu düşünce yolu, sonsuz küçüklerin girişilen tanımlamalarının ve işlemlerinin çelişkilere ve tutarsızlıklara yol açması gibi mantıksal zorluklara neden oluyordu. Daha somut ve hesaplanabilir fark oranları böyle zorluklara neden olmazlar, daha ziyade kullanışlı hesaplama araçları olarak düşünülürler. Fark oranları, türevin sayısal değerleri ile çalışmada ve hesaplama için genel formüller türetmede kullanılmışlardır fakat bir türevin aslında ne olduğu sorusunun kalbinde oldukları düşünülmemişlerdir. Bu gün, sonsuz küçüklerle ilgili mantıksal problemlerden, yakınsayan fark oranlarının limitini türev olarak tanımlamakla kaçınabileceğimizin farkına varıyoruz. Bu gün artık eski yaklaşımların belirsizlikleri yoktur ve analizin standart teorisi içinde sonsuz küçüklere ne gerek vardır ne de kullanılmaktadırlar.

E.5 Kompleks Sayılar

Kompleks sayılar $a + ib$ şeklinde ifadelerdir. Burada a ve b reel sayılar, i de $\sqrt{-1}$'in bir ifadesidir. Ne yazık ki, "reel" ve "sanal" (kompleks) kelimelerinin $\sqrt{-1}$'i zihnimizde $\sqrt{2}$'den daha az istenilen bir konuma getirmek gibi kötü bir etkisi vardır. Aslında, analizin temelini oluşturan *reel* sayı sistemini oluşturmak için, *yaratıcılık* anlamında, oldukça fazla hayal gücü gerekmiştir (Ek 4'e bakın). Bu ekte, bu yaratıcılığın birkaç evresini gözden geçireceğiz. Böylece bir kompleks sayı sisteminin yaratılması o kadar garip görünmeyecektir.

Reel Sayıların Gelişimi

Sayı gelişiminin en eski evresi, şimdi **doğal sayılar** veya **pozitif tamsayılar** dediğimiz 1, 2, 3,… gibi **sayma sayılarının** tanınmasıdır. Bu sayılarla, sistemin dışına çıkmadan bazı basit aritmetik işlemler yapılabilir. Yani, pozitif tamsayılar sistemi toplama ve çarpma işlemleri altında **kapalı**dır. Bununla, m ve n herhangi iki pozitif tamsayıysa,

$$m + n = p \qquad \text{ve} \qquad mn = q \tag{1}$$

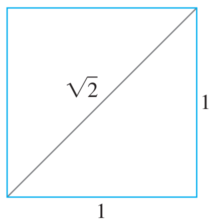
sayılarının da pozitif tamsayılar olduklarını söylüyoruz. (1) denklemindeki eşitliklerden herhangi birinin sol tarafındaki iki pozitif tamsayı verilmişse, sağda buna karşılık gelen pozitif tamsayıyı bulabiliriz. Dahası, bazen m ve p pozitif tamsayılarını belirleyerek $m + n = p$ olmasını sağlayan n pozitif tamsayısını bulabiliriz. Örneğin, bildiğimiz sayılar sadece pozitif tamsayılar ise, $3 + n = 7$ çözülebilir. Ama sayı sistemi genişletilmeden, $7 + n = 3$ denklemi çözülemez.

$7 + n = 3$ gibi denklemleri çözebilmek için sıfır ve negatif sayılar yaratılmıştır. Bütün **tamsayıları**,

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

tanıyan bir toplumda, eğitimli birisi, denklemdeki iki tamsayı verilince, $m + n = p$ denklemini tamamlayacak eksik tamsayıyı her zaman bulabilir.

Eğitimli kişilerimizin (2)'deki tamsayılardan herhangi ikisini çarpmayı da bildiklerini varsayalım. Eğer, (1) denklemlerinde, m ve q verilmişse, n'yi bazen bulabildiklerini, bazen de bulamadıklarını keşfedeceklerdir. Hayal güçleri hala iyi şekilde çalışıyorsa, daha fazla sayı yaratmayı düşünebilir ve m ve n sayılarının m/n sıralı çiftleri olan kesirleri tanımlayabilirler. Sıfır sayısının onları bir süre rahatsız edecek özellikleri vardır, ama sonunda sadece



ŞEKİL E.3 Bir cetvel ve pergel ile irrasyonel uzunlukta bir doğru parçası çizilebilir.

paydasında sıfır bulunanları dışarıda tutacak şekilde bütün tamsayı oranları m/n'leri el altında bulundurmanın yararlı olduğunu anlayacaklardır. **Rasyonel sayılar** kümesi denilen bu sistem artık, sistemdeki herhangi iki sayı üzerinde aritmetiğin **rasyonel işlemleri** denen şeyleri:

1. (a) toplama
(b) çıkartma

2. (a) çarpma
(b) bölme

gerçekleştirebilecekleri kadar zenginleşmiştir, *ama sıfırla bölme yapamazlar* çünkü bu anlamsızdır.

Birim karenin geometrisi (Şekil E.3) ve Pisagor teoremi, bir temel uzunluk birimiyle, uzunluğu $\sqrt{2}$ olan bir doğru parçası oluşturabileceklerini göstermiştir. Böylece, geometrik bir oluşumla

$$x^2 = 2$$

gibi bir denklemi çözebileceklerdir. Ancak sonra $\sqrt{2}$'yi temsil eden doğru parçası ile 1'i temsil eden doğru parçasının kıyaslanamaz büyüklükler olduklarını keşfederler. Bu, $\sqrt{2}$'nin, bir uzunluk biriminin iki *tamsayı* katının oranı olarak ifade edilemeyeceği anlamına gelir. Yani, eğitimli insanlarımız $x^2 = 2$ denkleminin bir rasyonel sayı çözümünü bulamayacaklardır.

Karesi 2 olan bir rasyonel sayı *yoktur*. Nedeni için, böyle bir rasyonel sayı olduğunu varsayın. Bu durumda, 1'den başka ortak çarpanları olmayan ve

$$p^2 = 2q^2 \tag{3}$$

denklemini sağlayan p ve q tamsayıları bulabilirdik. p ve q tamsayı oldukları için, p çift olmalıdır; aksi halde kendisi ile çarpımı tek olurdu. Sembolik olarak, p_1 bir tamsayı olmak üzere, $p = 2p_1$ yazılır. Bu $2p_1^2 = q^2$ olmasına yol açar, ki bu q'nun çift, mesela $q = 2q_1$, olmasına yol açar. Böylece 2 sayısı p ve q'nun ortak çarpanı haline gelir, bu da başlangıçta p ve q'yu 1'den başka ortak çarpanları olmayan tamsayılar olarak seçişimize ters düşer. Dolayısıyla, karesi 2 olan bir rasyonel sayı yoktur.

Eğitimli insanlarımız $x^2 = 2$ denkleminin rasyonel bir çözümünün bulamasalar da bir rasyonel sayı dizisi

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{41}{29}, \quad \frac{239}{169}, \quad \ldots, \tag{4}$$

bulabilirler ve bunların kareleri

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{49}{25}, \quad \frac{1681}{841}, \quad \frac{57{,}121}{28{,}561}, \quad \ldots, \tag{5}$$

limit olarak 2'ye yakınsar. Bu sefer hayal güçleri bir rasyonel sayı dizisinin limiti kavramına gerek duyduklarını gösterir. Üstten sınırlı artan bir dizinin her zaman bir limite yaklaştığını (Bölüm 11.1, Teorem 6) kabul eder ve (4)'teki dizinin bu özelliğinin bulunduğunu gözlersek, dizinin bir L limitinin olmasını bekleriz. Bu ayrıca, (5) dizisinden, $L^2 = 2$ olduğunu ve dolayısıyla L'nin rasyonel sayılarımızdan biri olmadığı anlamına gelir. Rasyonel sayılara, bütün sınırlı artan rasyonel sayı dizilerinin limitlerini de eklersek, bütün "reel" sayı sistemine varırız. Reel kelimesi tırnak içine alınmıştır, çünkü bu sistemde diğer matematiksel sistemlerden "daha fazla reel" veya "daha az reel" hiçbir şey yoktur.

Kompleks Sayılar

Reel sayı sisteminin oluşturulmasının bir çok evresinde hayal gücünden söz edildi. Aslında, icat sanatına şimdiye kadar tartıştığımız sistemlerde en azından üç kere gerek duyulmuştur:

1. İlk *icat edilen* sistem: Sayma sayılarından oluşturulan *bütün tamsayıla*r kümesi.

2. *İkinci icat edilen* sistem: Tamsayılardan oluşturulan m/n rasyonel sayılar kümesi.

3. *Üçüncü icat edilen* sistem. Rasyonel sayılardan oluşturulan bütün *x reel sayıları* kümesi.

Bu icat edilmiş sistemler, her sistemin kendisinden öncekini kapsadığı bir hiyerarşi oluştururlar. Ayrıca her sistem, sistemin dışına çıkmadan ek işlemlerin yapılabilmesini sağlamak açısından, bir öncekinden daha zengindir:

1. Bütün tamsayılar sisteminde, a herhangi bir tamsayı olmak üzere

$$x + a = 0 \tag{6}$$

şeklindeki bütün denklemleri çözebiliriz.

2. Rasyonel sayılar sisteminde, a ve b rasyonel sayılar ve $a \neq 0$ olmak koşuluyla,

$$ax + b = 0 \tag{7}$$

şeklindeki bütün denklemleri çözebiliriz.

3. Bütün reel sayılar sisteminde, (6) ve (7)'deki denklemlerin yanında,

$$ax^2 + bx + c = 0, \ \ a \neq 0 \qquad \text{ve} \qquad b^2 - 4ac > 0 \tag{8}$$

şeklindeki bütün kuadratik denklemleri çözebiliriz.

Muhtemelen, (8) denkleminin çözümlerini veren formülü, yani

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{9}$$

formülünü biliyorsunuz ve $b^2 - 4ac$ diskriminantı negatif olduğunda, (9)'daki çözümlerin yukarıda tartışılan sistemlerden hiçbirine ait olmadığına yabancı değilsiniz. Aslında,

$$x^2 + 1 = 0$$

gibi çok basit bir kuadratik denklemi çözmek, kullanabileceğimiz tek sayı sistemleri yukarıda bahsettiğimiz üç sistemse imkansızdır.

Böylece *dördüncü icat edilmiş* sisteme, bütün $a + ib$ kompleks sayıları kümesine geliriz. i sembolünü tamamen ortadan kaldırarak (a, b) gibi bir sıralı çift gösterimi kullanabilirdik. Cebirsel işlemler altında, a ve b sayılarına biraz farklı davranıldığı için, sırayı doğru tutmak önemlidir. Dolayısıyla, **kompleks sayı sisteminin** bütün (a, b) sıralı reel sayı çiftleri ve bunların eşitlenecekleri, toplanacakları, çarpılacakları, vb. kurallardan oluştuğunu söyleyebiliriz. Aşağıdaki tartışmada hem (a, b) hem de $a + ib$ gösterimlerini kullanacağız. a'ya (a, b) kompleks sayısının **reel kısmı**, b'ye de **sanal (imajiner) kısmı** diyeceğiz.

Aşağıdaki tanımları yapıyoruz.

Eşitlik	
Ancak ve yalnız $a = c$ ve $b = d$ ise $a + ib = c + id$ olur.	İki kompleks sayı, (a, b) ve (c, d) ancak ve yalnız $a = c$ ve $b = d$ ise eşittir.
Addition	
$(a + ib) + (c + id)$ $= (a + c) + i(b + d)$	İki kompleks sayı, (a, b) ve (c, d)'nin *toplamı* $(a + c, b + d)$ kompleks sayısıdır.
Çarpma	
$(a + ib)(c + id)$ $= (ac - bd) + i(ad + bc)$	İki kompleks sayı, (a, b) ve (c, d)'nin çarpımı $(ac - bd, ad + bc)$ kompleks sayısıdır.
$c(a + ib) = ac + i(bc)$	Bir c reel sayısı ile bir (a, b) kompleks sayısının çarpımı (ac, bc) kompleks sayısıdır.

İkinci sayı b'nin sıfır olduğu bütün (a, b) kompleks sayılarının kümesi a reel sayılarının kümesinin bütün özelliklerine sahiptir. Örneğin, $(a, 0)$ ve $(c, 0)$'ın toplaması ve çarpılması, sanal kısımları sıfır olan aynı cinsten sayılar,

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0),$$

$$(a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0)$$

verir. Ayrıca, bir $(a, 0)$ "reel sayısı" ile bir (c, d) kompleks sayısını çarparsak,

$$(a, 0) \cdot (c, d) = (ac, ad) = a(c, d)$$

elde ederiz. Özel olarak, $(0, 0)$ kompleks sayısı kompleks sayı sisteminde sıfır rolü oynarken, $(1, 0)$ kompleks sayısı da birim veya bir rolünü oynar.

Reel kısmı sıfır ve sanal kısmı 1 olan $(0, 1)$ sayısı, karesinin

$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$$

reel kısmının eksi bire, sanal kısmınınsa sıfıra eşit olması özelliğine sahiptir. Bu nedenle (a, b) kompleks sayılar sisteminde, karesi birim $= (1, 0)$ ile toplanınca sıfır $= (0, 0)$ veren bir $x = (0, 1)$ vardır; yani

$$(0, 1)^2 + (1, 0) = (0, 0)$$

Dolayısıyla,

$$x^2 + 1 = 0$$

denkleminin bu yeni sayı sisteminde bir çözümü vardır.

Muhtemelen, (a, b) gösteriminden ziyade, $a + ib$ gösterimine alışıksınızdır. $(1, 0)$ sayısı birim ve $(0, 1)$ sayısı da eksi birin karekökü gibi davranırken, sıralı ikililer cebrinin kuralları

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

yazmamızı sağladığı için, (a, b) yerine $a + ib$ yazmakta tereddüt etmeye gerek yoktur. b'nin başındaki i, $a + ib$'nin sanal kısmını belirten bir elemandır.

İstediğimiz zaman (a, b) sıralı ikilileri bölgesinden $a + ib$ ifadeleri bölgesine geçebiliriz. Ama, (a, b) sıralı çiftlerinden oluşan kompleks sayılar sistemindeki cebir kurallarını öğrendiğimizde, $(0, 1) = i$ sembolünde $(1, 0) = 1$ sembolünden daha az "gerçek" olan bir şey olmadığını görürüz.

Kompleks sayıların herhangi bir rasyonel ifadesini tek bir kompleks sayıya indirgemek için, her gördüğümüz yerde i^2 yerine -1 yazarak elemanter cebir kurallarını uygularız. Elbette, $(0, 0) = 0 + i0$ kompleks sayısıyla bölme yapamayız. Ama $a + ib \neq 0$ ise, bir bölmeyi aşağıdaki gibi gerçekleştiririz:

$$\frac{c + id}{a + ib} = \frac{(c + id)(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{(ac + bd) + i(ad - bc)}{a^2 + b^2}.$$

Sonuç,

$$x = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{ad - bc}{a^2 + b^2},$$

ile bir $x + iy$ kompleks sayısıdır ve $a + ib = (a, b) \neq (0, 0)$ olduğu için $a^2 + b^2 \neq 0$ olur.

Paydadan i'yi kaldırmak için çarpan olarak kullanılan $a - ib$ sayısına $a + ib$'nin **kompleks eşleniği** denir. z'nin kompleks eşleniğini göstermek için $\bar{z}$ (z çizgi okunur) kullanılır; böylece

$$z = a + ib, \qquad \bar{z} = a - ib$$

olur. $(c + id)/(a + ib)$ kesrinin payını ve paydasını, paydanın kompleks eşleniğiyle çarpmak her zaman paydada bir reel sayı bulunmasını sağlayacaktır.

ÖRNEK 1 **Kompleks Sayılarla Aritmetik İşlemler**

(a) $(2 + 3i) + (6 - 2i) = (2 + 6) + (3 - 2)i = 8 + i$

(b) $(2 + 3i) - (6 - 2i) = (2 - 6) + (3 - (-2))i = -4 + 5i$

(c) $(2 + 3i)(6 - 2i) = (2)(6) + (2)(-2i) + (3i)(6) + (3i)(-2i)$

$$= 12 - 4i + 18i - 6i^2 = 12 + 14i + 6 = 18 + 14i$$

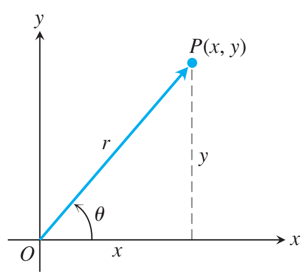
(d) $$\frac{2 + 3i}{6 - 2i} = \frac{2 + 3i}{6 - 2i}\frac{6 + 2i}{6 + 2i} = \frac{12 + 4i + 18i + 6i^2}{36 + 12i - 12i - 4i^2} = \frac{6 + 22i}{40} = \frac{3}{20} + \frac{11}{20}i$$

Argand Diyagramları

$z = x + iy$ kompleks sayısının iki geometrik temsili vardır:

1. xy-düzlemindeki $P(x, y)$ noktası olarak
2. Orijinden P'ye giden $\overrightarrow{OP}$ vektörü olarak.

Her temsilde, x-eksenine reel eksen, y-eksenine de **sanal eksen** denir. İki temsil de $x + iy$'nin Argand diyagramlarıdır (Şekil E.4).



ŞEKİL E.4 Bu Argand diyagramı $z = x + iy$'yi hem bir $P(x, y)$ noktası, hem de bir $\overrightarrow{OP}$ vektörü olarak temsil eder.

x ve y'nin kutupsal koordinatları cinsinden

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

ve

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (10)$$

yazabiliriz.

Bir $x + iy$ kompleks sayısının mutlak değerini orijinden $P(x, y)$ noktasına giden bir $\overrightarrow{OP}$ vektörünün uzunluğu r olarak tanımlarız. Mutlak değeri dikey çizgilerle gösteririz:

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

r ve θ kutupsal koordinatlarını r negatif olmayacak şekilde seçersek,

$$r = |x + iy|$$

elde ederiz. Kutupsal θ açısına z'nin argümanı denir ve $\theta = \arg z$ olarak yazılır. Elbette, θ'ya 2π'nin herhangi bir tamsayı katı eklenerek uygun başka bir açı üretilebilir.

Aşağıdaki denklem bir z kompleks sayısını, kompleks eşleniği $\bar{z}$ 'yi ve mutlak değeri $|\bar{z}|$'yi birleştiren yararlı bir formül verir:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

Euler Formülü

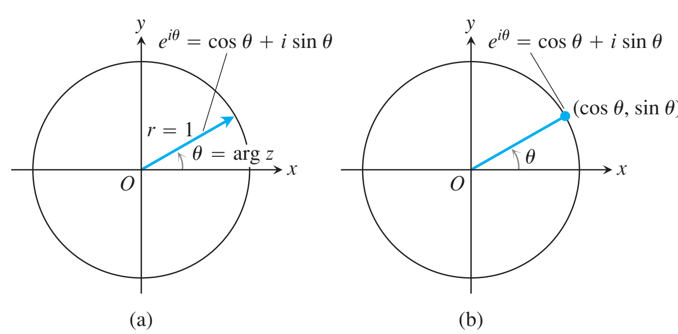
Euler Formülü olarak bilinen

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

bağıntısı (10) denklemini

$$z = re^{i\theta}$$

şeklinde yazmamızı sağlar. Bu formül, sırasıyla kompleks sayıların çarpımlarını, bölümlerini, kuvvetlerini ve köklerini hesaplamak için aşağıda verilen kurallara yol açar. Ayrıca, $e^{i\theta}$ için Argand diyagramına da yol açar. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$'yı (10) denkleminde $r = 1$ alarak elde ettiğimiz için, $e^{i\theta}$'nın, Şekil E.5'te gösterildiği gibi, pozitif x-ekseniyle θ açısı yapan bir birim vektörle temsil edildiğini söyleyebiliriz.

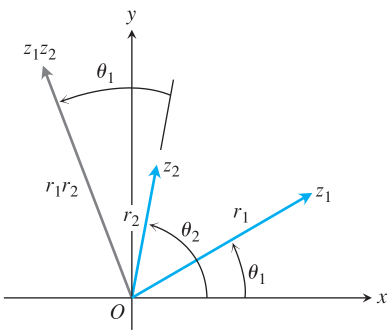


ŞEKİL E.5 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$'nın (a) bir vektör, (b)bir nokta olarak Argand diyagramı.

Çarpımlar

İki kompleks sayıyı çarpmak için, mutlak değerlerini çarpar ve açılarını toplarız.

$$z_1 = r_1e^{i\theta_1}, \qquad z_2 = r_2e^{i\theta_2}, \qquad (11)$$



ŞEKİL E.6 z_1 ve z_2 çarpıldıklarında, $|z_1z_2| = r_1 \cdot r_2$ ve $\arg(z_1z_2) = \theta_1 + \theta_2$ olur.

ve dolayısıyla

$$|z_1| = r_1, \quad \arg z_1 = \theta_1; \quad |z_2| = r_2, \quad \arg z_2 = \theta_2.$$

olsun. Bu durumda,

$$z_1z_2 = r_1e^{i\theta_1} \cdot r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

ve buradan da

$$|z_1z_2| = r_1r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$$
$$\arg(z_1z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \qquad (12)$$

bulunur. Böylece iki kompleks sayının çarpımı, uzunluğu iki çarpanın uzunlukları çarpımı olan ve argümanı da argümanlarının toplamı olan bir vektör ile temsil edilir (Şekil E.6). Özel olarak, (12) Denkleminden, bir vektör $e^{i\theta}$ ile çarpılarak saat yönünün tersine bir θ açısı kadar çevrilebilir. i ile çarpmak 90°, –1 ile çarpmak 180°, $-i$ ile çarpmak 270° döndürür.

ÖRNEK 2 Kompleks Sayıların Bir Çarpımını Bulmak

$z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$ olsun. Bu kompleks sayıları bir Argand diyagramı (Şekil E.7) olarak çizer ve bu diyagramdan

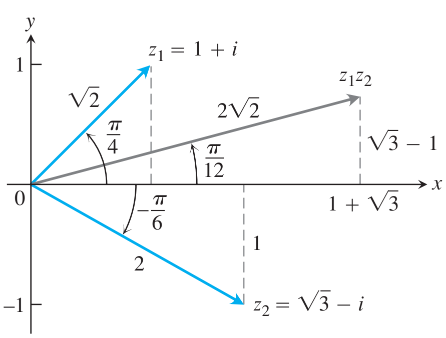
$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}, \qquad z_2 = 2e^{-i\pi/6}$$

buluruz. Bu durumda

$$z_1z_2 = 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{i\pi}{4} - \frac{i\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{i\pi}{12}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \approx 2.73 + 0.73i$$

elde ederiz. exp (A) notasyonu e^A yerinedir. ■



ŞEKİLE.7 İki kompleks sayıyı çarpmak için, mutlak değerlerini çarpın ve argümanlarını toplayın.

Bölümler

(11) Denkleminde $r_2 \neq 0$ olduğunu varsayın. Bu durumda

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{ve} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2.$$

olur. Yani, iki kompleks sayının oranı için uzunlukları böler ve açıları çıkarırız.

ÖRNEK 3 Örnek 2'deki gibi, $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{1 + i}{\sqrt{3} - i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{5\pi i/12} \approx 0.707\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\approx 0.183 + 0.683i$$

bulunur. ■

Kuvvetler

n pozitif bir tamsayıysa, (12) Denklemindeki çarpım formüllerini uygulayarak

$$z^n = z \cdot z \cdot \cdots \cdot z. \qquad n \text{ çarpan}$$

buluruz. $z = re^{i\theta}$ ile,

$$\begin{aligned} z^n = (re^{i\theta})^n &= r^n e^{i(\theta+\theta+\cdots+\theta)} \qquad n \text{ toplam} \\ &= r^n e^{in\theta}. \end{aligned} \tag{13}$$

elde ederiz. $r = |z|$ uzunluğunun n. kuvveti alınır ve $\theta = \arg z$ açısı n ile çarpılır.

(13) Denkleminde $r = 1$ alırsak, De Moivre Teoremini elde ederiz.

De Moivre Teoremi

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta. \tag{14}$$

De Moivre denkleminin sol tarafını binom teoremine göre açar ve $a + ib$ şekline gelecek şekilde sadeleştirirsek, $\cos n\theta$ ve $\sin n\theta$ için $\cos\theta$ ve $\sin\theta$'nın n. dereceden polinomları şeklinde formüller elde ederiz.

ÖRNEK 4 (14) Denkleminde $n = 3$ ise,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

olur. Bu denklemin sol tarafı

$$\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$$

gelir. Bunun reel kısmı $\cos 3\theta$'ya, sanal kısmı da $\sin 3\theta$'ya eşit olmalıdır. Dolayısıyla,

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta,$$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

bulnur. ■

Kökler

$z = re^{i\theta}$ sıfırdan farklı bir kompleks sayı ve n pozitif bir tamsayı ise, z'nin n. kökü olan tam n tane farklı $w_0, w_1, \ldots, w_n$ kompleks sayısı vardır. Nedenini anlamak için, $w = \rho e^{i\alpha}$ $z = re^{i\theta}$'nın n. köklerinden biri olsun, böylece

$$w^n = z$$

veya

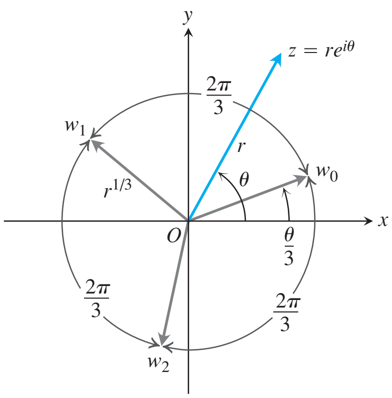
$$\rho^n e^{in\alpha} = re^{i\theta}$$

olur. Bu durumda,

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

r'nin reel, pozitif n. köküdür. Açıya gelince, $n\alpha$ ile θ'nın aynı olduğunu söyleyemesek bile, aralarında sadece 2π'nin tamsayı bir katı kadar fark olduğunu söyleyebiliriz. Yani,

$$n\alpha = \theta + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$



ŞEKİL E.8 $z = re^{i\theta}$'nın üç küp kökü.

Dolayısıyla,

$$\alpha = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}$$

olur. Böylece $z = re^{i\theta}$'nın n. köklerinin hepsi aşağıdaki formülle verilir.

$$\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\exp i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{15}$$

k'nin olası sonsuz değrine karşılık gelen sonsuz farklı yanıt var gibi görülebilir. Ama (15) Denkleminde $k = n + m$, $k = n$ ile aynı yanıtı verir. Dolayısıyla z'nin bütün farklı n. köklerini bulmak için k için sadece birbirini izleyen n tane değeri almamız yeterlidir. Kolaylık için,

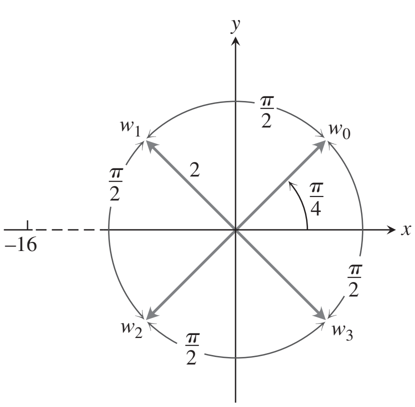
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

alabiliriz.

$re^{i\theta}$'nın bütün n. kökleri, merkezi O orijininde olan ve yarıçapı r'nin reel, pozitif n. köküne eşit olan bir çemberin üzerinde bulunurlar. Bunlardan birinin argümanı $\alpha = \theta/n$'dir. Diğerleri, komşularıyla aralarında $2\pi/n$ açısı bulunacak şekilde çember üzerinde düzgün bir şekilde yerleşmişlerdir. Şekil E.8, $z = re^{i\theta}$ kompleks sayısının üç küp kökü w_0, w_1 ve w_2'nin yerleşimlerini göstermektedir.

ÖRNEK 5 Dördüncü Kökleri Bulmak

–16'nın dört tane dördüncü kökünü bulun.



ŞEKİL E.9 –16'nın dört tane dördüncü kökü

Çözüm İlk adım olarak, –16'yı bir Argand diyagramında işaretler (Şekil E.9) ve kutupsal temsili $re^{i\theta}$'yı belirleriz. Burada, $z = -16$, $r = +16$ ve $\theta = \pi$'dir. $16e^{i\pi}$'nin dördüncü köklerinden biri $2e^{i\pi/4}$'tür. Diğerlerini, ilk değerin argümanına arka arkaya $2\pi/4 = \pi/2$ ekleyerek buluruz. Yani,

$$\sqrt[4]{16\exp i\pi} = 2\exp i\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$$

ve dört tane dördüncü kök

$$w_0 = 2\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(1 + i)$$

$$w_1 = 2\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(-1 + i)$$

$$w_2 = 2\left[\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(-1 - i)$$

$$w_3 = 2\left[\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(1 - i)$$

olarak bulunur. ■

Cebrin Temel Teoremi

$\sqrt{-1}$'in icadının iyi ve güzel olduğu ve reel sayı sisteminden daha zengin bir sayı sistemine yol açtığı söylenebilir, ama bu proses nerede sona erecektir? $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[6]{-1}$, ve

diğerlerini bulmak için de sayı sistemleri icat edecek miyiz? Şimdiye kadar bunun gerekli olmadığı belirlenmiş olmalıdır. Bu sayılar $a + ib$ kompleks sayı sistemi cinsinden ifade edilebilmektedir. Aslında, Cebrin Temel Teoremi, kompleks sayıların tanıtılmasıyla her polinomu lineer çarpanların bir çarpımı olarak çarpanlarına ayırabileceğimizi ve dolayısıyla her olası polinomu çözmeye yetecek kadar sayımız olduğunu söyler.

Cebrin Temel Teoremi

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ katsayıları herhangi kompleks sayılar, derecesi n, 1'e eşit veya 1'den büyük olan ve ilk katsayısı a_0 sıfır olmayan

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

şeklindeki her polinom denkleminin, kompleks sayı sisteminde tam n kökü vardır. Burada katlılığı m olan her kök m tane kök olarak sayılmaktadır.

Bu teoremin bir ispatı kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisi üzerine yazılmış her metinde bulunabilir.

ALIŞTIRMALAR E.5

Kompleks Sayılarla İşlemler

1. **Bilgisayarlar kompleks sayıları nasıl çarpar?** $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$'yi bulun.
   a. $(2, 3) \cdot (4, -2)$ b. $(2, -1) \cdot (-2, 3)$
   c. $(-1, -2) \cdot (2, 1)$
   (Bilgisayarlar kompleks sayıları bu şekilde çarpar.)
2. Aşağıdaki denklemlerden x ve y reel sayılarını çözün.
   a. $(3 + 4i)^2 - 2(x - iy) = x + iy$
   b. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2 + \dfrac{1}{x+iy} = 1 + i$
   c. $(3 - 2i)(x + iy) = 2(x - 2iy) + 2i - 1$

Grafik Çizme ve Geometri

3. Aşağıdaki kompleks sayılar $z = x + iy$'den geometrik olarak nasıl elde edilebilir? Çizin.
   a. $\bar{z}$ b. $\overline{(-z)}$
   c. $-z$ d. $1/z$
4. Bir Argand diyagramında, iki z_1 ve z_2 noktası arasındaki mesafenin $|z_1 - z_2|$ olduğunu gösterin.

5–10 alıştırmalarında, verilen koşulları sağlayan $z = x + iy$ noktalarının grafiklerini çizin.

5. a. $|z| = 2$ b. $|z| < 2$ c. $|z| > 2$
6. $|z - 1| = 2$
7. $|z + 1| = 1$
8. $|z + 1| = |z - 1|$
9. $|z + i| = |z - 1|$
10. $|z + 1| \geq |z|$

11–14 alıştırmalarındaki kompleks sayıları $r \geq 0$ ve $-\pi < \theta \leq \pi$ olmak üzere $re^{i\theta}$ şeklinde ifade edin. Her hesaplama için bir Argand diyagramı çizin.

11. $\left(1 + \sqrt{-3}\right)^2$
12. $\dfrac{1+i}{1-i}$
13. $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$
14. $(2 + 3i)(1 - 2i)$

Kuvvetler ve Kökler

15 ve 16 alıştırmalarındaki trigonometrik fonksiyonları, $\cos\theta$ ve $\sin\theta$ cinsinden ifade etmek için De Moivre Teoremini kullanın.

15. $\cos 4\theta$
16. $\sin 4\theta$
17. 1'in üç küp kökünü bulun

18. i'nin iki tane karekökünü bulun.

19. $-8i$'nin üç tane küp kökünü bulun.

20. 64'ün altı tane altıncı kökünü bulun.

21. $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$ denkleminin dört çözümünü bulun.

22. $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$ denkleminin altı çözümünü bulun.

23. $x^4 + 4x^2 + 16 = 0$ denkleminin bütün çözümlerini bulun.

24. $x^4 + 1 = 0$ denklemini çözün.

Teori ve Örnekler

25. Kompleks sayılar ve düzlemde vektörler Kompleks sayıları toplama kuralının Argand diyagramının, vektörleri toplamak için paralelkenar kuralıyla aynı olduğunu gösterin.

26. Eşleniklerle kompleks aritmetik z_1 ve z_2 kompleks sayıların toplamının (çarpımının veya bölümünün) eşleniğinin, bu sayıların eşleniklerinin toplamına (çarpımına veya bölümüne) eşit olduğunu gösterin.

27. Reel katsayılı polinomların kompleks kökleri kompleks - eşlenik çiftleri şeklindedir.

a. Alıştırma 26'nın sonuçlarını genişleterek,

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

$a_0, \ldots, a_n$ katsayıları reel olan bir polinom ise $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ olduğunu gösterin.

b. $f(z)$, a şıkkındaki gibi katsayıları reel olan bir polinom olmak üzere, $f(z) = 0$ denkleminin bir kökü z ise, eşleniği $\bar{z}$'nin de denklemin bir kökü olduğunu gösterin (*İpucu*: $f(z) = u + iv = 0$ alın; bu durumda hem u hem de v sıfır olur. Şimdi, $f(\bar{z}) = \overline{f(z)} = u - iv$ olduğunu kullanın).

28. Bir eşleniğin mutlak değeri $|\bar{z}| = |z|$ olduğunu gösterin.

29. z = z̄ iken z ve $\bar{z}$ eşitse, z noktasının kompleks düzlemdeki konumu hakkında ne söyleyebilirsiniz?

30. Reel ve sanal kısımlar Re(z) z'nin reel kısmını, Im(z) de z'nin sanal kısmını belirtsin. Aşağıdaki bağıntıların her z, z_1 ve z_2 sayıları için geçerli olduğunu gösterin.

a. $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$ **b.** $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$

c. $|\text{Re}(z)| \leq |z|$

d. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\text{Re}(z_1\bar{z}_2)$

e. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

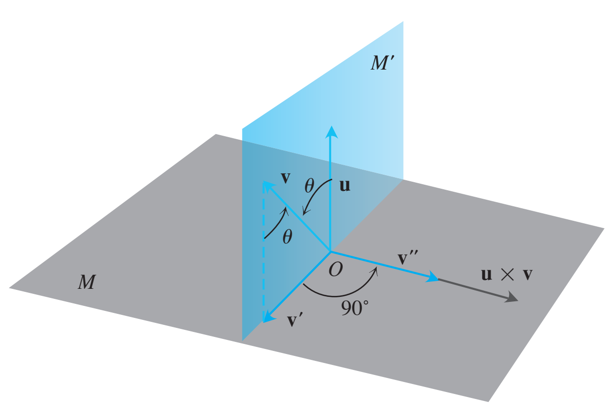
E.6 Vektörel Çarpımlar İçin Dağılma Kuralı

Bu ekte, Bölüm 12.4'teki 2 Özelliği olan

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$$

dağılma kuralını ispatlayacağız.

İspat Dağılma Kuralını türetmek için, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$'yi yeni bir şekilde kurarız. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$'yi ortak noktaları olan O noktasından başlayarak çizer ve $\mathbf{u}$'ya O noktasında dik olan bir M düzlemi oluştururuz (Şekil E.10). Sonra, uzunluğu $|\mathbf{v}| \sin\theta$ olan bir $\mathbf{v}'$ vektörü oluşturacak şe-



ŞEKİL E.10 Metinde açıklandığı gibi, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\ \mathbf{v}''$'dür.

kilde, **v**'nin M üzerine dik izdüşümünü alırız. $\mathbf{v}'$'nü **u** etrafında pozitif yönde 90° döndürerek bir $\mathbf{v}''$ vektörü oluştururuz. Son olarak $\mathbf{v}''$'nü **u**'nın uzunluğuyla çarparız.

$$|\mathbf{u}||\mathbf{v}''| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}'| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|.$$

olur. Bu üç işlemin her biri, yani

1. M üzerine izdüşüm,
2. **u** etrafında 90°'lik dönme,
3. $|\mathbf{u}|$ skaleri ile çarpma,

düzlemi **u**'ya dik olmayan bir üçgene uygulandıklarında, başka bir üçgen oluştururlar. Kenarları **v**, **w** ve **v** + **w** olan bir üçgenle işe başlar (Şekil E. 11) ve bu üç adımı uygularsak, sırasıyla şunları elde ederiz:

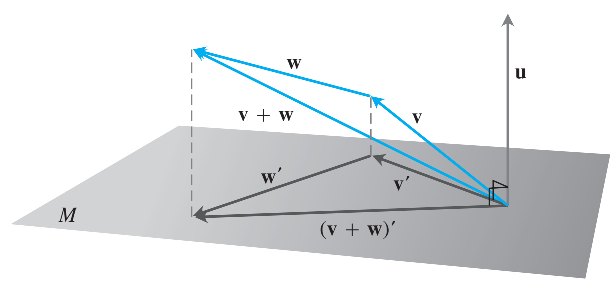
1. Kenarları $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ ve $(\mathbf{v}+\mathbf{w})'$ olan ve aşağıdaki vektör denklemini sağlayan bir üçgen

$$\mathbf{v}' + \mathbf{w}' = (\mathbf{v} + \mathbf{w})'$$

2. Kenarları $\mathbf{v}''$, $\mathbf{w}''$ ve $(\mathbf{v}+\mathbf{w})''$ olan ve aşağıdaki vektör denklemini sağlayan bir üçgen

$$\mathbf{v}'' + \mathbf{w}'' = (\mathbf{v} + \mathbf{w})''$$

(Vektörlerdeki çitf üst işareti Şekil E.10'dakiyle aynı anlamdadır);



ŞEKİL E.11 **v**, **w**, **v** + **w** vektörleri ve bunların **u**'ya dik bir düzlemdeki izdüşümleri.

3. Kenarları $|\mathbf{u}|\mathbf{v}''$, $|\mathbf{u}|\mathbf{w}''$ ve $|\mathbf{u}|(\mathbf{v} + \mathbf{w})''$ olan ve aşağıdaki vektör denklemini sağlayan bir üçgen

$$|\mathbf{u}|\mathbf{v}'' + |\mathbf{u}|\mathbf{w}'' = |\mathbf{u}|(\mathbf{v} + \mathbf{w})''$$

Yukarıda tartışırken bulunan $|\mathbf{u}|\mathbf{v}'' = \mathbf{u} \times \mathbf{v}, |\mathbf{u}|\mathbf{w}'' = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ ve $|\mathbf{u}|(\mathbf{v} + \mathbf{w})'' = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w})$'nü bu son denklemde yerine koymak

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}),$$

verir, ki bu da gerçeklemek istediğimiz kuraldır. ■

E.7 Karışık Türev Teoremi ve Artım Teoremi

Bu ek Karışık Türev Teoremini (Bölüm 14.3, Teorem 2) ve İki Değişkenli Fonksiyonlar için Artım Teoremini (Bölüm 14.3, Teorem 2) türetir. Euler, Karışık Türev Teoremini ilk defa hidrodinamik üzerine yazdığı bir makaleler dizisinde 1734'te yayınlamıştır.

TEOREM 2 Karışık Türev Teoremi
$f(x, y)$ ve kısmi türevleri, f_x, f_y, f_{xy} ve f_{yx} bir (a, b) noktasını içeren bir açık bölgede tanımlıysa ve hepsi (a, b) noktasında sürekliyse, $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ olur.

İspat $f_{xy}(a, b)$ ile $f_{yx}(a, b)$'nin eşit oldukları Ortalama Değer Teoremi (Bölüm 4.2, Teorem 4) dört kere uygulanarak gösterilebilir. Hipoteze göre, (a, b) noktası xy-düzleminde, f_x, f_y, f_{xy} ve f_{yx}'in hepsinin tanımlı olduğu bir R dikdörtgeninin içinde bulunmaktadır. h ve k sayılarını, $(a + h, b + k)$ noktası da R dikdörtgeni içinde bulunacak şekilde seçer ve

$$\Delta = F(a + h) - F(a) \tag{1}$$

olmak üzere,

$$F(x) = f(x, b + k) - f(x, b) \tag{2}$$

farkını inceleriz. F'ye (türetilebilir olduğu için süreklidir) Ortalama Değer Teoremini uygularız ve (2) denklemi, c_1 sayısı a ile $a + h$ arasında bulunmak üzere,

$$\Delta = hF'(c_1) \tag{3}$$

halini alır. (1) denkleminden,

$$F'(x) = f_x(x, b + k) - f_x(x, b),$$

bulunur, böylece (3) denklemi

$$\Delta = h[f_x(c_1, b + k) - f_x(c_1, b)] \tag{4}$$

halini alır. Şimdi Ortalama Değer Teoremini $g(y) = f_x(c_1, y)$ fonksiyonuna uygular ve, b ile $b + k$ arasındaki bir d_1 değeri için,

$$g(b + k) - g(b) = kg'(d_1),$$

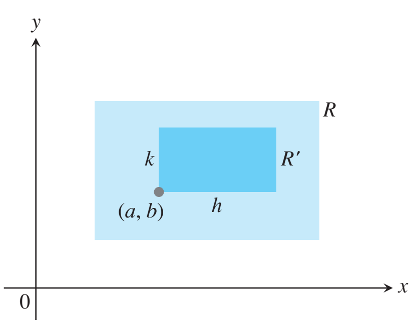
veya

$$f_x(c_1, b + k) - f_x(c_1, b) = kf_{xy}(c_1, d_1)$$

elde ederiz. Bunu (4) denklemine yerleştirerek, uç noktaları (a, b), $(a + h, b)$, $(a + h, b + k)$ ve $(a, b + k)$ olan R' dikdörtgeninde bulunan bir (c_1, d_1) noktası için

$$\Delta = hkf_{xy}(c_1, d_1) \tag{5}$$

elde ederiz (Şekil E.12'ye bakın).



ŞEKİL E.12 $f_{xy}(a,b)$'nin $f_{yx}(a, b)$'ye eşit olduğunu göstermenin anahtarı, R' ne kadar küçük olursa olsun, f_{xy} ve f_{yx}'nin R''nün içindeki bir yerde aynı değeri almalarıdır (aynı noktada olmasa bile).

(1) Denklemini (2) Denklemine yerleştirirsek,

$$\begin{aligned}\Delta &= f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b)\\ &= [f(a + h, b + k) - f(a, b + k)] - [f(a + h, b) - f(a, b)]\\ &= \phi(b + k) - \phi(b)\end{aligned} \tag{6}$$

olmak üzere,

$$\phi(y) = f(a + h, y) - f(a, y) \tag{7}$$

elde ederiz. (7) denklemine Ortalama Değer Teoreminin uygulanması, b ile $b + k$ arasındaki bir d_2 için,

$$\Delta = k\phi'(d_2) \tag{8}$$

verir.
(6) Denkleminden

$$\phi'(y) = f_y(a + h, y) - f_y(a, y). \tag{9}$$

bulunur. (9) denklemini (8) denklemine yerleştirmek

$$\Delta = k[f_y(a + h, d_2) - f_y(a, d_2)].$$

verir. Son olarak, köşeli parantezin içindeki ifadeye Ortalama Değer Teoremini uygulayarak, a ile $a + h$ arasındaki bir c_2 değeri için,

$$\Delta = khf_{yx}(c_2, d_2) \tag{10}$$

elde ederiz.

(5) ve (10) Denklemleri birlikte, hem (c_1, d_1) hem de (c_2, d_2) R' dikdörtgeninin içinde bulunmak üzere (Şekil E.12)

$$f_{xy}(c_1, d_1) = f_{yx}(c_2, d_2), \tag{11}$$

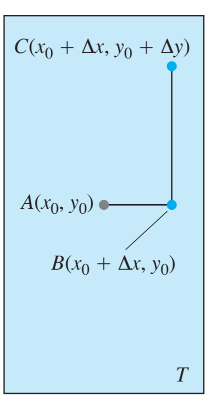
olduğunu gösterir. (11) Denklemi tam olarak istediğimiz sonuç değildir, çünkü sadece f_{xy}'nin (c_1, d_1)'de, f_{yx}'in (c_2, d_2)'deki değerine eşit olduğunu söyler. Ama tartışmamızdaki h ve k sayıları istediğimiz kadar küçük yapılabilir. f_{xy} ve f_{yx}'in ikisinin de (a, b)'de sürekli oldukları hipotezi, h ve $k \to 0$ iken $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ olmak koşuluyla, $f_{xy}(c_1, d_1) = f_{xy}(a, b) +$ e1 ve $f_{yx}(c_2, d_2) = f_{yx}(a, b) + \epsilon_2$ olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla, h ve k'yi sıfıra götürürsek, $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ elde ederiz. ■

TEOREM 3 İki Değişkenli Fonksiyonların Artım Teoremi

$z = f(x, y)$'nin birinci kısmi türevlerinin (x_0, y_0) noktasını içeren bir açık R bölgesinde tanımlı olduklarını ve f_x ile f_y'nin (x_0, y_0)'da sürekli olduklarını varsayın. Bu durumda, (x_0, y_0)'dan R'deki başka bir $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ noktasına ilerlemekten kaynaklanan f'nin değerindeki $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ değişimi, $\Delta x, \Delta y \to 0$ iken $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ koşuluyla,

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

şeklinde bir denklemi sağlar.



ŞEKİL E.13 Artım Teoreminin ispatındaki dikdörtgen T bölgesi. Şekil, pozitif Δx ve Δy için çizilmiştir, ama her iki artım sıfır veya negatif de olabilir.

İspat Merkezi $A(x_0, y_0)$'da olan ve R'nin içinde bulunan bir T dikdörtgeninin içinde çalışacak ve Δx ve Δy'nin de A'yı $B(x_0 + \Delta x, y_0)$'ye bağlayan doğru parçası ile B'yi $C(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$'ye bağlayan doğru parçasının T'nin içinde olmasını sağlayacak kadar küçük olduklarını varsayacağız (Şekil E.13).

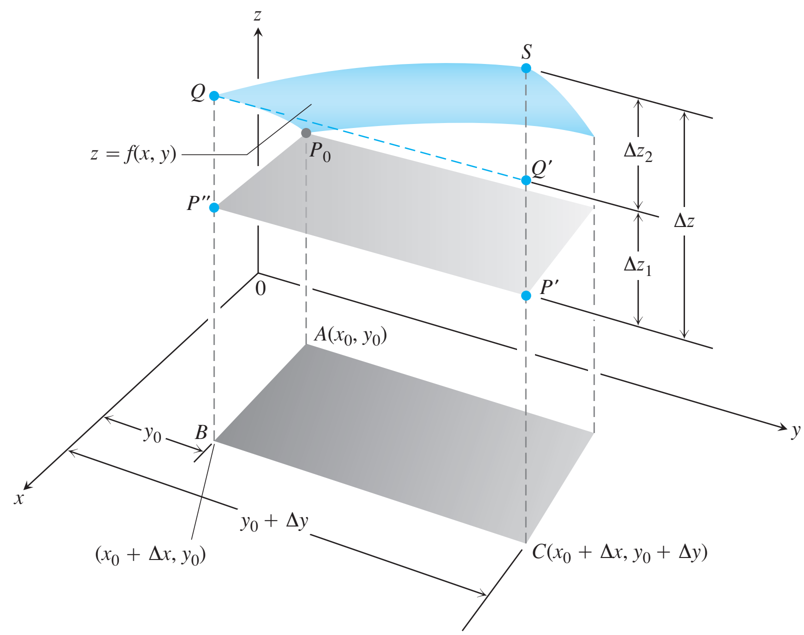
Δz'yi,

$$\Delta z_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

A'dan B'ye kadar f'nin değerindeki değişim ve

$$\Delta z_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$$

B'den C'ye kadar f'nin değerindeki değişim (Şekil E.14) olmak üzere, iki artımın toplamı olarak $\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2$ şeklinde yazabiliriz.



ŞEKİL E.14 $z = f(x, y)$ yüzeyinin $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ civarındaki parçası. P_0, P' ve P'' noktalarının xy-düzleminin üzerindeki yükseklikleri aynıdır. z'deki değişiklik $\Delta z = P'S$'dir. $P''Q = P'Q'$ olarak gösterilen

$$\Delta z_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

değişimi y'yi y_0'a eşit tutarken, x'i x_0'dan $x_0 + \Delta x$'e değiştirmekten kaynaklanmaktadır. Sonra, x'i $x_0 + \Delta x$'e eşit tutarak elde edilen z'deki

$$\Delta z_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$$

değişimi, y'yi y_0'dan $y_0 + \Delta y$'ye değiştirmekten kaynaklanmaktadır. Bu $Q'S$ ile temsil edilmektedir. z'deki toplam değişim Δz_1 ile Δz_2'nin toplamıdır.

x_0'ı $x_0 + \Delta x$'e bağlayan kapalı x-değerleri aralığında, $F(x) = f(x, y_0)$ fonksiyonu x'in türetilebilir (ve dolayısıyla sürekli) bir fonksiyonudur ve türevi

$$F'(x) = f_x(x, y_0)$$

olarak bulunur. Ortalama Değer Teoremine göre (Bölüm 4.2, Teorem 4), x ile $x_0 + \Delta x$ arasında, x'in

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = F'(c)\Delta x$$

veya

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = f_x(c, y_0)\Delta x$$

veya

$$\Delta z_1 = f_x(c, y_0)\Delta x \tag{12}$$

olmasını sağlayan bir c değeri vardır.

Benzer şekilde, $G(y) = f(x_0 + \Delta x, y)$ fonksiyonu y_0 ile $y_0 + \Delta y$'yi birleştiren kapalı y aralığında y'nin türetilebilir (ve dolayısıyla sürekli) bir fonksiyonudur ve türevi,

$$G'(y) = f_y(x_0 + \Delta x, y)$$

olarak bulunur.

Böylece, y ile $y_0 + \Delta y$ arasında, y'nin

$$G(y_0 + \Delta y) - G(y_0) = G'(d)\Delta y$$

veya

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y) = f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y$$

veya

$$\Delta z_2 = f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y \tag{13}$$

olmasını sağlayan bir d değeri vardır.

Artık, Δx ve $\Delta y \to 0$ iken, $c \to x_0$ ve $d \to y_0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, f_x ve f_y (x_0, y_0)'da sürekli olduklarından, Δx ve $\Delta y \to 0$ iken,

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= f_x(c, y_0) - f_x(x_0, y_0), \\ \epsilon_2 &= f_y(x_0 + \Delta x, d) - f_y(x_0, y_0) \end{aligned} \tag{14}$$

büyüklüklerinin ikisi de sıfıra yaklaşır.

Son olarak, Δx ve $\Delta y \to 0$ iken ϵ_1 ve $\epsilon_2 \to 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Delta z &= \Delta z_1 + \Delta z_2 \\ &= f_x(c, y_0)\Delta x + f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y && \text{(12) ve (13)'ten denklemler} \\ &= [f_x(x_0, y_0) + \epsilon_1]\Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \epsilon_2]\Delta y && \text{(14)'ten denklemler} \\ &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y, \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da ispatlamak istediğimiz şeydir. ■

Benzer sonuçlar herhangi sonlu sayıda değişkenli fonksiyonlar için de geçerlidir.

$w = f(x, y, z)$ fonksiyonunun birinci mertebe kısmi türevlerinin (x_0, y_0, z_0) noktasını içeren bir açık bölgede tanımlı olduklarını ve f_x, f_y ve f_z'nin (x_0, y_0, z_0)'da sürekli olduklarını varsayın. Bu durumda,

$$\Delta x, \Delta y \text{ ve } \Delta z \to 0 \quad \text{iken} \quad \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \to 0$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Delta w &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) \\ &= f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y + \epsilon_3 \Delta z, \end{aligned} \tag{15}$$

olur. Bu formüldeki f_x, f_y, f_z kısmi türevleri (x_0, y_0, z_0) noktasında hesaplanabilirler.

(15) Denklemi, Δw değişimi

$$\Delta w_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) \tag{16}$$

$$\Delta w_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) \tag{17}$$

$$\Delta w_3 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0), \tag{18}$$

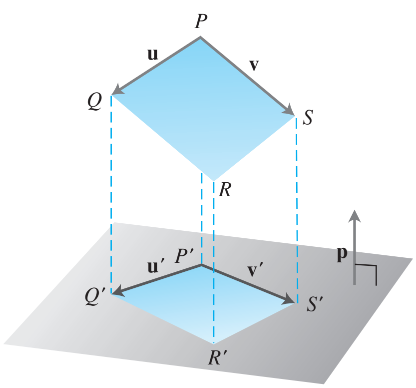
artımlarının toplamı olarak alınıp, Ortalama Değer Teoreminin bunların her birine ayrı ayrı uygulanmasıyla ispatlanabilir. Bu $\Delta w_1, \Delta w_2, \Delta w_3$ kısmi artımlarının her birinde, iki koordinat sabit tutulmakta ve biri değişmektedir. (17) Denkleminde, örneğin x, $x_0 + \Delta x$'e ve z de z_0'a eşit tutulduğu için, y değişmektedir. $f(x_0 + \Delta x, y, z_0)$ y'nin türevi f_y olan sürekli bir fonksiyonu olduğu için, Ortalama Değer Teoremi uygulanabilir ve y_0 ile $y_0 + \Delta y$ arasındaki bir y_1 değeri için

$$\Delta w_2 = f_y(x_0 + \Delta x, y_1, z_0)\Delta y$$

elde ederiz.

E.8 Bir Paralelkenarın Bir Düzlem Üzerine İzdüşümünün Alanı

Bu ek, Bölüm 16.5'te gerek duyulan, kenarları **u** ve **v** ile belirlenen paralelkenarın, normali **p** olan herhangi bir düzlem üzerine dik izdüşümünün alanının $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}|$ olduğu sonucunu ispatlamaktadır. (Şekil 15.A'ya bakın.)



Şekil E.15 Uzayda **u** ve **v** vektörleri tarafından belirlenen paralelkenar ve paralelkenarın bir düzlem üzerine dik izdüşümü. Düzleme ortogonal izdüşüm doğruları, birim normal vektör **p**'ye paraleldirler.

TEOREM
Kenarları, uzayda **u** ve **v** vektörleri ile belirlenen paralelkenarın, birim normal vektörü **p** olan herhangi bir düzlem üzerine dik izdüşümünün alanı

$$\text{Alan} = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}|$$

dir.

İspat **u** ve **v** vektörleri ile belirlenen tipik bir paralelkenarı ve birim normal vektörü **p** olan bir düzlem üzerine dik izdüşümünü gösteren Şekil 15.A'daki gösterimde,

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \overrightarrow{PP'} + \mathbf{u}' + \overrightarrow{Q'Q} \\
&= \mathbf{u}' + \overrightarrow{PP'} - \overrightarrow{QQ'} && (\overrightarrow{Q'Q} = -\overrightarrow{QQ'}) \\
&= \mathbf{u}' + s\mathbf{p}. && (\text{Bir } s \text{ skaleri için, çünkü } (\overrightarrow{PP'} - \overrightarrow{QQ'})\ \mathbf{p}\text{'ye paraleldir})
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde, bir t skaleri için

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + t\mathbf{p}$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (\mathbf{u}' + s\mathbf{p}) \times (\mathbf{v}' + t\mathbf{p}) \\
&= (\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') + s(\mathbf{p} \times \mathbf{v}') + t(\mathbf{u}' \times \mathbf{p}) + st\underbrace{(\mathbf{p} \times \mathbf{p})}_{0}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

bulunur.
$\mathbf{p} \times \mathbf{v}'$ ve $\mathbf{u}' \times \mathbf{p}$ vektörlerinin ikisi de **p** vektörüne ortogonaldir. Dolayısıyla, (1) Denkleminin her iki tarafını **p** ile skaler (·) çarptığımızda, sağ tarafta sıfırdan farklı tek terim $(\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') \cdot \mathbf{p}$ olur. Yani,

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p} = (\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') \cdot \mathbf{p}.$$

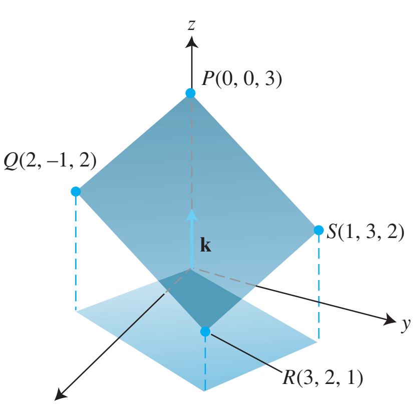
bulunur. Özel olarak,

$$|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}| = |(\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') \cdot \mathbf{p}|. \qquad (2)$$

olur. Sağdaki mutlak değer, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ ve **p** tarafından belirlenen kutunun hacmidir. Bu özel kutunun yüksekliği $|\mathbf{p}| = 1$ dir ve kutunun hacmi sayısal olarak tabanının alanına, $P'Q'R'S'$ paralelkenarının alanına, eşittir. Bu gözlemi (2) Denklemi ile bireştirmek

$$\text{Area of } P'Q'R'S' = |(\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') \cdot \mathbf{p}| = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}|,$$

verir. Bu da, **u** ve **v** vektörleri ile belirlenen paralelkenarın, birim normal vektörü **p** olan herhangi bir düzlem üzerine dik izdüşümünün alanının $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}|$ olduğunu söylemektedir. ■



ŞEKİL E.16 Örnek 1, *PQRS* paralelkenarının *xy*-düzlemine dik izdüşümünün alanını hesaplamaktadır.

ÖRNEK 1 Bir İzdüşümün Alanını Bulmak

$P(0, 0, 3)$, $Q(2, -1, 2)$, $R(3, 2, 1)$ ve $S(1, 3, 2)$ noktaları tarafından belirlenen paralelkenarın *xy*-düzlemine dik izdüşümünün alanının bulun (Şekil E.16).

Çözüm

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}, \qquad \mathbf{v} = \overrightarrow{PS} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}, \qquad \text{ve} \qquad \mathbf{p} = \mathbf{k}$$

ile

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$

buluruz. dolayısıyla alan $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}| = |7| = 7$ bulunur. ■

E.9 Temel Cebir, Geometri ve Trigonometri Formülleri

Cebir

Aritmetik İşlemler

$$a(b + c) = ab + ac, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

İşaret Kuralları

$$-(-a) = a, \qquad \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Sıfır Sıfırla bölme tanımlı değildir.

$$a \neq 0 \text{ ise: } \frac{0}{a} = 0, \quad a^0 = 1, \quad 0^a = 0$$

$$\text{Herhangi bir } a \text{ için : } a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

Kuvvet Kuralları

$$a^m a^n = a^{m+n}, \qquad (ab)^m = a^m b^m, \qquad (a^m)^n = a^{mn}, \qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$a \neq 0$ ise

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a^0 = 1, \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Binom Teoremi

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \cdots + nab^{n-1} + b^n.$$

Örneğin,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad (a-b)^3 = a^2 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Tam Sayı Kuvvet Farklarının Çarpanlara Ayrılışı, $n > 1$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Örneğin,

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$
$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3).$$

Tam Kareye Tamamlama, $a \neq 0$ ise

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$
$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$
$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + a\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$
$$= \underbrace{a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right)}_{\text{Bu } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \text{ dir}} + \underbrace{c - \frac{b^2}{4a}}_{\text{Bu kısma } C \text{ deyin}}$$
$$= au^2 + C \qquad (u = x + (b/2a))$$

Kuadratik Formül $a \neq 0$ ve $ax^2 + bx + c = 0$ ise,

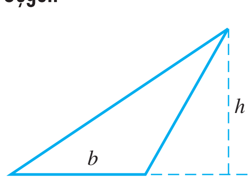
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dır.

Geometri

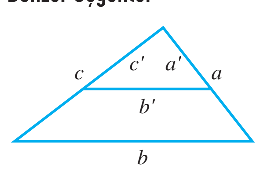
Alan, çevre ve hacim formülleri : (A = Alan, B = taban alanı, C = çevre, S = yanal alan veya yüzey alanı, V = hacim)

Üçgen



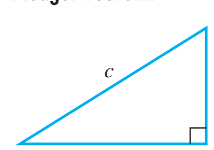
$A = \frac{1}{2}bh$

Benzer Üçgenler



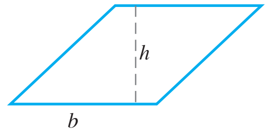
$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$

Pisagor Teoremi



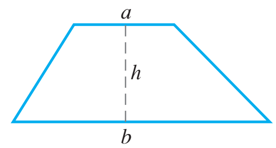
$a^2 + b^2 = c^2$

Paralelkenar



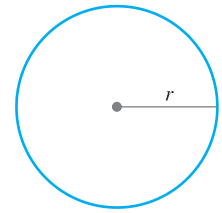
$A = bh$

Trapezoid



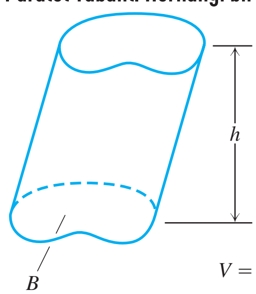
$A = \frac{1}{2}(a + b)h$

Çember

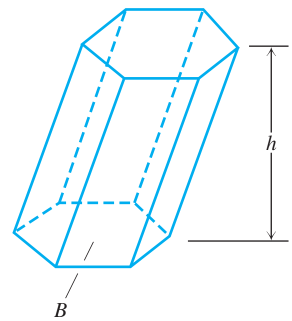


$A = \pi r^2,$
$C = 2\pi r$

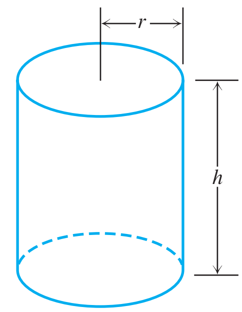
Paralel Tabanlı Herhangi bir Silindir veya Prizma



$V = Bh$

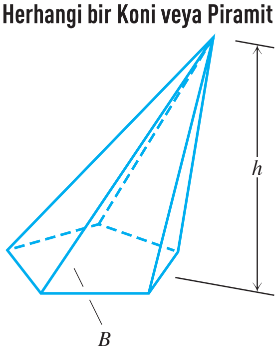


Dik Dairesel Silindir

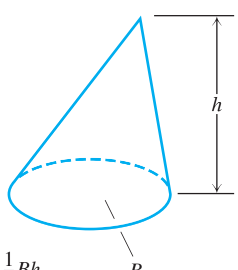


$V = \pi r^2 h$
$S = 2\pi rh =$ Yan alan

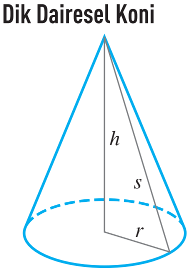
Herhangi bir Koni veya Piramit



$V = \frac{1}{3}Bh$

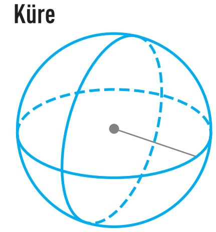


Dik Dairesel Koni



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
$S = \pi rs =$ Yan alan

Küre



$V = \frac{4}{3}\pi r^3,\ S = 4\pi r^2$

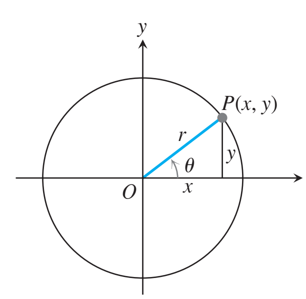
Trigonometri Formülleri

Tanımlar ve Temel Özdeşlikler

Sinüs: $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\csc\theta}$

Cosinüs: $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sec\theta}$

Tanjant: $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{\cot\theta}$



Özdeşlik

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta, \quad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta, \quad \csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}, \qquad \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

$$\sin\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos A, \qquad \cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = \sin A$$

$$\sin\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \cos A, \qquad \cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin A$$

$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}\cos(A - B) - \frac{1}{2}\cos(A + B)$$

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\cos(A - B) + \frac{1}{2}\cos(A + B)$$

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}\sin(A - B) + \frac{1}{2}\sin(A + B)$$

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A - B)$$

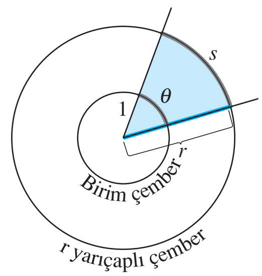
$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B)\sin\frac{1}{2}(A - B)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A - B)$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{1}{2}(A + B)\sin\frac{1}{2}(A - B)$$

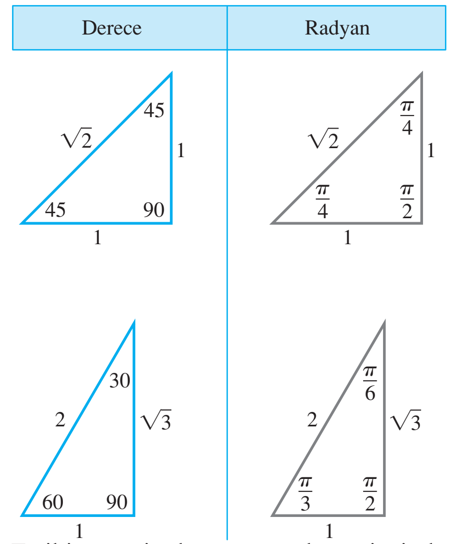
Trigonometrik Fonksiyonlar

Radyan Ölçü

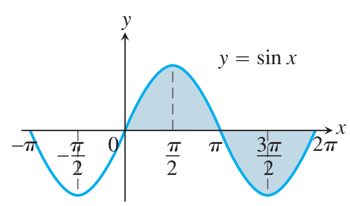


$$\frac{s}{r} = \frac{\theta}{1} = \theta \quad \text{veya} \quad \theta = \frac{s}{r},$$

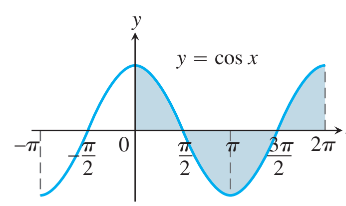
$180° = \pi$ radyan



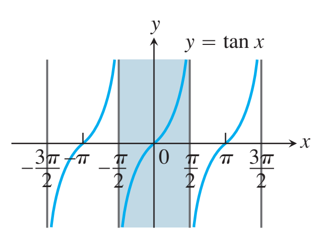
Eş iki üçgenin derece ve radyan cinsinden açıları



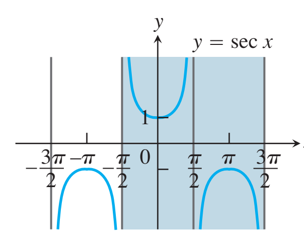
Tanım Kümesi: $(-\infty, \infty)$
Değer Kümesi: $[-1, 1]$



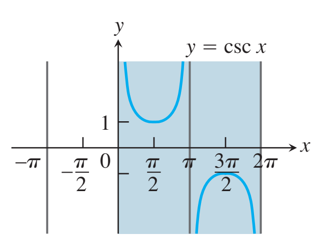
Tanım Kümesi: $(-\infty, \infty)$
Değer Kümesi: $[-1, 1]$



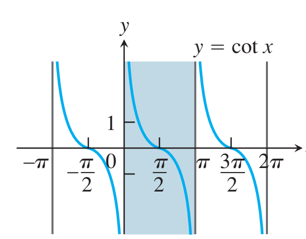
Tanım Kümesi: $\pi/2$'nin tek tamsayı katı dışındaki bütün reel sayılar
Değer Kümesi: $(-\infty, \infty)$



Tanım Kümesi: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Değer Kümesi: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Tanım Kümesi: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Değer Kümesi: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Tanım Kümesi: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Değer Kümesi: $(-\infty, \infty)$

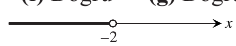
CEVAPLAR

BÖLÜM 1

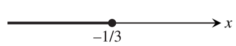
Bölüm 1.1, sayfa 7–8

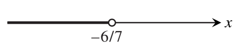
1. $0.\bar{1}, 0.\bar{2}, 0.\bar{3}, 0.\bar{8}, 0.\bar{9}$ veya 1

3. **(a)** Doğru olması gerekmiyor **(b)** Doğru **(c)** Doğru **(d)** Doğru **(e)** Doğru **(f)** Doğru **(g)** Doğru **(h)** Doğru

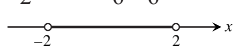
5. $x < -2$ 

7. $x \le \frac{5}{4}$ 

9. $x \le -\frac{1}{3}$ 

11. $x < -\frac{6}{7}$ 

13. ± 3 **15.** $-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}$ **17.** $\frac{7}{6}, \frac{25}{6}$

19. $-2 < x < 2$ 

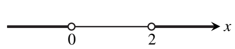
21. $-2 \le t \le 4$ 

23. $1 < y < \frac{11}{3}$ 

25. $0 \le z \le 10$ 

27. $\frac{2}{7} < x < \frac{2}{5}$ veya $\frac{10}{35} < x < \frac{14}{35}$ 

29. $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ 

31. $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ 

33. $(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$ 

35. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ **37.** $(-3, -2) \cup (2, 3)$ **39.** $(-1, 3)$

41. $(0, 1)$ **43.** $a \ge 0$ herhangi bir negatif reel sayı

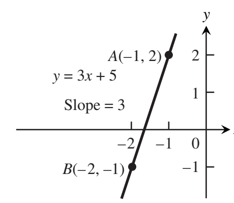
47. $-\frac{1}{2} < x \le 3$

Bölüm 1.2, Sayfa 16–19

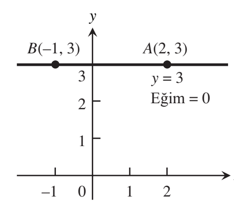
1. $2, -4; 2\sqrt{5}$ **3.** $-4.9, 0; 4.9$ **5.** Birim çember

7. Merkezi orijinde olan $\sqrt{3}$ yarıçaplı çember ve içi.

9. $m_{\perp} = -\frac{1}{3}$



11. $m_{\perp}$ tanımsız.



13. **(a)** $x = -1$ **(b)** $y = 4/3$

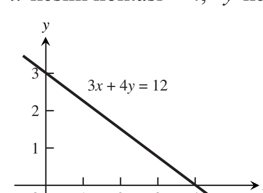
15. **(a)** $x = 0$ **(b)** $y = -\sqrt{2}$

17. $y = -x$ **19.** $y = -\frac{x}{5} + \frac{23}{5}$ **21.** $y = -\frac{5}{4}x + 6$

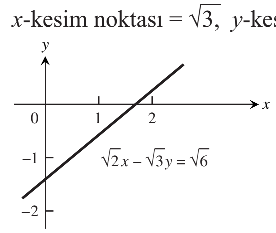
23. $y = -9$ **25.** $y = 4x + 4$ **27.** $y = -\frac{2}{5}x + 1$

29. $y = -\frac{x}{2} + 12$

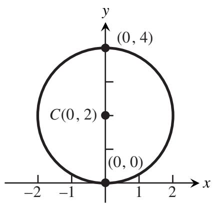
31. x-kesim noktası = 4, y-kesim noktası = 3



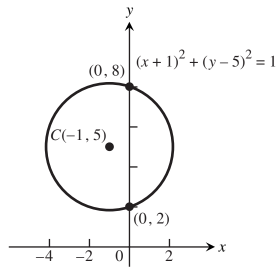
33. x-kesim noktası = $\sqrt{3}$, y-kesim noktası = $-\sqrt{2}$



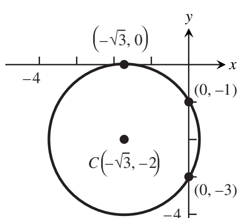
35. Evet. Doğrular diktir, çünkü eğimler, $-A/B$ ve B/A birbilerinin çarpmaya göre terslerinin negatifidir.
37. $(3, -3)$ **39.** $(-2, -9)$
41. $x^2 + (y - 2)^2 = 4$



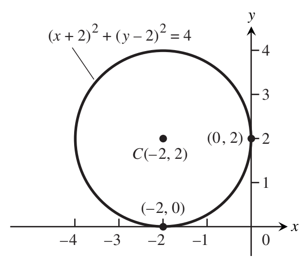
43. $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 10$



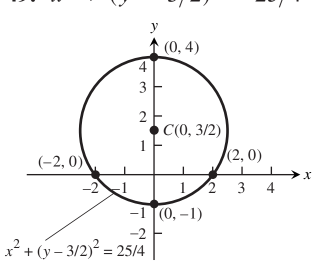
45. $(x + \sqrt{3})^2 + (y + 2)^2 = 4$



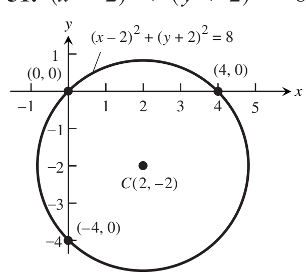
47. $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$



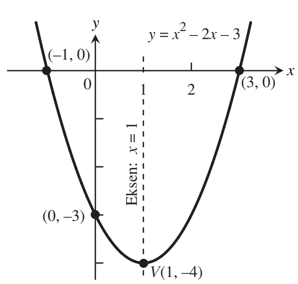
49. $x^2 + (y - 3/2)^2 = 25/4$



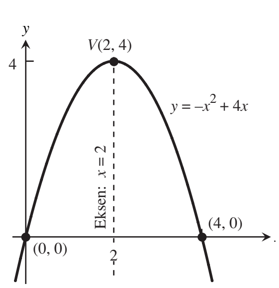
51. $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8$



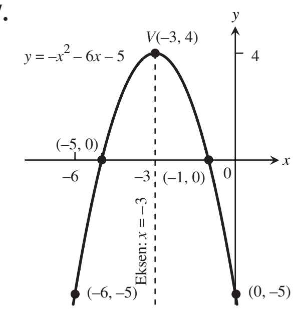
53.



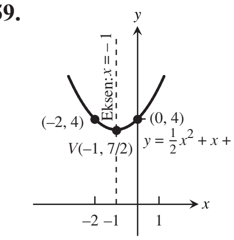
55.



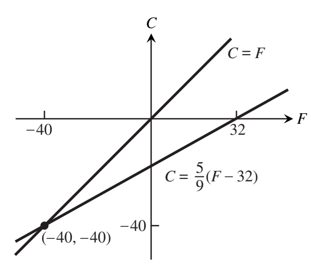
57.



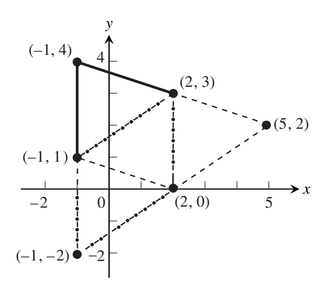
59.



61. Merkezi orijinde olan $\sqrt{7}$ yarıçaplı çemberin dış noktaları
63. Merkezi (1,0)'da olan 2 yarıçaplı çember ve içi
65. $x^2 + y^2 = 1$ ve $x^2 + y^2 = 4$ çemberleri arasında kalan bölge (Orijinden uzaklıkları 1 ile 2 arasında olan noktalar)
67. Merkezi (0, –3)'ta olan 3 yarıçaplı çemberin içinde, $y = -3$ doğrusunun üst tarafında kalan noktalar.
69. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 < 6$ **71.** $x^2 + y^2 \leq 2, \quad x \geq 1$
73. $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$
75. $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right), \quad \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$
77. $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}\right)$
79. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
81. **(a)** ≈ -2.5 derece/inç **(b)** ≈ -16.1 derece/inç **(c)** ≈ -8.3 derece/inç **83.** 5.97 atm
85. Evet: $C = F = -40°$



91.



93. $k = -8, \quad k = 1/2$

Bölüm 1.3, Sayfa 26–28

1. $D: (-\infty, \infty), \quad R: [1, \infty)$ **3.** $D: (0, \infty), \quad R: (0, \infty)$
5. $D: [-2, 2], \quad R: [0, 2]$

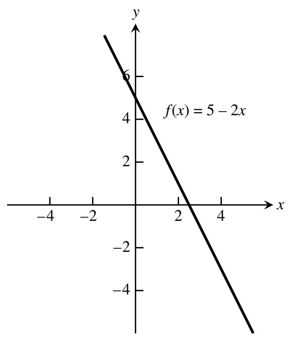
7. **(a)** x'in fonksiyonu değildir, çünkü bazı x değerlerinin iki y değeri vardır. **(b)** x'in bir fonksiyonudur, çünkü her x için tek bir olası y vardır.

9. **(a)** Hayır **(b)** Hayır **(c)** Hayır **(d)** $(0, 1]$

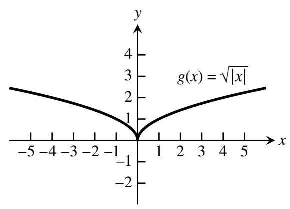
11. $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2, \quad p = 3x$

13. $x = \dfrac{d}{\sqrt{3}}, \quad A = 2d^2, \quad V = \dfrac{d^3}{3\sqrt{3}}$

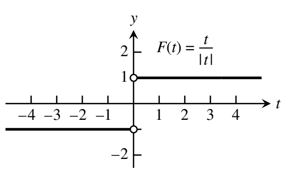
15. $(-\infty, \infty)$



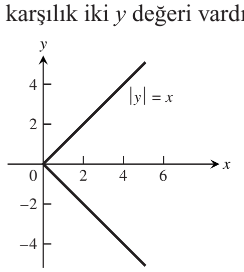
17. $(-\infty, \infty)$

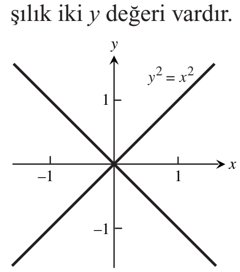


19. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

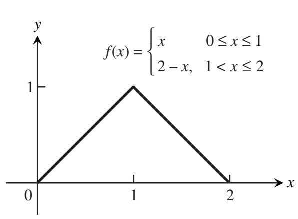


21. **(a)** x'in her pozitif değerine karşılık iki y değeri vardır. **(b)** Her $x \neq 0$ değerine karşılık iki y değeri vardır.

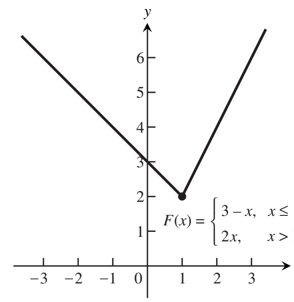




23.



25.



27. **(a)** $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ -x + 2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x < 2 \\ 2, & 2 \le x < 3 \\ 0, & 3 \le x \le 4 \end{cases}$

29. **(a)** $f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \le x < 0 \\ 1, & 0 < x \le 1 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, & 1 < x < 3 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & -2 \le x \le 0 \\ -2x + 2, & 0 < x \le 1 \\ -1, & 1 < x \le 3 \end{cases}$

31. **(a)** $(-2, 0) \cup (4, \infty)$

33. **(a)** $0 \le x < 1$ **(b)** $-1 < x \le 0$

35. Evet **37.** $V = x(14 - 2x)(22 - 2x)$

39. **(a)** Asıl çemberin çevresi 8π olduğundan ve uzunluğunda bir parça kesildiğinden

(b) $r = \dfrac{8\pi - x}{2\pi} = 4 - \dfrac{x}{2\pi}$

(c) $h = \sqrt{16 - r^2} = \dfrac{\sqrt{16\pi x - x^2}}{2\pi}$

(d) $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{(8\pi - x)^2\sqrt{16\pi x - x^2}}{24\pi^2}$

Bölüm 1.4, Sayfa 37–38

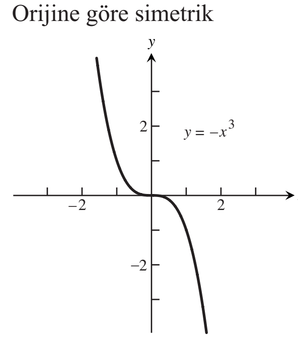
1. **(a)** Doğrusal, cebirsel, 1. dereceden polinom **(b)** kuvvet, cebirsel **(c)** rasyonel, cebirsel **(d)** üstel

3. **(a)** rasyonel, cebirsel **(b)** cebirsel **(c)** trigonometrik **(d)** logaritmik

5. **(a)** h **(b)** f **(c)** g

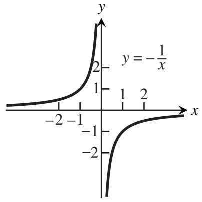
7. Orijine göre simetrik

Azalan: $-\infty < x < \infty$



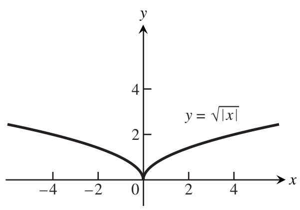
9. Orijine göre simetrik

Artan: $-\infty < x < 0$ ve $0 < x < \infty$



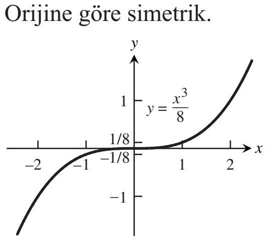
11. y-eksenine göre simetrik

Azalan: $-\infty < x \leq 0$
Artan: $0 \leq x < \infty$



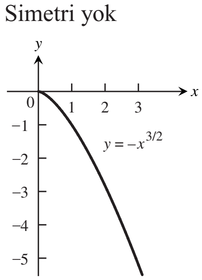
13. Orijine göre simetrik.

Artan: $-\infty < x < \infty$



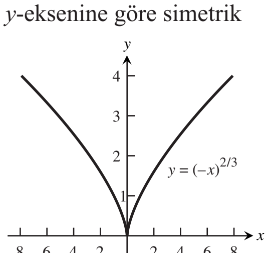
15. Simetri yok

Azalan: $0 \leq x < \infty$



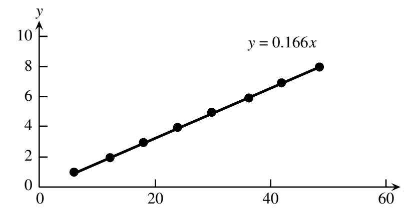
17. y-eksenine göre simetrik

Azalan: $-\infty < x \leq 0$
Artan: $0 \leq x < \infty$

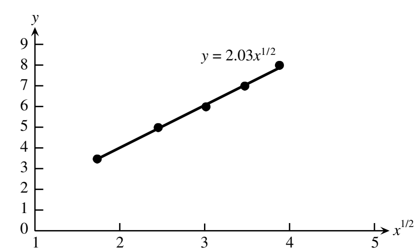


19. Çift **21.** Çift **23.** Tek **25.** Çift **27.** İkisi de değil
29. İkisi de değil

31. **(a)** Grafik, y'nin x ile orantılı olduğunu desteklemektedir. Orantı sabiti doğrunun eğiminden tahmin edilir ve 0.166 dır.

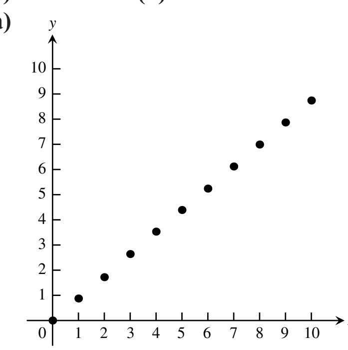


(b) Grafik, y'nin $x^{1/2}$ ile orantılı olduğunu desteklemektedir. Orantı sabiti doğrunun eğiminden tahmin edilir ve 2.03 tür.



33. **(a)** $k \approx 1.1$ **(b)** $k \approx 0.059$

35. **(a)**



(b) $k \approx 0.87$

(c) $x = 13$ ile $y = 0.87x$ kullanarak $y = 11.31$ buluruz.

Bölüm 1.5, Sayfa 45–48

1. $D_f : -\infty < x < \infty$, $D_g : x \geq 1$, $R_f : -\infty < y < \infty$, $R_g : y \geq 0$, $D_{f+g} = D_{f\cdot g} = D_g$, $R_{f+g} : y \geq 1$, $R_{f\cdot g} : y \geq 0$

3. $D_f : -\infty < x < \infty$, $D_g : -\infty < x < \infty$, $R_f : y = 2$, $R_g : y \geq 1$, $D_{f/g} : -\infty < x < \infty$, $R_{f/g} : 0 < y \leq 2$, $D_{g/f} : -\infty < x < \infty$, $R_{g/f} : y \geq 1/2$

5. **(a)** 2 **(b)** 22 **(c)** $x^2 + 2$ **(d)** $x^2 + 10x + 22$ **(e)** 5 **(f)** -2 **(g)** $x + 10$ **(h)** $x^4 - 6x^2 + 6$

7. **(a)** $\dfrac{4}{x^2} - 5$ **(b)** $\dfrac{4}{x^2} - 5$ **(c)** $\left(\dfrac{4}{x} - 5\right)^2$ **(d)** $\left(\dfrac{1}{4x - 5}\right)^2$ **(e)** $\dfrac{1}{4x^2 - 5}$ **(f)** $\dfrac{1}{(4x - 5)^2}$

9. **(a)** $f(g(x))$ **(b)** $j(g(x))$ **(c)** $g(g(x))$ **(d)** $j(j(x))$ **(e)** $g(h(f(x)))$ **(f)** $h(j(f(x)))$

11.

	$g(x)$	$f(x)$	$f \circ g(x)$
(a)	$x - 7$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x-7}$
(b)	$x + 2$	$3x$	$3x + 6$
(c)	x^2	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
(d)	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	x
(e)	$\frac{1}{x-1}$	$1 + \frac{1}{x}$	x
(f)	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	x

13. **(a)** $f(g(x)) = \sqrt{\frac{1}{x} + 1}, g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

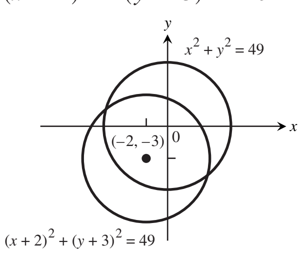
(b) $D_{f \circ g} = (0, \infty), D_{g \circ f} = (-1, \infty)$

(c) $R_{f \circ g} = (1, \infty), R_{g \circ f} = (0, \infty)$

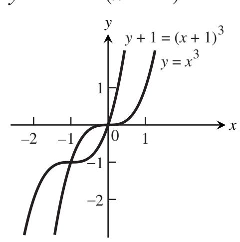
15. **(a)** $y = -(x+7)^2$ **(b)** $y = -(x-4)^2$

17. **(a)** Konum 4 **(b)** Konum 1 **(c)** Konum 2 **(d)** Konum 3

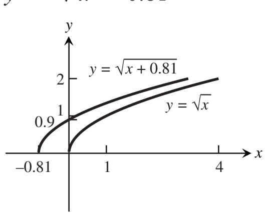
19. $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 49$



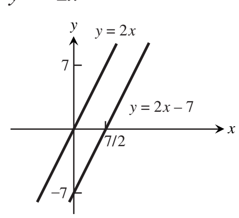
21. $y + 1 = (x+1)^3$



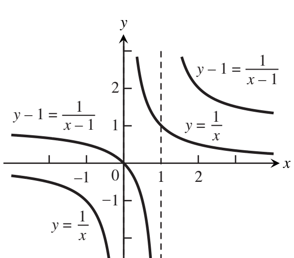
23. $y = \sqrt{x + 0.81}$



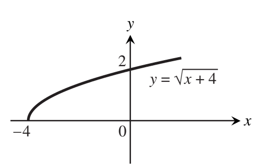
25. $y = 2x$



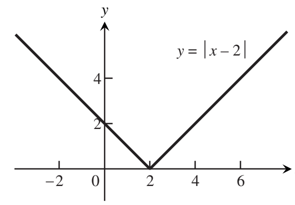
27. $y - 1 = \frac{1}{x-1}$



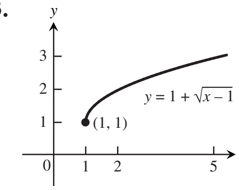
29.



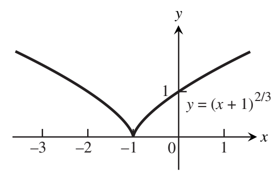
31.



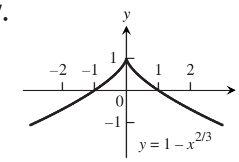
33.



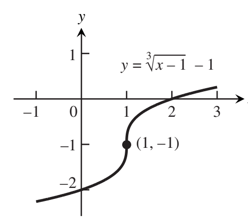
35.



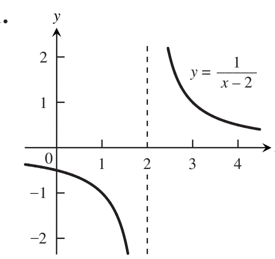
37.



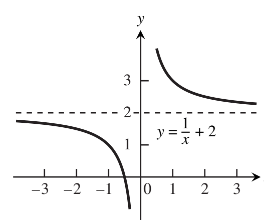
39.



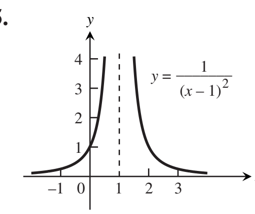
41.



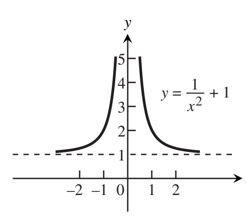
43.



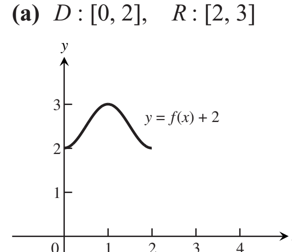
45.



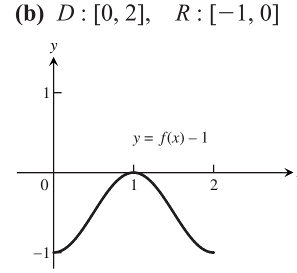
47.



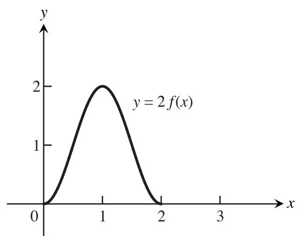
49. **(a)** $D : [0, 2], \quad R : [2, 3]$



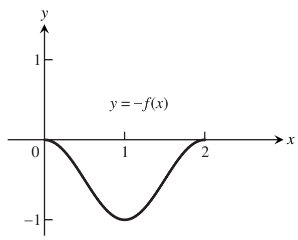
(b) $D : [0, 2], \quad R : [-1, 0]$



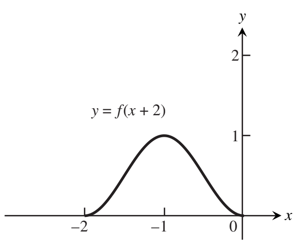
(c) $D : [0, 2], \quad R : [0, 2]$



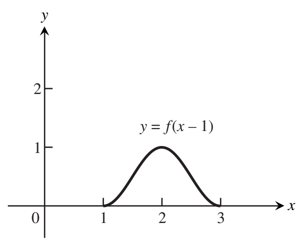
(d) $D : [0, 2], \quad R : [-1, 0]$



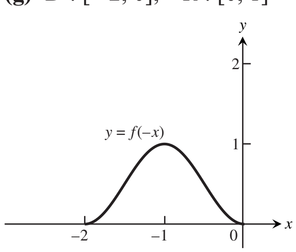
(e) $D : [-2, 0], \quad R : [0, 1]$



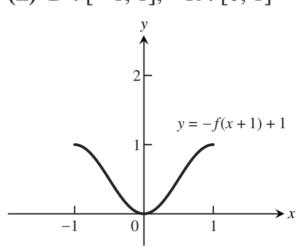
(f) $D : [1, 3], R : [0, 1]$



(g) $D : [-2, 0], \quad R : [0, 1]$



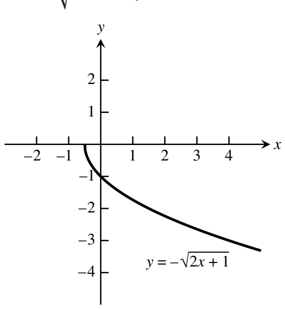
(h) $D : [-1, 1], \quad R : [0, 1]$



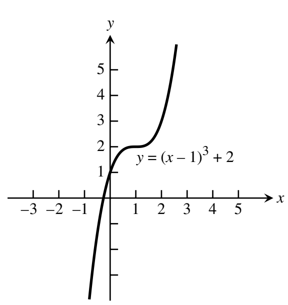
51. $y = 3x^2 - 3$ **53.** $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2x^2}$ **55.** $y = \sqrt{4x + 1}$

57. $y = \sqrt{4 - \dfrac{x^2}{4}}$ **59.** $y = 1 - 27x^3$

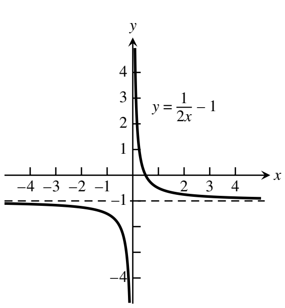
61.



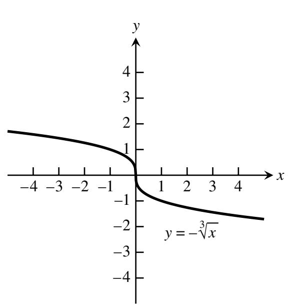
63.



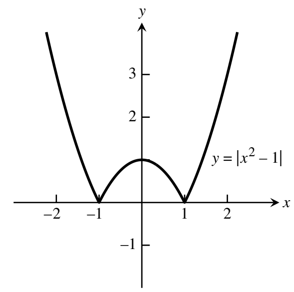
65.



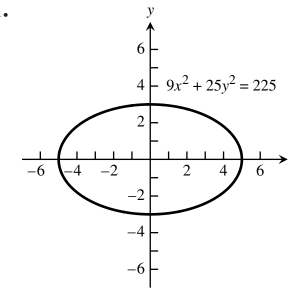
67.



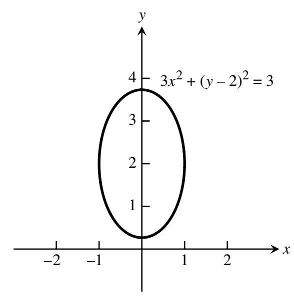
69.



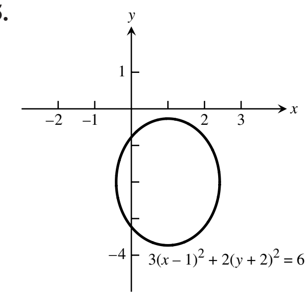
71.



73.

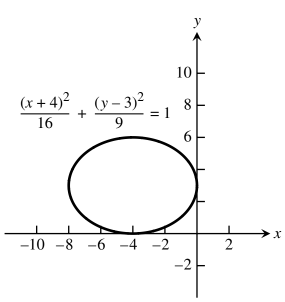


75.



77. $\dfrac{(x + 4)^2}{16} + \dfrac{(y - 3)^2}{9} = 1$ Merkez: $(-4, 3)$

Asal eksen (–8, 3) ve (0, 3) noktaları arasındaki doğru parçasıdır.



79. **(a)** Tek **(b)** Tek **(c)** Tek **(d)** Çift **(e)** Çift **(f)** Çift **(g)** Çift **(h)** Çift **(i)** Tek

Bölüm 1.6, Sayfa 56–58

1. **(a)** 8π m **(b)** $\dfrac{55\pi}{9}$ m **3.** 8.4 in.

5.

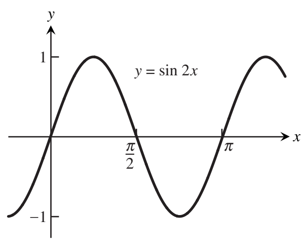
θ	$-\pi$	$-2\pi/3$	0	$\pi/2$	$3\pi/4$
$\sin\theta$	0	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos\theta$	−1	$-\dfrac{1}{2}$	1	0	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$\tan\theta$	0	$\sqrt{3}$	0	TANIMSIZ	−1
$\cot\theta$	TANIMSIZ	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	TANIMSIZ	0	−1
$\sec\theta$	−1	−2	1	TANIMSIZ	$-\sqrt{2}$
$\csc\theta$	TANIMSIZ	$-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	TANIMSIZ	1	$\sqrt{2}$

7. $\cos x = -4/5, \tan x = -3/4$

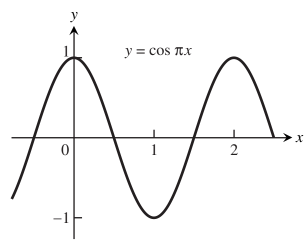
9. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{8}}{3}, \tan x = -\sqrt{8}$

11. $\sin x = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \cos x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

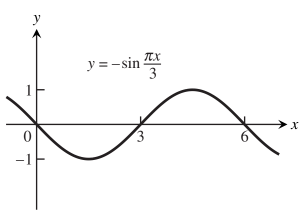
13. Periyot π



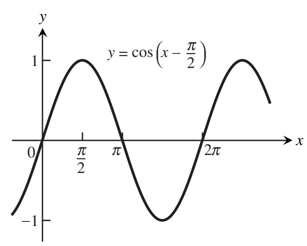
15. Periyot 2



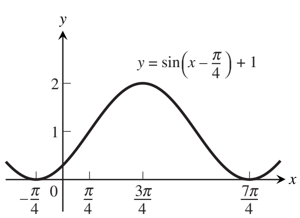
17. Periyot 6



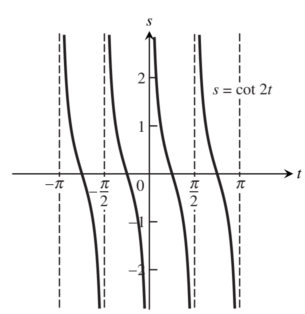
19. Periyot 2π



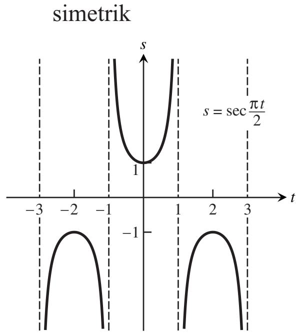
21. Periyot 2π



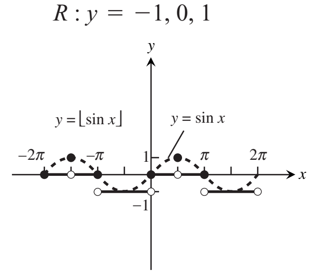
23. Periyot $\pi/2$ orijine göre simetrik



25. Periyot 4, y-eksenine göre simetrik



29. $D: (-\infty, \infty)$, $R: y = -1, 0, 1$

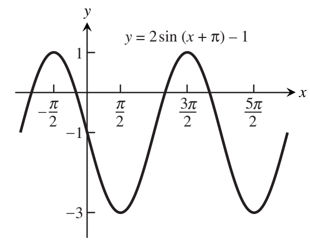


39. $-\cos x$ **41.** $-\cos x$ **43.** $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **45.** $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

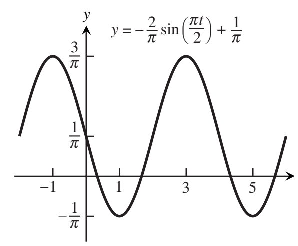
47. $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ **49.** $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$ **55.** $c = \sqrt{7} \approx 2.646$

59. $a = 1.464$

61. $A = 2, B = 2\pi, C = -\pi, D = -1$



63. $A = -\dfrac{2}{\pi}, B = 4, C = 0, D = \dfrac{1}{\pi}$

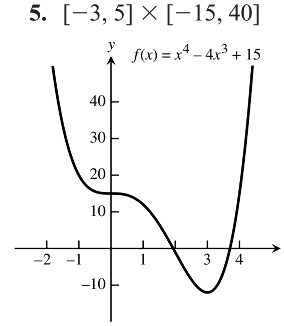


65. **(a)** 37 **(b)** 365 **(c)** Sağa 101 **(d)** Yukarı 25

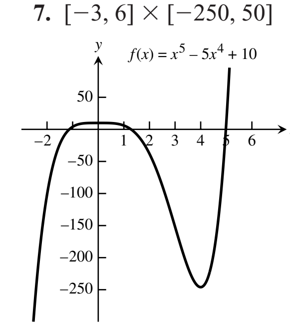
Bölüm 1.7, Sayfa 66–68

1. d) **3. d)**

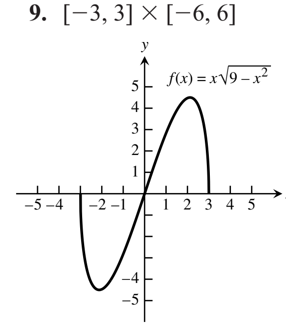
5. $[-3, 5] \times [-15, 40]$



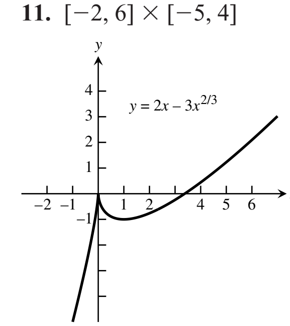
7. $[-3, 6] \times [-250, 50]$



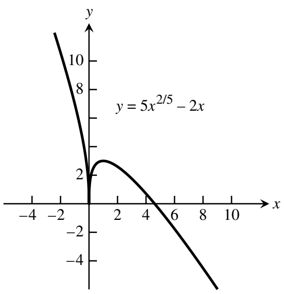
9. $[-3, 3] \times [-6, 6]$



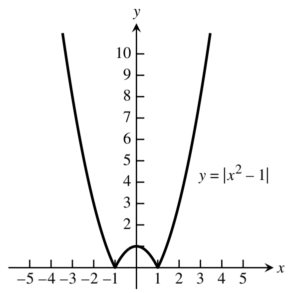
11. $[-2, 6] \times [-5, 4]$



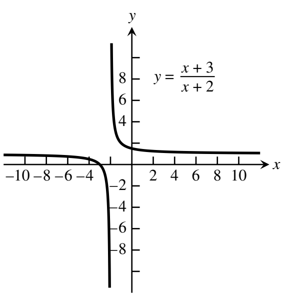
13. $[-2, 8] \times [-5, 10]$



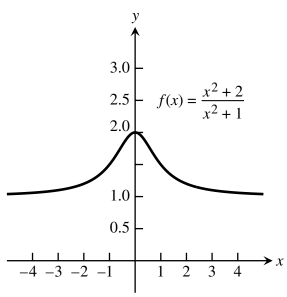
15. $[-3, 3] \times [0, 10]$



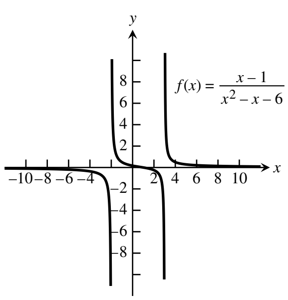
17. $[-15, 5] \times [-10, 10]$



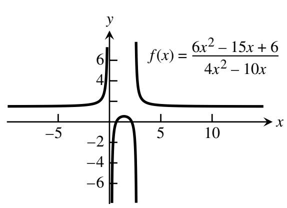
19. $[-4, 4] \times [0, 3]$



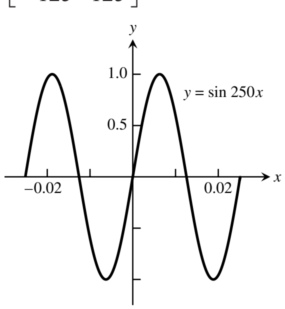
21. $[-10, 10] \times [-6, 6]$



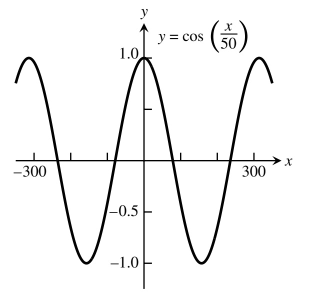
23. $[-6, 10] \times [-6, 6]$



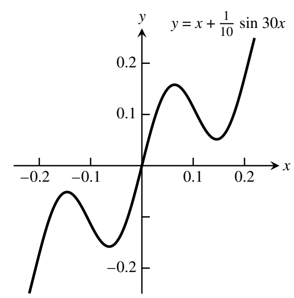
25. $\left[-\dfrac{\pi}{125}, \dfrac{\pi}{125}\right] \times [-1.25, 1.25]$



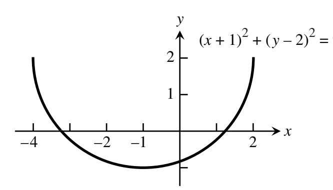
27. $[-100\pi, 100\pi] \times [-1.25, 1.25]$



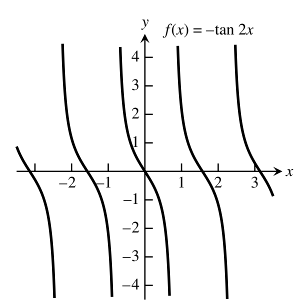
29. $\left[-\dfrac{\pi}{15}, \dfrac{\pi}{15}\right] \times [-0.25, 0.25]$



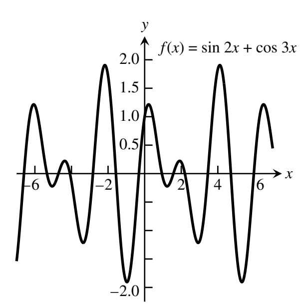
31.



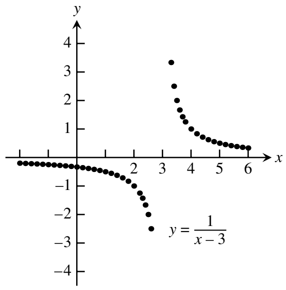
33.



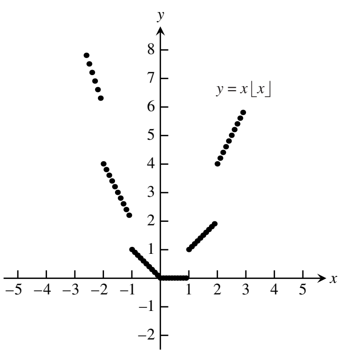
35.



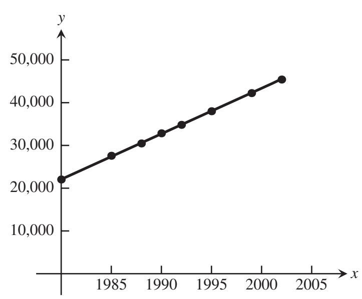
37.



39.

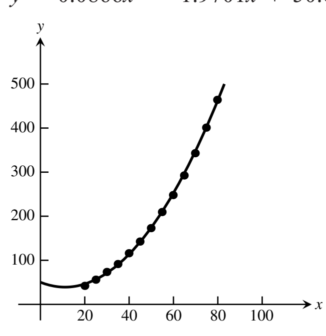


41. **(a)** $y = 1059.14x - 2074972.23$
(b) $m = 1059.14$; tazminatın her yıl artacağı miktardır.
(c)



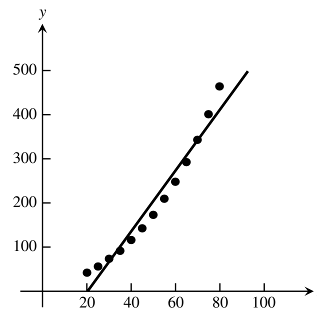
(d) \$53,899.17

43. **(a)** $y = 0.0866x^2 - 1.9701x + 50.0594$
(b)



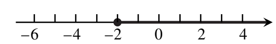
(c) Hız, 72 mil/sn ise, yaklaşık durma mesafesi 367.50 ft dir.
Hız, 85 mil/sn ise, yaklaşık durma mesafesi 522.67 ft dir.

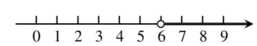
(d) $y = -140.4121 + 6.889x$



Hız, 72 mil /sn ise, yaklaşık durma mesafesi 355.60 ft dir.
Hız, 85 mil /sn ise, yaklaşık durma mesafesi 445.15 ft dir.
Kuadratik yaklaşım denklemi daha iyi uyar.

Problemler, Sayfa 69–70

1. $x \geq -2$ 

3. $x > 6$ 

5. $-8, 6$ **7.** $x < -1$ veya $x > 5$ **9.** $(0, 11)$

11. Hayır, uzunluğu aynı olan iki kenar yoktur, dik olan iki kenar yoktur.

13. $y = 3x - 9$ **15.** $x = 0$ **17.** $y = 2$ **19.** $y = -3x + 3$

21. $y = -\frac{4}{3}x - \frac{20}{3}$ **23.** $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

25. $A = \pi r^2, C = 2\pi r, A = \frac{C^2}{4\pi}$ **27.** $x = \tan\theta, y = \tan^2\theta$

29. Orijin **31.** Hiçbiri **33.** Çift **35.** Çift **37.** Tek

39. Hiçbiri **41.** **(a)** T.K.: bütün reel sayılar **(b)** D.K.: $[-2, \infty)$

43. **(a)** T.K.: $[-4, 4]$ **(b)** D.K.D.K.: $[0, 4]$

45. **(a)** T.K.: bütün reel sayılar **(b)** D.K.: $(-3, \infty)$

47. **(a)** T.K.: bütün reel sayılar **(b)** D.K.: $[-3, 1]$

49. **(a)** T.K.: $(3, \infty)$ **(b)** D.K.: bütün reel sayılar

51. **(a)** T.K.: $[-4, 4]$ **(b)** D.K.: $[0, 2]$

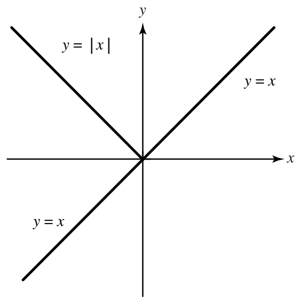
53. $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

55. **(a)** 1 **(b)** $\frac{1}{\sqrt{2.5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$ **(c)** $x, x \neq 0$

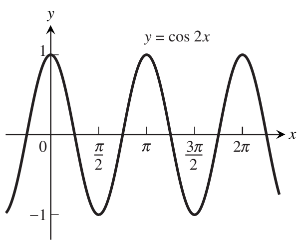
(d) $\frac{1}{\sqrt{1/\sqrt{x+2} + 2}}$

57. **(a)** $(f \circ g)(x) = -x, x \geq -2, (g \circ f)(x) = \sqrt{4 - x^2}$
(b) $(f \circ g)$'nin T.K.: $[-2, \infty)$, $(g \circ f)$'nin T.K.: $[-2, 2]$
(c) $(f \circ g)$'nin D.K.: $(-\infty, 2]$, $(g \circ f)$'nin D.K.: $[0, 2]$

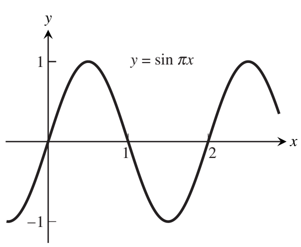
59. Yeni grafiği y-eksenine göre simetrik yapmak için, $x < 0$ olan kısmın yerine, $x > 0$ olan kısmın ayna simetriğini koyar.



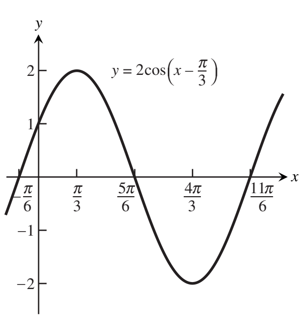
61. Değiştirmez.
63. Yeni grafiği y-eksenine göre simetrik yapmak için, $x > 0$ olan kısmın ayna simetriğini ekler.
65. $y < 0$ olan kısmı x-ekseninden yansıtır.
67. $y < 0$ olan kısmı x-ekseninden yansıtır.
69. Periyot π



71. Periyot 2



73.



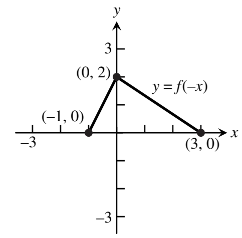
75. **(a)** $a = 1 \quad b = \sqrt{3}$ **(b)** $a = 2\sqrt{3}/3 \quad c = 4\sqrt{3}/3$

77. **(a)** $a = \dfrac{b}{\tan B}$ **(b)** $c = \dfrac{a}{\sin A}$

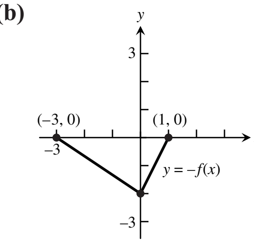
79. ≈ 16.98 m **81.** **(b)** 4π

Ek Alıştırmalar, Sayfa 71–72

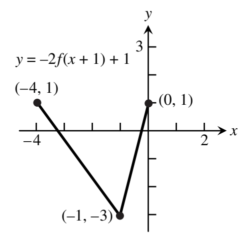
1. **(a)**



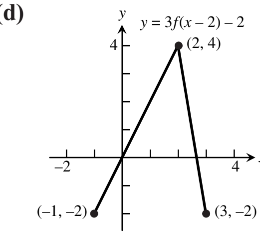
(b)



(c)

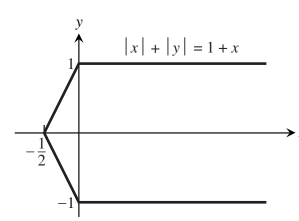


(d)



3. Evet. Örneğin: $f(x) = 1/x$ ve $g(x) = 1/x$ veya $f(x) = 2x$ ve $g(x) = x/2$ veya $f(x) = e^x$ ve $g(x) = \ln x$
5. $f(x)$ tek ise, $g(x) = f(x) - 2$ tek değildir. Her x için $f(x) = 0$ değilse, $g(x)$ çift de değildir. f çiftse, $g(x) = f(x) - 2$ de çifttir.

7.



9. $\sqrt{2}$ **11.** $3/4$ **13.** $3\sqrt{15}/16$ **27.** $-4 < m < 0$

BÖLÜM 2

Bölüm 2.1, Sayfa 81–84

1. **(a)** Yoktur. x, 1'e sağdan yaklaşırken, g(x) 0'a yaklaşır. x 1'e soldan yaklaşırken, $g(x)$ 1'e yaklaşır. $x \to 1$ iken, $g(x)$'in bütün değerlerinin yaklaştığı tek bir L sayısı yoktur. **(b)** 1 **(c)** 0
3. **(a)** Doğru **(b)** Doğru **(c)** Yanlış **(d)** Yanlış **(e)** Yanlış **(f)** Doğru
5. x, 0'a soldan yaklaşırken, $x/|x|$ -1'e yaklaşır. x, 1'e sağdan yaklaşırken, $x/|x|$ 1'e yaklaşır. $x \to 1$ iken, fonksiyon değerlerinin yaklaştığı tek bir L sayısı yoktur.
7. Bir şey söylenemez **9.** Hayır; hayır; hayır

11. **(a)** $f(x) = (x^2 - 9)/(x + 3)$

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0001	-3.00001	-3.000001
$f(x)$	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001	-6.00001	-6.000001

x	-2.9	-2.99	-2.999	-2.9999	-2.99999	-2.999999
$f(x)$	-5.9	-5.99	-5.999	-5.9999	-5.99999	-5.999999

(c) $\lim_{x \to -3} f(x) = -6$

13. **(a)** $G(x) = (x + 6)/(x^2 + 4x - 12)$

x	-5.9	-5.99	-5.999	-5.9999	-5.99999	-5.999999
$G(x)$	$-.126582$	$-.1251564$	$-.1250156$	$-.1250015$	$-.1250001$	$-.1250000$

x	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001	-6.00001	-6.000001
$G(x)$	$-.123456$	$-.124843$	$-.124984$	$-.124998$	$-.124999$	$-.124999$

(c) $\lim_{x \to -6} G(x) = -1/8 = -0.125$

15. **(a)** $f(x) = (x^2 - 1)/(|x| - 1)$

x	-1.1	-1.01	-1.001	-1.0001	-1.00001	-1.000001
$f(x)$	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	2.000001

x	$-.9$	$-.99$	$-.999$	$-.9999$	$-.99999$	$-.999999$
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	1.999999

(c) $\lim_{x \to -1} f(x) = 2$

17. **(a)** $g(\theta) = (\sin \theta)/\theta$

θ	.1	.01	.001	.0001	.00001	.000001
$g(\theta)$	.998334	.999983	.999999	.999999	.999999	.999999

θ	$-.1$	$-.01$	$-.001$	$-.0001$	$-.00001$	$-.000001$
$g(\theta)$	.998334	.999983	.999999	.999999	.999999	.999999

$\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = 1$

19. **(a)** $f(x) = x^{1/(1-x)}$

x	.9	.99	.999	.9999	.99999	.999999
$f(x)$	.348678	.366032	.367695	.367861	.367877	.367879

x	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	1.000001
$f(x)$	.385543	.369711	.368063	.367897	.367881	.367878

$\lim_{x \to 1} f(x) \approx 0.36788$

21. 4 **23.** 0 **25.** 9 **27.** $\pi/2$ **29.** **(a)** 19 **(b)** 1

31. **(a)** $-\dfrac{4}{\pi}$ **(b)** $-\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$ **33.** 1

35. Grafikler basım sırasında kayabilirler, o yüzden tahminleriniz bunlarla tam uyuşmayabilir.

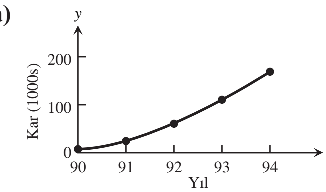
(a)

PQ_1	PQ_2	PQ_3	PQ_4
43	46	49	50

Uygun birimler m/sn'dir.

(b) $\approx$ 50 m/sn veya 180 km/sa.

37. **(a)**



(b) $\approx$ \$56,000/yıl
(c) $\approx$ \$42,000/yıl

39. **(a)** 0.414213, 0.449489, $(\sqrt{1+h} - 1)/h$ **(b)** $g(x) = \sqrt{x}$

$1 + h$	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	1.000001
$\sqrt{1+h}$	1.04880	1.004987	1.0004998	1.0000499	1.000005	1.0000005
$(\sqrt{1+h} - 1)/h$	0.4880	0.4987	0.4998	0.499	0.5	0.5

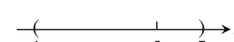
(c) 0.5 **(d)** 0.5

Bölüm 2.2, Sayfa 89–91

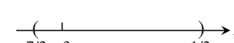
1. -9 **3.** 4 **5.** -8 **7.** 5/8 **9.** 5/2 **11.** 27 **13.** 16
15. 3/2 **17.** 3/2 **19.** 1/10 **21.** -7 **23.** 3/2 **25.** $-1/2$
27. 4/3 **29.** 1/6 **31.** 4 **33.** 1/2 **35.** 3/2
37. **(a)** Bölüm Kuralı **(b)** Fark ve Kuvvet kuralları
(c) Toplam ve Sabitle Çarpım kuralları
39. **(a)** -10 **(b)** -20 **(c)** -1 **(d)** 5/7
41. **(a)** 4 **(b)** -21 **(c)** -12 **(d)** $-7/3$
43. 2 **45.** 3 **47.** $1/(2\sqrt{7})$ **49.** $\sqrt{5}$
51. **(a)** Limit 1'dir **53.** $c = 0, 1, -1$; $c = 0$'da limit 0'dır. 1 ve -1'de ise limit 1'dir **55.** 7 **57.** **(a)** 5 **(b)** 5

Bölüm 2.3, Sayfa 98–101

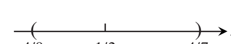
1. $\delta = 2$



3. $\delta = 1/2$



5. $\delta = 1/18$



7. $\delta = 0.1$ **9.** $\delta = 7/16$ **11.** $\delta = \sqrt{5} - 2$ **13.** $\delta = 0.36$
15. (3.99, 4.01), $\delta = 0.01$ **17.** $(-0.19, 0.21)$, $\delta = 0.19$
19. (3, 15), $\delta = 5$ **21.** (10/3, 5), $\delta = 2/3$
23. $(-\sqrt{4.5}, -\sqrt{3.5})$, $\delta = \sqrt{4.5} - 2 \approx 0.12$
25. $(\sqrt{15}, \sqrt{17})$, $\delta = \sqrt{17} - 4 \approx 0.12$

27. $\left(2 - \dfrac{0.03}{m}, 2 + \dfrac{0.03}{m}\right), \quad \delta = \dfrac{0.03}{m}$

29. $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{c}{m}, \dfrac{c}{m} + \dfrac{1}{2}\right), \quad \delta = \dfrac{c}{m}$

31. $L = -3, \quad \delta = 0.01$ **33.** $L = 4, \quad \delta = 0.05$

35. $L = 4, \quad \delta = 0.75$

55. [3.384, 3.387]. Güvenli olması için, sol uç nokta yukarı, sağ uç nokta aşağı yuvarlanmıştır.

59. x, 3'e yaklaşırken limit yoktur.

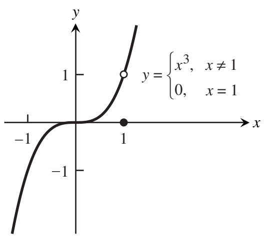
Bölüm 2.4, Sayfa 111–114

1. **(a)** Doğru **(b)** Doğru **(c)** Yanlış **(d)** Doğru **(e)** Doğru **(f)** Doğru **(g)** Yanlış **(h)** Yanlış **(i)** Yanlış **(j)** Yanlış **(k)** Doğru **(l)** Yanlış

3. **(a)** 2, 1 **(b)** Hayır, $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$ **(c)** 3, 3 **(d)** Evet, 3

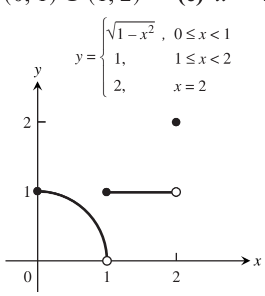
5. **(a)** Hayır **(b)** Evet, 0 **(c)** Hayır

7. **(a)**



(b) 1, 1 **(c)** Evet, 1

9. **(a)** $D: 0 \leq x \leq 2, R: 0 < y \leq 1$ ve $y = 2$. **(b)** $(0, 1) \cup (1, 2)$ **(c)** $x = 2$ **(d)** $x = 0$



11. $\sqrt{3}$ **13.** 1 **15.** $2/\sqrt{5}$ **17.** **(a)** 1 **(b)** -1

19. **(a)** 1 **(b)** $2/3$ **21.** 1 **23.** $3/4$ **25.** 2 **27.** $1/2$

29. 2 **31.** 1 **33.** $1/2$ **35.** $3/8$ **37.** **(a)** -3 **(b)** -3

39. **(a)** $1/2$ **(b)** $1/2$ **41.** **(a)** $-5/3$ **(b)** $-5/3$ **43.** 0

45. -1 **47.** **(a)** $2/5$ **(b)** $2/5$ **49.** **(a)** 0 **(b)** 0

51. **(a)** 7 **(b)** 7 **53.** **(a)** 0 **(b)** 0 **55.** **(a)** $-2/3$ **(b)** $-2/3$ **57.** 0 **59.** 1 **61.** ∞ **69.** 1

73. $\delta = \epsilon^2, \lim_{x\to 5^+} \sqrt{x-5} = 0$

77. **(a)** 400 **(b)** 399 **(c)** Limit yoktur.

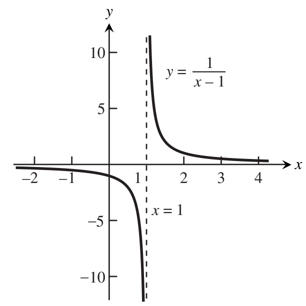
79. 1 **81.** $3/2$ **83.** 3

Bölüm 2.5, Sayfa 122–123

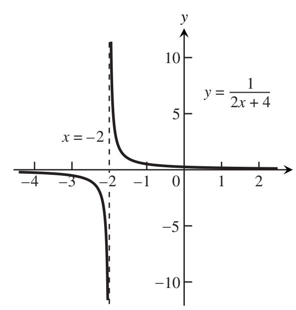
1. ∞ **3.** $-\infty$ **5.** $-\infty$ **7.** ∞ **9.** **(a)** ∞ **(b)** $-\infty$

11. ∞ **13.** ∞ **15.** $-\infty$ **17.** **(a)** ∞ **(b)** $-\infty$ **(c)** $-\infty$ **(d)** ∞ **19.** **(a)** $-\infty$ **(b)** ∞ **(c)** 0 **(d)** $3/2$ **21.** **(a)** $-\infty$ **(b)** $1/4$ **(c)** $1/4$ **(d)** $1/4$ **(e)** It will be $-\infty$. **23.** **(a)** $-\infty$ **(b)** ∞ **25.** **(a)** ∞ **(b)** ∞ **(c)** ∞ **(d)** ∞

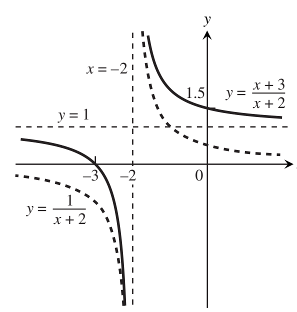
27.



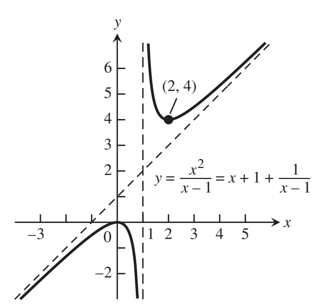
29.



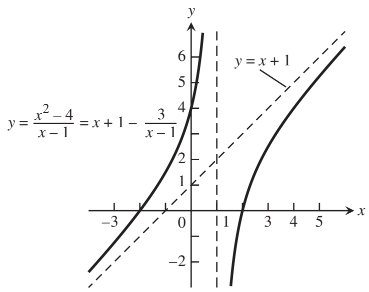
31.



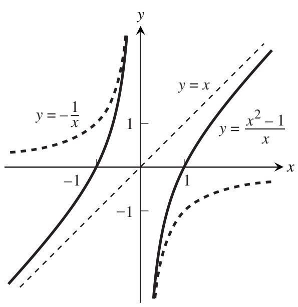
33.



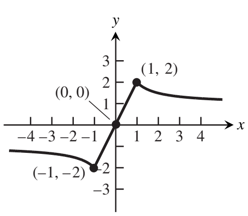
35.



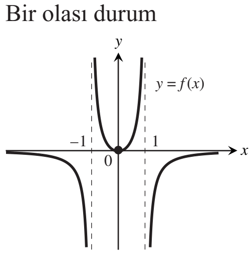
37.



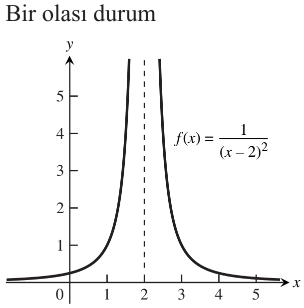
39. Bir olası durum



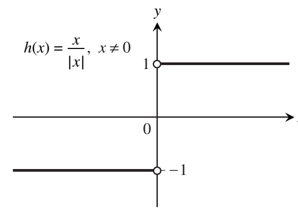
41. Bir olası durum



43. Bir olası durum

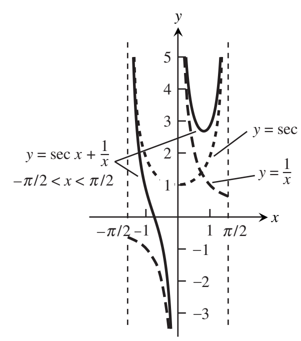


45. Bir olası durum

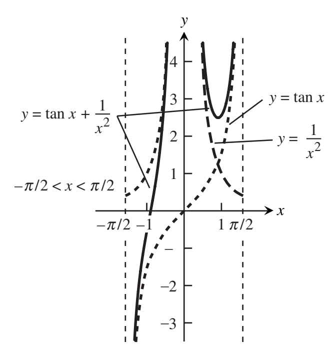


51. **(a)** Her pozitif B reel sayısına karşılık, $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ koşulunu sağlayan her x için $f(x) > B$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.
(b) Her negatif $-B$ reel sayısına karşılık, $x_0 < x < x_0 + \delta$ koşulunu sağlayan her x için $f(x) < -B$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.
(c) Her negatif $-B$ reel sayısına karşılık, $x_0 - \delta < x < x_0$ koşulunu sağlayan her x için $f(x) < -B$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

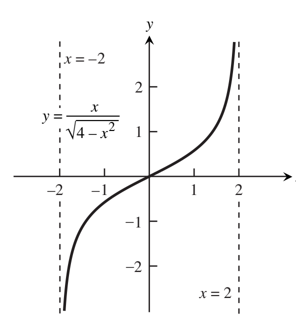
57.



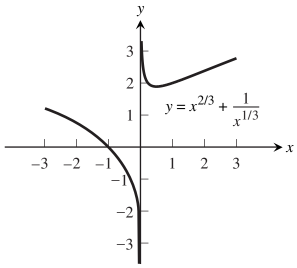
59.



61.



63.

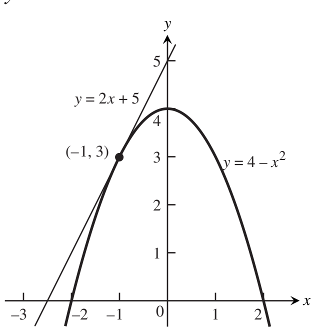


Bölüm 2.6, Sayfa 132–134

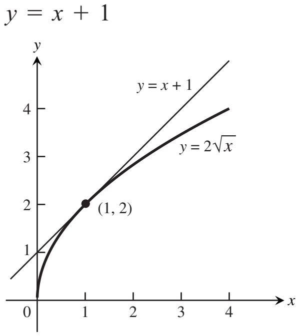
1. Hayır; $x = 2$'de süreksiz; $x = 2$'de tanımsız. **3.** Sürekli **5.** **(a)** Evet **(b)** Evet **(c)** Evet **(d)** Evet **7.** **(a)** Hayır **(b)** Hayır **9.** 0 **11.** 1, kaldırılamaz; 0, kaldırılabilir **13.** $x = 2$ dışında her x **15.** $x = 3, x = 1$ hariç her x **17.** Her x **19.** $x = 0$ dışında her x **21.** n herhangi bir tamsayı olmak üzere, $n\pi/2$ hariç her x **23.** n bir tek tamsayı olmak üzere, $n\pi/2$ hariç her x **25.** Her $x \geq -3/2$ **27.** Her x **29.** 0; $x = \pi$'de sürekli **31.** 1; $y = 1$'de sürekli **33.** $\sqrt{2}/2$; $t = 0$'da sürekli **35.** $g(3) = 6$ **37.** $f(1) = 3/2$ **39.** $a = 4/3$ **63.** $x \approx 1.8794, -1.5321, -0.3473$ **65.** $x \approx 1.7549$ **67.** $x \approx 3.5156$ **69.** $x \approx 0.7391$

Bölüm 2.7, Sayfa 140–141

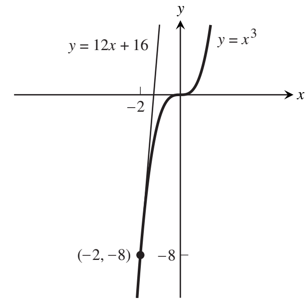
1. P_1: $m_1 = 1$, P_2: $m_2 = 5$ **3.** P_1: $m_1 = 5/2$, P_2: $m_2 = -1/2$ **5.** $y = 2x + 5$



7. $y = x + 1$



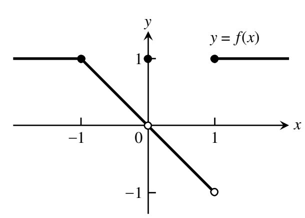
9. $y = 12x + 16$



11. $m = 4, y - 5 = 4(x - 2)$ **13.** $m = -2, y - 3 = -2(x - 3)$ **15.** $m = 12, y - 8 = 12(t - 2)$ **17.** $m = \frac{1}{4}, y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$ **19.** $m = -10$ **21.** $m = -1/4$ **23.** $(-2, -5)$ **25.** $y = -(x + 1), y = -(x - 3)$ **27.** 19.6 m/sn **29.** 6π **31.** Evet **33.** Evet **35.** **(a)** Hiçbir yerde **37.** **(a)** $x = 0$'da **39.** **(a)** Hiçbir yerde **41.** **(a)** $x = 1$'de **43.** **(a)** $x = 0$'da

Problemler, Sayfa 142–143

1. $x = -1$'de: $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$, dolayısıyla, $\lim_{x\to -1} f(x) = 1 = f(-1)$; $x = -1$'de sürekli.
$x = 0$'da $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, dolayısıyla $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Ancak, $f(0) \neq 0$, o yüzden f, $x = 0$'da süreksiz. Süreksizlik, $f(0)$, 0 olarak tanımlanarak kaldırılabilir.
$x = 1$'de $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$ ve $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$, dolayısıyla $\lim_{x\to 1} f(x)$ yoktur. Fonksiyon $x = 1$'de süreksizdir ve süreksizlik kaldırılamaz.



3. **(a)** -21 **(b)** 49 **(c)** 0 **(d)** 1 **(e)** 1 **(f)** 7 **(g)** -7 **(h)** $-\frac{1}{7}$ **5.** 4 **7.** **(a)** $(-\infty, +\infty)$ **(b)** $[0, \infty)$ **(c)** $(-\infty, 0)$ ve $(0, \infty)$ **(d)** $(0, \infty)$ **9.** **(a)** Yoktur **(b)** 0 **11.** $\frac{1}{2}$ **13.** $2x$ **15.** $-\frac{1}{4}$ **17.** 2 **19.** 0 **21.** $\frac{2}{5}$ **23.** 0 **25.** $-\infty$ **27.** 0 **29.** 1 **31.** Her iki durumda da hayır, çünkü $\lim_{x\to 1} f(x)$ yoktur ve $\lim_{x\to -1} f(x)$ yoktur. **37.** **(b)** 1.324717957

Ek Alıştırmalar, Sayfa 144–146

3. 0; soldan limite gerek vardr, çünkü $v > c$ için fonksiyon tanımsızdır. **5.** $65 < t < 75$; 5°F civarında

13. **(a)** B **(b)** A **(c)** A **(d)** A

21. **(a)** $\lim_{a\to 0} r_+(a) = 0.5,\ \lim_{a\to -1^+} r_+(a) = 1$

(b) $\lim_{a\to 0} r_-(a)$ yoktur, $\lim_{a\to -1^+} r_-(a) = 1$

25. 0 **27.** 1 **29.** 4

BÖLÜM 3

Bölüm 3.1, Sayfa 155–159

1. $-2x, 6, 0, -2$ **3.** $-\dfrac{2}{t^3}, 2, -\dfrac{1}{4}, -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

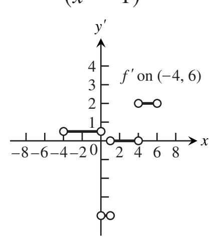
5. $\dfrac{3}{2\sqrt{3\theta}}, \dfrac{3}{2\sqrt{3}}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ **7.** $6x^2$ **9.** $\dfrac{1}{(2t+1)^2}$

11. $\dfrac{-1}{2(q+1)\sqrt{q+1}}$ **13.** $1 - \dfrac{9}{x^2}, 0$ **15.** $3t^2 - 2t, 5$

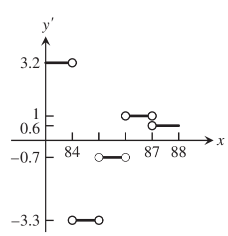
17. $\dfrac{-4}{(x-2)\sqrt{x-2}},\quad y - 4 = -\dfrac{1}{2}(x-6)$ **19.** 6

21. $1/8$ **23.** $\dfrac{-1}{(x+2)^2}$ **25.** $\dfrac{-1}{(x-1)^2}$ **27.** b **29.** d

31. **(a)** $x = 0, 1, 4$ **(b)**



33.



35. $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$ iken $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1$ olduğundan, $f(x)$, $x = 0$'da türetilemez.

37. $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2$ iken $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 1/2$ olduğundan, $f(x)$, $x = 1$'de türetilemez.

39. **(a)** $-3 \le x \le 2$ **(b)** Yok **(c)** Yok

41. **(a)** $-3 \le x < 0, 0 < x \le 3$ **(b)** Yok **(c)** $x = 0$

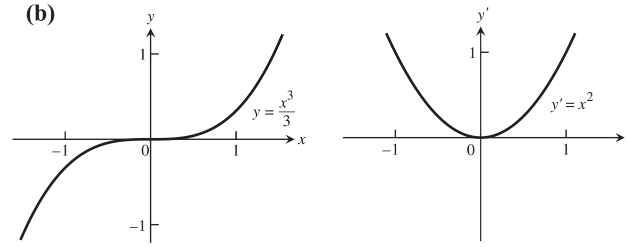
43. **(a)** $-1 \le x < 0, 0 < x \le 2$ **(b)** $x = 0$ **(c)** Yok

45. **(a)** $y' = -2x$ **(c)** $x < 0, x = 0, x > 0$

(d) $-\infty < x < 0, 0 < x < \infty$

47. **(a)** $y' = x^2$

(b)



(c) $x \ne 0, x = 0$, yok **(d)** $-\infty < x < \infty$, yok

49. $y' = 3x^2$ asla negatif olmaz.

51. Evet, $y + 16 = -(x - 3)$ $(3, -16)$'da teğettir.

53. Hayır, $y = \lfloor x \rfloor$ fonksiyonu türevlerin ara değer özelliğini sağlamaz.

55. Evet, $(-f)'(x) = -(f'(x))$

57. $g(t) = mt$ ve $h(t) = t$, $\lim_{t\to 0} \dfrac{g(t)}{h(t)} = m$, olur ve bunun da sıfır olması gerekmez.

Bölüm 3.2, Sayfa 169–171

1. $\dfrac{dy}{dx} = -2x, \dfrac{d^2y}{dx^2} = -2$

3. $\dfrac{ds}{dt} = 15t^2 - 15t^4, \dfrac{d^2s}{dt^2} = 30t - 60t^3$

5. $\dfrac{dy}{dx} = 4x^2 - 1, \dfrac{d^2y}{dx^2} = 8x$

7. $\dfrac{dw}{dz} = -\dfrac{6}{z^3} + \dfrac{1}{z^2}, \dfrac{d^2w}{dz^2} = \dfrac{18}{z^4} - \dfrac{2}{z^3}$

9. $\dfrac{dy}{dx} = 12x - 10 + 10x^{-3}, \dfrac{d^2y}{dx^2} = 12 - 30x^{-4}$

11. $\dfrac{dr}{ds} = \dfrac{-2}{3s^3} + \dfrac{5}{2s^2}, \dfrac{d^2r}{ds^2} = \dfrac{2}{s^4} - \dfrac{5}{s^3}$

13. $y' = -5x^4 + 12x^2 - 2x - 3$

15. $y' = 3x^2 + 10x + 2 - \dfrac{1}{x^2}$ **17.** $y' = \dfrac{-19}{(3x-2)^2}$

19. $g'(x) = \dfrac{x^2 + x + 4}{(x + 0.5)^2}$ **21.** $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{t^2 - 2t - 1}{(1 + t^2)^2}$

23. $f'(s) = \dfrac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + 1)^2}$ **25.** $v' = -\dfrac{1}{x^2} + 2x^{-3/2}$

27. $y' = \dfrac{-4x^3 - 3x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2(x^2 + x + 1)^2}$

29. $y' = 2x^3 - 3x - 1, y'' = 6x^2 - 3, y''' = 12x, y^{(4)} = 12$, $y^{(n)} = 0$ for $n \ge 5$

31. $y' = 2x - 7x^{-2}, y'' = 2 + 14x^{-3}$

33. $\dfrac{dr}{d\theta} = 3\theta^{-4}, \dfrac{d^2r}{d\theta^2} = -12\theta^{-5}$

35. $\dfrac{dw}{dz} = -z^{-2} - 1, \dfrac{d^2w}{dz^2} = 2z^{-3}$

37. $\dfrac{dp}{dq} = \dfrac{1}{6}q + \dfrac{1}{6}q^{-3} + q^{-5}, \dfrac{d^2p}{dq^2} = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{2}q^{-4} - 5q^{-6}$

39. **(a)** 13 **(b)** −7 **(c)** 7/25 **(d)** 20

41. **(a)** $y = -\frac{x}{8} + \frac{5}{4}$ **(b)** $m = -4$'de (0, 1)

(c) $y = 8x - 15, y = 8x + 17$

43. $y = 4x, y = 2$ **45.** $a = 1, b = 1, c = 0$

47. **(a)** $y = 2x + 2$, **(c)** (2, 6)

49. $P'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1$

51. Bu durumda Çarpım Kuralı Sabitle Çarpım Kuralı olur; dolayısıyla ikincisi Çarpım kuralının özel bir durumudur.

53. **(a)** $\frac{d}{dx}(uvw) = uvw' + uv'w + u'vw$

(b) $\frac{d}{dx}(u_1u_2u_3u_4) = u_1u_2u_3u_4' + u_1u_2u_3'u_4 + u_1u_2'u_3u_4 + u_1'u_2u_3u_4$

(c) $\frac{d}{dx}(u_1 \cdots u_n) = u_1u_2 \cdots u_{n-1}u_n' + u_1u_2 \cdots u_{n-2}u_{n-1}'u_n + \cdots + u_1'u_2 \cdots u_n$

55. $\frac{dP}{dV} = -\frac{nRT}{(V-nb)^2} + \frac{2an^2}{V^3}$

Bölüm 3.3, Sayfa 179–183

1. **(a)** −2 m, −1 m/sn **(b)** 3 m/sn, 1 m/sn; 2 m/sn^2, 2 m/sn^2
(c) $t = 3/2$ sn'de de yön değişir

3. **(a)** –9 m, – 3 m/sn **(b)** 3 m/sn, 12 m/sn; 6 m/sn^2, –12 m/sn^2 **(c)** Yönde değişiklik yok

5. **(a)** –20 m, –5 m/sn **(b)** 45 m/sn, (1/5) m/sn; 140 m/sn^2, (4/25) m/sn^2 **(c)** Yönde değişiklik yok

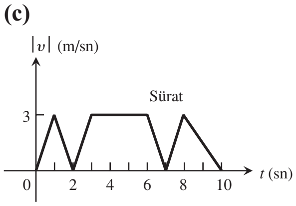
7. **(a)** $a(1) = -6$ m/sn^2, $a(3) = 6$ m/sn^2
(b) $v(2) = 3$ m/sec **(c)** 6 m

9. Mars: ≈ 7.5 sn, Jupiter: ≈ 1.2 sn **11.** $g_s = 0.75$ m/sn^2

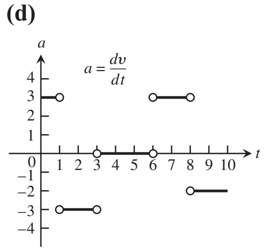
13. **(a)** $v = -32t$, $|v| = 32t$ ft/sn, $a = -32$ ft/sn^2
(b) $t \approx 3.3$ sn **(c)** $v \approx -107.0$ ft/sn

15. **(a)** $t = 2, t = 7$ **(b)** $3 \le t \le 6$

(c)



(d)



17. **(a)** 190 ft/sn **(b)** 2 sn **(c)** 8 sn, 0 ft/sn,
(d) 10.8 sn, 90 ft/sn **(e)** 2.8 sn
(f) en büyük ivme atıştan 2 sn sonradır.
(g) sabit ivme 2 ve 10.8 sn arasındadır, –32 ft/sn^2,

19. **(a)** 4/7 sn, 280 cm/sn **(b)** 560 cm/sn, 980 cm/sn^2,
(c) 29.75 ışık/sn

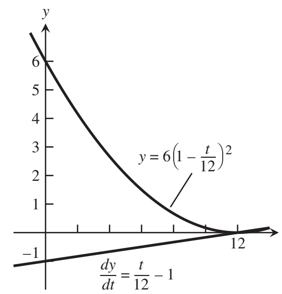
21. C = konum, A = hız, B = ivme.

23. **(a)** \$110/makine **(b)** \$80 **(c)** \$79.90

25. **(a)** $b'(0) = 10^4$ bakteri/sa **(b)** $b'(5) = 0$ bakteri/sa
(c) $b'(10) = -10^4$ bakteri/sa

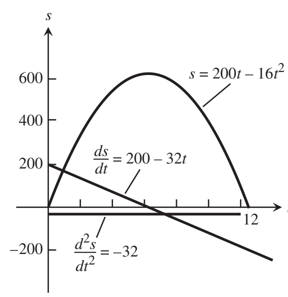
27. **(a)** $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{12} - 1$ **(b)** $\frac{dy}{dt}$'nin en büyük değeri, $t = 12$ iken, 0 m/sa'tir. $\frac{dy}{dt}$'nin en küçük değeri, t = 0 iken, –1 m/sa'tir.

(c)



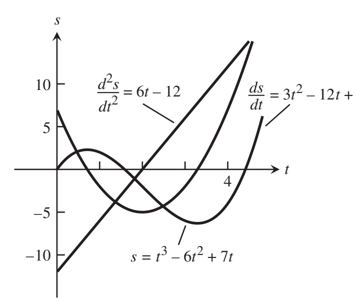
29. $t = 25$ sn $D = \frac{6250}{9}$ m

31.



(a) $t = 6.25$ sn iken $v = 0$, **(b)** $0 \le t < 6{,}25$ iken $v > 0$, cisim yukarı gider. $6.25 < t \le 12.5$ iken $v < 0$ cisim aşağı gider. **(c)** $t = 6.25$ sn de cisim yön değiştirir **(d)** (6.25, 12.5]'te hızlanır, [0, 6.25)'te yavaşlar. **(e)** cisim $t = 0$, $t = 12.5$ uç noktalarında ft/sn ile en hızlı hareket eder, $t = 6.25$'te hız 0 iken en yavaş hareket eder, **(f)** $t = 6.25$ sn iken $s = 625$ m'de dir ve en uzaktadır.

33.



(a) $t = \frac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$ sn iken $v = 0$

(b) $\frac{6 - \sqrt{15}}{3} < t < \frac{6 + \sqrt{15}}{3}$ iken $v < 0$ cisim sola gider,

$0 \le t < \frac{6 - \sqrt{15}}{3}$ veya $\frac{6 + \sqrt{15}}{3} < t \le 4$ iken $v > 0$ cisim sağa gider,

(c) $t = \dfrac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$ sn'de cisim yön değiştirir.

(d) $\left(\dfrac{6 - \sqrt{15}}{3}, 2\right) \cup \left(\dfrac{6 + \sqrt{15}}{3}, 4\right]$'te hızlanır,

$\left[0, \dfrac{6 - \sqrt{15}}{3}\right) \cup \left(2, \dfrac{6 + \sqrt{15}}{3}\right)$ 'te yavaşlar.

(e) cisim $t = 0$ ve $t = 4$'te 7 birim/sn ile giderken en hızlı;

$t = \dfrac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$ sn'de en yavaştır.

(f) $t = \dfrac{6 + \sqrt{15}}{3}$ iken cisim $s \approx -6.303$'de ve orijinden en uzaktadır..

35. **(a)** 135 sn sürer **(b)** Ortalama hız $= \dfrac{\Delta F}{\Delta t} = \dfrac{5 - 0}{73 - 0} =$ $5/73 \approx 0.068$ furlongs/sn (1 furlong = 201 m) **(c)** Ortalanmış bir fark oranı kullanarak, atın hızı yaklaşık olarak, (Bölüm 3.4, Alıştırma 53) $\dfrac{\Delta F}{\Delta t} = \dfrac{4 - 2}{59 - 33} = \dfrac{2}{26} = \dfrac{1}{13} \approx 0.077$ furlongs/sn **(d)** At, son furlongta en hızlı koşar (9. ve 10. furlong işaretleri arası) bu furlong sadece 11 sn surer ve bir furlong için en kısa süredir. **(e)** At, en çok birinci furlongta hızlanır (0 ve 1 işaretleri arası)

Bölüm 3.4, Sayfa 188–190

1. $-10 - 3\sin x$ **3.** $-\csc x \cot x - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ **5.** 0

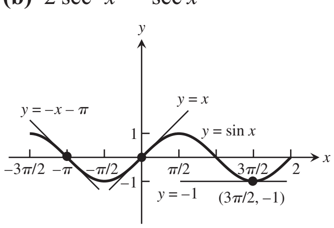
7. $\dfrac{-\csc^2 x}{(1 + \cot x)^2}$ **9.** $4\tan x \sec x - \csc^2 x$ **11.** $x^2 \cos x$

13. $\sec^2 t - 1$ **15.** $\dfrac{-2\csc t \cot t}{(1 - \csc t)^2}$ **17.** $-\theta(\theta\cos\theta + 2\sin\theta)$

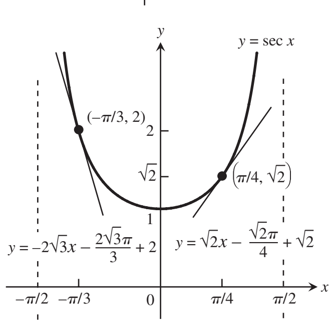
19. $\sec\theta\csc\theta(\tan\theta - \cot\theta) = \sec^2\theta - \csc^2\theta$

21. $\sec^2 q$ **23.** $\sec^2 q$ **25.** **(a)** $2\csc^3 x - \csc x$ **(b)** $2\sec^3 x - \sec x$

27.

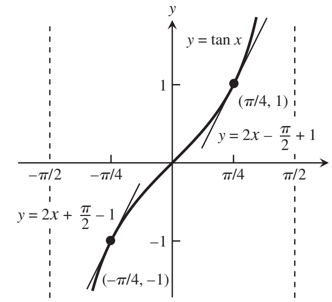


29.



31. Evet, $x = \pi$'de **33.** Hayır

35. $\left(-\dfrac{\pi}{4}, -1\right); \left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$



37. **(a)** $y = -x + \pi/2 + 2$ **(b)** $y = 4 - \sqrt{3}$

39. 0 **41.** -1 **43.** 0

45. $-\sqrt{2}$ m/sn, $\sqrt{2}$ m/sn, $\sqrt{2}$ m/sn^2, $\sqrt{2}$ m/sn^3

47. $c = 9$ **49.** $\sin x$

Bölüm 3.5, Sayfa 201–205

1. $12x^3$ **3.** $3\cos(3x + 1)$ **5.** $-\sin(\sin x)\cos x$

7. $10\,\text{sn}^2(10x - 5)$

9. $u = (2x + 1)$ ile $y = u^5 : \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = 5u^4 \cdot 2 = 10(2x + 1)^4$

11. $u = (1 - (x/7))$ ile $y = u^{-7} : \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} =$ $-7u^{-8} \cdot \left(-\dfrac{1}{7}\right) = \left(1 - \dfrac{x}{7}\right)^{-8}$

13. $u = ((x^2/8) + x - (1/x))$ ile $y = u^4 : \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} =$ $4u^3 \cdot \left(\dfrac{x}{4} + 1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 4\left(\dfrac{x^2}{8} + x - \dfrac{1}{x}\right)^3 \left(\dfrac{x}{4} + 1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

15. $u = \tan x$ ile $y = \sec u : \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} =$ $(\sec u \tan u)(\sec^2 x) = \sec(\tan x)\tan(\tan x)\sec^2 x$

17. $u = \sin x$ ile, $y = u^3 : \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = 3u^2\cos x =$ $3\sin^2 x(\cos x)$

19. $-\dfrac{1}{2\sqrt{3 - t}}$ **21.** $\dfrac{4}{\pi}(\cos 3t - \sin 5t)$ **23.** $\dfrac{\csc\theta}{\cot\theta + \csc\theta}$

25. $2x\sin^4 x + 4x^2\sin^3 x\cos x + \cos^{-2} x + 2x\cos^{-3} x\sin x$

27. $(3x - 2)^6 - \dfrac{1}{x^3\left(4 - \dfrac{1}{2x^2}\right)^2}$ **29.** $\dfrac{(4x + 3)^3(4x + 7)}{(x + 1)^4}$

31. $\sqrt{x}\sec^2(2\sqrt{x}) + \tan(2\sqrt{x})$ **33.** $\dfrac{2\sin\theta}{(1 + \cos\theta)^2}$

35. $\dfrac{dr}{d\theta} = -2\sin(\theta^2)\sin 2\theta + 2\theta\cos(2\theta)\cos(\theta^2)$

37. $\dfrac{dq}{dt} = \left(\dfrac{t + 2}{2(t + 1)^{3/2}}\right)\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{t + 1}}\right)$

39. $2\pi \sin(\pi t - 2)\cos(\pi t - 2)$ **41.** $\dfrac{8\sin(2t)}{(1+\cos 2t)^5}$

43. $-2\cos(\cos(2t-5))(\sin(2t-5))$

45. $\left(1+\tan^4\left(\dfrac{t}{12}\right)\right)^2\left(\tan^3\left(\dfrac{t}{12}\right)\text{sn}^2\left(\dfrac{t}{12}\right)\right)$

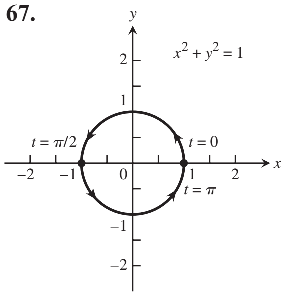
47. $-\dfrac{t\sin(t^2)}{\sqrt{1+\cos(t^2)}}$ **49.** $\dfrac{6}{x^3}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$

51. $2\csc^2(3x-1)\cot(3x-1)$ **53.** $5/2$ **55.** $-\pi/4$ **57.** 0

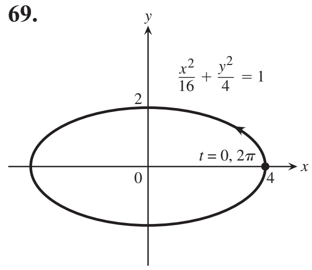
59. **(a)** $2/3$ **(b)** $2\pi+5$ **(c)** $15-8\pi$ **(d)** $37/6$ **(e)** -1 **(f)** $\sqrt{2}/24$ **(g)** $5/32$ **(h)** $-5/(3\sqrt{17})$ **61.** 5

63. **(a)** 1 **(b)** 1 **65.** **(a)** $y=\pi x+2-\pi$ **(b)** $\pi/2$

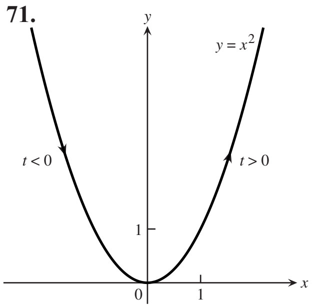
67.



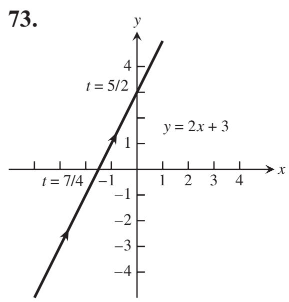
69.



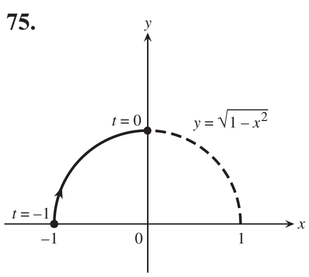
71.



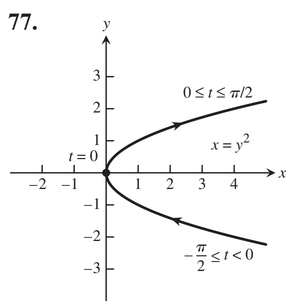
73.



75.



77.



79. **(a)** $x=a\cos t,\ y=-a\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$
(b) $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$
(c) $x=a\cos t,\ y=-a\sin t,\ 0\le t\le 4\pi$
(d) $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ 0\le t\le 4\pi$

81. Olası cevap: $x=-1+5t,\ y=-3+4t,\ 0\le t\le 1$

83. Olası cevap: $x=t^2+1,\ y=t,\ t\le 0$

85. Olası cevap: $x=2-3t,\ y=3-4t,\ t\ge 0$

87. $y=-x+2,\ \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\pi/4}=-\sqrt{2}$

89. $y=x+\dfrac{1}{4},\ \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1/4}=-2$

91. $y=x-4,\ \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=-1}=\dfrac{1}{2}$

93. $y=2,\ \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\pi/2}=-1$

95. Hızı, ivmeyi ve itmeyi sırasıyla 2, 4 ve 8 ile çarpar.

97. $\upsilon(6)=\dfrac{2}{5}\,\text{m/sn}$ $a(6)=-\dfrac{4}{125}\,\text{m/sn}^2$

107. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, $y=2x$ $t=0$'da $y=2x$, $t=\pi$'de $y=-2x$

Bölüm 3.6, Sayfa 211–213

1. $\dfrac{9}{4}x^{5/4}$ **3.** $\dfrac{2^{1/3}}{3x^{2/3}}$ **5.** $\dfrac{7}{2(x+6)^{1/2}}$ **7.** $-(2x+5)^{-3/2}$

9. $\dfrac{2x^2+1}{(x^2+1)^{1/2}}$ **11.** $\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{2}{7}t^{-5/7}$

13. $\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{4}{3}\left(2t+5\right)^{-5/3}\cos\left[\left(2t+5\right)^{-2/3}\right]$

15. $f'(x)=\dfrac{-1}{4\sqrt{x(1-\sqrt{x})}}$

17. $h'(\theta)=-\dfrac{2}{3}\left(\sin 2\theta\right)\left(1+\cos 2\theta\right)^{-2/3}$ **19.** $\dfrac{-2xy-y^2}{x^2+2xy}$

21. $\dfrac{1-2y}{2x+2y-1}$ **23.** $\dfrac{-2x^3+3x^2y-xy^2+x}{x^2y-x^3+y}$

25. $\dfrac{1}{y(x+1)^2}$ **27.** $\cos^2 y$ **29.** $\dfrac{-\cos^2(xy)-y}{x}$

31. $\dfrac{-y^2}{y\sin\left(\dfrac{1}{y}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{y}\right)+xy}$ **33.** $-\dfrac{\sqrt{r}}{\sqrt{\theta}}$ **35.** $\dfrac{-r}{\theta}$

37. $y'=-\dfrac{x}{y},\ y''=\dfrac{-y^2-x^2}{y^3}$

39. $y'=\dfrac{x+1}{y},\ y''=\dfrac{y^2-(x+1)^2}{y^3}$

41. $y'=\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+1},\ y''=\dfrac{1}{2(\sqrt{y}+1)^3}$

43. -2 **45.** $(-2,1): m=-1,\ (-2,-1): m=1$

47. **(a)** $y=\dfrac{7}{4}x-\dfrac{1}{2}$, **(b)** $y=-\dfrac{4}{7}x+\dfrac{29}{7}$

49. **(a)** $y=3x+6$, **(b)** $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{8}{3}$

51. **(a)** $y=\dfrac{6}{7}x+\dfrac{6}{7}$, **(b)** $y=-\dfrac{7}{6}x-\dfrac{7}{6}$

53. **(a)** $y=-\dfrac{\pi}{2}x+\pi$, **(b)** $y=\dfrac{2}{\pi}x-\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{\pi}{2}$

55. **(a)** $y=2\pi x-2\pi$, **(b)** $y=-\dfrac{x}{2\pi}+\dfrac{1}{2\pi}$

57. Noktalar: $(-\sqrt{7}, 0)$ ve $(\sqrt{7}, 0)$, Eğim: -2

59. $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$'da $m = -1$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$'da $m = \sqrt{3}$

61. $(-3, 2) : m = -\frac{27}{8}$; $(-3, -2) : m = \frac{27}{8}$; $(3, 2) : m = \frac{27}{8}$; $(3, -2) : m = -\frac{27}{8}$

63. 0 **65.** -6 **67.** **(a)** Yanlış **(b)** Doğru **(c)** Doğru **(d)** Doğru **69.** $(3, -1)$

73. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + 2xy}{x^2 + 3xy^2}$, $\frac{dx}{dy} = -\frac{x^2 + 3xy^2}{y^3 + 2xy}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$

Bölüm 3.7, Sayfa 218–221

1. $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$ **3.** **(a)** $\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$ **(b)** $\frac{dV}{dt} = 2\pi hr \frac{dr}{dt}$
(c) $\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt} + 2\pi hr \frac{dr}{dt}$ **5.** **(a)** 1 volt/sn
(b) $-\frac{1}{3}$ amp/sn **(c)** $\frac{dR}{dt} = \frac{1}{I}\left(\frac{dV}{dt} - \frac{V}{I}\frac{dI}{dt}\right)$
(d) 3/2 ohm/sn, R artıyor.

7. **(a)** $\frac{dS}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{dx}{dt}$
(b) $\frac{dS}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{dx}{dt} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{dy}{dt}$
(c) $\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x}\frac{dy}{dt}$

9. **(a)** $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} ab \cos\theta \frac{d\theta}{dt}$
(b) $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} ab \cos\theta \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2} b \sin\theta \frac{da}{dt}$
(c) $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} ab \cos\theta \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2} b \sin\theta \frac{da}{dt} + \frac{1}{2} a \sin\theta \frac{db}{dt}$

11. **(a)** 14 cm^2/sn artıyor **(b)** 0 cm/sn, sabit **(c)** –14/13 cm/sn
13. **(a)** –12 ft/sn **(b)** –59.5 ft^2/sn **(c)** –1 rad/sn
15. 20 ft/sn
17. **(a)** $dh/dt = 11.19$ cm/dak **(b)** $dr/dt = 14.92$ cm/dak
19. **(a)** $-1/24\pi$ m/dak **(b)** $r = \sqrt{26y - y^2}$ m,
(c) $\frac{dr}{dt} = -\frac{5}{288\pi}$ m/dak
21. 1 ft/dak, 40π ft^2/dak **23.** 11 ft/sn **25.** 466/1681 L/dak ile artıyor **27.** 1 rad/sn **29.** –5 m/sn
31. –1500 ft/sn **33.** $5/72\pi$ inç/dak, 10/3 inç^2/dak
35. 7.1 inç/dak **37.** **(a)** $-32/\sqrt{13} \approx -8.875$ ft/dak
(b) $d\theta_1/dt = -8/65$ rad/sn, $d\theta_2/dt = 8/65$ rad/sn,
(c) $d\theta_1/dt = -1/6$ rad/sn, $d\theta_2/dt = 1/6$ rad/sn,

Bölüm 3.8, Sayfa 231–234

1. $L(x) = 10x - 13$ **3.** $L(x) = 2$ **5.** $2x$ **7.** -5
9. $\frac{1}{12}x + \frac{4}{3}$ **11.** **(a)** $L(x) = x$ **(b)** $L(x) = \pi - x$
13. **(a)** $L(x) = 1$ **(b)** $L(x) = 2 - 2\sqrt{3}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
15. $f(0) = 1$. Ayrıca, $f'(x) = k(1 + x)^{k-1}$, dolayısıyla $f'(0) = k$'dir. Bu, $x = 0$ da lineerizasyon $L(x) = 1 + kx$ demektir.
17. **(a)** 1.01 **(b)** 1.003
19. $\left(3x^2 - \frac{3}{2\sqrt{x}}\right) dx$ **21.** $\frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} dx$
23. $\frac{1 - y}{3\sqrt{y} + x} dx$ **25.** $\frac{5}{2\sqrt{x}} \cos(5\sqrt{x})\, dx$
27. $(4x^2) \sec^2\left(\frac{x^3}{3}\right) dx$
29. $\frac{3}{\sqrt{x}}(\csc(1 - 2\sqrt{x}) \cot(1 - 2\sqrt{x}))\, dx$
31. **(a)** .41 **(b)** .4 **(c)** .01
33. **(a)** .231 **(b)** .2 **(c)** .031
35. **(a)** $-1/3$ **(b)** $-2/5$ **(c)** $1/15$
37. $dV = 4\pi r_0^2\, dr$ **39.** $dS = 12x_0\, dx$ **41.** $dV = 2\pi r_0 h\, dr$
43. **(a)** 0.08π m^2 **(b)** 2% **45.** $dV \approx 565.5$ inç^3
47. % 1/3 **49.** % 0.05
51. Oran 37.87 dir, dolayısıyla Ay'da yerçekimi ivmesindeki bir değişim, Dünyada aynı büyüklükteki bir değişime göre 38 kat etkilidir.
53. % 3 **55.** %3
59. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x}}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sqrt{1 + 0}}{1 + \left(\frac{0}{2}\right)} = \frac{1}{1} = 1$ **65.** $0.07c$

Problemler, Sayfa 235–240

1. $5x^4 - 0.25x + 0.25$ **3.** $3x(x - 2)$
5. $2(x + 1)(2x^2 + 4x + 1)$
7. $3(\theta^2 + \sec\theta + 1)^2 (2\theta + \sec\theta \tan\theta)$
9. $\frac{1}{2\sqrt{t}(1 + \sqrt{t})^2}$ **11.** $2\sec^2 x \tan x$
13. $8\cos^3(1 - 2t)\sin(1 - 2t)$ **15.** $5(\sec t)(\sec t + \tan t)^5$
17. $\frac{\theta\cos\theta + \sin\theta}{\sqrt{2\theta \sin\theta}}$ **19.** $\frac{\cos\sqrt{2\theta}}{\sqrt{2\theta}}$
21. $x\csc\left(\frac{2}{x}\right) + \csc\left(\frac{2}{x}\right)\cot\left(\frac{2}{x}\right)$
23. $\frac{1}{2}x^{1/2}\sec(2x)^2\left[16\tan(2x)^2 - x^{-2}\right]$
25. $-10x\csc^2(x^2)$ **27.** $8x^3\sin(2x^2)\cos(2x^2) + 2x\sin^2(2x^2)$
29. $\frac{-(t + 1)}{8t^3}$ **31.** $\frac{1 - x}{(x + 1)^3}$ **33.** $\frac{-1}{2x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/2}}$

35. $\dfrac{-2\sin\theta}{(\cos\theta - 1)^2}$ **37.** $3\sqrt{2x+1}$ **39.** $-9\left[\dfrac{5x+\cos 2x}{(5x^2+\sin 2x)^{5/2}}\right]$

41. $-\dfrac{y+2}{x+3}$ **43.** $\dfrac{-3x^2-4y+2}{4x-4y^{1/3}}$ **45.** $-\dfrac{y}{x}$

47. $\dfrac{1}{2y(x+1)^2}$ **49.** $\dfrac{dp}{dq} = \dfrac{6q-4p}{3p^2+4q}$

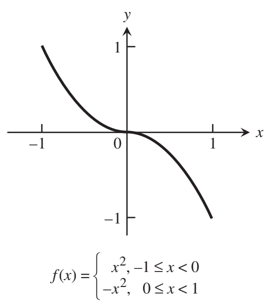
51. $\dfrac{dr}{ds} = (2r-1)(\tan 2s)$

53. **(a)** $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2xy^3-2x^4}{y^5}$ **(b)** $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2xy^2-1}{x^4y^3}$

55. **(a)** 7 **(b)** -2 **(c)** $5/12$ **(d)** $1/4$ **(e)** 12 **(f)** $9/2$ **(g)** $3/4$

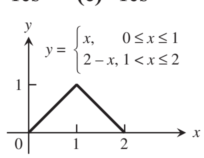
57. 0 **59.** $\sqrt{3}$ **61.** $-\dfrac{1}{2}$ **63.** $\dfrac{-2}{(2t+1)^2}$

65. **(a)**



(b) Yes **(c)** Yes

67. **(a)**

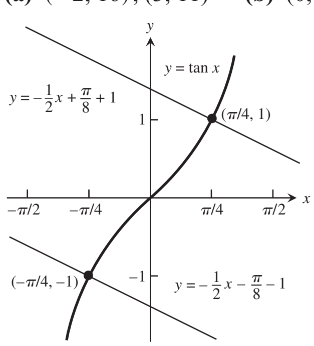


(b) Evet **(c)** Hayır

69. $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$ ve $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$ **71.** $(-1, 27)$ ve $(2, 0)$

73. **(a)** $(-2, 16)$, $(3, 11)$ **(b)** $(0, 20)$, $(1, 7)$

75.



77. $\dfrac{1}{4}$ **79.** 4 **81.** Teğet: $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{9}{4}$, normal: $y = 4x - 2$

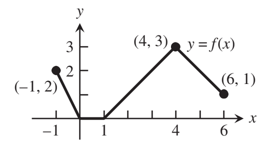
83. Teğet: $y = 2x - 4$, normal: $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$

85. Teğet: $y = -\dfrac{5}{4}x + 6$, normal: $y = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{11}{5}$

87. $(1, 1)$: $m = -\dfrac{1}{2}$; $(1, -1)$: m tanımlı değil

89. $y = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)x + \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}$ **91.** $B = f$'nin grafiği, $A = f'$'nün grafiği

93.



95. **(a)** 0, 0 **(b)** 1700 tavşan, ≈1400 tavşan

97. -1 **99.** $1/2$ **101.** 4 **103.** 1

107. **(a)** $\dfrac{dS}{dt} = (4\pi r + 2\pi h)\dfrac{dr}{dt}$ **(b)** $\dfrac{dS}{dt} = 2\pi r\dfrac{dh}{dt}$

(c) $\dfrac{dS}{dt} = (4\pi r + 2\pi h)\dfrac{dr}{dt} + 2\pi r\dfrac{dh}{dt}$

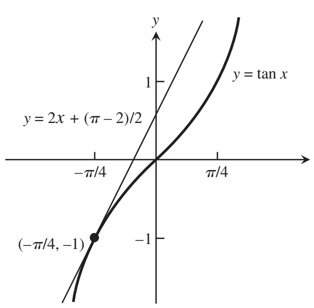
(d) $\dfrac{dr}{dt} = -\dfrac{r}{2r+h}\dfrac{dh}{dt}$

109. $-40\ \mathrm{m^2/sn}$ **111.** 0.02 ohm/sn **113.** 22 m/sn

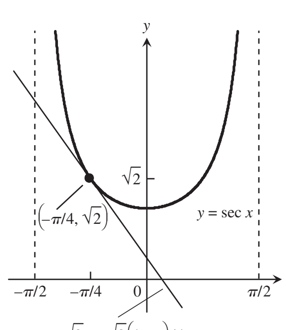
115. **(a)** $r = \dfrac{2}{5}$ sa **(b)** $-\dfrac{125}{144\pi}$ ft/dak

117. **(a)** $3/5$ km/sn veya 600 m/sn **(b)** $\dfrac{18}{\pi}$ rpm

119. **(a)** $L(x) = 2x + \dfrac{\pi - 2}{2}$



(b) $L(x) = -\sqrt{2}x + \dfrac{\sqrt{2}(4 - \pi)}{4}$



121. $L(x) = 1.5x + 0.5$ **123.** $dS = \dfrac{\pi r h_0}{\sqrt{r^2 + h_0^2}}\, dh$

125. **(a)** % 4 **(b)** %8 **(c)** %12

Ek ve Alıştırmalar Sayfa 240–243

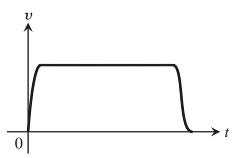
1. **(a)** $\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$; $2 \cos 2\theta = 2 \sin\theta\,(-\sin\theta) + \cos\theta\,(2\cos\theta)$; $2\cos 2\theta = -2\sin^2\theta + 2\cos^2\theta$; $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
(b) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$; $-2\sin 2\theta = 2\cos\theta\,(-\sin\theta) - 2\sin\theta\,(\cos\theta)$; $\sin 2\theta = \cos\theta \sin\theta + \sin\theta\cos\theta$; $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

3. **(a)** $a = 1, b = 0, c = -\dfrac{1}{2}$ **(b)** $b = \cos a, c = \sin a$

5. $h = -4, k = \dfrac{9}{2}, a = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$

7. **(a)** $0.09y$ **(b)** Yılda %1 artmakta

9. Yanıtlar değişecektir. Aşağıda bir olasılık verilmektedir.



11. **(a)** 2 sn, 64 ft/sn **(b)** 12.31 sn, 393.85 ft

15. **(a)** $m = -\dfrac{b}{\pi}$ **(b)** $m = -1, b = \pi$

17. **(a)** $a = \dfrac{3}{4}, b = \dfrac{9}{4}$ **19.** f tek $\Rightarrow f'$ çift

23. h', $x = 0$'da tanımlı, fakat sürekli değildir; k' $x = 0$'da tanımlı ve süreklidir.

27. **(a)** 0.8156 ft **(b)** 0.00613 sn **(c)** Yaklaşık 8.83 dak/gün.

BÖLÜM 4

Bölüm 4.1, Sayfa 252–255

1. $x = c_2$'de mutlak minimum, $x = b$'de mutlak maksimum

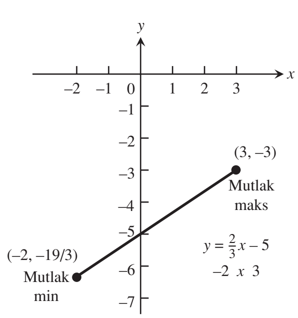
3. $x = c$'de mutlak maksimum, mutlak minimum yok

5. $x = a$'da mutlak minimum, $x = c$'de mutlak maksimum

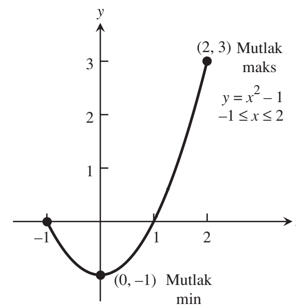
7. Yerel minimum (–1, 0)'da; yerel maksimum (1, 0)'da

9. Maksimum (0, 5)'te **11.** (c) **13.** (d)

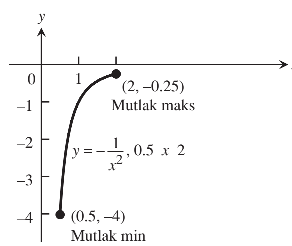
15. Mutlak maksimum: –3; mutlak minimum: $-19/3$



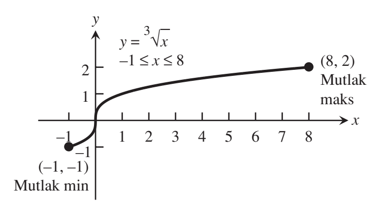
17. Mutlak maksimum: 3, mutlak minimum: –1



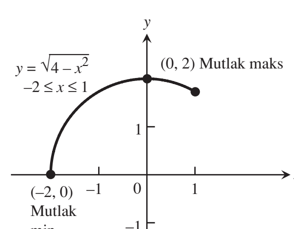
19. Mutlak maksimum: –0.25, mutlak minimum: –4



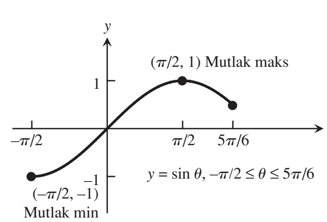
21. Mutlak maksimum: 2, mutlak minimum: –1



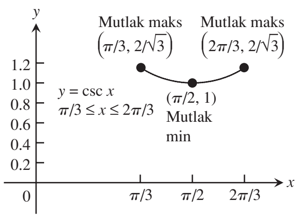
23. Mutlak maksimum: 2, mutlak minimum: 0



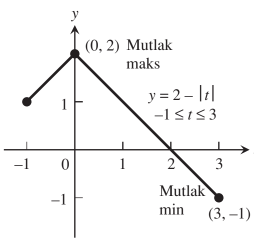
25. Mutlak maksimum: 1, mutlak minimum: –1



27. Mutlak maksimum: $2/\sqrt{3}$; mutlak minimum: 1



29. Mutlak maksimum: 2; mutlak minimum: -1



31. (0, 8)'de artıyor, (–1, 0)'da azalıyor, mutlak maksimum: $x = 8$'de 16, mutlak minimum: $x = 0$'da 0

33. (–32, 1)'de artıyor, mutlak maksimum. $\theta = 1$'de 1, mutlak minimum: $\theta = -32$'de –8.

35. Minimum değer $x = 2$'de 1'dir.

37. Yerel maksimun: (– 2, 17)'de; yerel minimum: $\left(\frac{4}{3}, -\frac{41}{27}\right)$'de

39. Minimum değer x –1 ve $x = 1$'de 0'dır.

41. (0, 1)'de yerel minimum var.

43. Maksimum değer $x = 1$'de $\frac{1}{2}$; minimum değer $x = -1$'de $-\frac{1}{2}$.

45.

Kritik nokta	Türev	Ekstremum	Değer
$x = -\frac{4}{5}$	0	Yerel maks	$\frac{12}{25} 10^{1/3} = 1.034$
$x = 0$	Tanımsız	Yerel min	0

47.

Kritik nokta	Türev	Ekstremum	Değer
$x = -2$	Tanımsız	Yerel maks	0
$x = -\sqrt{2}$	0	Minimum	-2
$x = \sqrt{2}$	0	Maksimum	2
$x = 2$	Tanımsız	Yerel min	0

49.

Kritik nokta	Türev	Ekstremum	Değer
$x = 1$	Tanımsız	Minimum	2

51.

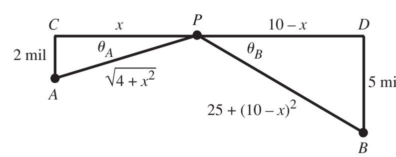
Kritik nokta	Türev	Ekstremum	Değer
$x = -1$	0	Maksimum	5
$x = 1$	Tanımsız	Yerel min	1
$x = 3$	0	Maksimum	5

53. **(a)** Hayır
(b) $x \neq 2$ için türev tanımlıdır ve sıfırdan farklıdır. Ayrıca, $f(2) = 0$ ve her $x \neq 2$ için $f(x) > 0$ dır.
(c) Hayır, çünkü $(-\infty, \infty)$ aralığı kapalı değildir.
(d) 2 yerine a yazıldığında cevaplar (a) ve (b) ile aynıdır.

55. **(a)** $0 \le x \le 9$ mil olmak üzere $C(x) = 0.3\sqrt{16 + x^2} + 0.2(9 - x)$ milyon dolar. Maliyeti minimize etmek için boru hattı, liman tesislerinden, kıyı boyunca A noktasından 3.58 mil uzakta olan B noktasına, sonra da kıyı boyunca B noktasından rafineriye şeklinde kurulmalıdır.
(b) Teoride, boru hattını liman tesislerinden doğrudan A noktasına götürmenin mil başına maliyeti p, sonsuz olabilirdi (Yani x_c'nin sıfır olması için). Her $p > 0.218864$ için, C'yi minimum yapacak şekilde, (0, 9)'da daima bir vardır. Bu, $p > 0$ için daima pozitif olan

$$C''(x_c) = \frac{16p}{(16 + x_c^{\,2})^{3/2}}$$ 'ye bakılarak ispatlanmıştır.

57. Boru hattının uzunluğu $0 \le x \le 10$ için $L(x) = \sqrt{4 + x^2} + \sqrt{25 + (10 - x)^2}$'dir. Kıyı boyunca A'dan B'ye uzaklık $x = 20/7 \approx 2.857$ mil'dir.

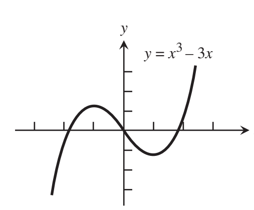


59. **(a)** Maksimum değer $x = 2$'de, 144.
(b) Kutunun maksimum hacmi, $x = 2$ için 144 birim küp'tür.

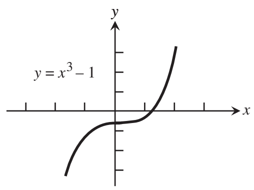
61. En büyük olası alan $A\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) = \frac{25}{4}$ cm^2

63. $\frac{{v_0}^2}{2g} + s_0$ **65.** Evet **67.** g, $-c$'de bir maksimum değer alır.

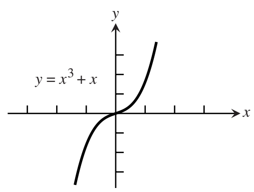
69. **(a)** $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ kuadratiktir dolayısıyla, f'nin kritik noktaları olabilecek, 0, 1 veya 2 kökü bulunabilir. Örnekler: $f(x) = x^3 - x$ fonksiyonunun $x = -1$ ve $x = 1$'de iki kritik noktası vardır.



$f(x) = x^3 - 1$ fonksiyonunun $x = 0$'da bir kritik noktası vardır.



$f(x) = x^3 + x$ fonksiyonunun kritik noktası yoktur.



(b) İki veya hiç

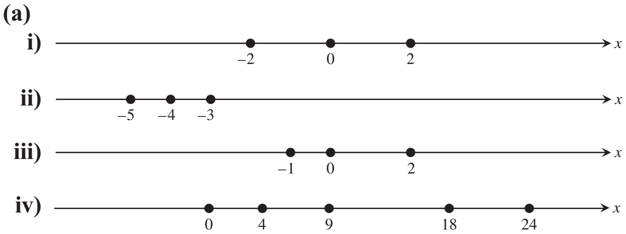
71. Maksimum değer $x = 5$'te 11 dir; minimum değer, $[-3, 2]$ aralığındadır ve 5'tir; $(-5, 9)$'da yerel maksimum.

73. Maksimum değer $[3, \infty)$ aralığı üzerinde 5'tir; minimum değer, $(-\infty, -2]$ aralığı üzerinde -5'tir.

Bölüm 4.2, Sayfa 260–262

1. 1/2 **3.** 1 **5.** Sağlamaz; f tanım aralığının $x = 0$ iç noktasında türetilebilir değildir. **7.** Sağlar

11. (a)



23. Yes **25. (a)** 4 **(b)** 3 **(c)** 3

27. (a) $\frac{x^2}{2} + C$ **(b)** $\frac{x^3}{3} + C$ **(c)** $\frac{x^4}{4} + C$

29. (a) $\frac{1}{x} + C$ **(b)** $x + \frac{1}{x} + C$ **(c)** $5x - \frac{1}{x} + C$

31. (a) $-\frac{1}{2}\cos 2t + C$ **(b)** $2\sin\frac{t}{2} + C$

(c) $-\frac{1}{2}\cos 2t + 2\sin\frac{t}{2} + C$

33. $f(x) = x^2 - x$ **35.** $r(\theta) = 8\theta + \cot\theta - 2\pi - 1$

37. $s = 4.9t^2 + 5t + 10$ **39.** $s = \frac{1 - \cos(\pi t)}{\pi}$

41. $s = 16t^2 + 20t + 5$ **43.** $s = \sin(2t) - 3$

45. $T(t)$, termometrede t anındaki sıcaklık ise $T(0) = -19$ °C ve $T(14) = 100$°C dir. Ortalama Değer Teoreminden, bir $0 < t_0 < 14$ $\frac{T(14) - T(0)}{14 - 0} = 8.5\ °\text{C/sn} = T'(t_0)$ dır, bu değer, termometredeki yükselen civa tarafından ölçüldüğü gibi $t = t_0$ da sıcaklığın değişim oranıdır.

47. Ortalama hız yaklaşık 7.667 knots olduğundan, Ortalama Değer Teoremine göre yolculuk sırasında en az bir defa bu hızla gitmelidir.

51. Ortalama Değer Teoreminin sonucuna göre:

$$\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = -\frac{1}{c^2} \Rightarrow c^2\left(\frac{a - b}{ab}\right) = a - b \Rightarrow c = \sqrt{ab}.$$

55. Ara Değer Teoremine göre $f(x)$, a ile b arasında en az bir defa sıfır olmalıdır. $f(x)$'in a ile b arasında iki defa sıfır olduğunu varsayın. Ortalama Değer Teoremine göre $f'(x)$, $f(x)$'in iki sıfırı arasında en az bir defa sıfır olmalıdır fakat aralık üzerinde verildiğinden bu mümkün değildir. Bu nedenle $f(x)$, a ile b arasında sadece ve sadece bir defa sıfır olur.

61. $1.09999 \le f(0.1) \le 1.1$

Bölüm 4.3, Sayfa 266–267

1. (a) 0, 1 **(b)** $(-\infty, 0)$ ve $(1, \infty)$'da artıyor. $(0,1)$'de azalıyor **(c)** $x = 0$'da yerel maksimum, $x = 1$'de yerel minimum

3. (a) $-2, 1$ **(b)** $(-2, 1)$ ve $(1, \infty)$'da artıyor, $(-\infty, -2)$'de azalıyor **(c)** Yerel maksimum yok, $x = -2$'de yerel minimum

5. (a) $-2, 1, 3$ **(b)** $(-2, 1)$ ve $(3, \infty)$'da artıyor, $(-\infty, -2)$ ve $(1, 3)$'te azalıyor **(c)** $x = 1$'de yerel maksimum, $x = -2, 3$'te yerel minimumlar

7. (a) $-2, 0$ **(b)** $(-\infty, -2)$ ve $(0, \infty)$'da artıyor, $(-2, 0)$'da azalıyor **(c)** $x = -2$'de yerel maksimum, $x = 0$'da yerel minimum

9. (a) $(-\infty, -1.5)$'te artıyor, $(-1.5, \infty)$'da azalıyor **(b)** Yerel maksimum: $t = -1.5$'te 5.25 **(c)** Mutlak maksimum: $t = -1.5$'te 5.25

11. (a) $(-\infty, 0)$'da azalıyor, $(0, 4/3)$'te artıyor, $(4/3, \infty)$'da azalıyor **(b)** $x = 0$'da yerel minimum $(0, 0)$, $x = 4/3$'te yerel maksimum $(4/3, 32/27)$ **(c)** Mutlak ekstremum yok

13. (a) $(-\infty, 0)$'da azalıyor, $(0, 1/2)$'de artıyor, $(1/2, \infty)$'da azalıyor **(b)** $\theta = 0$'da yerel minimum $(0, 0)$, $\theta = 1/2$'de yerel maksimum $(1/2, 1/4)$ **(c)** Mutlak ekstremum yok

15. (a) $(-\infty, \infty)$'da azalıyor, hiç artmıyor **(b)** Yerel ekstremum yok **(c)** Mutlak ekstremum yok

17. (a) $(-2, 0)$ ve $(2, \infty)$'da artıyor, $(-\infty, -2)$ ve $(0, 2)$'de azalıyor **(b)** Yerel maksimum: $x = 0$'da 16, yerel minimum: $x = \pm 2$'de 0 **(c)** Mutlak maksimum yok, mutlak minimum: $x = \pm 2$'de 0

19. (a) $(-\infty, -1)$'de artıyor, $(-1, 0)$'da azalıyor, $(0, 1)$'de artıyor, $(1, \infty)$'da azalıyor **(b)** $x = \pm 1$'de yerel maksimum $(1, 0.5)$, $(-1, 0.5)$, $x = 0$'da yerel minimum $(0, 0)$ **(c)** Mutlak maksimum: $x = \pm 1$'de $1/2$, mutlak minimum yok

21. **(a)** $(-2\sqrt{2}, -2)$' de azalıyor, $(-2, 2)$'de artıyor, $(2\sqrt{2}, -2)$'de azalıyor **(b)** Yerel minimumlar: $g(-2) = -4, g(2\sqrt{2}) = 0$; yerel maksimumlar: $g(-2\sqrt{2}) = 0, g(2) = 4$ **(c)** Mutlak maksimum: $x = 2$'de 4, mutlak minimum: $x = -2$'de -4.

23. **(a)** $(-\infty, 1)$'de azalıyor, $1 < x < 2$ iken artıyor, $2 < x < 3$ iken azalıyor, $x = 2$'de süreksiz, $(3, \infty)$'da artıyor **(b)** $x = 3$'te yerel minimum (3, 6), $x = 1$'de yerel maksimum (1, 2) **(c)** Mutlak ekstremum yok

25. **(a)** $(-2, 0)$ ve $(0, \infty)$'da artıyor, $(-\infty, -2)$'de azalıyor **(b)** Yerel minimum: $x = -2$'de $-6\sqrt[3]{2}$ **(c)** Mutlak maksimum yok, mutlak minimum: $x = -2$'de $-6\sqrt[3]{2}$

27. **(a)** $\left(-\infty, -2/\sqrt{7}\right)$ ve $\left(2/\sqrt{7}, \infty\right)$ 'da artıyor, $\left(-2/\sqrt{7}, 0\right)$ ve $\left(0, 2/\sqrt{7}\right)$'de azalıyor **(b)** Yerel maksimum: $x = -2\sqrt{7}$ 'de $24\sqrt[3]{2}/7^{7/6} \approx 3.12$; yerel minimum: $x = 2\sqrt{7}$ 'de $-24\sqrt[3]{2}/7^{7/6} \approx -3.12$ **(c)** Mutlak ekstremum yok

29. **(a)** Yerel maksimum: $x = 1$'de 1; yerel minimum: $x = 2$'de 0 **(b)** Mutlak maksimum: $x = 1$'de 1; mutlak minimum yok

31. **(a)** Yerel maksimum: $x = 1$'de 1; yerel minimum: $x = 2$'de 0 **(b)** Mutlak maksimum yok; mutlak minimum: $x = 2$'de 0

33. **(a)** Yerel maksimumlar: $t = -3$'te -9 ve $t = 2$'de 16; yerel minimum: $t = -2$'de -16 **(b)** Mutlak maksimum: $t = 2$'de 16; mutlak minimum yok

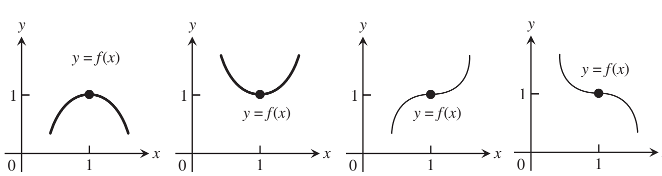
35. **(a)** Yerel minimum: $x = 0$'da 0; **(b)** Mutlak maksimum yok; mutlak minimum: $x = 0$'da 0

37. **(a)** Yerel minimum: $x = 2\pi/3$'te $(\pi/3) - \sqrt{3}$; yerel maksimum: $x = 0$'da 0; yerel maksimum $x = 2\pi$'de π:

39. **(a)** Yerel minimum: $x = \pi/4$'te 0

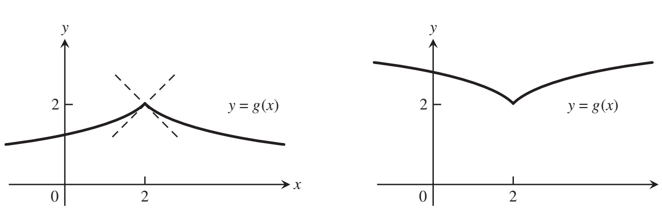
41. Yerel maksimum: $\theta = 0$'da 3, yerel minimum $\theta = 2\pi$'de -3

43.



(a) (b) (c) (d)

45. **(a)** **(b)**



47. Yükseliyor

Bölüm 4.4, Sayfa 274–277

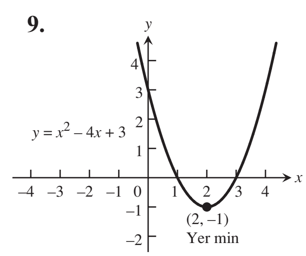
1. Yerel maksimum: $x = -1$'de $3/2$; yerel minimum: $x = 2$'de -3, $(1/2, -3/4)$'te büküm noktası, $(-\infty, -1)$ ve $(2, \infty)$'da yükseliyor, $(-1, 2)$'de iniyor, $(1/2, \infty)$'da yukarı konkav, $(-\infty, 1/2)$'de aşağı konkav

3. Yerel maksimum: $x = 0$'da $3/4$, yerel minimum $x = \pm 1$'de 0, $\left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt[3]{4}}{4}\right)$ ve $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt[3]{4}}{4}\right)$'te büküm noktaları, $(-1, 0)$ ve $(1, \infty)$'da yükseliyor, $(-\infty, -1)$ ve $(0, 1)$'de alçalıyor, $(-\infty, -\sqrt{3})$ ve $(\sqrt{3}, \infty)$ 'da yukarı konkav, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$'te aşağı konkav.

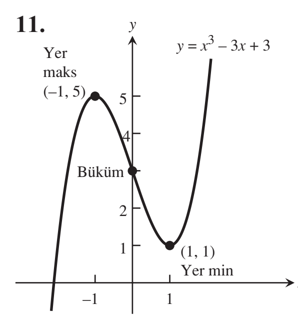
5. Yerel maksimumlar: $x = -2\pi/3$'te $-2\pi/3 + \sqrt{3}/2$: $x = \frac{\pi}{3}$ 'te $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, yerel minimumlar: $x = -\frac{\pi}{3}$'te $-\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = -2\pi/3$'te $2\pi/3 - \sqrt{3}/2$; $(\pi/2, -\pi/2)$, $(0, 0)$ ve $(\pi/2, \pi/2)$'de büküm noktaları, $(-\pi/3, \pi/3)$'te yükseliyor, $(-2\pi/3, -\pi/3)$ ve $(\pi/3, 2\pi/3)$'te alçalıyor. $(-\pi/2, 0)$ ve $(\pi/2, -2\pi/3)$'de yukarı konkav, $(-2\pi/3, -\pi/2)$ ve $(0, \pi/2)$'de yukarı konkav.

7. Yerel maksimumlar: $x = -\pi/2$ ve $x = \pi/2$'de 1: $x = -2\pi$ ve $x = 2\pi$'de 0; yerel minimumlar: $x = -\frac{3\pi}{2}$ ve $x = \frac{3\pi}{2}$,'de -1, $x = 0$'da 0, $(-\pi, 0)$ ve $(0, \pi)$'de büküm noktaları, $(-3\pi/2, -\pi/2)$, $(0, \pi/2)$ ve $(3\pi/2, 2\pi)$'de yükseliyor, $(-2\pi, -3\pi/2)$, $(-\pi/2, 0)$ ve $(\pi/2, 3\pi/2)$'de alçalıyor, $(-2\pi, -\pi)$ ve $(\pi, 2\pi)$'de yukarı konkav, $(-\pi, \pi)$'de aşağı konkav.

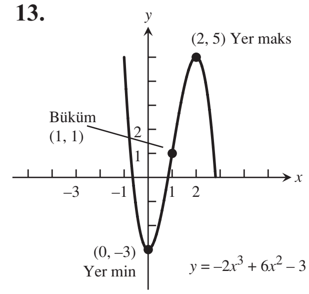
9.



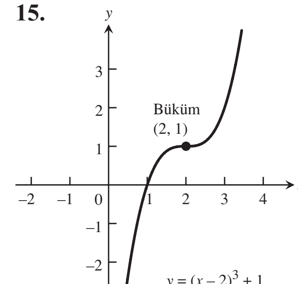
11.



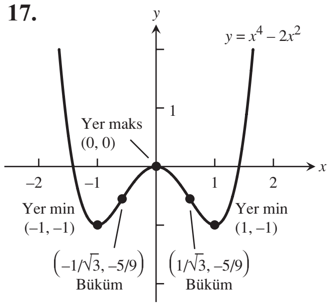
13.



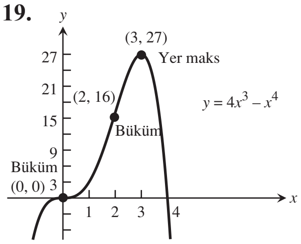
15.



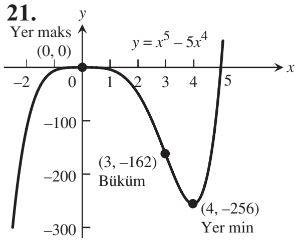
17.



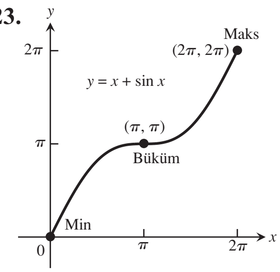
19.



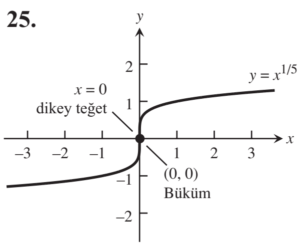
21.



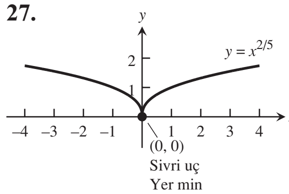
23.



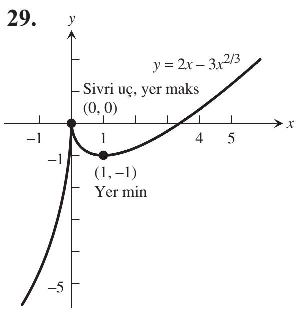
25.



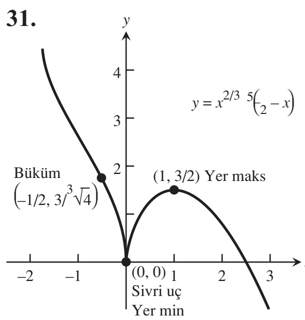
27.



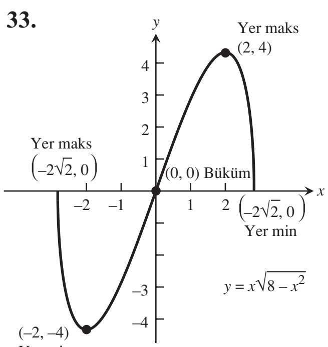
29.



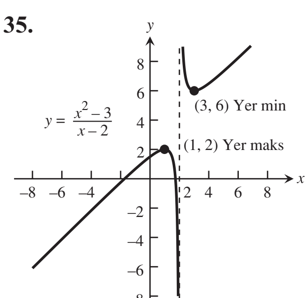
31.



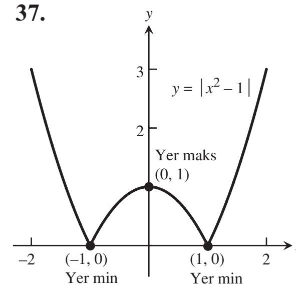
33.



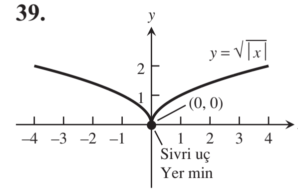
35.



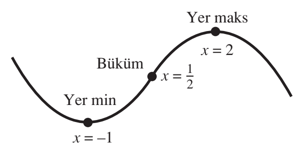
37.



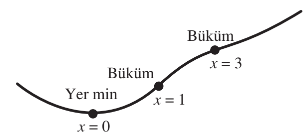
39.



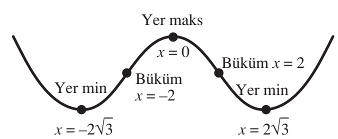
41. $y'' = 1 - 2x$



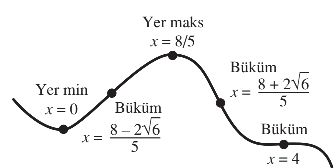
43. $y'' = 3(x - 3)(x - 1)$



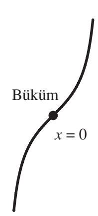
45. $y'' = 3(x - 2)(x + 2)$



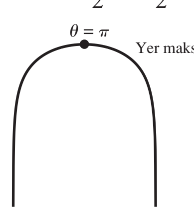
47. $y'' = 4(4 - x)(5x^2 - 16x + 8)$



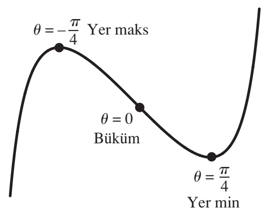
49. $y'' = 2\sec^2 x \tan x$



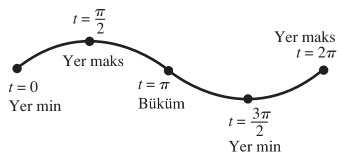
51. $y'' = -\frac{1}{2}\csc^2\frac{\theta}{2}, 0 < \theta < 2\pi$



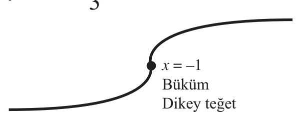
53. $y'' = 2 \tan \theta \sec^2 \theta, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$



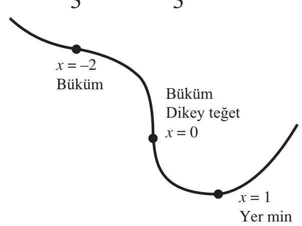
55. $y'' = -\sin t, 0 \le t \le 2\pi$



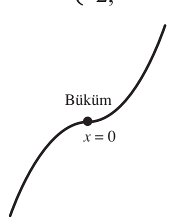
57. $y'' = -\frac{2}{3}(x + 1)^{-5/3}$



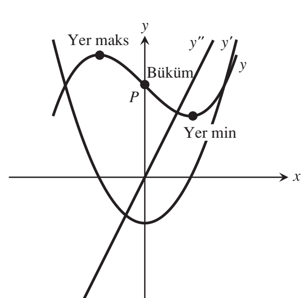
59. $y'' = \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{2}{3}x^{-5/3}$



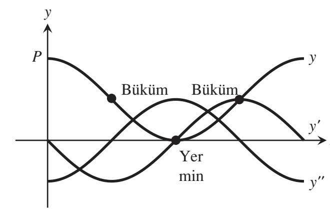
61. $y'' = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$



63.

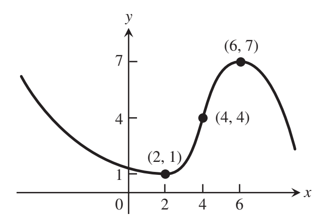


65.



67. Nokta	y'	y''
P	$-$	$+$
Q	$+$	0
R	$+$	$-$
S	0	$-$
T	$-$	$-$

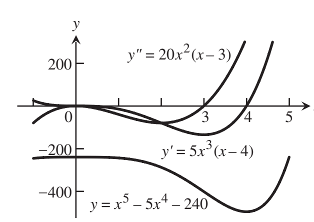
69.



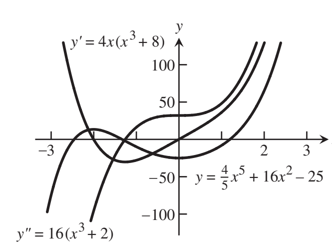
73. $\approx$ 60 bin birim **75.** $x = 2$'de yerel minimum, $x = 1$ ve $x = 5/3$'te büküm noktaları **79.** $b = -3$

81. (a) $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ **(b)** $a > 0$ ise yukarı konkav, $a < 0$ ise aşağı konkav

85. $y' = 0$ ve $y'' = 0$'ın sıfırları sırasıyla ekstremumlar ve büküm noktalarıdır. $x = 3$'te büküm noktası, yerel maksimum $x = 3$'te, yerel minimum $x = 4$'te



87. $y' = 0$ ve $y'' = 0$'ın sıfırları sırasıyla ekstremumlar ve büküm noktalarıdır. $x = -\sqrt[3]{2}$'de büküm noktası, $x = -2$'de yerel maksimum, $x = 0$'a yerel minimum



91. **(b)** $f'(x) = 3x^2 + k$; $-12k$; $k < 0$ ise pozitif, $k > 0$ ise negatif, $k = 0$ ise 0; $k < 0$ ise f''nün iki sıfırı, $k = 0$ ise bir sıfırı bulunur, $k > 0$ ise sıfırı yoktur; Yani, k'nın işareti yerel ekstremumların sayısını kontrol eder.

93. **(b)** $\lim_{x\to 0^-} y' = \infty$ ve $\lim_{x\to 0^+} y' = -\infty$ olduğundan bir sivri uç

95. Evet, y''nün grafiği –3 civarında sıfırdan geçer, dolayısıyla y'nin –3 civarında yatay bir teğeti vardır.

Bölüm 4.5, Sayfa 285–292

1. 16 inç, 4 inç × 4 inç **3.** **(a)** $(x, 1 - x)$

(b) $A(x) = 2x(1 - x)$ **(c)** 1/2 birim kare, $1 \times 1/2$

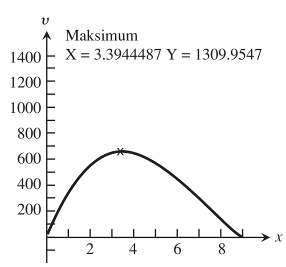
5. $\frac{14}{3} \times \frac{35}{3} \times \frac{5}{3}$ inç, $\frac{2450}{27}$ inç^3 **7.** 80,000 m^2; 400 m × 400 m

9. **(a)** Tankın optimum ölçüleri Taban kenarları 10 ft ve derinlik 5 ft dir.

(b) Tankın yüzey alanını minimize etmek, verilen bir duvar kalınlığı için ağırlığını minimize eder. Çelik duvarların kalınlıkları yapısal gereklilikler gibi başka düşüncelerle de belirlenebilir.

11. 9 × 18 inç **13.** $\frac{\pi}{2}$ **15.** $h : r = 8 : \pi$

17. **(a)** $V(x) = 2x(24 - 2x)(18 - 2x)$ **(b)** Tanım kümesi: (0, 9)



(c) Maksimum hacim, $x \approx 3.39$ inç iken ≈ 1309.95

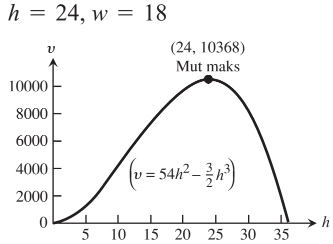
(d) $V'(x) = 24x^2 - 336x + 864$, dolayısıyla kritik nokta $x = 7 - \sqrt{13}$ te dir, bu, (c)'deki sonucu doğrular.

(e) $x = 2$ inç veya $x = 5$ inç

19. ≈ 2418.40 cm^3

21. **(a)** $h = 24, w = 18$

(b)



23. yarı-kürenin yarıçapı r, silindirin yüksekliği h ve V hacim ise $r = \left(\frac{3V}{8\pi}\right)^{1/3}$ ve $h = \left(\frac{3V}{\pi}\right)^{1/3}$ 'tür.

25. **(b)** $x = \frac{51}{8}$ **(c)** $L \approx 11$ in.

27. Yarıçap = $\sqrt{2}$ m, yükseklik = 1 m, hacim $\frac{2}{3}$ m^3

31. **(a)** $v(0) = 96$ ft/sn **(b)** $t = 3$ sn'de 256 ft

(c) $s = 0$ iken hız $v(7) = -128$ ft/sn dir.

33. ≈ 46.87 ft **35.** **(a)** $6 \times 6\sqrt{3}$ inç

37. **(a)** $t = 0.5$ sn, 1.5 sn, 2.5 sn ve 3.5 sn iken $10\pi \approx 31.42$ cm/sn

(b) Durma konumundan 10 cm; hız 0 dır

39. **(a)** $s = ((12 - 12t)^2 + 64t^2)^{1/2}$ **(b)** – 12 mil, 8 mil

(c) Hayır **(e)** $4\sqrt{13}$. Bu limit, teker teker hızların kareleri toplamının kareköküdür.

41. $x = \frac{a}{2}, v = \frac{ka^2}{4}$ **43.** $\frac{c}{2} + 50$

45. **(a)** $\sqrt{\frac{2km}{h}}$ **(b)** $\sqrt{\frac{2km}{h}}$

49. **(a)** Dolap üreticisi bir dahaki dağıtıma kadar yeterli malzeme bulunması için px birim sipariş etmelidir.

(c) Günlük ortalama maliyet $= \frac{\left(d + \frac{ps}{2}x^2\right)}{x} = \frac{d}{x} + \frac{ps}{2}x$

$x^* = \sqrt{\frac{2d}{ps}}$; $px^* = \sqrt{\frac{2pd}{s}}$ bir minimum verir.

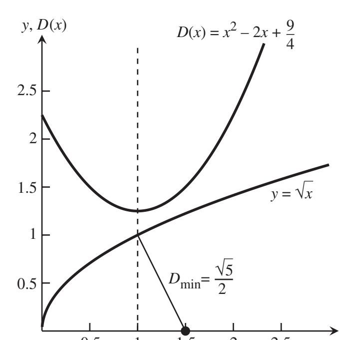
(d) Doğru ve parabol $\frac{d}{x} = \frac{ps}{2}x$ iken kesişir. $x > 0$ için,

$x > 0, x_{\text{kesim}} = \sqrt{\frac{2d}{ps}} = x^*$ Dağıtımın ortalama günlük maliyeti, ortalama günlük depolama maliyetine eşit olduğunda günlük ortalama maliyet minimize olur.

51. $M = \frac{C}{2}$ **57.** **(a)** $y = -1$

59. **(a)** Minimum mesafe $\frac{\sqrt{5}}{2}$.'dir.

(b) Minimum mesafe, $y = \sqrt{x}$ 'in grafik üzerinde (3/2, 0) noktasından (1, 1) noktasına dır ve bu, mesafenin karesi $D(x)$'in minimum olduğu $x = 1$ değerinde ortaya çıkar. nce squared, has its minimum value.



61. **(a)** $V(x) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{2\pi a - x}{2\pi}\right)^2\sqrt{a^2 - \left(\frac{2\pi a - x}{2\pi}\right)^2}$

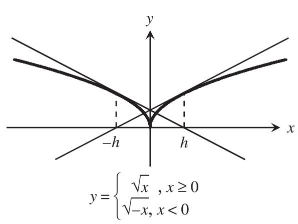
(b) $a = 4$ iken $r = \frac{4\sqrt{6}}{3}, h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$; $a = 5$ iken $r = \frac{5\sqrt{6}}{3}, h = \frac{5\sqrt{3}}{3}$; $a = 6$ iken $r = 2\sqrt{6}, h = 2\sqrt{3}$; $a = 8$ iken $r = \frac{8\sqrt{6}}{3}, h = \frac{8\sqrt{3}}{3}$
(c) $r = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ ve $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ olduğundan ilişki $\frac{r}{h} = \sqrt{2}$ 'dir.

Bölüm 4.6, Sayfa 298–299

1. $\frac{1}{4}$ **3.** $\frac{5}{7}$ **5.** $\frac{1}{2}$ **7.** 0 **9.** 1 **11.** $\sqrt{2}$ **13.** $+1$
15. -1 **17.** $\frac{1}{2}$ **19.** 3 **21.** na **23.** $-\frac{1}{2}$ **25.** 0 **27.** 3
29. 1 **31.** (b) doğru fakat (a) değil
33. $c = \frac{27}{10}$ **35.** -1

Bölüm 4.7, Sayfa 305–306

1. $x_2 = -\frac{5}{3}, \frac{13}{21}$ **3.** $x_2 = -\frac{51}{31}, \frac{5763}{4945}$ **5.** $x_2 = \frac{2387}{2000}$
7. x ve bütün sonraki yaklaşımlar x_0'a eşit olur.
9.



11. $y = x^3$ ile $y = 3x + 1$'in veya $y = x^3 - 3x$ ile $y = 1$'in kesişim noktalarının x-değerleri (i)'deki köklerle veya (iv)'ün çözümleri ile aynı dır. **15.** 1.165561185
17. **(a)** İki **(b)** 0.35003501505249 ve -1.0261731615301
19. ± 1.3065629648764, ± 0.5411961001462 **21.** $x \approx 0.45$
23. Kök 1.17951 dir.
25. **(a)** $x_0 = -2$ veya $x_0 = -0.8$ için i arttıkça $x_i \to -1$ dir.
(b) $x_0 = -0.5$ veya $x_0 = 0.25$ için i arttıkça $x_i \to 0$ dir.
(c) $x_0 = 0.8$ veya $x_0 = 2$ için i arttıkça $x_i \to -1$'dir.
(d) For $x_0 = -\sqrt{21}/7$ veya $x_0 = \sqrt{21}/7$ için Newton yöntemi yakınsamaz. i arttıkça x_i'nin değerleri $-\sqrt{21}/7$ ve $\sqrt{21}/7$ arasında gider gelir.
27. Cevaplar makinenin hızına bağlı olarak değişir **29.** 2.45, 0.000245

Bölüm 4.8, Sayfa 314–318

1. **(a)** x^2 **(b)** $\frac{x^3}{3}$ **(c)** $\frac{x^3}{3} - x^2 + x$
3. **(a)** x^{-3} **(b)** $-\frac{1}{3}x^{-3}$ **(c)** $-\frac{1}{3}x^{-3} + x^2 + 3x$
5. **(a)** $-\frac{1}{x}$ **(b)** $-\frac{5}{x}$ **(c)** $2x + \frac{5}{x}$
7. **(a)** $\sqrt{x^3}$ **(b)** $\sqrt{x}$ **(c)** $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x}$
9. **(a)** $x^{2/3}$ **(b)** $x^{1/3}$ **(c)** $x^{-1/3}$
11. **(a)** $\cos(\pi x)$ **(b)** $-3\cos x$ **(c)** $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + \cos(3x)$
13. **(a)** $\tan x$ **(b)** $2\tan\left(\frac{x}{3}\right)$ **(c)** $-\frac{2}{3}\tan\left(\frac{3x}{2}\right)$
15. **(a)** $-\csc x$ **(b)** $\frac{1}{5}\csc(5x)$ **(c)** $2\csc\left(\frac{\pi x}{2}\right)$
17. $\frac{x^2}{2} + x + C$ **19.** $t^3 + \frac{t^2}{4} + C$ **21.** $\frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C$
23. $-\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C$ **25.** $\frac{3}{2}x^{2/3} + C$
27. $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{4}x^{4/3} + C$ **29.** $4y^2 - \frac{8}{3}y^{3/4} + C$
31. $x^2 + \frac{2}{x} + C$ **33.** $2\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + C$ **35.** $-2\sin t + C$
37. $-21\cos\frac{\theta}{3} + C$ **39.** $3\cot x + C$ **41.** $-\frac{1}{2}\csc\theta + C$
43. $4\sec x - 2\tan x + C$ **45.** $-\frac{1}{2}\cos 2x + \cot x + C$
47. $\frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{8} + C$ **49.** $\tan\theta + C$
51. $-\cot x - x + C$ **53.** $-\cos\theta - \theta + C$
61. **(a)** Yanlış: $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\sin x + C\right) = \frac{2x}{2}\sin x + \frac{x^2}{2}\cos x = x\sin x + \frac{x^2}{2}\cos x$
(b) Yanlış: $\frac{d}{dx}(-x\cos x + C) = -\cos x + x\sin x$
(c) Doğru: $\frac{d}{dx}(-x\cos x + \sin x + C) = -\cos x + x\sin x + \cos x = x\sin x$
63. **(a)** Yanlış: $\frac{d}{dx}\left(\frac{(2x+1)^3}{3} + C\right) = \frac{3(2x+1)^2(2)}{3} = 2(2x+1)^2$
(b) Yanlış: $\frac{d}{dx}((2x+1)^3 + C) = 3(2x+1)^2(2) = 6(2x+1)^2$
(c) Doğru: $\frac{d}{dx}((2x+1)^3 + C) = 6(2x+1)^2$
65. (b) **67.** $y = x^2 - 7x + 10$ **69.** $y = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$
71. $y = 9x^{1/3} + 4$ **73.** $s = t + \sin t + 4$
75. $r = \cos(\pi\theta) - 1$ **77.** $v = \frac{1}{2}\sec t + \frac{1}{2}$
79. $y = x^2 - x^3 + 4x + 1$ **81.** $r = \frac{1}{t} + 2t - 2$
83. $y = x^3 - 4x^2 + 5$ **85.** $y = -\sin t + \cos t + t^3 - 1$

87. $y = 2x^{3/2} - 50$ **89.** $y = x - x^{4/3} + \dfrac{1}{2}$

91. $y = -\sin x - \cos x - 2$

93. **(a)** **(i)** 33.2 birim, **(ii)** 33.2 birim, **(iii)** 33.2 birim **(b)** Doğru

95. $t = 88/k,\ k = 16$

97. **(a)** $v = 10t^{3/2} - 6t^{1/2}$ **(b)** $s = 4t^{5/2} - 4t^{3/2}$

101. **(a)** $-\sqrt{x} + C$ **(b)** $x + C$ **(c)** $\sqrt{x} + C$
(d) $-x + C$ **(e)** $x - \sqrt{x} + C$ **(f)** $-x - \sqrt{x} + C$

Problemler, Sayfa 318–321

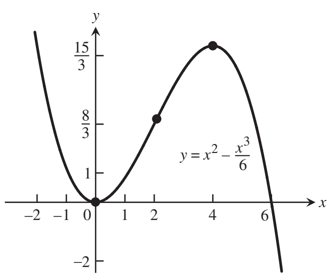
1. Hayır **3.** Minimum yok, mutlak maksimum: $f(1) = 16$, kritik noktalar: $x = 1$ ve $11/3$ **5.** $x = 0$ hariç evet **7.** Hayır

11. **(b)** bir

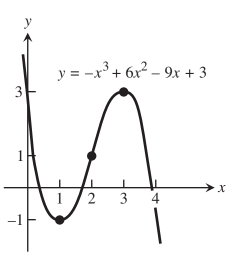
13. **(b)** 0.8555 99677 2 **19.** $x = 2$'de global minimum

21. **(a)** $t = 0, 6, 12$ **(b)** $t = 3, 9$ **(c)** $6 < t < 12$
(d) $0 < t < 6,\ 12 < t < 14$

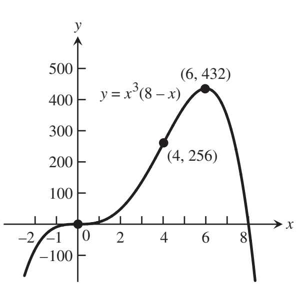
23.



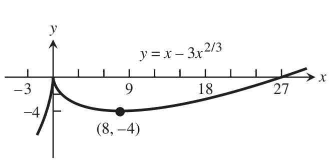
25.



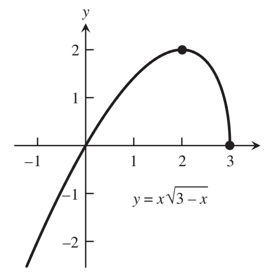
27.



29.

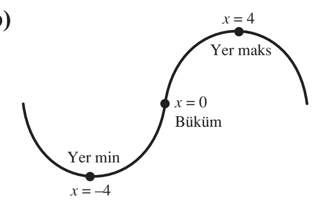


31.



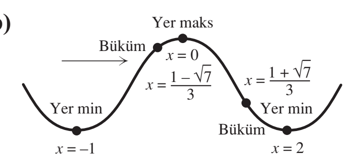
33. **(a)** $x = 4$'te yerel maksimum, $x = -4$'te yerel minimum, $x = 0$'da büküm noktası

(b)



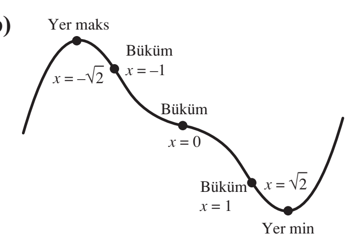
35. **(a)** $x = 0$'da yerel maksimum, $x = -1$ ve $x = 2$'de yerel minimum, $x = \left(1 \pm \sqrt{7}\right)/3$'te büküm noktaları

(b)

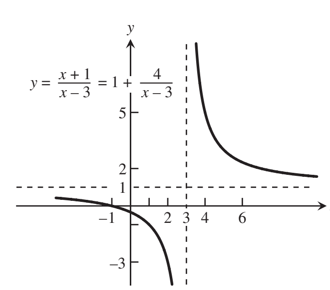


37. **(a)** $x = -\sqrt{2}$'de yerel maksimum, $x = \sqrt{2}$'de yerel minimum, $x = \pm 1$ ve 0'da büküm noktaları

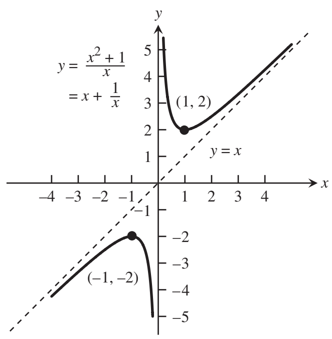
(b)



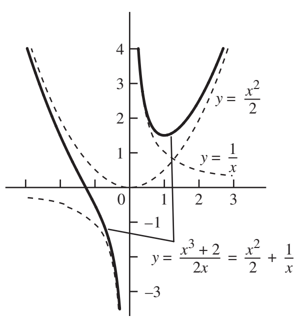
43.



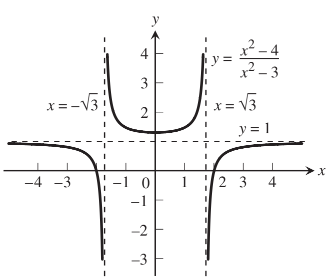
45.



47.



49.



51. 5 **53.** 0 **55.** 1 **57.** 3/7 **59.** 0 **61.** 1
63. **(a)** 0, 36 **(b)** 18, 18 **65.** 54 birim kare
67. Yükseklik = 2, yarıçap = $\sqrt{2}$
69. $x = 5 - \sqrt{5}$ yüz ≈ 276 lastik, $y = 2(5 - \sqrt{5})$ yüz ≈ 553 lastik
71. Boyutlar: taban 6 inç^3 × 12inç, yükseklik = 2 inç; maksimum hacim 144
73. $x_5 = 2.1958\,23345$ **75.** $\frac{x^4}{4} + \frac{5}{2}x^2 - 7x + C$
77. $2t^{3/2} - \frac{4}{t} + C$ **79.** $-\frac{1}{r+5} + C$
81. $(\theta^2 + 1)^{3/2} + C$ **83.** $\frac{1}{3}(1 + x^4)^{3/4} + C$
85. $10 \tan \frac{s}{10} + C$ **87.** $-\frac{1}{\sqrt{2}} \csc \sqrt{2}\,\theta + C$
89. $\frac{1}{2}x - \sin \frac{x}{2} + C$ **91.** $y = x - \frac{1}{x} - 1$
93. $r = 4t^{5/2} + 4t^{3/2} - 8t$

Ek ve İleri Alıştırmalar, Sayfa 322–324

1. Fonksiyon aralık üzerinde sabittir.
3. Ekstremum noktalar açık bir aralığın uçlarında olmayacaktır.
5. **(a)** $x = -1$'de bir yerel minimum, $x = 0$ ve $x = 2$'de büküm noktaları **(b)** $x = 0$'da bir yerel maksimum ve $x = -1$ ve $x = 2$'de yerel $x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$'te büküm noktaları

9. Hayır **11.** $a = 1, b = 0, c = 1$ **13.** Evet **15.** Deliği $y = h/2$'de delin.
17. ? ?? ? ?????? $= \frac{RH}{2(H-R)}$, ? ≤ ? ? ????? ? ?
19. **(a)** $\frac{10}{3}$ **(b)** $\frac{5}{3}$ **(c)** $\frac{1}{2}$ **(d)** 0 **(e)** $-\frac{1}{2}$ **(f)** 1 **(g)** $\frac{1}{2}$ **(h)** 3
21. **(a)** $\frac{c-b}{2e}$ **(b)** $\frac{c+b}{2}$ **(c)** $\frac{b^2 - 2bc + c^2 + 4ae}{4e}$
(d) $\frac{c+b+t}{2}$
23. $m_0 = 1 - \frac{1}{q}, m_1 = \frac{1}{q}$
25. **(a)** $k = -38.72$ **(b)** 25 ft
27. Evet, $y = x + C$ **29.** $v_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3} b^{3/4}$

BÖLÜM 5

Bölüm 5.1, Sayfa 333–335

1. **(a)** 0.125 **(b)** 0.21875 **(c)** 0.625 **(d)** 0.46875
3. **(a)** 1.066667 **(b)** 1.283333 **(c)** 2.666667 **(d)** 2.083333
5. 0.3125, 0.328125 **7.** 1.5, 1.574603
9. **(a)** 87 inç **(b)** 87 inç
11. **(a)** 3490 ft **(b)** 3840 ft
13. **(a)** 74.65 ft/sn **(b)** 45.28 ft/sn **(c)** 146.59 ft
15. $\frac{31}{16}$ **17.** 1
19. **(a)** Üst = 758 galon, alt = 543 galon
(b) Üst = 2363 galon, alt = 1693 galon
(c) ≈ 31.4 h, ≈ 32.4 h
21. **(a)** 2 **(b)** $2\sqrt{2} \approx 2.828$
(c) $8 \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 3.061$
(d) Her bir alan çemberin alanından küçüktür. n arttıkça çokgenin alanı π'ye yaklaşır

Bölüm 5.2, Sayfa 342–343

1. $\frac{6(1)}{1+1} + \frac{6(2)}{2+1} = 7$
3. $\cos(1)\pi + \cos(2)\pi + \cos(3)\pi + \cos(4)\pi = 0$
5. $\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3} - 2}{2}$

7. Hepsi **9.** b **11.** $\sum_{k=1}^{6} k$ **13.** $\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{2^k}$

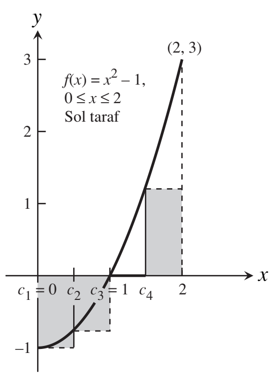
15. $\sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$

17. **(a)** -15 **(b)** 1 **(c)** 1 **(d)** -11 **(e)** 16

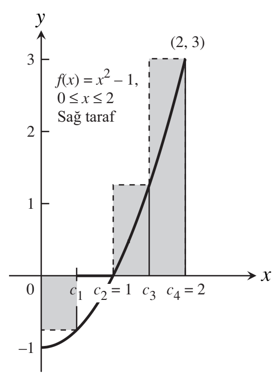
19. **(a)** 55 **(b)** 385 **(c)** 3025

21. -56 **23.** -73 **25.** 240 **27.** 3376

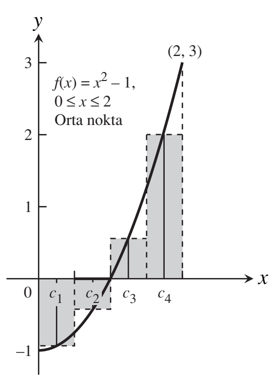
29. **(a)**



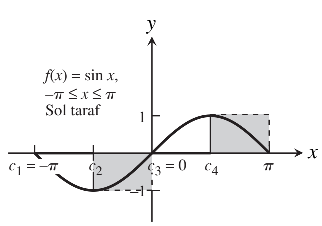
(b)



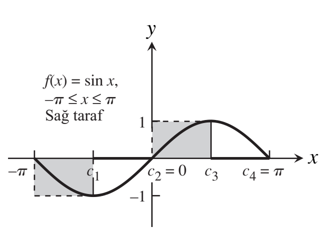
(c)



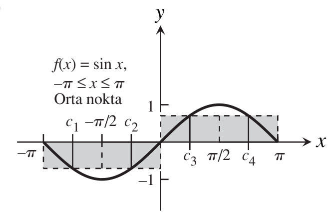
31. **(a)**



(b)



(c)



33. 1.2

35. $\frac{2}{3} + \frac{3n-1}{6n^2}, \frac{2}{3}$

37. $12 + \frac{27n+9}{2n^2}, 12$

39. $\frac{5}{6} + \frac{6n+1}{6n^2}, \frac{5}{6}$

Bölüm 5.3, Sayfa 352–356

1. $\int_0^2 x^2\,dx$ **3.** $\int_{-7}^{5} (x^2 - 3x)\,dx$ **5.** $\int_2^3 \frac{1}{1-x}\,dx$

7. $\int_{-\pi/4}^{0} \sec x\,dx$

9. **(a)** 0 **(b)** -8 **(c)** -12 **(d)** 10 **(e)** -2 **(f)** 16

11. **(a)** 5 **(b)** $5\sqrt{3}$ **(c)** -5 **(d)** -5

13. **(a)** 4 **(b)** -4 **15.** Alan = 21 birim kare

17. Alan = $9\pi/2$ birim kare **19.** Alan = 2.5 birim kare

21. Alan = 3 birim kare **23.** $b^2/4$ **25.** $b^2 - a^2$ **27.** $1/2$

29. $3\pi^2/2$ **31.** $7/3$ **33.** $1/24$ **35.** $3a^2/2$ **37.** $b/3$

39. -14 **41.** 10 **43.** -2 **45.** $-7/4$ **47.** 7 **49.** 0

51. $\Delta x = b/n$ uzunluklu n alt aralık ve sağ uç nokta değerlerini kullanarak:

$$\text{Area} = \int_0^b 3x^2\,dx = b^3$$

53. $\Delta x = b/n$ uzunluklu n alt aralık ve sağ uç nokta değerlerini kullanarak:

$$\text{Alan} = \int_0^b 2x\,dx = b^2$$

55. ort$(f) = 0$ **57.** ort$(f) = –2$ **59.** ort$(f) = 1$

61. **(a)** ort$(g) = 1/2$ **(b)** ort$(g) = 1$ **(c)** ort$(g) = 1/4$

63. $a = 0$ ve $b = 1$ integrali maksimize eder.

65. Üst sınır = 1, alt sınır = 1/2

67. Örneğin, , $\int_0^1 \sin(x^2)\,dx \le \int_0^1 dx = 1$

69. $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b 0\,dx = 0$ **71.** Üst sınır = 1/2

Bölüm 5.4, Sayfa 365–368

1. 6 **3.** 8 **5.** 1 **7.** 5/2 **9.** 2 **11.** $2\sqrt{3}$ **13.** 0

15. $-\pi/4$ **17.** $\frac{2\pi^3}{3}$ **19.** $-8/3$ **21.** $-3/4$

23. $\sqrt{2} - \sqrt[4]{8} + 1$ **25.** 16 **27.** $(\cos\sqrt{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

29. $4t^5$ **31.** $\sqrt{1+x^2}$ **33.** $-\frac{1}{2}x^{-1/2}\sin x$ **35.** 1

37. 28/3 **39.** 1/2 **41.** 51/4 **43.** π **45.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

47. d, $y' = \frac{1}{x}$ ve $y(\pi) = \int_{\pi}^{\pi} \frac{1}{t}\,dt - 3 = -3$ olduğundan

49. b, $y' = \sec x$ ve $y(0) = \int_0^0 \sec t\,dt + 4 = 4$ olduğundan

51. $y = \int_2^x \sec t\,dt + 3$ **53.** $s = \int_{t_0}^{t} f(x)\,dx + s_0$

55. $\frac{2}{3}bh$ **57.** $9.00

59. **(a)** $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_0^t f(x)\,dx = f(t) \Rightarrow v(5) = f(5) = 2$ m/sn
(b) $a = df/dt$ negatiftir, çünkü $t = 5$'teki teğetin eğimi negatiftir.
(c) $s = \int_0^3 f(x)\,dx = \frac{1}{2}(3)(3) = \frac{9}{2}$ m çünkü integral $y = f(x)$, x-ekseni ve $x = 3$'ün oluşturduğu belirlenen üçgenin alanıdır.
(d) $t = 6$, çünkü $t = 6$'dan $t = 9$'a kadar bölge x-ekseninin altındadır.
(e) $t = 4$ ve $t = 7$'de, çünkü buralarda yatay teğetler vardır.
(f) $t = 6$ ile $t = 9$ arasında orijine doğru, çünkü bu aralıkta hız negatiftir. $t = 0$ ile $t = 6$ arasında orijjinden uzağa, çünkü bu aralıkta hız pozitiftir..
(g) Sağa veya pozitif tarafa, çünkü f'nin 0'dan 9'a integrali pozitiftir ve bu aralıkta x-ekseninin üstünde, altında olduğundan daha fazla bölge vardır.

63. $2x - 2$ **65.** $-3x + 5$

67. **(a)** Doğru. f sürekli olduğundan, Analizin Temel Teoreminin 1. Kısmına göre g türetilebilir.
(b) Doğru: g türetilebilir olduğundan süreklidir.
(c) Doğru, çünkü $g'(1) = f(1) = 0$.
(d) Yanlış, çünkü $g''(1) = f'(1) > 0$.
(e) True, since $g'(1) = 0$ ve $g''(1) = f'(1) > 0$.
(f) Yanlış: $g''(x) = f'(x) > 0$, dolayısıyla g'' işaret değiştirmez.
(g) Doğru, çünkü $g'(1) = f(1) = 0$ ve $g'(x) = f(x)$'in artan bir fonksiyonudur (çünkü $f'(x) > 0$).

Bölüm 5.5, Sayfa 374–376

1. $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$ **3.** $\frac{1}{2}\sec 2t + C$ **5.** $-(7x-2)^{-4} + C$

7. $-6(1 - r^3)^{1/2} + C$

9. $\frac{1}{3}(x^{3/2} - 1) - \frac{1}{6}\sin(2x^{3/2} - 2) + C$

11. **(a)** $-\frac{1}{4}(\cot^2 2\theta) + C$ **(b)** $-\frac{1}{4}(\csc^2 2\theta) + C$

13. $-\frac{1}{3}(3 - 2s)^{3/2} + C$ **15.** $\frac{2}{5}(5s + 4)^{1/2} + C$

17. $-\frac{2}{5}(1 - \theta^2)^{5/4} + C$ **19.** $-\frac{1}{3}(7 - 3y^2)^{3/2} + C$

21. $(-2/(1 + \sqrt{x})) + C$ **23.** $\frac{1}{3}\sin(3z + 4) + C$

25. $\frac{1}{3}\tan(3x + 2) + C$ **27.** $\frac{1}{2}\sin^6\left(\frac{x}{3}\right) + C$

29. $\left(\frac{r^3}{18} - 1\right)^6 + C$ **31.** $-\frac{2}{3}\cos(x^{3/2} + 1) + C$

33. $\sec\left(v + \frac{\pi}{2}\right) + C$ **35.** $\frac{1}{2\cos(2t + 1)} + C$

37. $-\frac{2}{3}(\cot^3 y)^{1/2} + C$ **39.** $-\sin\left(\frac{1}{t} - 1\right) + C$

41. $-\frac{\sin^2(1/\theta)}{2} + C$ **43.** $\frac{(s^3 + 2s^2 - 5s + 5)^2}{2} + C$

45. $\frac{1}{16}(1 + t^4)^4 + C$

47. $\frac{1}{5}(x^2 + 1)^{5/2} - \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C$

49. **(a)** $-\frac{6}{2 + \tan^3 x} + C$ **(b)** $-\frac{6}{2 + \tan^3 x} + C$
(c) $-\frac{6}{2 + \tan^3 x} + C$

51. $\frac{1}{6}\sin\sqrt{3(2r - 1)^2 + 6} + C$

53. $s = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)^4 - 5$

55. $s = 4t - 2\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) + 9$

57. $s = \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) + 100t + 1$

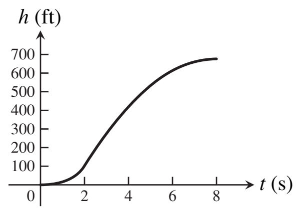
59. 6 m **63.** b) 399 Volts

Bölüm 5.6, Sayfa 383–387

1. **(a)** 14/3 **(b)** 2/3
3. **(a)** 1/2 **(b)** −1/2
5. **(a)** 15/16 **(b)** 0
7. **(a)** 0 **(b)** 1/8
9. **(a)** 4 **(b)** 0
11. **(a)** 1/6 **(b)** 1/2
13. **(a)** 0 **(b)** 0
15. $2\sqrt{3}$ **17.** 3/4 **19.** $3^{5/2} - 1$ **21.** 3 **23.** $\pi/3$
25. 16/3 **27.** $2^{5/2}$ **29.** $\pi/2$ **31.** 128/15 **33.** 4/3
35. 5/6 **37.** 38/3 **39.** 49/6 **41.** 32/3 **43.** 48/5
45. 8/3 **47.** 8 **49.** 5/3 (Üç kesişim noktası var.)
51. 18 **53.** 243/8 **55.** 8/3 **57.** 2 **59.** 104/15
61. 56/15 **63.** 4 **65.** $\frac{4}{3} - \frac{4}{\pi}$ **67.** $\pi/2$ **69.** 2 **71.** 1/2
73. 1
75. **(a)** $(\pm\sqrt{c}, c)$ **(b)** $c = 4^{2/3}$ **(c)** $c = 4^{2/3}$
77. 11/3 **79.** 3/4 **81.** Hiçbiri **83.** $F(6) - F(2)$
85. **(a)** −3 **(b)** 3
87. $I = a/2$

Problemler, Sayfa 388–391

1. (a) yaklaşık 680 ft **(b)**



3. (a) $-1/2$ **(b)** 31 **(c)** 13 **(d)** 0

5. $\int_1^5 (2x - 1)^{-1/2}\,dx = 2$ **7.** $\int_{-\pi}^{0} \cos\frac{x}{2}\,dx = 2$

9. (a) 4 **(b)** 2 **(c)** -2 **(d)** -2π **(e)** $8/5$

11. $8/3$ **13.** 62 **15.** 1 **17.** $1/6$ **19.** 18 **21.** $9/8$

23. $\frac{\pi^2}{32} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ **25.** 4 **27.** $\frac{8\sqrt{2} - 7}{6}$

29. Min: –4, maks: 0, alan: $27/4$ **31.** $6/5$

35. $y = \int_5^x \left(\frac{\sin t}{t}\right) dt - 3$ **37.** $-4(\cos x)^{1/2} + C$

39. $\theta^2 + \theta + \sin(2\theta + 1) + C$ **41.** $\frac{t^3}{3} + \frac{4}{t} + C$

43. $-\frac{1}{3}\cos(2t^{3/2}) + C$ **45.** 16 **47.** 2 **49.** 1 **51.** 8

53. $27\sqrt{3}/160$ **55.** $\pi/2$ **57.** $\sqrt{3}$ **59.** $6\sqrt{3} - 2\pi$

61. -1 **63.** 2 **65.** -2 **67.** 1 **69.** $\sqrt{2} - 1$

71. (a) b **(b)** b

75. 25°F **77.** $\sqrt{2 + \cos^3 x}$ **79.** $\frac{-6}{3 + x^4}$ **81.** Evet

83. $-\sqrt{1 + x^2}$

85. maliyet ≈ 10,899 $ alt toplam kullanarak

87. 600, 18.00 $ **89.** 300, 6.00 $

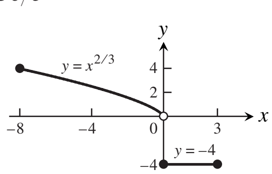
Ek ve İleri Alıştırmalar, Sayfa 391–394

1. (a) Evet **(b)** Hayır

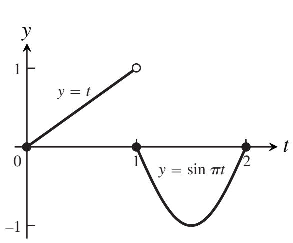
5. (a) $1/4$ **(b)** $\sqrt[3]{12}$

7. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ **9.** $y = x^3 + 2x - 4$

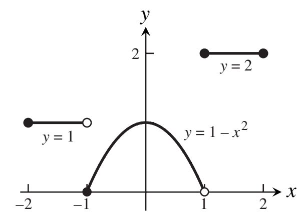
11. $36/5$



13. $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}$



15. $13/3$



17. $1/2$ **19.** $2/x$

21. $\frac{\sin 4y}{\sqrt{y}} - \frac{\sin y}{2\sqrt{y}}$ **23.** $1/6$ **25.** $\int_0^1 f(x)\,dx$

29. (a) 0 **(b)** -1 **(c)** $-\pi$ **(d)** $x = 1$
(e) $y = 2x + 2 - \pi$ **(f)** $x = -1, x = 2$ **(g)** $[-2\pi, 0]$

BÖLÜM 6

Bölüm 6.1, Sayfa 405–409

1. (a) $A(x) = \pi(1 - x^2)$ **(b)** $A(x) = 4(1 - x^2)$
(c) $A(x) = 2(1 - x^2)$ **(d)** $A(x) = \sqrt{3}(1 - x^2)$

3. 16 **5.** $\frac{16}{3}$ **7. (a)** $2\sqrt{3}$ **(b)** 8 **9.** 8π

11. (a) s^2h **(b)** s^2h **13.** $\frac{2\pi}{3}$ **15.** $4 - \pi$ **17.** $\frac{32\pi}{5}$

19. 36π **21.** π **23.** $\pi\left(\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2} - \frac{11}{3}\right)$ **25.** 2π

27. 2π **29.** 3π **31.** $\pi^2 - 2\pi$ **33.** $\frac{2\pi}{3}$ **35.** $\frac{117\pi}{5}$

37. $\pi(\pi - 2)$ **39.** $\frac{4\pi}{3}$ **41.** 8π **43.** $\frac{7\pi}{6}$

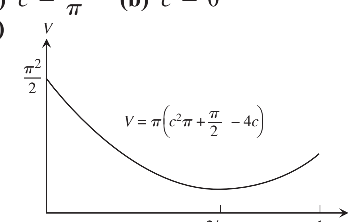
45. (a) 8π **(b)** $\frac{32\pi}{5}$ **(c)** $\frac{8\pi}{3}$ **(d)** $\frac{224\pi}{15}$

47. (a) $\frac{16\pi}{15}$ **(b)** $\frac{56\pi}{15}$ **(c)** $\frac{64\pi}{15}$

49. $V = 2a^2b\pi^2$ **51. (a)** $V = \frac{\pi h^2(3a - h)}{3}$ **(b)** $\frac{1}{120\pi}$ m/sn

55. $V = 3308\text{ cm}^3$

57. (a) $c = \frac{2}{\pi}$ **(b)** $c = 0$
(c)



Bölüm 6.2, Sayfa 414–416

1. 6π **3.** 2π **5.** $\frac{14\pi}{3}$ **7.** 8π **9.** $\frac{5\pi}{6}$ **11.** $\frac{7\pi}{15}$

13. (b) 4π **15.** $\frac{16\pi}{15}(3\sqrt{2} + 5)$ **17.** $\frac{8\pi}{3}$ **19.** $\frac{4\pi}{3}$

21. $\frac{16\pi}{3}$ **23. (a)** $\frac{6\pi}{5}$ **(b)** $\frac{4\pi}{5}$ **(c)** 2π **(d)** 2π

25. **(a)** x-ekseni etrafında: $V = \frac{2\pi}{15}$; y-ekseni etrafında: $V = \frac{\pi}{6}$

(b) x-ekseni etrafında: $V = \frac{2\pi}{15}$; y-ekseni etrafında: $V = \frac{\pi}{6}$

27. **(a)** $\frac{5\pi}{3}$ **(b)** $\frac{4\pi}{3}$ **(c)** 2π **(d)** $\frac{2\pi}{3}$

29. **(a)** $\frac{4\pi}{15}$ **(b)** $\frac{7\pi}{30}$ **31.** **(a)** $\frac{24\pi}{5}$ **(b)** $\frac{48\pi}{5}$

33. **(a)** $\frac{9\pi}{16}$ **(b)** $\frac{9\pi}{16}$

35. Disk: 2 integral, pul: 2 integral, kabuk: 1 integral

Bölüm 6.3, Sayfa 423–424

1. $\frac{5\sqrt{10}}{3}$ **3.** 7 **5.** $\frac{21}{2}$ **7.** 12 **9.** $\frac{53}{6}$ **11.** $\frac{123}{32}$

13. $\frac{99}{8}$ **15.** 2 **17.** **(a)** $\int_{-1}^{2} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$ **(c)** ≈ 6.13

19. **(a)** $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 y}\, dy$ **(c)** ≈ 3.82

21. **(a)** $\int_{-1}^{3} \sqrt{1 + (y + 1)^2}\, dy$ **(c)** ≈ 9.29

23. **(a)** $\int_{0}^{\pi/6} \sec x\, dx$ **(c)** ≈ 0.55

25. Evet, $f(x) = \pm x + C$, C herhangi bir reel sayı

27. **(a)** (1, 1)'den (4, 2)'ye $y = \sqrt{x}$

(b) Sadece bir. Fonksiyonun türevini ve değerini x'in bir değerinde biliyoruz.

29. **(a)** π **(b)** π

Bölüm 6.4, Sayfa 434–435

1. 4 ft **3.** $(L/4, L/4)$ **5.** $M_0 = 8, M = 8, \bar{x} = 1$

7. $M_0 = 15/2, M = 9/2, \bar{x} = 5/3$

9. $M_0 = 73/6, M = 5, \bar{x} = 73/30$ **11.** $M_0 = 3, M = 3, \bar{x} = 1$

13. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 12/5$ **15.** $\bar{x} = 1, \bar{y} = -3/5$

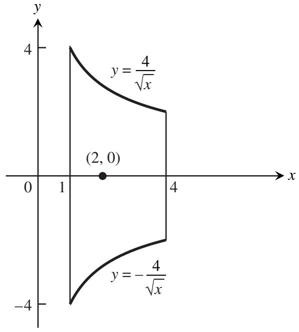
17. $\bar{x} = 16/105, \bar{y} = 8/15$ **19.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = \pi/8$

21. $\bar{x} = 1, \bar{y} = -2/5$ **23.** $\bar{x} = \bar{y} = \frac{2}{4 - \pi}$

25. $\bar{x} = 3/2, \bar{y} = 1/2$

27. **(a)** $\frac{224\pi}{3}$ **(b)** $\bar{x} = 2, \bar{y} = 0$

(c)



31. $\bar{x} = \bar{y} = 1/3$ **33.** $\bar{x} = a/3, \bar{y} = b/3$ **35.** $13\delta/6$

37. $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{a\pi}{4}$

Bölüm 6.5, Sayfa 444–447

1. **(a)** $2\pi \int_{0}^{\pi/4} \tan x \sqrt{1 + \sec^4 x}\, dx$ **(c)** ≈ 3.84

3. **(a)** $2\pi \int_{1}^{2} \frac{1}{y} \sqrt{1 + y^{-4}}\, dy$ **(c)** ≈ 5.02

5. **(a)** $2\pi \int_{1}^{4} (3 - \sqrt{x})^2 \sqrt{1 + (1 - 3x^{-1/2})^2}\, dx$ **(c)** ≈ 63.37

7. **(a)** $2\pi \int_{0}^{\pi/3} \left(\int_{0}^{y} \tan t\, dt \right) \sec y\, dy$ **(c)** ≈ 2.08

9. $4\pi\sqrt{5}$ **11.** $3\pi\sqrt{5}$ **13.** $98\pi/81$ **15.** 2π

17. $\pi\left(\sqrt{8} - 1\right)/9$ **19.** $35\pi\sqrt{5}/3$ **21.** $253\pi/20$

25. $2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x) \sqrt{1 + \sin^2 x}\, dx$

27. Her renkten 226.2 litre ısmarlayın. **31.** $5\sqrt{2}\pi$ **33.** $8\pi^2$

35. $52\pi/3$ **37.** $3\pi\sqrt{5}$ **41.** $V = 32\pi, S = 32\sqrt{2}\pi$

43. $4\pi^2$ **45.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{2a}{\pi}$ **47.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$

49. $\sqrt{2}\pi a^3(4 + 3\pi)/6$ **51.** $\frac{2a^3}{3}$

Bölüm 6.6, Sayfa 452–455

1. 400 N · m **3.** 4 cm, 0.08 J

5. **(a)** 7238 lb/inç **(b)** 905 inç-lb, 2714 inç-lb **7.** 780 J

9. 72,900 ft-lb **13.** 160 ft-lb

15. **(a)** 1,497,600 ft-lb **(b)** 1 sn, 40 dak **(d)** 62.26 lb/ft^3'te
a) 1,494,240 ft-lb b) 1 sn, 40.1 dak 62.59 lb/ft^3'te:
a) 1,502,160 ft-lb b) 1 sn, 40.1 dak

17. 37,306 ft-lb **19.** 7,238,229.47 ft-lb

21. **(a)** 34,583 ft-lb **(b)** 53,483 ft-lb **23.** 15,073,100.75 J

27. 85.1 ft-lb **29.** 64.6 ft-lb **31.** 110.6 ft-lb

33. **(a)** $325 \le y \le 375$ ft için $r(y) = 60 - \sqrt{50^2 - (y - 325)^2}$

(b) $\Delta V \approx \pi[60 - \sqrt{2500 - (y - 325)^2}]^2\, \Delta y$

(c) $W = 6.3358 \cdot 10^7$ ft-lb

35. 91.32 inç-oz **37.** 5.144×10^{10} J

Bölüm 6.7, Sayfa 459–461

1. 1684.8 lb **3.** 2808 lb **5.** **(a)** 1164.8 lb **(b)** 1194.7 lb

7. 1309 lb **9.** 41.6 lb **11.** **(a)** 93.33 lb **(b)** 3 ft

13. 1035 ft^3 **15.** $wb/2$

17. Hayır. Tank taşacaktır, çünkü hareket edebilen uç tank dolduğunda sadece $3\frac{1}{3}$ ft ilerlemiş olacaktır.

19. 4.2 lb **21.** **(a)** 374.4 lb **(b)** 7.5 inç **(c)** No

Problemler, Sayfa 461–464

1. $\frac{9\pi}{280}$ **3.** π^2 **5.** $\frac{72\pi}{35}$

7. **(a)** 2π **(b)** π **(c)** $12\pi/5$ **(d)** $26\pi/5$
9. **(a)** 8π **(b)** $1088\pi/15$ **(c)** $512\pi/15$
11. $\pi(3\sqrt{3}-\pi)/3$
13. **(a)** $16\pi/15$ **(b)** $8\pi/5$ **(c)** $8\pi/3$ **(d)** $32\pi/5$
15. $\frac{28\pi}{3}$ ft^3 **17.** $\frac{10}{3}$ **19.** $\frac{285}{8}$ **21.** 10 **23.** $\frac{9\pi}{2}$
25. $\bar{x}=0, \bar{y}=8/5$ **27.** $\bar{x}=3/2, \bar{y}=12/5$
29. $\bar{x}=9/5, \bar{y}=11/10$ **31.** $28\pi\sqrt{2}/3$ **33.** 4π
35. $76\pi/3$ **37.** 4640 J **39.** 10 ft-lb, 30 ft-lb
41. 418,208.81 ft-lb **43.** $22{,}500\pi$ ft-lb, 257 sn.
45. 332.8 lb **47.** 2196.48 lb **49.** $216w_1+360w_2$

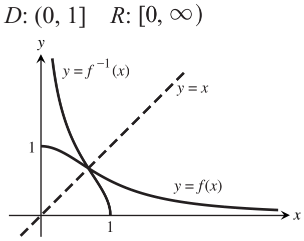
Ek ve İleri Alıştırmalar, Sayfa 464–465

1. $f(x)=\sqrt{\frac{2x-a}{\pi}}$ **3.** $f(x)=\sqrt{C^2-1}\,x+a$, burada $C\ge 1$'dir.
5. $\bar{x}=0, \bar{y}=\frac{n}{2n+1}$, $(0, 1/2)$
9. **(a)** $\bar{x}=\bar{y}=4(a^2+ab+b^2)/(3\pi(a+b))$
(b) $(2a/\pi, 2a/\pi)$
11. $28/3$ **13.** $\frac{4h\sqrt{3mh}}{3}$ **15.** ≈ 2329.6 lb
17. **(a)** $2h/3$ **(b)** $(6a^2+8ah+3h^2)/(6a+4h)$

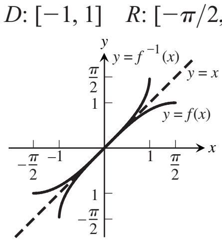
BÖLÜM 7

Bölüm 7.1, 473–475

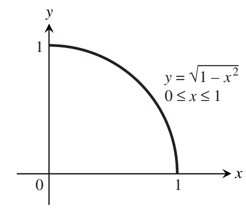
1. Bire-bir **3.** Bire-bir değil **5.** Bire-bir
7. D: $(0, 1]$ R: $[0, \infty)$



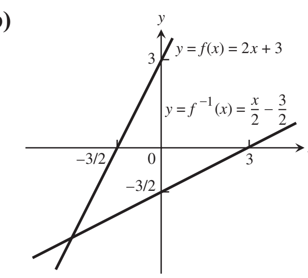
9. D: $[-1, 1]$ R: $[-\pi/2, \pi/2]$



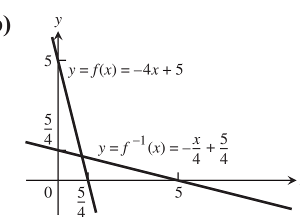
11. **(a)** $y=x$ doğrusuna göre simetrik



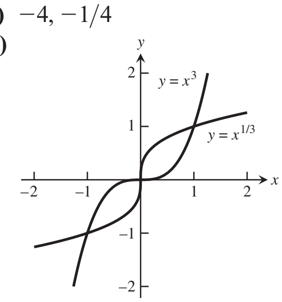
13. $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$ **15.** $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}$
17. $f^{-1}(x)=\sqrt{x}-1$
19. $f^{-1}(x)=\sqrt[5]{x}$; tanım kümesi: $-\infty<x<\infty$;
değer kümesi: $-\infty<y<\infty$
21. $f^{-1}(x)=5\sqrt{x-1}$; tanım kümesi: $-\infty<x<\infty$;
değer kümesi: $-\infty<y<\infty$
23. $f^{-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$; tanım kümesi: $x>0$; değer kümesi: $y>0$
25. **(a)** $f^{-1}(x)=\frac{x}{2}-\frac{3}{2}$
(b)



(c) 2, 1/2
27. **(a)** $f^{-1}(x)=-\frac{x}{4}+\frac{5}{4}$
(b)



(c) $-4, -1/4$
29. **(b)**



(c) f'nin (1, 1)'deki eğimi: 3; g'nin (1, 1)'deki eğimi: 1/3;
f'nin (–1, –1)'deki eğimi: 3; g'nin (–1, –1)'deki eğimi: 1/3

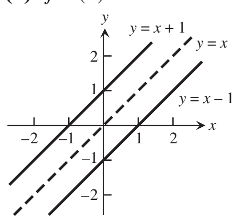
(d) $y = 0$, $x = 0$'da $y = x^3$'e teğettir; $x = 0$, $x = 0$'da $y = \sqrt[3]{x}$'e teğettir.

31. $1/9$ **33.** 3

35. **(a)** $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{m}x$

(b) f^{-1}'in grafiği $1/m$ eğimiyle orijinden geçen doğrudur.

37. **(a)** $f^{-1}(x) = x - 1$



(b) $f^{-1}(x) = x - b$. f^{-1}'in grafiği f'nin grafiğine paralel olan bir doğrudur. f ve f^{-1}'in grafikleri $y = x$ doğrusunun zıt taraflarında bulunurlar ve bu eğriden eşit uzaklıktadırlar.

(c) Grafikleri birbirlerine paralel olacak ve $y = x$ doğrusunun zıt taraflarına, bu eğriden eşit uzaklıkta bulunacaklardır..

41. Artan, dolayısıya bire-bir; $df^{-1}/dx = \dfrac{1}{9}x^{-2/3}$

43. Azalan, dolayısıyla bire-bir; $df^{-1}/dx = -\dfrac{1}{3}x^{-2/3}$

Bölüm 7.2, Sayfa 484–485

1. **(a)** $\ln 3 - 2\ln 2$ **(b)** $2(\ln 2 - \ln 3)$ **(c)** $-\ln 2$, **(d)** $\dfrac{2}{3}\ln 3$ **(e)** $\ln 3 + \dfrac{1}{2}\ln 2$ **(f)** $\dfrac{1}{2}(3\ln 3 - \ln 2)$

3. **(a)** $\ln 5$ **(b)** $\ln(x - 3)$ **(c)** $\ln(t^2)$

5. $1/x$ **7.** $2/t$ **9.** $-1/x$ **11.** $\dfrac{1}{\theta + 1}$ **13.** $3/x$

15. $2(\ln t) + (\ln t)^2$ **17.** $x^3 \ln x$ **19.** $\dfrac{1 - \ln t}{t^2}$

21. $\dfrac{1}{x(1 + \ln x)^2}$ **23.** $\dfrac{1}{x\ln x}$ **25.** $2\cos(\ln\theta)$

27. $-\dfrac{3x + 2}{2x(x + 1)}$ **29.** $\dfrac{2}{t(1 - \ln t)^2}$ **31.** $\dfrac{\tan(\ln\theta)}{\theta}$

33. $\dfrac{10x}{x^2 + 1} + \dfrac{1}{2(1 - x)}$ **35.** $2x\ln|x| - x\ln\dfrac{|x|}{\sqrt{2}}$ **37.** $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$

39. $\ln|y^2 - 25| + C$ **41.** $\ln 3$ **43.** $(\ln 2)^2$ **45.** $\dfrac{1}{\ln 4}$

47. $\ln|6 + 3\tan t| + C$ **49.** $\ln 2$ **51.** $\ln 27$

53. $\ln(1 + \sqrt{x}) + C$

55. $\left(\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{x(x + 1)}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 1}\right) = \dfrac{2x + 1}{2\sqrt{x(x + 1)}}$

57. $\left(\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{\dfrac{t}{t + 1}}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t + 1}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}(t + 1)^{3/2}}$

59. $\sqrt{\theta + 3}(\sin\theta)\left(\dfrac{1}{2(\theta + 3)} + \cot\theta\right)$

61. $t(t + 1)(t + 2)\left[\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t + 1} + \dfrac{1}{t + 2}\right] = 3t^2 + 6t + 2$

63. $\dfrac{\theta + 5}{\theta\cos\theta}\left[\dfrac{1}{\theta + 5} - \dfrac{1}{\theta} + \tan\theta\right]$

65. $\dfrac{x\sqrt{x^2 + 1}}{(x + 1)^{2/3}}\left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x^2 + 1} - \dfrac{2}{3(x + 1)}\right]$

67. $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x(x - 2)}{x^2 + 1}}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{2x}{x^2 + 1}\right)$

69. **(a)** Max $= 0$ at $x = 0$, min $= -\ln 2$ at $x = \pi/3$

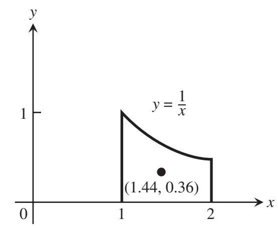
(b) Max $= 1$ at $x = 1$, min $= \cos(\ln 2)$ at $x = 1/2$ and $x = 2$

71. $\ln 16$ **73.** $4\pi\ln 4$ **75.** $\pi\ln 16$

77. **(a)** $6 + \ln 2$ **(b)** $8 + \ln 9$

79. **(a)** $\bar{x} \approx 1.44, \bar{y} \approx 0.36$

(b)



81. $y = x + \ln|x| + 2$ **83.** **(b)** 0.00469

Bölüm 7.3, Sayfa 493–495

1. **(a)** 7.2 **(b)** $\dfrac{1}{x^2}$ **(c)** $\dfrac{x}{y}$

3. **(a)** 1 **(b)** 1 **(c)** $-x^2 - y^2$

5. e^{2t+4} **7.** $e^{5t} + 40$ **9.** $y = 2xe^x + 1$

11. **(a)** $k = \ln 2$ **(b)** $k = (1/10)\ln 2$ **(c)** $k = 1000\ln a$

13. **(a)** $t = -10\ln 3$ **(b)** $t = -\dfrac{\ln 2}{k}$ **(c)** $t = \dfrac{\ln .4}{\ln .2}$

15. $4(\ln x)^2$ **17.** $-5e^{-5x}$ **19.** $-7e^{(5-7x)}$ **21.** xe^x

23. x^2e^x **25.** $2e^\theta\cos\theta$ **27.** $2\theta e^{-\theta^2}\sin(e^{-\theta^2})$

29. $\dfrac{1 - t}{t}$ **31.** $1/(1 + e^\theta)$ **33.** $e^{\cos t}(1 - t\sin t)$

35. $(\sin x)/x$ **37.** $\dfrac{ye^y\cos x}{1 - ye^y\sin x}$ **39.** $\dfrac{2e^{2x} - \cos(x + 3y)}{3\cos(x + 3y)}$

41. $\dfrac{1}{3}e^{3x} - 5e^{-x} + C$ **43.** 1 **45.** $8e^{(x+1)} + C$ **47.** 2

49. $2e^{\sqrt{r}} + C$ **51.** $-e^{-t^2} + C$ **53.** $-e^{1/x} + C$ **55.** e

57. $\dfrac{1}{\pi}e^{\sec\pi t} + C$ **59.** 1 **61.** $\ln(1 + e^r) + C$

63. $y = 1 - \cos(e^t - 2)$ **65.** $y = 2(e^{-x} + x) - 1$

67. Maksimum: 1 at $x = 0$, minimum: $x = \ln 2$'de $2 - 2\ln 2$

69. $x = 1/\sqrt{e}$'de alınan $1/(2e)$ değerinde mutlak maks.

71. 2 **73.** $y = e^{x/2} - 1$

75. **(a)** $\dfrac{d}{dx}(x\ln x - x + C) = x\cdot\dfrac{1}{x} + \ln x - 1 + 0 = \ln x$

(b) $\dfrac{1}{e - 1}$

77. **(b)** $|\text{hata}| \approx 0.02140$ **79.** 2.71828183

Bölüm 7.4, Sayfa 500–502

1. **(a)** 7 **(b)** $\sqrt{2}$ **(c)** 75 **(d)** 2 **(e)** 0.5 **(f)** -1

3. **(a)** $\sqrt{x}$ **(b)** x^2 **(c)** $\sin x$ **5.** **(a)** $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ **(b)** 3 **(c)** 2

7. $x = 12$ **9.** $x = 3$ or $x = 2$ **11.** $2^x\ln x$

13. $\left(\dfrac{\ln 5}{2\sqrt{s}}\right)5^{\sqrt{s}}$ **15.** $\pi x^{(\pi-1)}$ **17.** $-\sqrt{2}\cos\theta^{(\sqrt{2}-1)}\sin\theta$

19. $7^{\sec\theta}(\ln 7)^2(\sec\theta\tan\theta)$ **21.** $(3\cos 3t)(2^{\sin 3t})\ln 2$

23. $\dfrac{1}{\theta\ln 2}$ **25.** $\dfrac{3}{x\ln 4}$ **27.** $\dfrac{2(\ln r)}{r(\ln 2)(\ln 4)}$

29. $\dfrac{-2}{(x+1)(x-1)}$ **31.** $\sin(\log_7\theta)+\dfrac{1}{\ln 7}\cos(\log_7\theta)$

33. $\dfrac{1}{\ln 5}$ **35.** $\dfrac{1}{t}(\log_2 3)3^{\log_2 t}$ **37.** $\dfrac{1}{t}$

39. $(x+1)^x\left(\dfrac{x}{x+1}+\ln(x+1)\right)$ **41.** $(\sqrt{t})^t\left(\dfrac{\ln t}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$

43. $(\sin x)^x(\ln\sin x+x\cot x)$ **45.** $(x^{\ln x})\left(\dfrac{\ln x^2}{x}\right)$

47. $\dfrac{5^x}{\ln 5}+C$ **49.** $\dfrac{1}{2\ln 2}$ **51.** $\dfrac{1}{\ln 2}$ **53.** $\dfrac{6}{\ln 7}$ **55.** 32760

57. $\dfrac{3x^{(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt{3}+1}+C$ **59.** $3^{\sqrt{2}+1}$ **61.** $\dfrac{1}{\ln 10}\left(\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right)+C$

63. $2(\ln 2)^2$ **65.** $\dfrac{3\ln 2}{2}$ **67.** $\ln 10$ **69.** $(\ln 10)\ln|\ln x|+C$

71. $\ln(\ln x), x>1$ **73.** $-\ln x$ **75.** $2\ln 5$
77. $[10^{-7.44}, 10^{-7.37}]$ **79.** $k=10$
81. **(a)** 10^{-7} **(b)** 7 **(c)** 1 : 1 **83.** $x\approx -0.76666$
85. **(a)** $L(x)=1+(\ln 2)x\approx 0.69x+1$
87. **(a)** 1.89279 **(b)** −0.35621 **(c)** 0.94575 **(d)** −2.80735 **(e)** 5.29595 **(f)** 0.97041 **(g)** −1.03972 **(h)** −1.61181

Bölüm 7.5, Sayfa 508–511

1. **(a)** −0.00001 **(b)** 10,536 yıl **(c)** %82
3. 54.88 g **5.** 59.8 ft **7.** 2.8147498×10^{14}
9. **(a)** 8 yıl **(b)** 32.02 yıl **11.** 15.28 yıl
13. **(a)** $A_0e^{0.2}$ **(b)** 17.33 yıl; 27.47 yıl
15. %4.50 **17.** 0.585 gün
21. **(a)** 17.5 dak **(b)** 13.26 dak
23. −3°C **25.** Yaklaşık 6658 yıl **27.** 41 yaşında

Bölüm 7.6, Sayfa 515–517

1. **(a)** yavaş **(b)** yavaş **(c)** yavaş **(d)** hızlı **(e)** yavaş **(f)** yavaş **(g)** aynı **(h)** hızlı
3. **(a)** aynı **(b)** hızlı **(c)** aynı **(d)** aynı **(e)** hızlı **(f)** hızlı **(g)** yavaş **(h)** aynı
5. **(a)** aynı **(b)** aynı **(c)** aynı **(d)** hızlı **(e)** hızlı **(f)** aynı **(g)** yavaş **(h)** hızlı
7. d, a, c, b
9. **(a)** yanlış **(b)** yanlış **(c)** doğru **(d)** doğru **(e)** doğru **(f)** doğru **(g)** yanlış **(h)** doğru
13. f'nin derecesi g'nin derecesine eşit veya ondan az olduğunda.
15. 1, 1
21. **(b)** $\ln(e^{17000000})=17{,}000{,}000<(e^{17\times 10^6})^{1/10^6}$
$=e^{17}\approx 24, 154, 952.75$
(c) $x\approx 3.4306311\times 10^{15}$
(d) They cross at $x\approx 3.4306311\times 10^{15}$

23. **(a)** $O(n\log_2 n)$ adım gerektiren algoritma
25. Bir sıralı arama için bir milyon, bir ikili arama içinse en fazla 20 adım gerekebilir.

Bölüm 7.7, Sayfa 530–534

1. **(a)** $\pi/4$ **(b)** $-\pi/3$ **(c)** $\pi/6$
3. **(a)** $-\pi/6$ **(b)** $\pi/4$ **(c)** $-\pi/3$
5. **(a)** $\pi/3$ **(b)** $3\pi/4$ **(c)** $\pi/6$
7. **(a)** $3\pi/4$ **(b)** $\pi/6$ **(c)** $2\pi/3$
9. **(a)** $\pi/4$ **(b)** $-\pi/3$ **(c)** $\pi/6$
11. **(a)** $3\pi/4$ **(b)** $\pi/6$ **(c)** $2\pi/3$

13. $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}, \tan\alpha=\dfrac{5}{12}, \sec\alpha=\dfrac{13}{12}, \csc\alpha=\dfrac{13}{5}, \cot\alpha=\dfrac{12}{5}$

15. $\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \tan\alpha=-2, \csc\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{2},$
$\cot\alpha=-\dfrac{1}{2}$

17. $1/\sqrt{2}$ **19.** $-1/\sqrt{3}$ **21.** $\dfrac{4+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ **23.** 1

25. $-\sqrt{2}$ **27.** $\pi/6$ **29.** $\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{2}$ **31.** $\sqrt{9y^2-1}$

33. $\sqrt{1-x^2}$ **35.** $\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}$ **37.** $\dfrac{\sqrt{9-4y^2}}{3}$

39. $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{x}$ **41.** $\pi/2$ **43.** $\pi/2$ **45.** $\pi/2$

47. 0 **49.** $\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$ **51.** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2t^2}}$

53. $\dfrac{1}{|2s+1|\sqrt{s^2+s}}$ **55.** $\dfrac{-2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+2x^2}}$

57. $\dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$ **59.** $\dfrac{-1}{2\sqrt{t}(1+t)}$ **61.** $\dfrac{1}{(\tan^{-1}x)(1+x^2)}$

63. $\dfrac{-e^t}{|e^t|\sqrt{(e^t)^2-1}}=\dfrac{-1}{\sqrt{e^{2t}-1}}$ **65.** $\dfrac{-2s^n}{\sqrt{1-s^2}}$ **67.** 0

69. $\sin^{-1}x$ **71.** $\sin^{-1}\dfrac{x}{7}+C$ **73.** $\dfrac{1}{\sqrt{17}}\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{17}}+C$

75. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sec^{-1}\left|\dfrac{5x}{\sqrt{2}}\right|+C$ **77.** $2\pi/3$ **79.** $\pi/16$

81. $-\pi/12$ **83.** $\dfrac{3}{2}\sin^{-1}2(r-1)+C$

85. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}\right)+C$ **87.** $\dfrac{1}{4}\sec^{-1}\left|\dfrac{2x-1}{2}\right|+C$

89. π **91.** $\pi/12$ **93.** $\dfrac{1}{2}\sin^{-1}y^2+C$ **95.** $\sin^{-1}(x-2)+C$

97. π **99.** $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{y-1}{2}\right)+C$ **101.** 2π

103. $\sec^{-1}|x+1|+C$ **105.** $e^{\sin^{-1}x}+C$ **107.** $\dfrac{1}{3}(\sin^{-1}(x))^3+C$

109. $\ln|\tan^{-1}y|+C$ **111.** $\sqrt{3}-1$ **113.** 5 **115.** 2

121. $y=\sin^{-1}x$ **123.** $y=\sec^{-1}x+\dfrac{2\pi}{3}, x>1$

127. $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54.7°$

133. **(a)** Tanımlı; teğeti 2 olan bir açı var.
(b) Tanımlı değil; kosinüsü 2 olan bir açı yok.

135. **(a)** Tanımlı değil; hiçbir açının sekantı 0 değildir.
(b) Tanımlı değil; hiçbir açının sinüsü $\sqrt{2}$ değildir.

137. $3\sqrt{5}$ ft.

139. Evet, $\sin^{-1}(x)$ ve $-\cos^{-1}(x)$ $\pi/2$ kadar farkeder.

147. $\pi^2/2$ **149.** **(a)** $\pi^2/2$ **(b)** 2π

151. **(a)** 0.84107 **(b)** -0.72973 **(c)** 0.46365

153. **(a)** Tanım kümesi: k bir tamsayı olmak üzere $\frac{\pi}{2} + k\pi$ şeklinde olanlar dışında bütün reel sayılar; değer kümesi: $-\pi/2 < y < \pi/2$.
(b) Tanım kümesi: $-\infty < x < \infty$; değer kümesi: $-\infty < y < \infty$

155. **(a)** Tanım kümesi: $-\infty < x < \infty$; değer kümesi: $0 \le y \le \pi$
(b) Tanım kümesi: $-1 \le x \le 1$; değer kümesi: $-1 \le y \le 1$

157. Grafikler aynıdır.

Bölüm 7.8, Sayfa 542–546

1. $\cosh x = 5/4$, $\tanh x = -3/5$, $\coth x = -5/3$, $\operatorname{sech} x = 4/5$, $\operatorname{csch} x = -4/3$

3. $\sinh x = 8/15$, $\tanh x = 8/17$, $\coth x = 17/8$, $\operatorname{sech} x = 15/17$, $\operatorname{csch} x = 15/8$

5. $x + \frac{1}{x}$ **7.** e^{5x} **9.** e^{4x} **13.** $2\cosh\frac{x}{3}$

15. $\operatorname{sech}^2\sqrt{t} + \frac{\tanh\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ **17.** $\coth z$

19. $(\ln \operatorname{sech}\theta)(\operatorname{sech}\theta \tanh\theta)$ **21.** $\tanh^3 v$ **23.** 2

25. $\frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}$ **27.** $\frac{1}{1+\theta} - \tanh^{-1}\theta$

29. $\frac{1}{2\sqrt{t}} - \coth^{-1}\sqrt{t}$ **31.** $-\operatorname{sech}^{-1}x$ **33.** $\frac{\ln 2}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2\theta}}}$

35. $|\sec x|$ **41.** $\frac{\cosh 2x}{2} + C$

43. $12\sinh\left(\frac{x}{2} - \ln 3\right) + C$ **45.** $7\ln|e^{x/7} + e^{-x/7}| + C$

47. $\tanh\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$ **49.** $-2\operatorname{sech}\sqrt{t} + C$ **51.** $\ln\frac{5}{2}$

53. $\frac{3}{32} + \ln 2$ **55.** $e - e^{-1}$ **57.** $3/4$ **59.** $\frac{3}{8} + \ln\sqrt{2}$

61. $\ln(2/3)$ **63.** $\frac{-\ln 3}{2}$ **65.** $\ln 3$

67. **(a)** $\sinh^{-1}(\sqrt{3})$ **(b)** $\ln(\sqrt{3} + 2)$

69. **(a)** $\coth^{-1}(2) - \coth^{-1}(5/4)$ **(b)** $\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1}{3}\right)$

71. **(a)** $-\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) + \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$

(b) $-\ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - (12/13)^2}}{(12/13)}\right) + \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - (4/5)^2}}{(4/5)}\right) = -\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln(2) = \ln(4/3)$

73. **(a)** 0 **(b)** 0

75. **(b)** i) $f(x) = \frac{2f(x)}{2} + 0 = f(x)$, ii) $f(x) = 0 + \frac{2f(x)}{2} = f(x)$

77. **(b)** $\sqrt{\frac{mg}{k}}$ **(c)** $80\sqrt{5} \approx 178.89$ ft/sec

79. $y = \operatorname{sech}^{-1}(x) - \sqrt{1 - x^2}$ **81.** 2π **83.** $\frac{6}{5}$

85. $16\pi \ln 6 + \frac{455\pi}{9}$

89. **(c)** $a \approx 0.0417525$ **(d)** ≈ 47.90 lb

Problemler, Sayfa 547–550

1. $-2e^{-x/5}$ **3.** xe^{4x} **5.** $\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta} = 2\cot\theta$ **7.** $\frac{2}{(\ln 2)x}$

9. $-8^{-t}(\ln 8)$ **11.** $18x^{2.6}$

13. $(x+2)^{x+2}(\ln(x+2) + 1)$ **15.** $-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

17. $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}\cos^{-1}x}$ **19.** $\tan^{-1}(t) + \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{2t}$

21. $\frac{1-z}{\sqrt{z^2-1}} + \sec^{-1}z$ **23.** -1

25. $\frac{2(x^2+1)}{\sqrt{\cos 2x}}\left[\frac{2x}{x^2+1} + \tan 2x\right]$

27. $5\left[\frac{(t+1)(t-1)}{(t-2)(t+3)}\right]^5\left[\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+3}\right]$

29. $\frac{1}{\sqrt{\theta}}(\sin\theta)^{\sqrt{\theta}}\left(\frac{\ln\sqrt{\sin\theta}}{2} + \theta\cot\theta\right)$ **31.** $-\cos e^x + C$

33. $\tan(e^x - 7) + C$ **35.** $e^{\tan x} + C$ **37.** $\frac{-\ln 7}{3}$

39. $\ln 8$ **41.** $\ln(9/25)$ **43.** $-[\ln|\cos(\ln v)|] + C$

45. $-\frac{1}{2}(\ln x)^{-2} + C$ **47.** $-\cot(1 + \ln r) + C$

49. $\frac{1}{2\ln 3}(3^{x^2}) + C$ **51.** $3\ln 7$ **53.** $15/16 + \ln 2$

55. $e - 1$ **57.** $1/6$ **59.** $9/14$

61. $\frac{1}{3}\left[(\ln 4)^3 - (\ln 2)^3\right]$ or $\frac{7}{3}(\ln 2)^3$ **63.** $\frac{9\ln 2}{4}$ **65.** π

67. $\pi/\sqrt{3}$ **69.** $\sec^{-1}|2y| + C$ **71.** $\pi/12$

73. $\sin^{-1}(x+1) + C$ **75.** $\pi/2$ **77.** $\frac{1}{3}\sec^{-1}\left(\frac{t+1}{3}\right) + C$

79. $y = \frac{\ln 2}{\ln(3/2)}$ **81.** $y = \ln x - \ln 3$ **83.** $y = \frac{1}{1 - e^x}$

85. $\ln 10$ **87.** $\ln 2$ **89.** 5 **91.** $-\infty$ **93.** 1 **95.** e^3

97. **(a)** aynı oran **(b)** aynı oran **(c)** doğru **(d)** doğru **(e)** aynı oran **(f)** aynı oran

99. **(a)** doğru **(b)** yanlış **(c)** yanlış **(d)** doğru **(e)** doğru **(f)** doğru

101. $1/3$

103. $x = e/2$'de mutlak maksimum $= 0$, $x = 0.5$'te mutlak minimum $= 0.5$

105. 1 **107.** $1/e$ m/sn

109. $1/\sqrt{2}$ birim uzunluğu $1/\sqrt{e}$ birim yükseklikte, $A = 1/\sqrt{2e} \approx 0.43$ birim^2

111. $\ln 5x - \ln 3x = \ln(5/3)$ **113.** $1/2$

115. **(a)** $x = e^2$'de $2/e$ değerinde mutlak maksimum $(e^{8/3}, (8/3)e^{-4/3})$, $(e^{8/3}, (8/3)e^{-4/3})$'te büküm noktası, $(e^{8/3}, \infty)$'da yukarı konkav, $(0, e^{8/3})$'te aşağı konkav

(b) $x = 1$'de 0 değerli mutlak maksimum, $(\pm 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{e})$,'de büküm noktaları, $(-\infty, -1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}, \infty)$,'da yukarı konkav $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$'de aşağı konkav

(c) $x = 0$'da 1 değerli mutlak maksimum $(1, 2/e)$'de büküm noktası, $(1, \infty)$'da yukarı konkav, $(-\infty, 1)$'de aşağı konkav

117. 18,935 yıl **119.** $20(5 - \sqrt{17})$ m

Ek ve İleri Alıştırmalar, Sayfa 550–552

1. $\pi/2$ **3.** $1/\sqrt{e}$ **5.** $\ln 2$ **7.** **(a)** 1 **(b)** $\pi/2$ **(c)** π

9. $\frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{2\ln 2}, 2:1$ **11.** $x = 2$ **13.** $2/17$

21. $\bar{x} = \frac{\ln 4}{\pi}, \bar{y} = 0$ **25.** **(b)** 61°

BÖLÜM 8

Bölüm 8.1, Sayfa 558–560

1. $2\sqrt{8x^2 + 1} + C$ **3.** $2(\sin v)^{3/2} + C$ **5.** $\ln 5$

7. $2\ln\left(\sqrt{x} + 1\right) + C$ **9.** $-\frac{1}{7}\ln|\sin(3 - 7x)| + C$

11. $-\ln|\csc(e^\theta + 1) + \cot(e^\theta + 1)| + C$

13. $3\ln\left|\sec\frac{t}{3} + \tan\frac{t}{3}\right| + C$

15. $-\ln|\csc(s - \pi) + \cot(s - \pi)| + C$ **17.** 1

19. $e^{\tan v} + C$ **21.** $\frac{3^{(x+1)}}{\ln 3} + C$ **23.** $\frac{2^{\sqrt{w}}}{\ln 2} + C$

25. $3\tan^{-1}3u + C$ **27.** $\pi/18$ **29.** $\sin^{-1}s^2 + C$

31. $6\sec^{-1}|5x| + C$ **33.** $\tan^{-1}e^x + C$ **35.** $\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$

37. 2π **39.** $\sin^{-1}(t - 2) + C$

41. $\sec^{-1}|x + 1| + C$ iken $|x + 1| > 1$

43. $\tan x - 2\ln|\csc x + \cot x| - \cot x - x + C$

45. $x + \sin 2x + C$ **47.** $x - \ln|x + 1| + C$ **49.** $7 + \ln 8$

51. $2t^2 - t + 2\tan^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) + C$ **53.** $\sin^{-1}x + \sqrt{1 - x^2} + C$

55. $\sqrt{2}$ **57.** $\tan x - \sec x + C$ **59.** $\ln|1 + \sin\theta| + C$

61. $\cot x + x + \csc x + C$ **63.** 4 **65.** $\sqrt{2}$ **67.** 2

69. $\ln\left|\sqrt{2} + 1\right| - \ln\left|\sqrt{2} - 1\right|$ **71.** $4 - \frac{\pi}{2}$

73. $-\ln|\csc(\sin\theta) + \cot(\sin\theta)| + C$

75. $\ln|\sin x| + \ln|\cos x| + C$ **77.** $12\tan^{-1}\left(\sqrt{y}\right) + C$

79. $\sec^{-1}\left|\frac{x - 1}{7}\right| + C$ **81.** $\ln|\sec(\tan t)| + C$

83. **(a)** $\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta + C$

(b) $\sin\theta - \frac{2}{3}\sin^3\theta + \frac{1}{5}\sin^5\theta + C$

(c) $\int \cos^9\theta\, d\theta = \int \cos^8\theta(\cos\theta)\, d\theta$
$= \int (1 - \sin^2\theta)^4(\cos\theta)\, d\theta$

85. **(a)** $\int \tan^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\tan^2\theta - \int \tan\theta\, d\theta$
$= \frac{1}{2}\tan^2\theta + \ln|\cos\theta| + C$

(b) $\int \tan^5\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\tan^4\theta - \int \tan^3\theta\, d\theta$

(c) $\int \tan^7\theta\, d\theta = \frac{1}{6}\tan^6\theta - \int \tan^5\theta\, d\theta$

(d) $\int \tan^{2k+1}\theta\, d\theta = \frac{1}{2k}\tan^{2k}\theta - \int \tan^{2k-1}\theta\, d\theta$

87. $2\sqrt{2} - \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$ **89.** π^2

91. $\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$ **93.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{1}{\ln\left(2\sqrt{2} + 3\right)}$

Bölüm 8.2, Sayfa 568–570

1. $-2x\cos(x/2) + 4\sin(x/2) + C$

3. $t^2\sin t + 2t\cos t - 2\sin t + C$ **5.** $\ln 4 - \frac{3}{4}$

7. $y\tan^{-1}(y) - \ln\sqrt{1 + y^2} + C$

9. $x\tan x + \ln|\cos x| + C$

11. $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$

13. $(x^2 - 7x + 7)e^x + C$

15. $(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)e^x + C$

17. $\frac{\pi^2 - 4}{8}$ **19.** $\frac{5\pi - 3\sqrt{3}}{9}$

21. $\frac{1}{2}(-e^\theta\cos\theta + e^\theta\sin\theta) + C$

23. $\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x + 2\cos 3x) + C$

25. $\frac{2}{3}\left(\sqrt{3s + 9}\, e^{\sqrt{3s+9}} - e^{\sqrt{3s+9}}\right) + C$

27. $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln(2) - \frac{\pi^2}{18}$

29. $\frac{1}{2}[-x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)] + C$

31. **(a)** π **(b)** 3π **(c)** 5π **(d)** $(2n + 1)\pi$

33. $2\pi(1 - \ln 2)$ **35.** **(a)** $\pi(\pi - 2)$ **(b)** 2π

37. $\frac{1}{2\pi}(1 - e^{-2\pi})$ **39.** $u = x^n, dv = \cos x\, dx$

41. $u = x^n, dv = e^{ax}\, dx$ **43.** $x\sin^{-1}x + \cos(\sin^{-1}x) + C$

45. $x\sec^{-1}x - \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$ **47.** Evet

49. (a) $x\sinh^{-1}x - \cosh(\sinh^{-1}x) + C$
(b) $x\sinh^{-1}x - (1+x^2)^{1/2} + C$

Bölüm 8.3, Sayfa 579–581

1. $\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x-2}$ **3.** $\frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}$

5. $\frac{-2}{z} + \frac{-1}{z^2} + \frac{2}{z-1}$ **7.** $1 + \frac{17}{t-3} + \frac{-12}{t-2}$

9. $\frac{1}{2}[\ln|1+x| - \ln|1-x|] + C$

11. $\frac{1}{7}\ln|(x+6)^2(x-1)^5| + C$ **13.** $(\ln 15)/2$

15. $-\frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{6}\ln|t+2| + \frac{1}{3}\ln|t-1| + C$ **17.** $3\ln 2 - 2$

19. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{x}{2(x^2-1)} + C$ **21.** $(\pi + 2\ln 2)/8$

23. $\tan^{-1}y - \frac{1}{y^2+1} + C$

25. $-(s-1)^{-2} + (s-1)^{-1} + \tan^{-1}s + C$

27. $\frac{-1}{\theta^2+2\theta+2} + \ln(\theta^2+2\theta+2) - \tan^{-1}(\theta+1) + C$

29. $x^2 + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$

31. $9x + 2\ln|x| + \frac{1}{x} + 7\ln|x-1| + C$

33. $\frac{y^2}{2} - \ln|y| + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + C$ **35.** $\ln\left(\frac{e^t+1}{e^t+2}\right) + C$

37. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\sin y - 2}{\sin y + 3}\right| + C$

39. $\frac{(\tan^{-1}2x)^2}{4} - 3\ln|x-2| + \frac{6}{x-2} + C$

41. $x = \ln|t-2| - \ln|t-1| + \ln 2$ **43.** $x = \frac{6t}{t+2} - 1$

45. $3\pi\ln 25$ **47.** 1.10

49. (a) $x = \frac{1000e^{4t}}{499 + e^{4t}}$ **(b)** 1.55 gün

51. (a) $\frac{22}{7} - \pi$ **(b)** %0.04 **(c)** Alan 0.003’ten küçüktür.

Bölüm 8.4, Sayfa 585–586

1. $8/15$ **3.** $4/3$ **5.** $16/35$ **7.** 3π **9.** π **11.** 2

13. 1 **15.** 4 **17.** 2 **19.** $2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ **21.** $\sqrt{2}$

23. $2\sqrt{3} + \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ **25.** $4/3$ **27.** $4/3$

29. $2(1-\ln 2)$ **31.** $\frac{4}{3} - \ln\sqrt{3}$ **33.** $-6/5$ **35.** π

37. 0 **39.** $\frac{2\pi\left(\left(9\sqrt[3]{4}+1\right)^{3/2} - 1\right)}{27}$ **41.** $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

43. $\pi^2/2$

Bölüm 8.5, Sayfa 591–592

1. $\ln\left|\sqrt{9+y^2} + y\right| + C$ **3.** $\pi/4$ **5.** $\pi/6$

7. $\frac{25}{2}\sin^{-1}\left(\frac{t}{5}\right) + \frac{t\sqrt{25-t^2}}{2} + C$

9. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x}{7} + \frac{\sqrt{4x^2-49}}{7}\right| + C$

11. $7\left[\frac{\sqrt{y^2-49}}{7} - \sec^{-1}\left(\frac{y}{7}\right)\right] + C$ **13.** $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$

15. $\frac{1}{3}(x^2+4)^{3/2} - 4\sqrt{x^2+4} + C$ **17.** $\frac{-2\sqrt{4-w^2}}{w} + C$

19. $4\sqrt{3} - 4\pi/3$ **21.** $-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + C$

23. $-\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^5 + C$ **25.** $2\tan^{-1}2x + \frac{4x}{(4x^2+1)} + C$

27. $\frac{1}{3}\left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right)^3 + C$ **29.** $\ln 9 - \ln\left(1+\sqrt{10}\right)$

31. $\pi/6$ **33.** $\sec^{-1}x + C$ **35.** $\sqrt{x^2-1} + C$

37. $y = 2\left[\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} - \sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]$

39. $y = \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3\pi}{8}$ **41.** $3\pi/4$

43. $\frac{2}{1-\tan(x/2)} + C$ **45.** 1 **47.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$

49. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan(t/2) + 1 - \sqrt{2}}{\tan(t/2) + 1 + \sqrt{2}}\right| + C$

51. $\ln\left|\frac{1+\tan(\theta/2)}{1-\tan(\theta/2)}\right| + C$

Bölüm 8.6, Sayfa 600–603

1. $\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-3}{3}}\right) + C$

3. $\sqrt{x-2}\left(\frac{2(x-2)}{3} + 4\right) + C$

5. $\frac{(2x-3)^{3/2}(x+1)}{5} + C$

7. $\frac{-\sqrt{9-4x}}{x} - \frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9-4x}-3}{\sqrt{9-4x}+3}\right| + C$

9. $\frac{(x+2)(2x-6)\sqrt{4x-x^2}}{6} + 4\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$

11. $-\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{7+x^2}}{x}\right| + C$

13. $\sqrt{4-x^2} - 2\ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + C$

15. $\frac{p}{2}\sqrt{25-p^2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{p}{5} + C$

17. $2\sin^{-1}\frac{r}{2} - \frac{1}{2}r\sqrt{4-r^2} + C$

19. $-\frac{1}{3}\tan^{-1}\left[\frac{1}{3}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right] + C$

21. $\frac{e^{2t}}{13}(2\cos 3t + 3\sin 3t) + C$

23. $\frac{x^2}{2}\cos^{-1}(x) + \frac{1}{4}\sin^{-1}(x) - \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$

25. $\frac{s}{18(9-s^2)} + \frac{1}{108}\ln\left|\frac{s+3}{s-3}\right| + C$

27. $-\frac{\sqrt{4x+9}}{x} + \frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{4x+9}-3}{\sqrt{4x+9}+3}\right| + C$

29. $2\sqrt{3t-4} - 4\tan^{-1}\sqrt{\frac{3t-4}{4}} + C$

31. $\frac{x^3}{3}\tan^{-1}x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C$

33. $-\frac{\cos 5x}{10} - \frac{\cos x}{2} + C$ **35.** $8\left[\frac{\sin(7t/2)}{7} - \frac{\sin(9t/2)}{9}\right] + C$

37. $6\sin(\theta/12) + \frac{6}{7}\sin(7\theta/12) + C$

39. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$

41. $\left(x-\frac{1}{2}\right)\sin^{-1}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x-x^2} + C$

43. $\sin^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} + C$

45. $\sqrt{1-\sin^2 t} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}\right| + C$

47. $\ln\left|\ln y + \sqrt{3+(\ln y)^2}\right| + C$

49. $\ln\left|3r + \sqrt{9r^2-1}\right| + C$

51. $x\cos^{-1}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x-x^2} + C$

53. $-\frac{\sin^4 2x\cos 2x}{10} - \frac{2\sin^2 2x\cos 2x}{15} - \frac{4\cos 2x}{15} + C$

55. $\frac{\cos^3 2\pi t\sin 2\pi t}{\pi} + \frac{3}{2}\frac{\cos 2\pi t\sin 2\pi t}{\pi} + 3t + C$

57. $\frac{\sin^3 2\theta\cos^2 2\theta}{10} + \frac{\sin^3 2\theta}{15} + C$ **59.** $\frac{2}{3}\tan^3 t + C$

61. $\tan^2 2x - 2\ln|\sec 2x| + C$

63. $8\left[-\frac{1}{3}\cot^3 t + \cot t + t\right] + C$

65. $\frac{(\sec\pi x)(\tan\pi x)}{\pi} + \frac{1}{\pi}\ln|\sec\pi x + \tan\pi x| + C$

67. $\frac{\sec^2 3x\tan 3x}{3} + \frac{2}{3}\tan 3x + C$

69. $\frac{-\csc^3 x\cot x}{4} - \frac{3\csc x\cot x}{8} - \frac{3}{8}\ln|\csc x + \cot x| + C$

71. $4x^4(\ln x)^2 - 2x^4(\ln x) + \frac{x^2}{2} + C$ **73.** $\frac{e^{3x}}{9}(3x-1) + C$

75. $2x^3e^{x/2} - 12x^2e^{x/2} + 96e^{x/2}\left(\frac{x}{2}-1\right) + C$

77. $\frac{x^2 2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\left[\frac{x2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2}\right] + C$ **79.** $\frac{x\pi^x}{\ln\pi} - \frac{\pi^x}{(\ln\pi)^2} + C$

81. $\frac{1}{2}[\sec(e^t-1)\tan(e^t-1) + \ln|\sec(e^t-1)$
$+ \tan(e^t-1)|] + C$

83. $\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ **85.** $\pi/3$

87. $\frac{1}{120}\sinh^4 3x\cosh 3x - \frac{1}{90}\sinh^2 3x\cosh 3x + \frac{1}{45}\cosh 3x + C$

89. $\frac{x^2}{3}\sinh 3x - \frac{2x}{9}\cosh 3x + \frac{2}{27}\sinh 3x + C$

91. $-\frac{\operatorname{sech}^7 x}{7} + C$ **101.** $2\pi\sqrt{3} + \pi\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

103. $\bar{x} = 4/3, \bar{y} = \ln\sqrt{2}$ **105.** 7.62 **107.** $\pi/8$ **111.** $\pi/4$

Bölüm 8.7, Sayfa 613–619

1. I: (a) 1.5, 0 **(b)** 1.5, 0 **(c)** %0
II: (a) 1.5, 0 **(b)** 1.5, 0 **(c)** %0

3. I: (a) 2.75, 0.08 **(b)** 2.67, 0.08 **(c)** $0.0312 \approx 3\%$
II: (a) 2.67, 0 **(b)** 2.67, 0 **(c)** %0

5. I: (a) 6.25, 0.5 **(b)** 6, 0.25 **(c)** $0.0417 \approx 4\%$
II: (a) 6, 0 **(b)** 6, 0 **(c)** 0%

7. I: (a) 0.509, 0.03125 **(b)** 0.5, 0.009 **(c)** $0.018 \approx 2\%$
II: (a) 0.5, 0.002604 **(b)** 0.5, 0.0004 **(c)** 0%

9. I: (a) 1.8961, 0.161 **(b)** 2, 0.1039 **(c)** $0.052 \approx 5\%$
II: (a) 2.0045, 0.0066 **(b)** 2, 0.00454 **(c)** 0%

11. (a) 0.31929 **(b)** 0.32812 **(c)** 1/3, 0.01404, 0.00521

13. (a) 1.95643 **(b)** 2.00421 **(c)** 2, 0.04357, −0.00421

15. (a) 1 **(b)** 2

17. (a) 116 **(b)** 2

19. (a) 283 **(b)** 2

21. (a) 71 **(b)** 10

23. (a) 76 **(b)** 12

25. (a) 82 **(b)** 8

27. 15,990 ft^3 **29.** 5166.346 ft ≈ 0.9785 mil **31.** ≈10.63 ft

33. (a) ≈0.00021 **(b)** ≈1.37079 **(c)** ≈0.015%

35. (a) 3.11571 **(b)** 0.02588
(c) $M = 3.11$ ile $|E_T| \le (\pi^3/1200)(3.11) < 0.081$ buluruz.

39. 1.08943 **41.** 0.82812

43. (a) $T_{10} \approx 1.983523538$, $T_{100} \approx 1.999835504$,
$T_{1000} \approx 1.999998355$

(b)

n	$\lvert E_T\rvert = 2 - T_n$
10	$0.016476462 = 1.6476462 \times 10^{-2}$
100	1.64496×10^{-4}
1000	1.645×10^{-6}

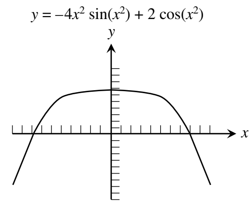
(c) $|E_{10n}| \approx 10^{-2}|E_n|$

(d) $b - a = \pi, h^2 = \frac{\pi^2}{n^2}, M = 1$

$$|E_n| \le \frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right) = \frac{\pi^3}{12n^2}$$

$$|E_{10n}| \le \frac{\pi^3}{12(10n)^2} = 10^{-2}|E_n|$$

45. **(a)** $f''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$
(b)



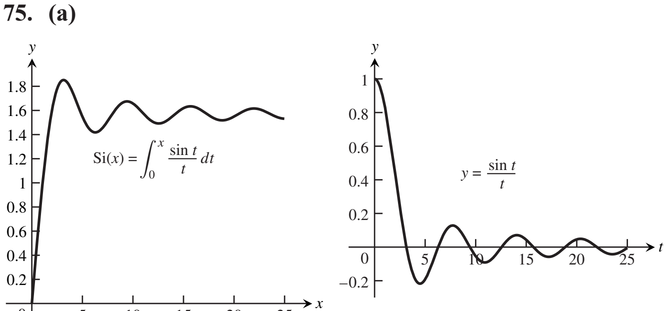
(c) Grafik, $-1 \le x \le 1$ için $-3\ f''(x) \le 2$ olduğunu gösterir.
(d) $|E_T| \le \dfrac{1-(-1)}{12}(\Delta x^2)(3) = \dfrac{\Delta x^2}{2}$
(e) $|E_T| \le \dfrac{\Delta x^2}{2} \le \dfrac{0.1^2}{2} < 0.01$ **(f)** $n \ge 20$

47. **(a)** 2.3, 1.6, 1.5, 2.1, 3.2, 4.8, 7.0, 9.3, 10.7, 10.7, 9.3, 6.4, 3.2
(b) $\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^6 (C(y))^2\,dy$ **(c)** ≈ 34.7 inç^3
(d) $V \approx 34.79$ in.^{3} Simpson Kuralından $V \approx$ 34.79 inç^3 Simpson Kuralının tahmini, Yamuk Kuralının tahmininden daha iyi olmalıdır. Simpson Kuralı tahminindeki hata $\Delta x^4 = 0.0625$ ile orantılıdır. Oysa, Yamuk Kuralının tahminindeki hata, $\Delta x = 0.5$ inç iken daha büyük bir sayı olan $\Delta x^2 = 0.25$ ile orantılıdır.

49. **(a)** ≈ 5.870 **(b)** $|E_T| \le 0.0032$
51. 21.07 inç 53. 14.4 55. 54.9

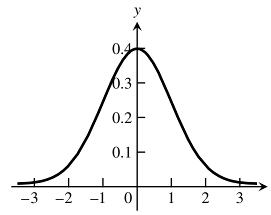
Bölüm 8.8, Sayfa 631–633

1. $\pi/2$ **3.** 2 **5.** 6 **7.** $\pi/2$ **9.** ln 3 **11.** ln 4 **13.** 0
15. $\sqrt{3}$ **17.** π **19.** $\ln\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right)$ **21.** -1 **23.** 1
25. $-1/4$ **27.** $\pi/2$ **29.** $\pi/3$ **31.** 6 **33.** ln 2
35. Iraksar **37.** Yakınsar **39.** Yakınsar **41.** Yakınsar
43. Iraksar **45.** Yakınsar **47.** Yakınsar **49.** Iraksar
51. Yakınsar **53.** Yakınsar **55.** Iraksar **57.** Yakınsar
59. Iraksar **61.** Yakınsar **63.** Yakınsar
65. **(a)** $p < 1$ iken yakınsar **(b)** $p > 1$ iken yakınsar
67. 1 **69.** 2π **71.** ln 2 **73.** **(b)** ≈ 0.88621
75. **(a)**



(b) $\pi/2$

77. **(a)**



(b) ≈ 0.683, ≈ 0.954, ≈ 0.997
81. Iraksar **83.** Yakınsar **85.** Yakınsar **87.** Iraksar

Problemler, Sayfa 634–638

1. $\dfrac{1}{12}(4x^2 - 9)^{3/2} + C$ **3.** $\dfrac{(2x+1)^{5/2}}{10} - \dfrac{(2x+1)^{3/2}}{6} + C$

5. $\dfrac{\sqrt{8x^2+1}}{8} + C$ **7.** $\dfrac{1}{2}\ln(25 + y^2) + C$

9. $\dfrac{-\sqrt{9 - 4t^4}}{8} + C$ **11.** $\dfrac{9}{25}(z^{5/3} + 1)^{5/3} + C$

13. $-\dfrac{1}{2(1 - \cos 2\theta)} + C$ **15.** $-\dfrac{1}{4}\ln|3 + 4\cos t| + C$

17. $-\dfrac{1}{2}e^{\cos 2x} + C$ **19.** $-\dfrac{1}{3}\cos^3(e^\theta) + C$ **21.** $\dfrac{2^{x-1}}{\ln 2} + C$

23. $\ln|\ln v| + C$ **25.** $\ln|2 + \tan^{-1}x| + C$

27. $\sin^{-1}(2x) + C$ **29.** $\dfrac{1}{3}\sin^{-1}\left(\dfrac{3t}{4}\right) + C$

31. $\dfrac{1}{3}\tan^{-1}\left(\dfrac{t}{3}\right) + C$ **33.** $\dfrac{1}{5}\sec^{-1}\left|\dfrac{5x}{4}\right| + C$

35. $\sin^{-1}\left(\dfrac{x-2}{2}\right) + C$ **37.** $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{y-2}{2}\right) + C$

39. $\sec^{-1}|x - 1| + C$ **41.** $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4} + C$

43. $\dfrac{2}{3}\cos^3\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + C$

45. $\dfrac{\tan^2(2t)}{4} - \dfrac{1}{2}\ln|\sec 2t| + C$

47. $-\dfrac{1}{2}\ln|\csc(2x) + \cot(2x)| + C$ **49.** $\ln\sqrt{2}$ **51.** 2

53. $2\sqrt{2}$ **55.** $x - 2\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right) + C$

57. $x + x^2 + 2\ln|2x - 1| + C$

59. $\ln(y^2 + 4) - \dfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{2}\right) + C$

61. $-\sqrt{4 - t^2} + 2\sin^{-1}\left(\dfrac{t}{2}\right) + C$ **63.** $x - \tan x + \sec x + C$

65. $-\dfrac{1}{3}\ln|\sec(5 - 3x) + \tan(5 - 3x)| + C$

67. $4\ln\left|\sin\left(\dfrac{x}{4}\right)\right| + C$

69. $-2\left(\dfrac{(\sqrt{1-x})^3}{3} - \dfrac{(\sqrt{1-x})^5}{5}\right) + C$

71. $\frac{1}{2}\left(z\sqrt{z^2+1}+\ln|z+\sqrt{z^2+1}|\right)+C$

73. $\ln|y+\sqrt{25+y^2}|+C$ **75.** $\frac{-\sqrt{1-x^2}}{x}+C$

77. $\frac{\sin^{-1}x}{2}-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C$ **79.** $\ln\left|\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right|+C$

81. $\sqrt{w^2-1}-\sec^{-1}(w)+C$

83. $(x+1)(\ln(x+1))-(x+1)+C$

85. $x\tan^{-1}(3x)-\frac{1}{6}\ln(1+9x^2)+C$

87. $(x+1)^2e^x-2(x+1)e^x+2e^x+C$

89. $\frac{2e^x\sin 2x}{5}+\frac{e^x\cos 2x}{5}+C$

91. $2\ln|x-2|-\ln|x-1|+C$

93. $\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C$

95. $-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\cos\theta-1}{\cos\theta+2}\right|+C$

97. $4\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+4\tan^{-1}x+C$

99. $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{(v-2)^5(v+2)}{v^6}\right|+C$

101. $\frac{1}{2}\tan^{-1}t-\frac{\sqrt{3}}{6}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{3}}+C$

103. $\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}\ln|x+2|+\frac{2}{3}\ln|x-1|+C$

105. $\frac{x^2}{2}-\frac{9}{2}\ln|x+3|+\frac{3}{2}\ln|x+1|+C$

107. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$ **109.** $\ln|1-e^{-s}|+C$

111. $-\sqrt{16-y^2}+C$ **113.** $-\frac{1}{2}\ln|4-x^2|+C$

115. $\ln\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}+C$ **117.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|+C$

119. $-\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{\cos^7 x}{7}+C$ **121.** $\frac{\tan^5 x}{5}+C$

123. $\frac{\cos\theta}{2}-\frac{\cos 11\theta}{22}+C$ **125.** $4\sqrt{1-\cos(t/2)}+C$

127. En az 16 **129.** $T=\pi, S=\pi$ **131.** 25°F

133. **(a)** ≈2.42 galon **(b)** ≈24.83 mil/galon

135. $\pi/2$ **137.** 6 **139.** ln 3 **141.** 2 **143.** $\pi/6$

145. Iraksar **147.** Iraksar **149.** Yakınsar

151. $\frac{2x^{3/2}}{3}-x+2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)+C$

153. $\ln\left|\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}}\right|-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2+C$

155. $\sin^{-1}(x+1)+C$ **157.** $\ln|u+\sqrt{1+u^2}|+C$

159. $-2\cot x-\ln|\csc x+\cot x|+\csc x+C$

161. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{3+v}{3-v}\right|+\frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{v}{3}+C$

163. $\frac{\theta\sin(2\theta+1)}{2}+\frac{\cos(2\theta+1)}{4}+C$

165. $\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$

167. $-\cos(2\sqrt{x})+C$ **169.** $-\ln|\csc(2y)+\cot(2y)|+C$

171. $\frac{1}{2}\tan^2 x+C$ **173.** $-\sqrt{4-(r+2)^2}+C$

175. $\frac{1}{4}\sec^2\theta+C$ **177.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

179. $2\left(\frac{(\sqrt{2-x})^3}{3}-2\sqrt{2-x}\right)+C$ **181.** $\tan^{-1}(y-1)+C$

183. $\frac{1}{3}\ln|\sec\theta^3|+C$

185. $\frac{1}{4}\ln|z|-\frac{1}{4z}-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\ln(z^2+4)+\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{z}{2}\right)\right]+C$

187. $-\frac{1}{4}\sqrt{9-4t^2}+C$ **189.** $\ln|\sin\theta|-\frac{1}{2}\ln(1+\sin^2\theta)+C$

191. $\ln|\sec\sqrt{y}|+C$ **193.** $-\theta\ln\left|\frac{\theta+2}{\theta-2}\right|+C$ **195.** $x+C$

197. $-\frac{\cos x}{2}+C$ **199.** $\ln(1+e^t)+C$ **201.** 1/4

203. $\ln|\ln\sin v|+C$ **205.** $\frac{2}{3}x^{3/2}+C$

207. $-\frac{1}{5}\tan^{-1}\cos(5t)+C$ **209.** $\frac{1}{3}\left(\frac{27^{3\theta+1}}{\ln 27}\right)+C$

211. $2\sqrt{r}-2\ln(1+\sqrt{r})+C$

213. $\ln\left|\frac{y}{y+2}\right|+\frac{2}{y}-\frac{2}{y^2}+C$ **215.** $4\sec^{-1}\left(\frac{7m}{2}\right)+C$

217. $\frac{\sqrt{8}-1}{6}$ **219.** $\frac{\pi}{2}(3b-a)+2$

Ek ve İleri Alıştırmalar, Sayfa 638–641

1. $x(\sin^{-1}x)^2+2(\sin^{-1}x)\sqrt{1-x^2}-2x+C$

3. $\frac{x^2\sin^{-1}x}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}-\sin^{-1}x}{4}+C$

5. $\frac{\ln|\sec 2\theta+\tan 2\theta|+2\theta}{4}+C$

7. $\frac{1}{2}\left(\ln\left(t-\sqrt{1-t^2}\right)-\sin^{-1}t\right)+C$

9. $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}\right|+\frac{1}{8}(\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1))+C$

11. 0 **13.** $\ln(4)-1$ **15.** 1 **17.** $32\pi/35$ **19.** 2π

21. **(a)** π **(b)** $\pi(2e-5)$

23. **(b)** $\pi\left(\frac{8(\ln 2)^2}{3}-\frac{16(\ln 2)}{9}+\frac{16}{27}\right)$ **25.** $\left(\frac{e^2+1}{4},\frac{e-2}{2}\right)$

27. $\sqrt{1+e^2}-\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^2}}{e}+\frac{1}{e}\right)-\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

29. 6 **31.** $y=\sqrt{x},\quad 0\le x\le 4$ **33.** **(b)** 1

37. $a=\frac{1}{2},-\frac{\ln 2}{4}$ **39.** $\frac{1}{2}<p\le 1$

41. $\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x + 2\cos 3x) + C$

43. $\frac{\cos x \sin 3x - 3\sin x \cos 3x}{8} + C$

45. $\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C$ **47.** $x \ln(ax) - x + C$

BÖLÜM 9

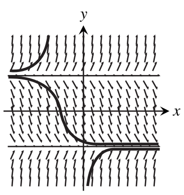
Bölüm 9.1, Sayfa 648–650

9. $\frac{2}{3}y^{3/2} - x^{1/2} = C$ **11.** $e^y - e^x = C$

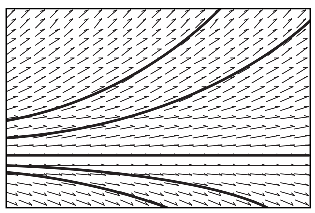
13. $-x + 2\tan\sqrt{y} = C$ **15.** $e^{-y} + 2e^{\sqrt{x}} = C$

17. $y = \sin(x^2 + C)$ **19.** (d) **21.** (a)

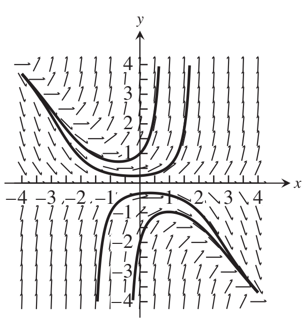
23.



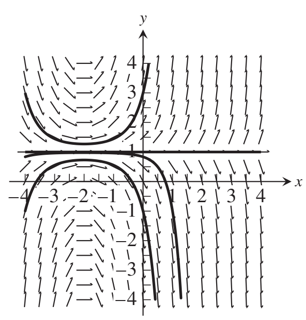
25.



27.



29.



Bölüm 9.2, Sayfa 657–659

1. $y = \frac{e^x + C}{x}, \quad x > 0$ **3.** $y = \frac{C - \cos x}{x^3}, \quad x > 0$

5. $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}, \quad x > 0$ **7.** $y = \frac{1}{2}xe^{x/2} + Ce^{x/2}$

9. $y = x(\ln x)^2 + Cx$

11. $s = \frac{t^3}{3(t-1)^4} - \frac{t}{(t-1)^4} + \frac{C}{(t-1)^4}$

13. $r = (\csc\theta)(\ln|\sec\theta| + C), \quad 0 < \theta < \pi/2$

15. $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$ **17.** $y = -\frac{1}{\theta}\cos\theta + \frac{\pi}{2\theta}$

19. $y = 6e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{x+1}$ **21.** $y = y_0 e^{kt}$

23. **(b)** doğru, fakat **(a)** değil

25. **(a)** 10 lb/dak **(b)** $(100 + t)$ galon

(c) $4\left(\frac{y}{100 + t}\right)$ lb/dak

(d) $\frac{dy}{dt} = 10 - \frac{4y}{100 + t}, \quad y(0) = 50,$

$y = 2(100 + t) - \frac{150}{\left(1 + \frac{t}{100}\right)^4}$

(e) ? ?????????? ? $\frac{????}{?????????? ???? ???} = \frac{188.6}{125} \cong$???? ?????

27. $y(27.8) \approx 14.8$ lb, $t \approx 27.8$ dak **29.** $t = \frac{L}{R}\ln 2$ sn

31. **(a)** $i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-3} = \frac{V}{R}(1 - e^{-3}) \approx 0.95\frac{V}{R}$ amp **(b)** %86

33. $y = \frac{1}{1 + Ce^{-x}}$ **35.** $y^3 = 1 + Cx^{-3}$

Bölüm 9.3, Sayfa 664–665

1. $y(\text{tam}) = \frac{x}{2} - \frac{4}{x}$, $y_1 = -0.25$, $y_2 = 0.3$, $y_3 = 0.75$

3. $y(\text{tam}) = 3e^{x(x+2)}$, $y_1 = 4.2$, $y_2 = 6.216$, $y_3 = 9.697$

5. $y(\text{tam}) = e^{x^2} + 1$, $y_1 = 2.0$, $y_2 = 2.0202$, $y_3 = 2.0618$

7. $y \approx 2.48832$, tam değer e dir

9. $y \approx -0.2272$, tam değer $1/\left(1 - 2\sqrt{5}\right) \approx -0.2880$'dir.

11.

x	z	y-yaklaşık	y-tam	Hata
0	1	3	3	0
0.2	4.2	4.608	4.658122	0.050122
0.4	6.81984	7.623475	7.835089	0.211614
0.6	11.89262	13.56369	14.27646	0.712777

13. Euler yöntemi $y \approx 3.45835\, y \approx 3.45835$; verir; tam çözüm $y = 1 + e \approx 3.71828$ dir

15. $y \approx 1.5000$; tam değer 1.5275'dir.

17. **(a)** $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}, \quad y(3) = -0.2$

(b) –0.1851, hata ≈ 0.0149 **(c)** –0.1929, hata ≈ 0.0071

(d) –0.1965, hata ≈ 0.0035

19. Tam çözüm $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$'dir, dolayısıyla $y(3) = -0.2$.
Yaklaşımı bulmak için, $x_0 = 2$ ve $y_0 = -1/2$ başlangıç koşulları ile

$z_n = y_{n-1} + 2y_{n-1}(x_{n-1} - 1)\,dx$ ve

$y_n = y_{n-1} + (y_{n-1}^2 \;\; (x_{n-1} - 1) + z_n^2 \;\; (x_n^2 \;\; - 1))\,dx$ olsun.

(a)'dan (d)'ye kadar, belirtildiği gibi, bir hesap makinesi veya BCS kullanın.

(a) –0.2024, hata ≈ 0.0024

(b) –0.2005, hata ≈ 0.0005

(c) –0.2001, hata ≈ 0.0001

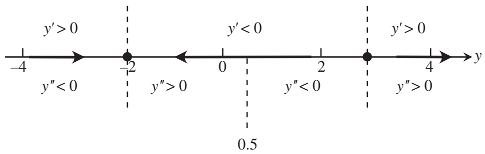
(d) Her defasında adım büyüklüğü ikiye bölünür, hata, en büyük adım büyüklüğünün yaklaşık dörtte birine indirgenir.

Bölüm 9.4, Sayfa 671–672

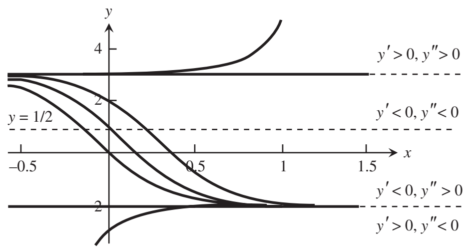
1. $y' = (y + 2)(y - 3)$

(a) $y = -2$ ve kararlı olmayan denge değeri $y = 3$ tür.

(b) $y'' = 2(y+2)\left(y - \frac{1}{2}\right)(y-3)$



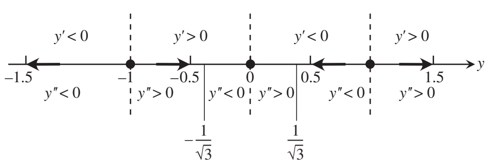
(c)



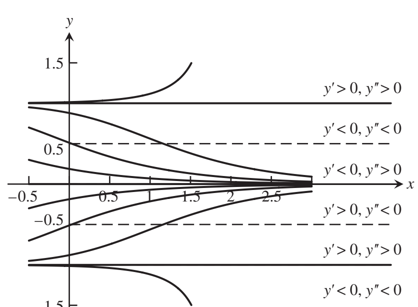
3. $y' = y^3 - y = (y+1)y(y-1)$

(a) $y = -1$ ve $y = 1$ kararlı olmayan denge değerleridir, $y = 0$ bir kararlı denge değeridir.

(b) $y'' = (3y^2 - 1)y' = 3(y+1)\left(y + 1/\sqrt{3}\right)y\left(y - 1/\sqrt{3}\right)(y-1)$



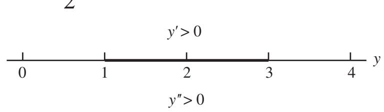
(c)



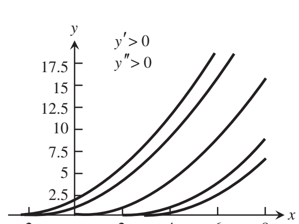
5. $y' = \sqrt{y}, y > 0$

(a) Denge değerleri yok.

(b) $y'' = \frac{1}{2}$



(c)

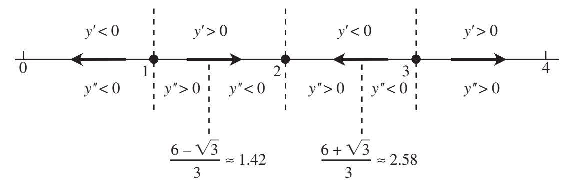


7. $y' = (y-1)(y-2)(y-3)$

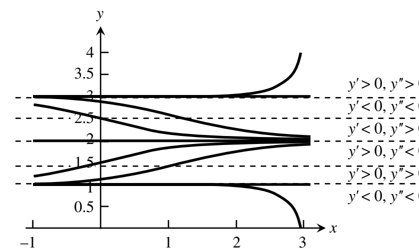
(a) $y = 1$ ve $y = 3$ kararlı olmayan denge değerleridir, $y = 2$ bir kararlı denge değeridir.

(b) $y'' = (3y^2 - 12y + 11)(y-1)(y-2)(y-3) =$

$$(y-1)\left(y - \frac{6-\sqrt{3}}{3}\right)(y-2)\left(y - \frac{6+\sqrt{3}}{3}\right)(y-3)$$

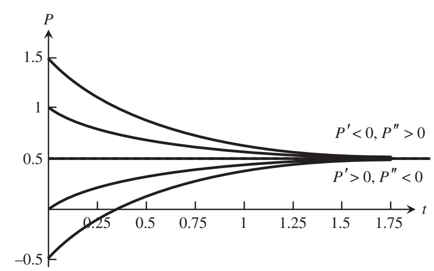


(c)



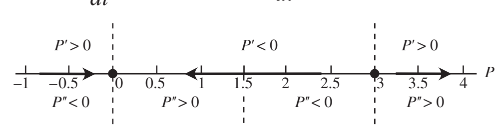
9. $\frac{dP}{dt} = 1 - 2P$'nin $P = 1/2$'de bir kararlı dengesi vardır;

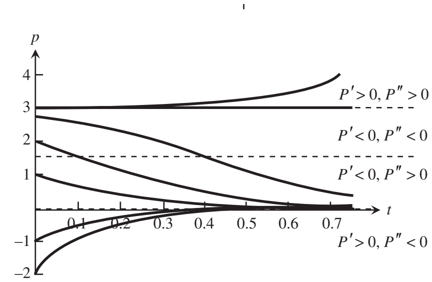
$$\frac{d^2P}{dt^2} = -2\frac{dP}{dt} = -2(1-2P)$$



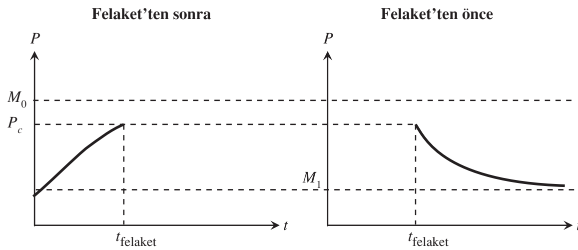
11. $\frac{dP}{dt} = 2P(P-3)$'ün $P = 0$'da bir kararlı dengesi ve $P = 3$'te kararlı olmayan bir dengesi vardır;

$$P = 3;\ \frac{d^2P}{dt^2} = 2(2P-3)\frac{dP}{dt} = 4P(2P-3)(P-3)$$





13. Felaket'ten önce, nüfus logistik bir büyüme sergiler ve $P(t)$ değeri kararlı denge M_0'a doğru artar. Felaket'ren sonra, nüfus lojistik olarak azalır ve $P(t)$ değeri yeni kararlı denge M_1'a doğru azalır

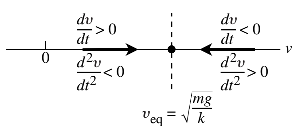


15. $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2, \quad g, k, m > 0$ ve $v(t) \geq 0$

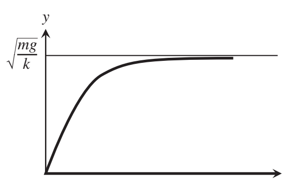
Denge: $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$

Konkavlık: $\frac{d^2v}{dt^2} = -2\left(\frac{k}{m}v\right)\frac{dv}{dt} = -2\left(\frac{k}{m}v\right)\left(g - \frac{k}{m}v^2\right)$

(a)



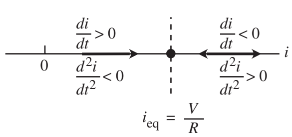
(b)



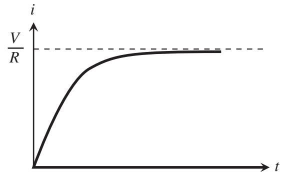
(c) $_{son} = \sqrt{\frac{160}{0.005}} = 178.9$?????? ? ????? ????

17. $F = F_p - F_r$; $ma = 50 - 5|v|$; $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}(50 - 5|v|)$. Maksimum hız $\frac{dv}{dt} = 0$ veya $v = 10$ ft/sn iken ortaya çıkar.

19. Faz doğrusu:



anahtar $t = 0$ da kapatılırsa $i(0) = 0$ ve çözümün grafiği aşağıdaki gibi gözükür:



$t \to \infty$ iken $i(t) \to i_{\text{kararlı durum}} = \frac{V}{R}$

Bölüm 9.5, Sayfa 680–681

1. **(a)** 168.5 m **(b)** 41.13 sn

3. $s(t) = 4.91(1 - e^{-(22.36/39.92)t})$

5. **(a)** $P(t) = \frac{150}{1 + 24e^{-0.225t}}$

(b) Yaklaşık 17.21 hafta; 21.28 hafta

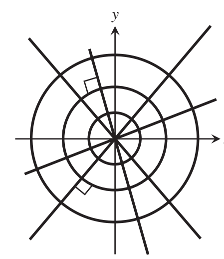
7. **(a)** $y(t) = \frac{8 \times 10^7}{1 + 4e^{-0.71t}} \Rightarrow y(1) \approx 2.69671 \times 10^7$ kg

(b) $t \approx 1.95253$ yıl

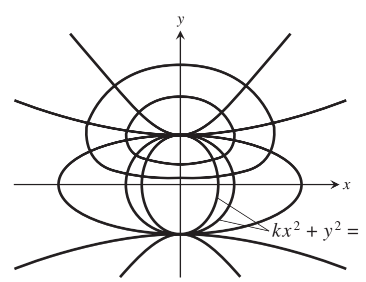
9. **(a)** $y = 2e^t - 1$ **(b)** $y(t) = \frac{400}{1 + 199e^{-200t}}$

11. **(a)** $P(t) = \frac{P_0}{1 - kP_0 t}$ **(b)** $t = \frac{1}{kP_0}$'da dikey asimptot

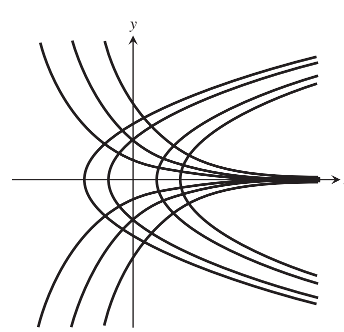
13. $x^2 + y^2 = C$



15. $\ln|y| - \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$



17. $y = \pm\sqrt{2x + C}$



Problemler, Sayfa 682–683

1. $y = \left(\tan^{-1}\left(\frac{x + C}{2}\right)\right)^2$ **3.** $y^2 = \sin^{-1}(2\tan x + C)$

5. $y = -\ln\left(C - \frac{2}{5}(x-2)^{5/2} - \frac{4}{3}(x-2)^{3/2}\right)$

7. $\tan y = -x\sin x - \cos x + C$ **9.** $(y+1)e^{-y} = -\ln|x| + C$

11. $y = C\frac{x-1}{x}$ **13.** $y = \frac{x^4}{4}e^{x/2} + Ce^{x/2}$

15. $y = \frac{x^2 - 2x + C}{2x^2}$ **17.** $y = \frac{e^{-x} + C}{1 + e^x}$ **19.** $xy + y^3 = C$

21. $y = -2 + \ln(2 - e^{-x})$ **23.** $y = \frac{2x^3 + 3x^2 + 6}{6(x+1)^2}$

25. $y = \frac{1}{3}(1 - 4e^{-x^3})$ **27.** $y = 4x - 4\sqrt{x} + 1$

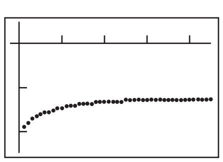
29. $y = e^{-x}(3x^3 - 3x^2)$

x	y
0	0
0.1	0.1000
0.2	0.2095
0.3	0.3285
0.4	0.4568
0.5	0.5946
0.6	0.7418
0.7	0.8986
0.8	1.0649
0.9	1.2411
1.0	1.4273

x	y
1.1	1.6241
1.2	1.8319
1.3	2.0513
1.4	2.2832
1.5	2.5285
1.6	2.7884
1.7	3.0643
1.8	3.3579
1.9	3.6709
2.0	4.0057

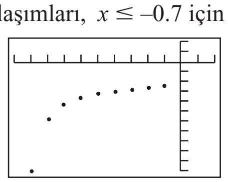
31.
33. $y(3) \approx 0.9063$
35.

(a)



[–0.2, 4.5] by [–2.5, 0.5]

(b) y'değerleri çok hızlı azaldığından ve hesap makinemiz $x \le 1$ için hesaplamayı kontrol edemediğinden küçük bir x-değerleri aralığı seçtiğimize dikkat edin. (Analitik çözüm $y = -2 + \ln(2 - e^{-x})$ olduğundan ve $x = -\ln 2 \approx -0.69$'de bir asimptotu bulunduğundan bu böyledir. Açıkçası, Euler yaklaşımları, $x \le -0.7$ için yanlış olurlar.



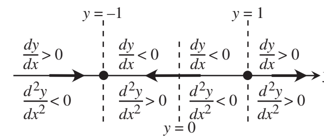
[–1, 0.2] by [–10, 2]

37. $y(\text{tam}) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}$; $y(2) \approx 0.4$; tam değer $\frac{1}{2}$'dir.

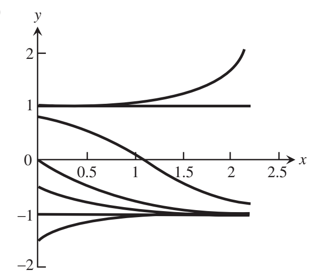
39. $y(\text{tam}) = -e^{(x^2-1)/2}$; $y(2) \approx -3.4192$; tam değer $-e^{3/2} \approx -4.4817$'dir.

41. **(a)** $y = -1$ kararlı ve $y = 1$ kararsızdır.

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y\frac{dy}{dx} = 2y(y^2 - 1)$



(c)



Ek ve İleri Alıştırmalar, Sayfa 683–684

1. **(a)** $y = c + (y_0 - c)e^{-k(A/V)t}$
(b) Kararlı – durum çözüm : $y_\infty = c$

3. %0.179

BÖLÜM 10

Bölüm 10.1, Sayfa 693–697

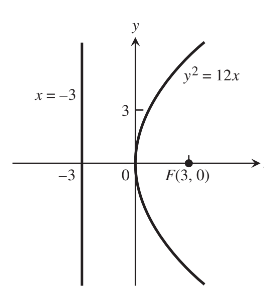
1. $y^2 = 8x$, $F(2, 0)$, doğrultman: $x = -2$

3. $x^2 = -6y$, $F(0, -3/2)$, doğrultman: $y = 3/2$

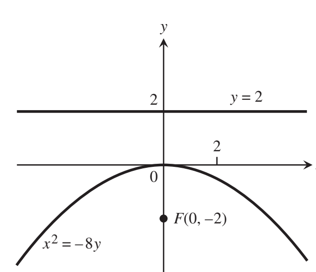
5. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, $F(\pm\sqrt{13}, 0)$, $V(\pm 2, 0)$, asimptotlar: $y = \pm\frac{3}{2}x$

7. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, $F(\pm 1, 0)$, $V(\pm\sqrt{2}, 0)$

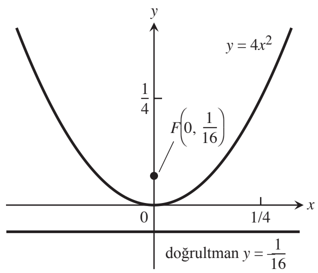
9.



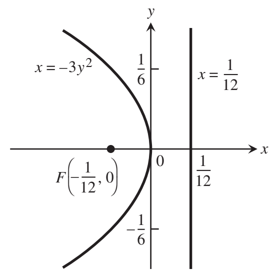
11.



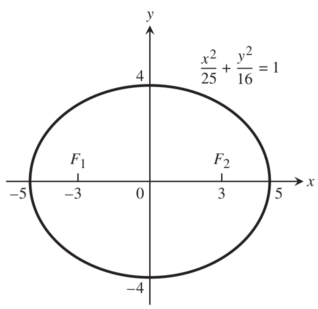
13.



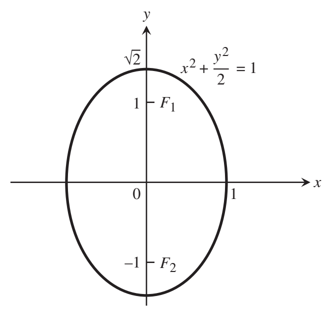
15.



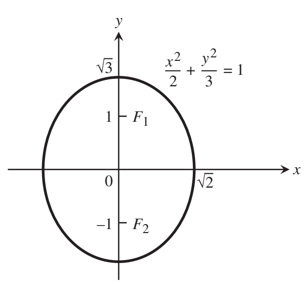
17.



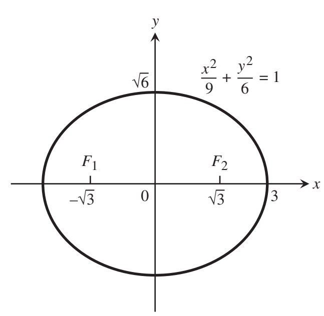
19.



21.

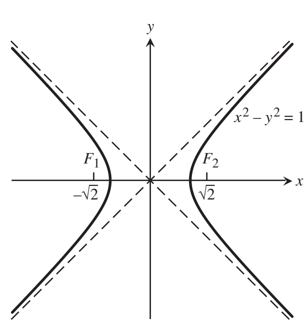


23.

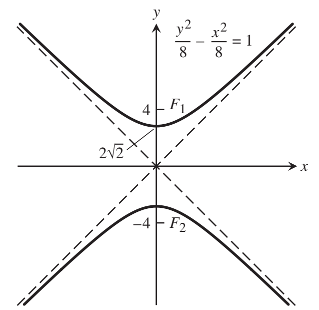


25. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$

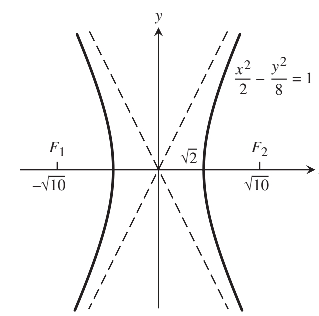
27. Asimptotlar: $y = \pm x$



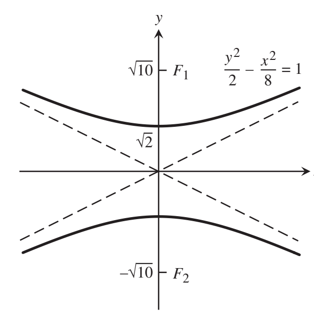
29. Asimptotlar: $y = \pm x$



31. Asimptotlar: $y = \pm 2x$



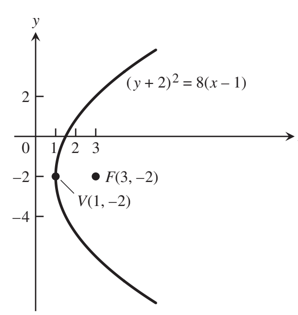
33. Asimptotlar: $y = \pm\dfrac{x}{2}$



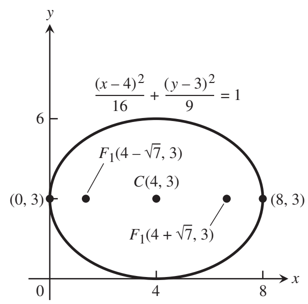
35. $y^2 - x^2 = 1$ **37.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

39. **(a)** Tepe noktası: $(1, -2)$; odak: $(3, -2)$; doğrultman: $x = -1$

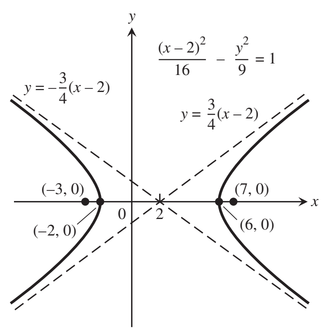
(b)



41. **(a)** Odaklar: $\left(4 \pm \sqrt{7}, 3\right)$; Tepe noktaları: (8, 3) ve (0, 3); merkez: (4, 3)
(b)



43. **(a)** Merkez: (2, 0); odaklar: (7, 0) ve $(-3, 0)$; Tepe noktaları: (6, 0) ve $(-2, 0)$; asimptotlar: $y = \pm\frac{3}{4}(x-2)$
(b)



45. $(y+3)^2 = 4(x+2)$, $V(-2, -3)$, $F(-1, -3)$, doğrultman: $x = -3$

47. $(x-1)^2 = 8(y+7)$, $V(1, -7)$, $F(1, -5)$, doğrultman: $y = -9$

49. $\frac{(x+2)^2}{6} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$, $F\left(-2, \pm\sqrt{3} - 1\right)$, $V(-2, \pm 3 - 1)$, $C(-2, -1)$

51. $\frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(y-3)^2}{2} = 1$, $F(3, 3)$ ve $F(1, 3)$, $V\left(\pm\sqrt{3} + 2, 3\right)$, $C(2, 3)$

53. $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$, $C(2, 2)$, $F(5, 2)$ ve $F(-1, 2)$, $V(4, 2)$ ve $V(0, 2)$; asimptotlar : $(y-2) = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x-2)$

55. $(y+1)^2 - (x+1)^2 = 1$, $C(-1, -1)$, $F\left(-1, \sqrt{2} - 1\right)$ ve $F\left(-1, -\sqrt{2} - 1\right)$, $V(-1, 0)$ ve $V(-1, -2)$; asimptotlar $(y+1) = \pm(x+1)$

57. $C(-2, 0)$, $a = 4$ **59.** $V(-1, 1)$, $F(-1, 0)$

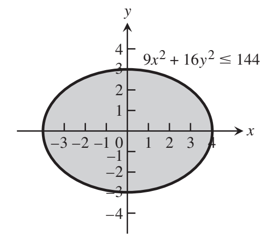
61. Elips: $\frac{(x+2)^2}{5} + y^2 = 1$, $C(-2, 0)$, $F(0, 0)$ ve $F(-4, 0)$, $V\left(\sqrt{5} - 2, 0\right)$ ve $V\left(-\sqrt{5} - 2, 0\right)$

63. Elips: $\frac{(x-1)^2}{2} + (y-1)^2 = 1$, $C(1, 1)$, $F(2, 1)$ ve $F(0, 1)$, $V\left(\sqrt{2} + 1, 1\right)$ ve $V\left(-\sqrt{2} + 1, 1\right)$

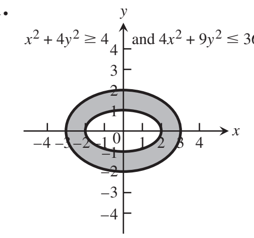
65. Hiperbol: $(x-1)^2 - (y-2)^2 = 1$, $C(1, 2)$, $F\left(1 + \sqrt{2}, 2\right)$ ve $F\left(1 - \sqrt{2}, 2\right)$, $V(2, 2)$ ve $V(0, 2)$; asimptotlar: $(y-2) = \pm(x-1)$

67. Hiperbol: $\frac{(y-3)^2}{6} - \frac{x^2}{3} = 1$, $C(0, 3)$, $F(0, 6)$ ve $F(0, 0)$, $V\left(0, \sqrt{6} + 3\right)$ ve $V\left(0, -\sqrt{6} + 3\right)$; asimptotlar: $y = \sqrt{2}x + 3$ veya $y = -\sqrt{2}x + 3$

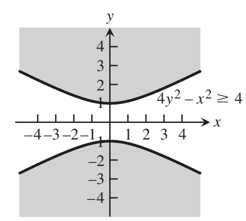
69.



71.



73.



77. $3x^2 + 3y^2 - 7x - 7y + 4 = 0$

79. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 13$. Nokta çemberin içindedir.

81. **(b)** 1 : 1 **83.** Uzunluk = $2\sqrt{2}$, genişlik = $\sqrt{2}$, alan = 4

85. 24π **87.** $(0, 16/(3\pi))$

Bölüm 10.2, Sayfa 701–702

1. $e = 3/5$, $F(\pm 3, 0)$, $x = \pm 25/3$

3. $e = 1/\sqrt{2}$, $F(0, \pm 1)$, $y = \pm 2$

5. $e = 1/\sqrt{3}$, $F(0, \pm 1)$, $y = \pm 3$

7. $e = \sqrt{3}/3$, $F\left(\pm\sqrt{3}, 0\right)$, $x = \pm 3\sqrt{3}$ **9.** $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$

11. $\frac{x^2}{4851} + \frac{y^2}{4900} = 1$ **13.** $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

15. $e = 1/2$, $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$

19. $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$, $F\left(1, 4 \pm \sqrt{5}\right)$, $e = \sqrt{5}/3$, $y = 4 \pm \left(9\sqrt{5}/5\right)$

21. $a = 0$, $b = -4$, $c = 0$, $e = \sqrt{3}/2$

23. $e = \sqrt{2}$, $F\left(\pm\sqrt{2}, 0\right)$, $x = \pm 1/\sqrt{2}$

25. $e = \sqrt{2}$, $F(0, \pm 4)$, $y = \pm 2$

27. $e = \sqrt{5}$, $F\left(\pm\sqrt{10}, 0\right)$, $x = \pm 2/\sqrt{10}$

29. $e = \sqrt{5}$, $F\left(0, \pm\sqrt{10}\right)$, $y = \pm 2/\sqrt{10}$

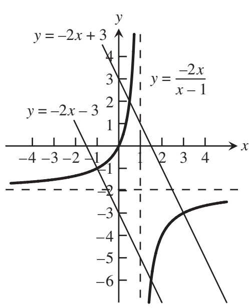
31. $y^2 - \frac{x^2}{8} = 1$ **33.** $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$

35. $e = \sqrt{2}$, $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$ **37.** $e = 2$, $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

39. $\dfrac{(y-6)^2}{36} - \dfrac{(x-1)^2}{45} = 1$

Bölüm 10.3, Sayfa 707–709

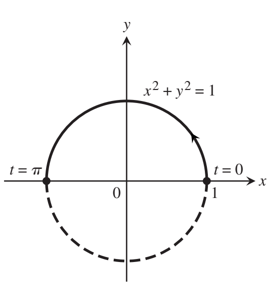
1. Hiperbol **3.** Elips **5.** Parabol **7.** Parabol
9. Hiperbol **11.** Hiperbol **13.** Elips **15.** Elipse
17. $x'^2 - y'^2 = 4$, hyperbola **19.** $4x'^2 + 16y' = 0$, parabol
21. $y'^2 = 1$, paralel doğrular **23.** $2\sqrt{2}x'^2 + 8\sqrt{2}y' = 0$, parabol
25. $4x'^2 + 2y'^2 = 19$, elips
27. $\sin\alpha = 1/\sqrt{5}$, $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$
29. $A' = 0.88, B' = 0.00, C' = 3.10, D' = 0.74, E' = -1.20,$ $F' = -3$, $0.88x'^2 + 3.10y'^2 + 0.74x' - 1.20y' - 3 = 0$, ellipse
31. $A' = 0.00, B' = 0.00, C' = 5.00, D' = 0, E' = 0,$ $F' = -5$, $5.00y'^2 - 5 = 0$ or $y' = \pm 1.00$, paralel doğrular
33. $A' = 5.05, B' = 0.00, C' = -0.05, D' = -5.07, E' = -6.18,$ $F' = -1$, $5.05x'^2 - 0.05y'^2 - 5.07x' - 6.18y' - 1 = 0$, hiperbol
35. **(a)** $\dfrac{x'^2}{b^2} + \dfrac{y'^2}{a^2} = 1$ **(b)** $\dfrac{y'^2}{a^2} - \dfrac{x'^2}{b^2} = 1$
(c) $x'^2 + y'^2 = a^2$ **(d)** $y' = -\dfrac{1}{m}x'$
(e) $y' = -\dfrac{1}{m}x' + \dfrac{b}{m}$
37. **(a)** $x'^2 - y'^2 = 2$ **(b)** $x'^2 - y'^2 = 2a$ **43.** **(a)** Parabol
45. **(a)** Hiperbol
(b)



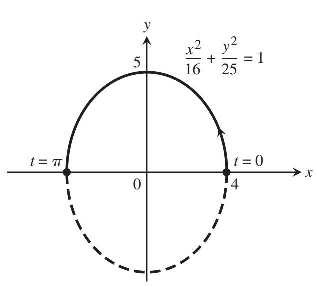
(c) $y = -2x - 3$, $y = -2x + 3$

Bölüm 10.4, Sayfa 712–713

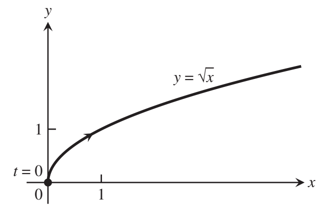
1.



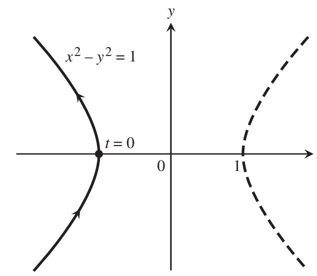
3.



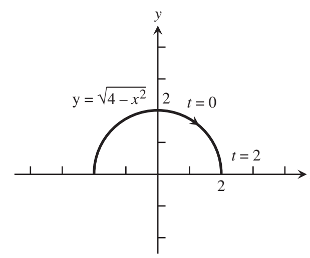
5.



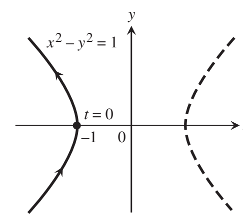
7.



9.



11.



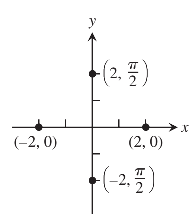
13. $x = (a-b)\cos\theta + b\cos\left(\dfrac{a-b}{b}\theta\right)$,
$y = (a-b)\sin\theta - b\sin\left(\dfrac{a-b}{b}\theta\right)$

15. $x = a\sin^2 t\tan t$, $y = a\sin^2 t$ **17.** $(1, 1)$

Bölüm 10.5, Sayfa 718–719

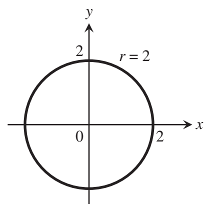
1. a, e; b, g; c, h; d, f

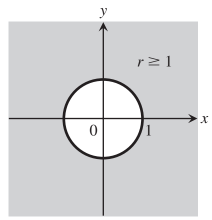
3.

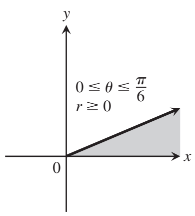


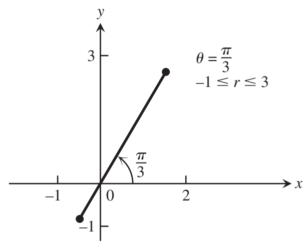
(a) $\left(2, \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$ ve $\left(-2, \dfrac{\pi}{2} + (2n+1)\pi\right)$, n bir tamsayı
(b) $(2, 2n\pi)$ ve $(-2, (2n+1)\pi)$, n bir tamsayı
(c) $\left(2, \dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi\right)$ ve $\left(-2, \dfrac{3\pi}{2} + (2n+1)\pi\right)$, n bir tamsayı
(d) $(2, (2n+1)\pi)$ ve $(-2, 2n\pi)$, n bir tamsayı

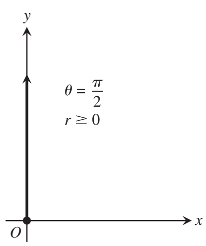
5. **(a)** $(3, 0)$ **(b)** $(-3, 0)$ **(c)** $\left(-1, \sqrt{3}\right)$ **(d)** $\left(1, \sqrt{3}\right)$
(e) $(3, 0)$ **(f)** $\left(1, \sqrt{3}\right)$ **(g)** $(-3, 0)$ **(h)** $\left(-1, \sqrt{3}\right)$

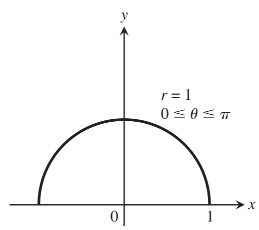
7.


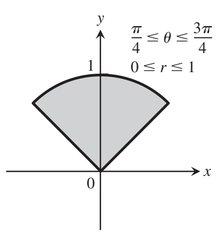
9.


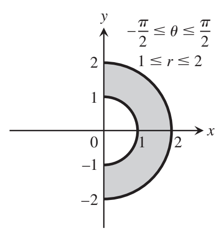
11.


13.


15.


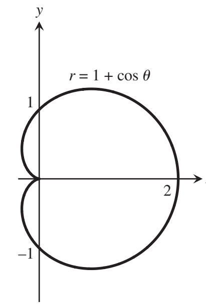
17.


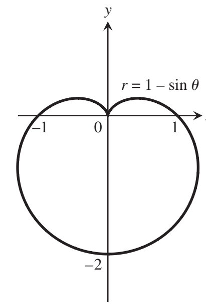
19.


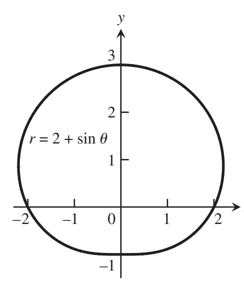
21.


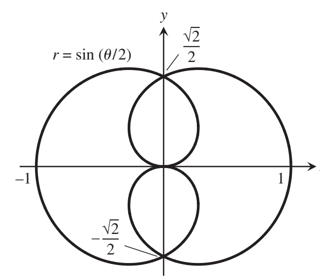
23. $x = 2$, (2, 0)'dan geçen dikey doğru
25. $y = 0$, x-ekseni
27. $y = 4$, (0, 4)'ten geçen yatay doğru
29. $x + y = 1$, doğru, $m = -1$, $b = 1$
31. $x^2 + y^2 = 1$, çember, $C(0, 0)$, yarıçap 1
33. $y - 2x = 5$, doğru; $m = 2$, $b = 5$
35. $y^2 = x$, parabol, tepe noktası (0, 0), sağa açılır
37. $y = e^x$, doğal eksponansiyel fonksiyonun grafiği
39. $x + y = \pm 1$, –1 eğimli iki doğru, y-kesim noktaları $b = \pm 1$
41. $(x + 2)^2 + y^2 = 4$, çember, $C(-2, 0)$, yarıçap 2
43. $x^2 + (y - 4)^2 = 16$, çember, $C(0, 4)$, yarıçap 4
45. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$, çember, $C(1, 1)$, yarıçap $\sqrt{2}$
47. $\sqrt{3}y + x = 4$ **49.** $r \cos\theta = 7$ **51.** $\theta = \pi/4$
53. $r = 2$ or $r = -2$ **55.** $4r^2 \cos^2\theta + 9r^2 \sin^2\theta = 36$
57. $r \sin^2\theta = 4 \cos\theta$ **59.** $r = 4 \sin\theta$
61. $r^2 = 6r \cos\theta - 2r \sin\theta - 6$
63. $(0, \theta)$, θ herhangi bir açı

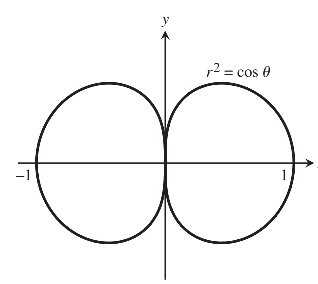
Bölüm 10.6, Sayfa 725–726

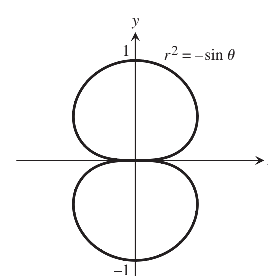
1. x-ekseni


3. y-axis


5. y-ekseni


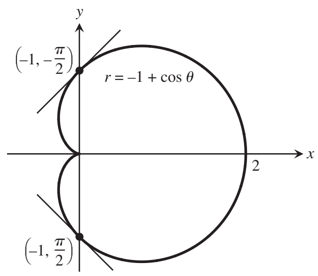
7. x-ekseni


9. x-ekseni, y-ekseni, orijin


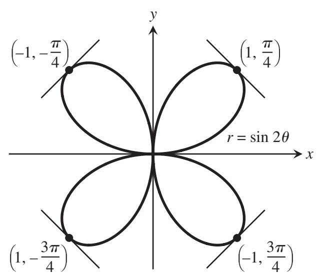
11. y-ekseni, x-ekseni, orijin


13. x-ekseni, y-ekseni, orijin **15.** Orijin

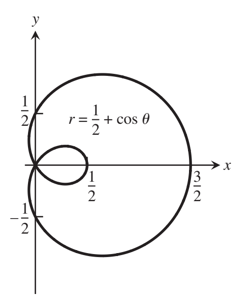
17. $(-1, \pi/2)$'deki eğim –1, $(-1, -\pi/2)$'deki eğim 1'dir.



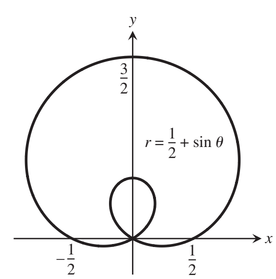
19. Eğim $(1, \pi/4)$'te –1, $(-1, -\pi/4)$'te 1, $(-1, 3\pi/4)$'te 1, $(1, -3\pi/4)$'te –1'dir.



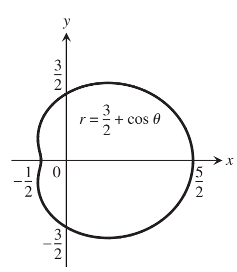
21. **(a)**



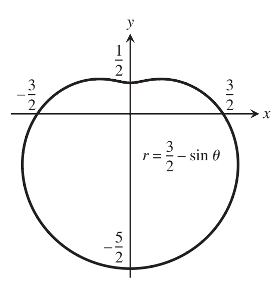
(b)



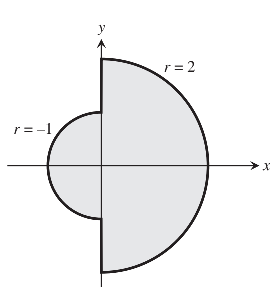
23. **(a)**



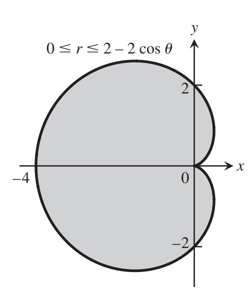
(b)



25.



27.



31. (0, 0), $(1, \pi/2)$, $(1, 3\pi/2)$
33. (0, 0), $\left(\sqrt{3}, \pi/3\right)$, $\left(-\sqrt{3}, -\pi/3\right)$
35. $\left(\sqrt{2}, \pm\pi/6\right)$, $\left(\sqrt{2}, \pm 5\pi/6\right)$
37. $(1, \pi/12)$, $(1, 5\pi/12)$, $(1, 13\pi/12)$, $(1, 17\pi/12)$
43. (a) **51.** $2y = \dfrac{2\sqrt{6}}{9}$

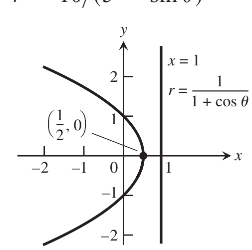
Bölüm 10.7, Sayfa 730–731

1. 18π **3.** $\pi/8$ **5.** 2 **7.** $\dfrac{\pi}{2} - 1$ **9.** $5\pi - 8$
11. $3\sqrt{3} - \pi$ **13.** $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **15.** $12\pi - 9\sqrt{3}$
17. **(a)** $\dfrac{3}{2} - \dfrac{\pi}{4}$ **19.** $19/3$ **21.** 8
23. $3\left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right)$ **25.** $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{3}{8}$ **27.** 2π
29. $\pi\sqrt{2}$ **31.** $2\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)$ **37.** $\left(\dfrac{5}{6}a, 0\right)$

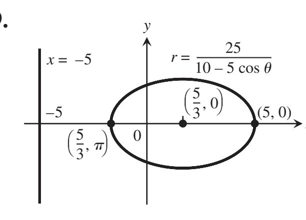
Bölüm 10.8, Sayfa 737–739

1. $r\cos(\theta - \pi/6) = 5$, $y = -\sqrt{3}x + 10$
3. $r\cos(\theta - 4\pi/3) = 3$, $y = -\left(\sqrt{3}/3\right)x - 2\sqrt{3}$
5. $y = 2 - x$ **7.** $y = \left(\sqrt{3}/3\right)x + 2\sqrt{3}$
9. $r\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = 3$ **11.** $r\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = 5$
13. $r = 8\cos\theta$ **15.** $r = 2\sqrt{2}\sin\theta$ **17.** $C(2, 0)$, yarıçap = 2
19. $C(1, \pi)$, yarıçap = 1 **21.** $(x - 6)^2 + y^2 = 36$, $r = 12\cos\theta$
23. $x^2 + (y - 5)^2 = 25$, $r = 10\sin\theta$
25. $(x + 1)^2 + y^2 = 1$, $r = -2\cos\theta$
27. $x^2 + (y + 1/2)^2 = 1/4$, $r = -\sin\theta$ **29.** $r = 2/(1 + \cos\theta)$
31. $r = 30/(1 - 5\sin\theta)$ **33.** $r = 1/(2 + \cos\theta)$
35. $r = 10/(5 - \sin\theta)$

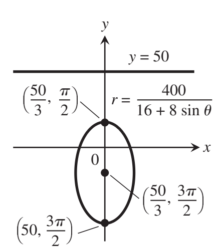
37.



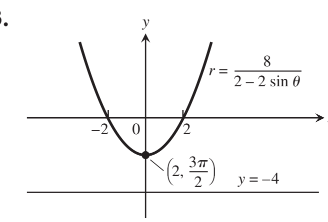
39.



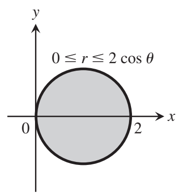
41.



43.



45.

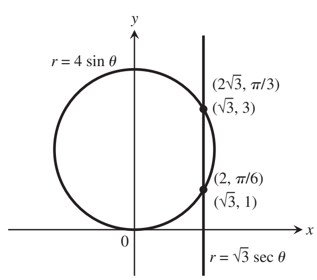


57. (b)

Gezegen	Perihelyon	Aphelyon
Merkür	0.3075 AU	0.4667 AU
Venüs	0.7184 AU	0.7282 AU
Dünya	0.9833 AU	1.0167 AU
Mars	1.3817 AU	1.6663 AU
Jüpiter	4.9512 AU	5.4548 AU
Satürn	9.0210 AU	10.0570 AU
Uranüs	18.2977 AU	20.0623 AU
Neptün	29.8135 AU	30.3065 AU
Plüto	29.6549 AU	49.2251 AU

59. (a) $x^2 + (y - 2)^2 = 4, x = \sqrt{3}$

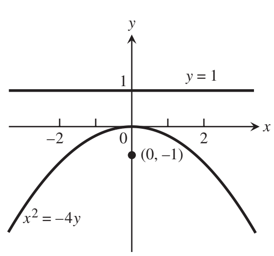
(b)



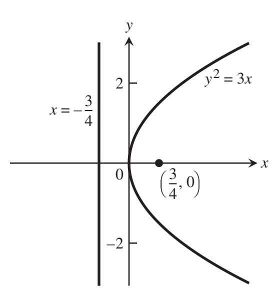
61. $r = 4/(1 + \cos\theta)$ **63. (b)** İğneler 2 inç aralıklı olmalı.
65. $r = 2a\sin\theta$ (bir çember) **67.** $r\cos(\theta - \alpha) = p$ (bir doğru)

Problemler, Sayfa 740–743

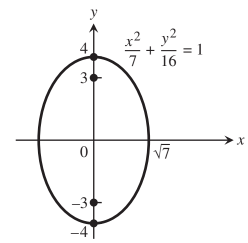
1.



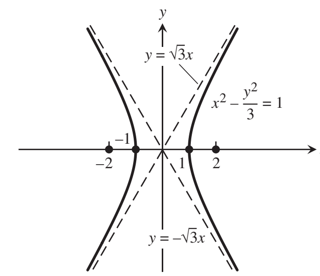
3.



5. $e = 3/4$



7. $e = 2$



9. $(x - 2)^2 = -12(y - 3)$, $V(2, 3)$, $F(2, 0)$; doğrultman: $y = 6$

11. $\dfrac{(x + 3)^2}{9} + \dfrac{(y + 5)^2}{25} = 1$, $C(-3, -5)$, $V(-3, 0)$ ve $V(-3, -10)$, $F(-3, -1)$ ve $F(-3, -9)$

13. $\dfrac{\left(y - 2\sqrt{2}\right)^2}{8} - \dfrac{(x - 2)^2}{2} = 1$, $C\left(2, 2\sqrt{2}\right)$, $V\left(2, 4\sqrt{2}\right)$ ve $V(2, 0)$, $F\left(2, \sqrt{10} + 2\sqrt{2}\right)$ ve $F\left(2, -\sqrt{10} + 2\sqrt{2}\right)$; asimptot: $y = 2x - 4 + 2\sqrt{2}$ ve $y = -2x + 4 + 2\sqrt{2}$

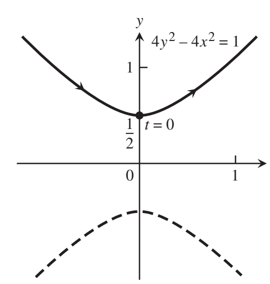
15. Hiperbol: $\dfrac{(x - 2)^2}{4} - y^2 = 1$, $F\left(2 \pm \sqrt{5}, 0\right)$, $V(2 \pm 2, 0)$, $C(2, 0)$; asimptot: $y = \pm\dfrac{1}{2}(x - 2)$

17. Parabol: $(y - 1)^2 = -16(x + 3)$, $V(-3, 1)$, $F(-7, 1)$; doğrultman: $x = 1$

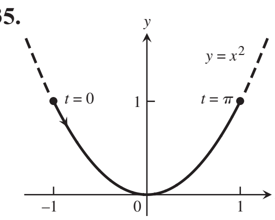
19. Elips: $\dfrac{(x + 3)^2}{16} + \dfrac{(y - 2)^2}{9} = 1$, $F\left(\pm\sqrt{7} - 3, 2\right)$, $V(\pm 4 - 3, 2)$, $C(-3, 2)$

21. Çember: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$, $C(1, 1)$,yarıçap = $\sqrt{2}$
23. Elips **25.** Hiperbol **27.** Doğru
29. Elips, $5x'^2 + 3y'^2 = 30$ **31.** Hiperbol, $y'^2 - x'^2 = 2$

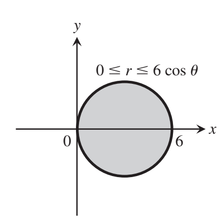
33.



35.



37.

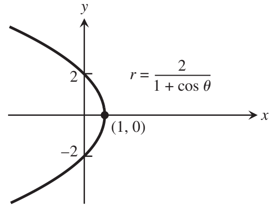


39. (d) **41.** (l) **43.** (k)

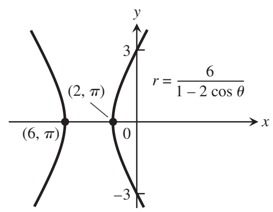
45. (i) **47.** (0, 0) **49.** $(0, 0), (1, \pm\pi/2)$
51. Grafikler çakışır **53.** $\left(\sqrt{2}, \pi/4\right)$

55. $y = (\sqrt{3}/3)x - 4$ **57.** $x = 2$ **59.** $y = -3/2$
61. $x^2 + (y + 2)^2 = 4$ **63.** $(x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 2$
65. $r = -5 \sin\theta$ **67.** $r = 3\cos\theta$

69.



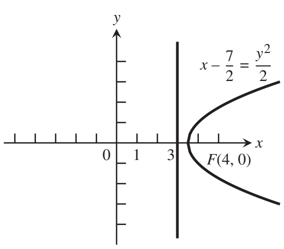
71.



73. $r = \dfrac{4}{1 + 2\cos\theta}$ **75.** $r = \dfrac{2}{2 + \sin\theta}$ **77.** $9\pi/2$
79. $2 + \pi/4$ **81.** 8 **83.** $\pi - 3$ **85.** $(2 - \sqrt{2})\pi$
87. (a) 24π **(b)** 16π

Ek ve İleri Alıştırmalar, Sayfa 743–745

1.

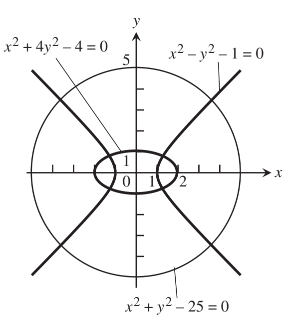


3. $3x^2 + 3y^2 - 8y + 4 = 0$

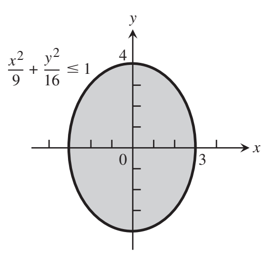
5. $(0, \pm 1)$

7. (a) $\dfrac{(y-1)^2}{16} - \dfrac{x^2}{48} = 1$ **(b)** $\dfrac{16\left(y + \frac{3}{4}\right)^2}{25} - \dfrac{2x^2}{75} = 1$

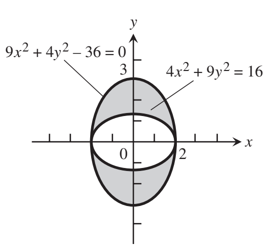
11.



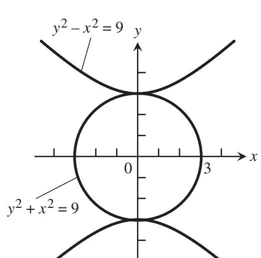
13.



15.



17.



19. $x = (a + b)\cos\theta - b\cos\left(\dfrac{a+b}{b}\theta\right)$,
$y = (a + b)\sin\theta - b\sin\left(\dfrac{a+b}{b}\theta\right)$

21. (a) $r = e^{2\theta}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi} - 1)$ **23.** $\dfrac{32\pi - 4\pi\sqrt{2}}{5}$

25. $r = \dfrac{4}{1 + 2\cos\theta}$ **27.** $r = \dfrac{2}{2 + \sin\theta}$ **29. (a)** 120°

31. 1×10^7 mil **33.** $e = \sqrt{2/3}$ **35.** Evet, bir parabol

37. (a) $r = \dfrac{2a}{1 + \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$ **(b)** $r = \dfrac{8}{3 - \cos\theta}$

(c) $r = \dfrac{3}{1 + 2\sin\theta}$

43. $\pi/2$ **47.** $\left(2, \pm\dfrac{\pi}{3}\right), \dfrac{\pi}{2}$ **51.** $\pi/2$ **53.** $\pi/4$

EKLER

Ek E.5

1. (a) (14, 8) **(b)** (−1, 8) **(c)** (0, −5)
3. (a) z'yi reel eksene göre yansıtarak
(b) z'yi sanal eksene göre yansıtarak
(c) z'yi reel eksene göre yansıtıp, vektörün boyunu $1/|z|^2$ ile Çarparak
5. (a) $x^2 + y^2 = 4$ çemberinin üzerindeki noktalar
(b) $x^2 + y^2 = 4$ çemberinin içindeki noktalar
(c) $x^2 + y^2 = 4$ çemberinin dışındaki noktalar
7. 1 yarıçaplı, merkezi (–1, 0)'daki bir çemberin üzerindeki noktalar
9. $y = -x$ doğrusu üzerindeki noktalar **11.** $4e^{2\pi i/3}$ **13.** $1e^{2\pi i/3}$

15. $\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$ **17.** $1, -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

19. $2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$ **21.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2} \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}i, -\dfrac{\sqrt{6}}{2} \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

23. $1 \pm \sqrt{3}i, -1 \pm \sqrt{3}i$

İNDEKS

Not: italik sayılar şekilleri "t"ler tabloları; "e"ler alıştırmaları göstermektedir.

Kısa Bir İntegral Tablosu

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \neq 1, \quad a > 0$

3. $\int \cos u\,du = \sin u + C$

4. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

5. $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \quad n \neq -1$

6. $\int (ax+b)^{-1}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

7. $\int x(ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a^2}\left[\frac{ax+b}{n+2} - \frac{b}{n+1}\right] + C, \quad n \neq -1, -2$

8. $\int x(ax+b)^{-1}\,dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C$

9. $\int x(ax+b)^{-2}\,dx = \frac{1}{a^2}\left[\ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b}\right] + C$

10. $\int \frac{dx}{x(ax+b)} = \frac{1}{b}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right| + C$

11. $\int \left(\sqrt{ax+b}\right)^n dx = \frac{2}{a}\frac{\left(\sqrt{ax+b}\right)^{n+2}}{n+2} + C, \quad n \neq -2$

12. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\,dx = 2\sqrt{ax+b} + b\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

13. (a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax-b}} = \frac{2}{\sqrt{b}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{ax-b}{b}} + C$ (b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| + C$

14. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$

15. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$

16. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

17. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

18. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

19. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + C = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C$

21. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C$

22. $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{8}(a^2+2x^2)\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C$

23. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2+x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right| + C$

24. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) - \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} + C$

25. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = -\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + C$

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right| + C$

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x} + C$

28. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

29. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

30. $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{8}x\sqrt{a^2-x^2}\,(a^2-2x^2) + C$

31. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$

32. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = -\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C$

33. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$

35. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C$

36. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

37. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

38. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n dx = \frac{x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n}{n+1} - \frac{na^2}{n+1}\int\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2}dx, \quad n \neq -1$

39. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n} = \frac{x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{2-n}}{(2-n)a^2} - \frac{n-3}{(n-2)a^2}\int\frac{dx}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2}}, \quad n \neq 2$

40. $\displaystyle\int x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n dx = \frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n+2}}{n+2} + C, \quad n \neq -2$

41. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

42. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$

43. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + C$

44. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + C$

45. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right| + C$

46. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C$

47. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$

48. $\displaystyle\int \sqrt{2ax - x^2}\,dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$

49. $\displaystyle\int \left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^n dx = \frac{(x-a)\left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^n}{n+1} + \frac{na^2}{n+1}\int \left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^{n-2} dx$

50. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^n} = \frac{(x-a)\left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^{2-n}}{(n-2)a^2} + \frac{n-3}{(n-2)a^2}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^{n-2}}$

51. $\displaystyle\int x\sqrt{2ax - x^2}\,dx = \frac{(x+a)(2x-3a)\sqrt{2ax - x^2}}{6} + \frac{a^3}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$

52. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x}\,dx = \sqrt{2ax - x^2} + a\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$

53. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^2}\,dx = -2\sqrt{\frac{2a-x}{x}} - \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$

54. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = a\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) - \sqrt{2ax - x^2} + C$

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax - x^2}} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}} + C$

56. $\displaystyle\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$

57. $\displaystyle\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$

58. $\displaystyle\int \sin^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C$

59. $\displaystyle\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + C$

60. $\displaystyle\int \sin^n ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1} ax\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax\,dx$

61. $\displaystyle\int \cos^n ax\,dx = \frac{\cos^{n-1} ax\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\,dx$

62. (a) $\displaystyle\int \sin ax\cos bx\,dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$

(b) $\displaystyle\int \sin ax\sin bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$

(c) $\displaystyle\int \cos ax\cos bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$

63. $\displaystyle\int \sin ax\cos ax\,dx = -\frac{\cos 2ax}{4a} + C$

64. $\displaystyle\int \sin^n ax\cos ax\,dx = \frac{\sin^{n+1} ax}{(n+1)a} + C, \quad n \neq -1$

65. $\displaystyle\int \frac{\cos ax}{\sin ax}\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax| + C$

66. $\displaystyle\int \cos^n ax\sin ax\,dx = -\frac{\cos^{n+1} ax}{(n+1)a} + C, \quad n \neq -1$

67. $\displaystyle\int \frac{\sin ax}{\cos ax}\,dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax| + C$

68. $\displaystyle\int \sin^n ax \cos^m ax\, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax}{a(m+n)} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^{n-2} ax \cos^m ax\, dx, \quad n \neq -m \quad (\sin^n ax \text{ indirgenir})$

69. $\displaystyle\int \sin^n ax \cos^m ax\, dx = \frac{\sin^{n+1} ax \cos^{m-1} ax}{a(m+n)} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{n} ax \cos^{m-2} ax\, dx, \quad m \neq -n \quad (\cos^m ax \text{ indirgenir})$

70. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c\sin ax} = \frac{-2}{a\sqrt{b^2 - c^2}}\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)\right] + C, \quad b^2 > c^2$

71. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c\sin ax} = \frac{-1}{a\sqrt{c^2 - b^2}}\ln\left|\frac{c + b\sin ax + \sqrt{c^2 - b^2}\cos ax}{b + c\sin ax}\right| + C, \quad b^2 < c^2$

72. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sin ax} = -\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + C$

73. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \sin ax} = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + C$

74. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c\cos ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2 - c^2}}\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\tan\frac{ax}{2}\right] + C, \quad b^2 > c^2$

75. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c\cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{c^2 - b^2}}\ln\left|\frac{c + b\cos ax + \sqrt{c^2 - b^2}\sin ax}{b + c\cos ax}\right| + C, \quad b^2 < c^2$

76. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a}\tan\frac{ax}{2} + C$

77. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a}\cot\frac{ax}{2} + C$

78. $\displaystyle\int x\sin ax\, dx = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{x}{a}\cos ax + C$

79. $\displaystyle\int x\cos ax\, dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax + C$

80. $\displaystyle\int x^n \sin ax\, dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\, dx$

81. $\displaystyle\int x^n \cos ax\, dx = \frac{x^n}{a}\sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\, dx$

82. $\displaystyle\int \tan ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sec ax| + C$

83. $\displaystyle\int \cot ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax| + C$

84. $\displaystyle\int \tan^2 ax\, dx = \frac{1}{a}\tan ax - x + C$

85. $\displaystyle\int \cot^2 ax\, dx = -\frac{1}{a}\cot ax - x + C$

86. $\displaystyle\int \tan^n ax\, dx = \frac{\tan^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

87. $\displaystyle\int \cot^n ax\, dx = -\frac{\cot^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \cot^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

88. $\displaystyle\int \sec ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sec ax + \tan ax| + C$

89. $\displaystyle\int \csc ax\, dx = -\frac{1}{a}\ln|\csc ax + \cot ax| + C$

90. $\displaystyle\int \sec^2 ax\, dx = \frac{1}{a}\tan ax + C$

91. $\displaystyle\int \csc^2 ax\, dx = -\frac{1}{a}\cot ax + C$

92. $\displaystyle\int \sec^n ax\, dx = \frac{\sec^{n-2} ax\tan ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

93. $\displaystyle\int \csc^n ax\, dx = -\frac{\csc^{n-2} ax\cot ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

94. $\displaystyle\int \sec^n ax\tan ax\, dx = \frac{\sec^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$

95. $\displaystyle\int \csc^n ax\cot ax\, dx = -\frac{\csc^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$

96. $\int \sin^{-1} ax\, dx = x \sin^{-1} ax + \frac{1}{a}\sqrt{1 - a^2x^2} + C$

97. $\int \cos^{-1} ax\, dx = x \cos^{-1} ax - \frac{1}{a}\sqrt{1 - a^2x^2} + C$

98. $\int \tan^{-1} ax\, dx = x \tan^{-1} ax - \frac{1}{2a}\ln(1 + a^2x^2) + C$

99. $\int x^n \sin^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sin^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1 - a^2x^2}}, \quad n \neq -1$

100. $\int x^n \cos^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cos^{-1} ax + \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1 - a^2x^2}}, \quad n \neq -1$

101. $\int x^n \tan^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\tan^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\, dx}{1 + a^2x^2}, \quad n \neq -1$

102. $\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

103. $\int b^{ax}\, dx = \frac{1}{a}\frac{b^{ax}}{\ln b} + C, \quad b > 0, b \neq 1$

104. $\int xe^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C$

105. $\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\, dx$

106. $\int x^n b^{ax}\, dx = \frac{x^n b^{ax}}{a \ln b} - \frac{n}{a \ln b}\int x^{n-1}b^{ax}\, dx, \quad b > 0, b \neq 1$

107. $\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C$

108. $\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C$

109. $\int \ln ax\, dx = x \ln ax - x + C$

110. $\int x^n(\ln ax)^m\, dx = \frac{x^{n+1}(\ln ax)^m}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int x^n(\ln ax)^{m-1}\, dx, \quad n \neq -1$

111. $\int x^{-1}(\ln ax)^m\, dx = \frac{(\ln ax)^{m+1}}{m+1} + C, \quad m \neq -1$

112. $\int \frac{dx}{x \ln ax} = \ln|\ln ax| + C$

113. $\int \sinh ax\, dx = \frac{1}{a}\cosh ax + C$

114. $\int \cosh ax\, dx = \frac{1}{a}\sinh ax + C$

115. $\int \sinh^2 ax\, dx = \frac{\sinh 2ax}{4a} - \frac{x}{2} + C$

116. $\int \cosh^2 ax\, dx = \frac{\sinh 2ax}{4a} + \frac{x}{2} + C$

117. $\int \sinh^n ax\, dx = \frac{\sinh^{n-1} ax \cosh ax}{na} - \frac{n-1}{n}\int \sinh^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 0$

118. $\int \cosh^n ax\, dx = \frac{\cosh^{n-1} ax \sinh ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cosh^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 0$

119. $\int x \sinh ax\, dx = \frac{x}{a}\cosh ax - \frac{1}{a^2}\sinh ax + C$

120. $\int x \cosh ax\, dx = \frac{x}{a}\sinh ax - \frac{1}{a^2}\cosh ax + C$

121. $\int x^n \sinh ax\, dx = \frac{x^n}{a}\cosh ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cosh ax\, dx$

122. $\int x^n \cosh ax\, dx = \frac{x^n}{a}\sinh ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sinh ax\, dx$

123. $\int \tanh ax\, dx = \frac{1}{a}\ln(\cosh ax) + C$

124. $\int \coth ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sinh ax| + C$

125. $\int \tanh^2 ax\,dx = x - \frac{1}{a}\tanh ax + C$

126. $\int \coth^2 ax\,dx = x - \frac{1}{a}\coth ax + C$

127. $\int \tanh^n ax\,dx = -\frac{\tanh^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \tanh^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 1$

128. $\int \coth^n ax\,dx = -\frac{\coth^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \coth^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 1$

129. $\int \operatorname{sech} ax\,dx = \frac{1}{a}\sin^{-1}(\tanh ax) + C$

130. $\int \operatorname{csch} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\tanh\frac{ax}{2}\right| + C$

131. $\int \operatorname{sech}^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\tanh ax + C$

132. $\int \operatorname{csch}^2 ax\,dx = -\frac{1}{a}\coth ax + C$

133. $\int \operatorname{sech}^n ax\,dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-2} ax \tanh ax}{(n-1)a} + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{sech}^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 1$

134. $\int \operatorname{csch}^n ax\,dx = -\frac{\operatorname{csch}^{n-2} ax \coth ax}{(n-1)a} - \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{csch}^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 1$

135. $\int \operatorname{sech}^n ax \tanh ax\,dx = -\frac{\operatorname{sech}^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$

136. $\int \operatorname{csch}^n ax \coth ax\,dx = -\frac{\operatorname{csch}^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$

137. $\int e^{ax}\sinh bx\,dx = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} - \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C, \quad a^2 \neq b^2$

138. $\int e^{ax}\cosh bx\,dx = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} + \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C, \quad a^2 \neq b^2$

139. $\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx = \Gamma(n) = (n-1)!, \quad n > 0$

140. $\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0$

141. $$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{(}n \geq 2 \text{ bir çift tamsayı ise} \\[2ex] \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots n}, & \text{(}n \geq 3 \text{ bir tek tamsayı ise} \end{cases}$$

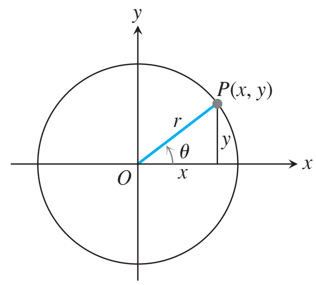
Trigonometri Formülleri

1. Tanımlar ve Temel Özdeşlikler

Sine: $\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{1}{\csc\theta}$

Cosine: $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{\sec\theta}$

Tangent: $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{\cot\theta}$



2. Özdeşlik

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta, \quad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta, \quad \csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B},$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

$$\sin\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos A, \qquad \cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = \sin A$$

$$\sin\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \cos A, \qquad \cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin A$$

$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}\cos(A - B) - \frac{1}{2}\cos(A + B)$$

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\cos(A - B) + \frac{1}{2}\cos(A + B)$$

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}\sin(A - B) + \frac{1}{2}\sin(A + B)$$

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A - B)$$

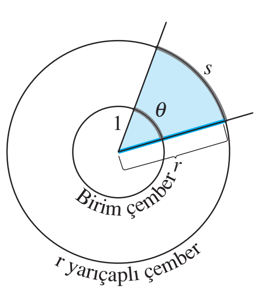
$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B)\sin\frac{1}{2}(A - B)$$

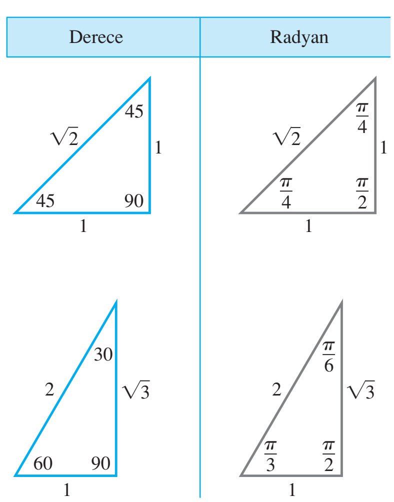
$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A - B)$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{1}{2}(A + B)\sin\frac{1}{2}(A - B)$$

Trigonometrik Fonksiyonlar

Radyan Ölçü

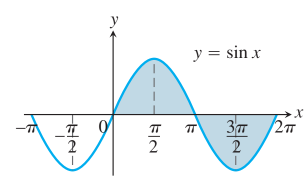




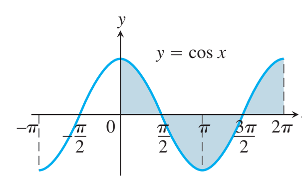
$$\frac{s}{r} = \frac{\theta}{1} = \theta \quad \text{veya} \quad \theta = \frac{s}{r},$$

Eş iki üçgenin derece ve radyan cinsinden açıları

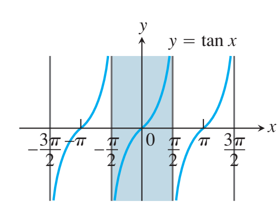
$180° = \pi$ radyan



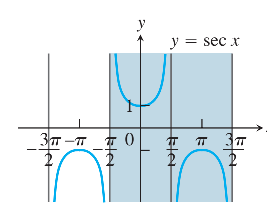
Tanım Kümesi: $(-\infty, \infty)$
Değer Kümesi: $[-1, 1]$



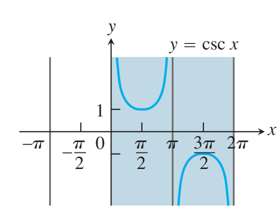
Tanım Kümesi: $(-\infty, \infty)$
Değer Kümesi: $[-1, 1]$



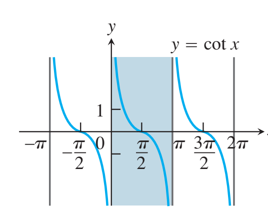
Tanım Kümesi: $\pi/2$'nin tek tamsayı katı dışındaki bütün reel sayılar
Değer Kümesi: $(-\infty, \infty)$



Tanım Kümesi: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Değer Kümesi: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Tanım Kümesi: $x \neq 0, \pm\pi, \pm2\pi, \ldots$
Değer Kümesi: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Tanım Kümesi: $x \neq 0, \pm\pi, \pm2\pi, \ldots$
Değer Kümesi: $(-\infty, \infty)$

SERİLER

Taylor Serileri

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad |x| < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \qquad -1 < x \le 1$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \tanh^{-1} x = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| < 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| \le 1$$

Binom Seriler

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)x^k}{k!} + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, \qquad |x| < 1,$$

olduğundan

$$k \ge 3 \text{ için } \binom{m}{1} = m, \qquad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!}, \qquad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$$

LİMİTLER

Genel Kurallar

L, M, c ve *k* reel sayılar ve

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to c} g(x) = M$$

ise aşağıdakiler geçerlidir.

Toplam Kuralı: $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = L + M$

Fark Kuralı: $\lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) = L - M$

Çarpım Kuralı: $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = L\cdot M$

Sabitle Çarpım Kuralı: $\lim_{x\to c}(k\cdot f(x)) = k\cdot L$

Bölüm Kuralı: $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$

Sandöviç Teoremi

c'yi içeren bir açık aralıkta $g(x) \le f(x) \le h(x)$, $x = c$ hariç olabilir, ise ve

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$$

ise $\lim_{x\to c} f(x) = L$'dir.

Eşitsizlikler

c'yi içeren bir açık aralıkta $f(x) \le f(x)$, $x = c$ hariç olabilir, ise ve her iki limit mevcut ise

$$\lim_{x\to c} f(x) \le \lim_{x\to c} g(x)$$

dir.

Süreklilik

g fonksiyonu L'de sürekli ise ve $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ise

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(L)$$

dir.

Özel Formüller

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, ise

$$\lim_{x\to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0$$

dır.

$P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom ve $Q(c) \neq 0$ ise

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

dir.

$f(x)$ fonksiyonu $x = c$'de sürekli ise

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

dir.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

L'Hôpital Kuralı

a noktasını içeren bir I açık aralığında $f(a) = g(a) = 0$ ise ve hem f' ve hem g' mevcut ise, ayrıca I üzerinde iken $g'(x) \neq 0$ ise sağ taraftaki limitin var olması koşuluyla

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

dir.

İNTEGRAL KURALLARI

Genel Formüller

Sıfır: $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

İntegrasyon Sırası: $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Sabitle Çarpım Kuralı: $$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \qquad (k \text{ herhangi bir sayı})$$

$$\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad (k = -1)$$

Toplamlar ve Farklar: $$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

Toplanabilirlik: $$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Max-Min Eşitsizliği: f fonksiyonunun ‘a, b] aralığı üzerindeki maksimum ve minimum değerler max f ve min f ise

$$\min f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \max f \cdot (b - a) \text{ 'dir.}$$

Baskınlık: $[a, b]$ üzerinde $f(x) \geq g(x)$ ise $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$'dir.

$[a, b]$ üzerinde $f(x) \geq 0$ ise $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$'dır.

Analizin Temel Teoremi

Kısım 1 f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ise, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde süreklidir, (a, b)'de türevlenebilirdir ve türevi $f(x)$'dir;

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Kısım 2 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığının her noktasında sürekli ve F'de f'nin $[a, b]$ aralığındaki herhangi bir ters türevi ise

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

olur.

Belirli İntegrallerde Değişken Dönüşümü

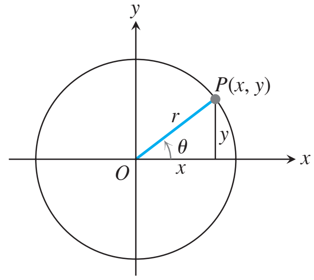
$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Kısmi İntegrasyon

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Trigonometri Formülleri

1. Tanımlar ve Temel Özdeşlikler



Sine: $\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{1}{\csc\theta}$

Cosine: $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{\sec\theta}$

Tangent: $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{\cot\theta}$

2. Özdeşlik

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta, \quad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta, \quad \csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B},$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

$$\sin\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos A, \qquad \cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = \sin A$$

$$\sin\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \cos A, \qquad \cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin A$$

$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}\cos(A - B) - \frac{1}{2}\cos(A + B)$$

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\cos(A - B) + \frac{1}{2}\cos(A + B)$$

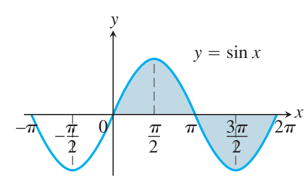
$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}\sin(A - B) + \frac{1}{2}\sin(A + B)$$

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A - B)$$

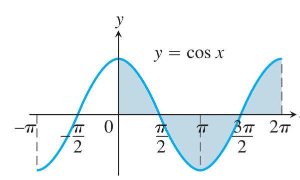
$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B)\sin\frac{1}{2}(A - B)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A - B)$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{1}{2}(A + B)\sin\frac{1}{2}(A - B)$$



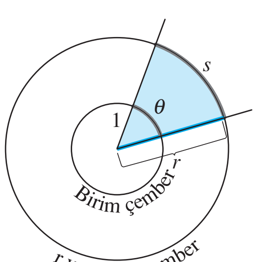
Tanım Kümesi: $(-\infty, \infty)$
Değer Kümesi: $[-1, 1]$



Tanım Kümesi: $(-\infty, \infty)$
Değer Kümesi: $[-1, 1]$

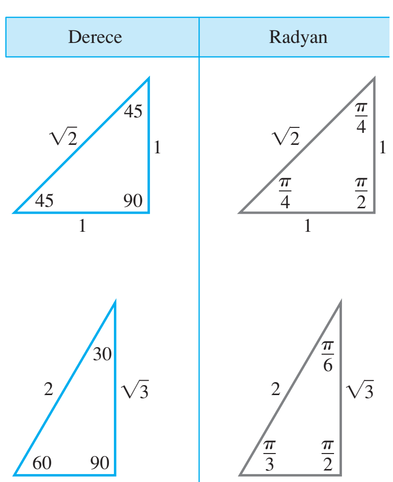
Trigonometrik Fonksiyonlar

Radyan Ölçü

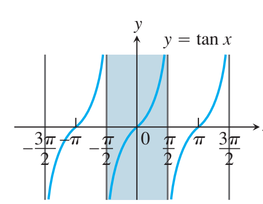


$\dfrac{s}{r} = \dfrac{\theta}{1} = \theta$ veya $\theta = \dfrac{s}{r}$,

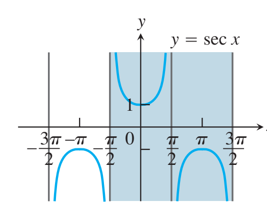
$180° = \pi$ radyan



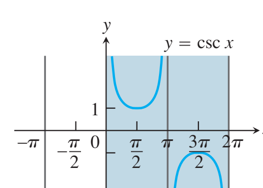
Eş iki üçgenin derece ve radyan cinsinden açıları



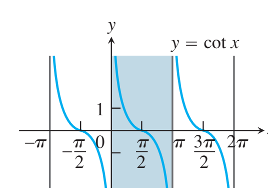
Tanım Kümesi: $\pi/2$'nin tek tamsayı katı dışındaki bütün reel sayılar
Değer Kümesi: $(-\infty, \infty)$



Tanım Kümesi: $x \neq \pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\dfrac{3\pi}{2}, \ldots$
Değer Kümesi: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Tanım Kümesi: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Değer Kümesi: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Tanım Kümesi: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Değer Kümesi: $(-\infty, \infty)$

SERİLER

Taylor Serileri

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad |x| < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \qquad -1 < x \leq 1$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \tanh^{-1} x = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| < 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| \leq 1$$

Binom Seriler

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)x^k}{k!} + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, \qquad |x| < 1,$$

olduğundan

$$k \geq 3 \text{ için } \binom{m}{1} = m, \qquad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!}, \qquad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$$

LİMİTLER

Genel Kurallar

L, M, c ve k reel sayılar ve

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to c} g(x) = M$$

ise aşağıdakiler geçerlidir.

Toplam Kuralı: $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = L + M$

Fark Kuralı: $\lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) = L - M$

Çarpım Kuralı: $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = L\cdot M$

Sabitle Çarpım Kuralı: $\lim_{x\to c}(k\cdot f(x)) = k\cdot L$

Bölüm Kuralı: $\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$

Sandöviç Teoremi

c'yi içeren bir açık aralıkta $g(x) \le f(x) \le h(x)$, $x = c$ hariç olabilir, ise ve

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$$

ise $\lim_{x\to c} f(x) = L$'dir.

Eşitsizlikler

c'yi içeren bir açık aralıkta $f(x) \le f(x)$, $x = c$ hariç olabilir, ise ve her iki limit mevcut ise

$$\lim_{x\to c} f(x) \le \lim_{x\to c} g(x)$$

dir.

Süreklilik

g fonksiyonu L'de sürekli ise ve $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ise

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(L)$$

dir.

Özel Formüller

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, ise

$$\lim_{x\to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0$$

dır.

$P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom ve $Q(c) \neq 0$ ise

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

dir.

$f(x)$ fonksiyonu $x = c$'de sürekli ise

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

dir.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

L'Hôpital Kuralı

a noktasını içeren bir I açık aralığında $f(a) = g(a) = 0$ ise ve hem f' ve hem g' mevcut ise, ayrıca I üzerinde iken $g'(x) \neq 0$ ise sağ taraftaki limitin var olması koşuluyla

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

dir.

İNTEGRAL KURALLARI

Genel Formüller

Sıfır: $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

İntegrasyon Sırası: $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Sabitle Çarpım Kuralı: $$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \qquad (k \text{ herhangi bir sayı})$$

$$\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad (k = -1)$$

Toplamlar ve Farklar: $$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

Toplanabilirlik: $$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Max-Min Eşitsizliği: f fonksiyonunun 'a, b] aralığı üzerindeki maksimum ve minimum değerler max f ve min f ise

$$\min f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \max f \cdot (b - a) \text{ 'dir.}$$

Baskınlık: $[a, b]$ üzerinde $f(x) \geq g(x)$ ise $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$'dir.

$[a, b]$ üzerinde $f(x) \geq 0$ ise $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$'dır.

Analizin Temel Teoremi

Kısım 1 f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ise, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde süreklidir, (a, b)'de türevlenebilirdir ve türevi $f(x)$'dir;

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Kısım 2 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığının her noktasında sürekli ve F'de f'nin $[a, b]$ aralığındaki herhangi bir ters türevi ise

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

olur.

Belirli İntegrallerde Değişken Dönüşümü

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Kısmi İntegrasyon

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$